

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

И Т О Г И Н А У К И • Ю Г Р О С С И И

С Е Р И Я

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

В ы п у с к 10

Ю. Е. Гликлик

ПРОИЗВОДНЫЕ В СРЕДНЕМ
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Владикавказ
2016

ББК 22.171+
УДК 519.2
Г-54

Ответственный редактор

д. ф.-м. н., профессор С. Б. КЛИМЕНТОВ

Рецензенты:

д. ф.-м. н., доцент Б. Д. ГЕЛЬМАН,

д. ф.-м. н., профессор И. В. ПАВЛОВ

Редакторы серии:

д. ф.-м. н., профессор Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК,

д. ф.-м. н., профессор А. Г. КУСРАЕВ

Гликлик Ю. Е.

Производные в среднем случайных процессов и их применения / отв. ред. С. Б. Климентов.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН, 2016.—195 с.—(Итоги науки. Юг России. Математическая монография. Вып. 10).

Монография содержит введение в теорию производных в среднем, а также единое изложение новых результатов, полученных в последние годы автором и его учениками по приложениям уравнений и включений с производными в среднем к различным научным дисциплинам и не вошедших в предыдущую монографию [43]. В Дополнении в доступной форме изложены основные понятия геометрии многообразий и стохастического анализа, используемые в книге.

Gliklikh Yu. E.

Mean derivatives of stochastic processes and their applications / ed. S. B. Klimentov.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2016.—195 p.

The monograph contains the introduction into the theory of mean derivatives and unique presentation of the new results in their applications to various subjects, that have been obtained by the author and his collaborators for the last years and have not been included into the previous monograph [43]. In the Appendix the main notions of the geometry of manifolds and stochastic analysis, used in the book, are expounded in the easily understood form.

ISBN 978-5-904695-34-7

© Южный математический институт
ВНИЦ РАН, 2016

© Ю. Е. Гликлик, 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятие производных в среднем было введено Э. Нельсоном в 60-х гг. XX века для нужд созданной им так называемой *стохастической механики* (вариант квантовой механики, см. [62–64]). В дальнейшем было показано, что уравнения с производными в среднем естественно возникают и во многих других разделах математической физики, экономики и др.

В работе [32] (см. также [43]) на основе небольшой модификации идей Нельсона дополнительно к введенным Нельсоном производным справа, слева, симметрической и т. д. нами была введена производная в среднем, названная нами *квадратичной*, которая, в принципе, сделала возможным нахождение процесса по его производным в среднем — совместно по одной из классических производных Нельсона и квадратичной (у Нельсона по умолчанию квадратичная производная всегда равнялась единичному оператору, может быть умноженному на постоянное число, и поэтому не была введена). В частности, была показана разрешимость многих уравнений с производными в среднем, возникающих в математической физике (см. примеры в [43]).

Наш коллектив уже более 10 лет ведет исследования по изучению самих производных в среднем и уравнений и включений с производными в среднем, а также их приложений. Результаты, полученные к 2011 г., вошли в монографию [43]. Однако за прошедшие с тех пор годы у нас появилось много новых результатов, в частности, опубликованных в статьях [2, 13, 14, 17, 35, 44–48, 51–55], которые было решено объединить в настоящей монографии. Я благодарен профессору А. Г. Кусраеву за предложение написать настоящую монографию, как промежуточный финиш в наших исследованиях.

Результаты, описанные в этой книге, используют специфические, не являющимися широко известными, разделы из многих математических дисциплин. Основные понятия и факты из этих разделов помещены в Дополнения (гл. 8). Сюда относятся начала теории многозначных отображений и дифференциальных включений, некоторые

факты из теории матриц и некоторые понятия теории вероятностей и стохастического анализа (в частности, из теории стохастических интегралов и дифференциальных уравнений). Важная роль в книге отводится задачам на гладких многообразиях и расслоениях, в которых широко задействована теория связностей. Введение в эту теорию также содержится в гл. 8. Дополнительно в начале гл. 5, в которой рассматриваются уравнения Ньютона — Нельсона (первые возникшие в литературе уравнения с производными в среднем) на многообразиях и расслоениях, связанные с калибровочными полями, мы даем обзор понятий, необходимых для ее понимания. Кроме того, в гл. 8 содержится материал по теории стохастических дифференциальных уравнений Ито на многообразиях (так называемые уравнения Ито в форме Белопольской — Далецкого). Подробное изложение этой теории, а также теории связностей и геометрии многообразий в нужной для формы имеется в [12].

Гл. 1 представляет собой введение в теорию производных в среднем. Мы даем необходимые определения и описываем наиболее важные факты из этой теории, необходимые для дальнейшего изложения.

Остальные главы посвящены различным задачам, в которых задействованы производные в среднем.

Гл. 2 посвящена дифференциальным уравнениям и включениям с производными в среднем, из которых наиболее сложными и необычными являются уравнения с текущими скоростями (симметрическими производными в среднем). Укажем, что именно текущие скорости являются естественными аналогами обычных скоростей детерминированных процессов. Поэтому полученные здесь результаты о существовании и свойствах решений таких уравнений важны для приложений.

Отметим, что дифференциальные включения с производными в среднем возникают в естественных задачах из приложений в точности аналогично тому, как обыкновенные дифференциальные включения возникают из обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь следует отметить два случая. Во-первых, в уравнениях с производными в среднем с управлением и обратной связью в каждой точке (t, x) расширенного фазового пространства следует рассмотреть все значения правой части при всех возможных значениях управления. Таким образом, правая часть становится многозначным отображением, а уравнение превращается во включение. В гл. 3 мы

рассматриваем включения, полученные таким образом, и рассматриваем задачу об оптимальном управлении.

Второй часто встречающийся случай возникает, если правая часть уравнения «очень плохая», не непрерывная и даже возможно не измеримая, что соответствует движению в очень сложной среде. В этом случае уравнение обычно не имеет классических решений, но имеется прием, восходящий к А. Ф. Филиппову, превращающий уравнение в дифференциальное включение с полунепрерывной сверху выпуклозначной правой частью. Таким образом, изучение дифференциальных включений с производными в среднем важно для приложений и является естественным расширением области применений этой теории.

В гл. 3 вводим понятие совершенного решения дифференциального включения с производными в среднем (по аналогии с понятием совершенного множества) и показываем, что среди совершенных решений существует решение, минимизирующее (или максимизирующее) функционал качества типа математического ожидания от значений непрерывной функции на случайном процессе. Отдельный параграф этой главы посвящен так называемым *включениям типа геометрического броуновского движения*, которые описывают процессы с положительными координатами и естественно возникают во многих задачах, в частности, в экономических моделях. Затем мы показываем, как уравнения с производными в среднем с управлением и с обратной связью сводятся к включениям, и доказываем аналог классической леммы Филиппова о том, что для любого решения включения существует управление, которое для уравнения реализует полученное решение. В частности, это верно для оптимальных решений, полученных для включений выше.

Гл. 4 посвящена уравнениям леонтьевского типа со случайными возмущениями. Термин «уравнение леонтьевского типа» предложен Г. А. Свиридюком. Он обусловлен тем обстоятельством, что при некоторых дополнительных предположениях система моделирует межотраслевую экономику «затраты–выпуск» Леонтьева с учетом запасов. Это специальный тип так называемых алгебродифференциальных уравнений, в которых в левой части при производной стоит вырожденная матрица, а перед неизвестным в правой части — невырожденная матрица, и, кроме того, в правой части имеется свободный член, зависящий только от времени. В работах А. Л. Шестакова и Г. А. Свиридюка в терминах этих уравнений бы-

ла создана и изучена модель динамического искажения сигналов в радио устройствах (при этом зависящий от времени свободный член интерпретируется как входящий сигнал). В работах Л. А. Власенко, А. Г. Руткаса, М. С. Филипповской и др. рассматриваемые системы возникают при математическом моделировании колебаний и электрических цепей.

В указанных выше задачах, естественно, надо учитывать помехи, которые обычно описываются белым шумом. Однако уравнения леонтьевского типа имеют характерную особенность — при нахождении и исследовании решений приходится использовать производные свободных членов достаточно высокого порядка. При наличии помех нужны производные белого шума, что требует использования обобщенных функций. Основная идея нашего подхода состоит в том, что белый шум заменяется на текущую скорость (симметрическую производную в среднем) винеровского процесса, физический смысл которой в широком классе задач — прямой аналог физической скорости детерминированных процессов. Альтернативный подход к этой задаче, также использующий текущие скорости винеровского процесса, разработан А. Л. Шестаковым и Г. А. Свиридюком [66].

В гл. 5 мы имеем дело с так называемым уравнением Ньютона — Нельсона, первым уравнением с производными в среднем, построенным Нельсоном в рамках его стохастической механики (вариант квантовой механики). К настоящему времени создана и достаточно хорошо изучена как обычная, так и релятивистская стохастическая механика (в релятивистском случае пришлось видоизменить определение производных в среднем (см. § 5.3.1), поскольку классические производные оказались нековариантными относительно преобразования Лоренца). Однако долгое время считалось, что стохастическая механика не совместима с теорией калибровочных полей (математическое описание калибровочных полей — связности на главных и ассоциированных расслоениях). В этой главе мы описываем эту связь, рассматриваем уравнение Ньютона — Нельсона на вещественных расслоениях над римановыми многообразиями и на комплексных расслоениях над пространствами-временами общей теории относительности (наиболее интересный с физической точки зрения случай) и в случае группы симметрий $U(1)$ устанавливаем связь с уравнением Клейна — Гордона.

В гл. 6 мы исследуем некоторые задачи вязкой гидродинамики на основе так называемого подхода Арнольда — Эбина — Мар-

сдена, т. е. с помощью изучения уравнений на бесконечномерных многообразиях соболевских диффеоморфизмов. Ранее, например, в [12, 42, 43] нами было показано, что при замене исследованных Эбингом и Марсденом в [39] уравнений типа закона Ньютона на группах диффеоморфизмов (описывающих движение идеальной несжимаемой жидкости) на специальное уравнение второго порядка в терминах производных в среднем слева, при некоторых дополнительных усилиях удастся получить описание движения вязкой жидкости. Мы рассматриваем движение жидкостей на плоском n -мерном торе. Для этого случая в [42] был разработан прием, как с использованием случайных возмущений потоков идеальных жидкостей и обращения по времени случайных процессов в этом подходе перейти к уравнениям Бюргера, Рейнольдса и Навье — Стокса. Здесь мы рассматриваем обобщение этого приема на класс анизотропных вязких жидкостей, в эйлеровом описании которых вместо оператора Лапласа задействован более общий дифференциальный оператор второго порядка, зависящий от времени. Получены описания аналогов уравнений Бюргера, Рейнольдса и Навье — Стокса.

Гл. 7 посвящена функционально-дифференциальным уравнениям с производными в среднем на гладких многообразиях, у которых запаздывающий член в правой части описан в терминах риманова параллельного переноса. Изучение таких систем мотивируется механическим смыслом параллельного переноса, открытым Радоном (см. [58]). Радон показал, что риманов параллельный перенос вдоль кривой на многообразии является естественной заменой глобальной параллельности (например, в системах, связанных с гироскопами) на плоских конфигурационных пространствах. В частности, запаздывающий член с параллельным переносом описывает естественное запаздывание на искривленных конфигурационных пространствах.

Несколько слов об обозначениях. Мы в основном имеем дело с уравнениями в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$, для которого мы используем координатное описание векторов (как столбцов) и линейных операторов (как матриц). Если X — вектор-столбец, то транспонированный вектор (строка) обозначается через X^* . Аналогичный символ $*$ используется для транспонирования матриц. Подобные обозначения используются и для некоторых объектов на гладких многообразиях.

Пространство $n \times n$ матриц обозначается через $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Символом $S(n)$ мы обозначаем пространство симметрических $n \times n$ мат-

риц — подпространство в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Символ $S_+(n)$ используется для обозначения множества положительно определенных симметрических $n \times n$ матриц, которые образуют открытое выпуклое подмножество в $S(n)$. Его замыкание — множество неотрицательно определенных матриц — обозначается через $\bar{S}_+(n)$.

Везде далее для множества B в $\mathbb{R}^n$ или в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ символ $\|B\|$ означает $\sup_{y \in B} \|y\|$. Это стандартное обозначение теории многозначных отображений, которое, конечно, не означает, что наборы множеств образуют нормированное пространство.

Для простоты мы рассматриваем уравнения, их решения и другие объекты на конечном временном интервале $t \in [0, T]$.

Соглашение Эйнштейна. Везде ниже мы будем использовать так называемое *соглашение Эйнштейна о суммировании* по одинаковому верхнему и нижнему индексу: если в некотором мономе имеется нижний и верхний индексы, обозначенные одной и той же буквой, это означает сумму по этому индексу от 1 до n , равного размерности пространства, хотя знак суммы не пишется. Поясним это на примерах. Так $B_k^j = A_{ki}^{ij}$ означает $B_k^j = \sum_{i=1}^n A_{ki}^{ij}$, а $R_{kl}^j = a_i b_k^{ijs} c_s$ означает $R_{kl}^j = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n a_i b_k^{ijs} c_s$. Использование этого соглашения упрощает запись формул и даже облегчает усвоение материала.

Для того чтобы применение соглашения Эйнштейна не приводило к путанице, каждому индексу соответствует строго определенное место — вверху или внизу. Такая регламентация всегда отражает геометрическую природу объекта, которому присваиваются эти индексы.

Хочу выразить благодарность всем фондам, поддерживающим наши исследования по производным в среднем и их приложениям.

Ю. Е. Глиблих
Сентябрь 2015 г.

ГЛАВА 1

ПРОИЗВОДНЫЕ В СРЕДНЕМ¹

1.1. Общие определения и результаты

Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ в $\mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и такой, что $\xi(t)$ является L_1 -случайной величиной для всех t . Этот процесс порождает три семейства σ -подалгебр σ -алгебры $\mathcal{F}$: «прошлое», «будущее» и «настоящее» (см. § 8.3.1). В частности, «настоящее» в момент времени t — это минимальная σ -алгебра, содержащая прообразы борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ при отображении $\xi(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Ради удобства мы обозначаем условное математическое ожидание $E(\cdot | \mathcal{N}_t^\xi)$ относительно «настоящего» $\mathcal{N}_t^\xi$ для $\xi(t)$ через E_t^ξ .

Вообще говоря, почти все выборочные траектории процесса $\xi(t)$ не дифференцируемы, так что мы не можем определить его производную обычным способом. Согласно Нельсону (см., например, [62–64]) дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. (i) *Производная в среднем справа* $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1 -случайная величина вида

$$D\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right), \quad (1.1)$$

где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и $\Delta t \rightarrow +0$ означает, что $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta t > 0$.

(ii) *Производная в среднем слева* $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1 -случайная величина

$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \right), \quad (1.2)$$

¹Исследования, вошедшие в эту главу, поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 15-01-00620.

где (как и в (i)) предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $\Delta t \rightarrow +0$ означает, что $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta t > 0$.

Если $\xi(t)$ — марковский процесс, то очевидным образом E_t^ξ может быть заменен на $E(\cdot | \mathcal{P}_t^\xi)$ в (1.1) и на $E(\cdot | \mathcal{F}_t^\xi)$ в (1.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Нельсон рассматривал в основном случай марковских процессов, в котором определения с $E_t^\xi(\cdot)$ и $E(\cdot | \mathcal{P}_t^\xi)$ или $E(\cdot | \mathcal{F}_t^\xi)$, соответственно, эквивалентны. Мы в основном рассматриваем процессы Ито диффузионного типа, которые, вообще говоря, не марковские, так что указанные определения становятся неэквивалентными. Мы выбираем определение 1.1, так как это полностью совместимо с принципом локальности в физике: производная зависит от настоящего момента времени, а не от всего прошлого или всего будущего.

Следует отметить, что, вообще говоря, $D\xi(t) \neq D_*\xi(t)$ (но если $\xi(t)$ почти наверное (п. н.) имеет гладкие выборочные траектории, то эти производные очевидно совпадают).

Из свойств условного математического ожидания (см. § 8.3.2) следует, что $D\xi(t)$ и $D_*\xi(t)$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ и борелевских векторных полей (регрессий, см. [25])

$$\begin{aligned} Y^0(t, x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E \left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \middle| \xi(t) = x \right), \\ Y_*^0(t, x) &= \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \middle| \xi(t) = x \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

на $\mathbb{R}^n$, т. е. $D\xi(t) = Y^0(t, \xi(t))$ и $D_*\xi(t) = Y_*^0(t, \xi(t))$.

Производные в смысле определения 1.1 являются частными случаями объектов, определенных следующим образом. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — L_1 -стохастические процессы в $\mathbb{R}^n$, заданные на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Введем y -производную от $x(t)$ справа формулой

$$D^y x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^y \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) \quad (1.4)$$

и y -производную от $x(t)$ слева формулой

$$D_*^y x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^y \left(\frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} \right), \quad (1.5)$$

где, конечно, пределы должны существовать в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

При вычислении производных в среднем часто бывает полезен следующий технический результат.

Лемма 1.1. Пусть $g(t)$ и $h(t)$ — L_1 -случайные процессы с непрерывными выборочными траекториями в $\mathbb{R}^n$, определенные для $t \in [0, T]$ на одном и том же вероятностном пространстве. Рассмотрим процесс $E_t^h g(t)$. Пусть $Dh(t)$ и $D_*h(t)$ существуют. Тогда

- (i) $D^h g(t)$ существует тогда и только тогда, когда $D^h E_t^h g(t)$ существует, и $D^h E_t^h g(t) = D^h g(t)$;
- (ii) $D_*^h g(t)$ существует тогда и только тогда, когда $D_*^h E_t^h g(t)$ существует, и $D_*^h E_t^h g(t) = D_*^h g(t)$.

◁ Выберем произвольную гладкую вещественную функцию $f : \mathbb{R}^n \rightarrow R$ с компактным носителем. Используя равенство

$$\begin{aligned} & (E_{t+\Delta t}^h g(t+\Delta t)) f(h(t+\Delta t)) - (E_t^h g(t)) f(h(t)) = \\ & = \{E_{t+\Delta t}^h g(t+\Delta t) - E_t^h g(t)\} f(h(t)) + \\ & + E_{t+\Delta t}^h g(t+\Delta t) \{f(h(t+\Delta t)) - f(h(t))\}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} & ED^h \{ (E_t^h g(t)) f(h(t)) \} = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E \left(E_t^h \left(\frac{(E_{t+\Delta t}^h g(t+\Delta t)) f(h(t+\Delta t)) - (E_t^h g(t)) f(h(t))}{\Delta t} \right) \right) = \\ & = E \left((D^h E_t^h g(t)) f(h(t)) \right) + E \left((E_t^h g(t)) D_*^h f(h(t)) \right), \end{aligned}$$

если предел существует (ср. [63, 64]). Напомним, что существование второго слагаемого в правой части последнего равенства следует из условий леммы. Таким образом, предел существует тогда и только тогда, когда $D^h E_t^h g(t)$ существует. С другой стороны, очевидно, что

$$\begin{aligned} & E \left(E_t^h \{ (E_{t+\Delta t}^h g(t+\Delta t)) f(h(t+\Delta t)) - (E_t^h g(t)) f(h(t)) \} \right) = \\ & = E \left(g(t+\Delta t) f(h(t+\Delta t)) - g(t) f(h(t)) \right), \end{aligned}$$

и аналогичными рассуждениями получаем

$$ED^h \{ (E_t^h g(t)) f(h(t)) \} = E \left((D^h g(t)) f(h(t)) \right) + E \left(g(t) D_*^h f(h(t)) \right)$$

тогда и только тогда, когда $D^h g(t)$ существует. Очевидно, что

$$E\left((E_t^h g(t)) D_*^h f(h(t))\right) = E\left(g(t) D_*^h f(h(t))\right),$$

и, следовательно,

$$E\left((D^h E_t^h g(t)) f(h(t))\right) = E\left((D^h g(t)) f(h(t))\right).$$

Это доказывает (i). Доказательство (ii) аналогично и основано на равенстве

$$\begin{aligned} & (E_{t+\Delta t}^h g(t+\Delta t)) f(h(t+\Delta t)) - (E_t^h g(t)) f(h(t)) = \\ & = \{(E_{t+\Delta t}^h g(t+\Delta t)) - E_t^h g(t)\} f(h(t+\Delta t)) + \\ & + E_t^h g(t) \{f(h(t+\Delta t)) - f(h(t))\}. \triangleright \end{aligned}$$

Понятия мартингала и обратного мартингала введены в § 8.3.3.

Лемма 1.2. (i) Если $x(t)$ является мартингалом относительно $\mathcal{P}_t^y$, то $D^y x(t) = 0$; (ii) если $x(t)$ — обратный мартингал относительно $\mathcal{F}_t^y$, то $D_*^y x(t) = 0$.

$\triangleleft$ (i) Так как $x(t)$ — мартингал относительно $\mathcal{P}_t^y$, то $E(x(t+\Delta t) | \mathcal{P}_t^y) = x(t)$. Отметим, что $\mathcal{N}_t^y$ есть σ -подалгебра в $\mathcal{P}_t^y$, т. е. $E_t^y(E(\cdot | \mathcal{P}_t^y)) = E_t^y(\cdot)$. Таким образом,

$$E_t^y(x(t+\Delta t) - x(t)) = E_t^y(E(x(t+\Delta t) - x(t)) | \mathcal{P}_t^y) = 0.$$

Утверждение (i) доказано. Доказательство (ii) совершенно аналогично. Здесь нужно использовать определение обратного мартингала и вложение $\mathcal{N}_t^y$ в $\mathcal{F}_t^y$. $\triangleright$

Напомним, что процесс Ито — это процесс вида

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \beta(s) ds + \int_0^t A(s) dw(s), \quad (1.6)$$

где первый интеграл в правой части — интеграл Лебега, а второй — интеграл Ито. Мы отсылаем читателя, незнакомого со стохастическим анализом, к определениям 8.13 и 8.14, где из процессов Ито выделены процессы диффузионного типа и диффузионные процессы.

Следует отметить, что процесс диффузионного типа $\xi(t)$ может не быть ни диффузионным, ни марковским процессом.

Рассмотрим процесс Ито диффузионного типа вида (1.6).

Теорема 1.1. *Для процесса Ито диффузионного типа $\xi(t)$ вида (1.6) $D\xi(t)$ существует и равно $E_t^\xi(\beta(t))$. В частности, если $\xi(t)$ — диффузионный процесс, то $D\xi(t) = a(t, \xi(t))$, где $a(t, x)$ — сноб (см. § 8.3.7).*

Утверждение теоремы следует из того, что $\int_0^t A(s) dw(s)$ является мартингалом относительно $\mathcal{P}_t^\xi$ и из леммы 1.2.

Следуя [32] (см. также [43]), мы вводим дифференциальную характеристику D_2 случайного процесса $\xi(t)$, которая определяется формулой

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^*}{\Delta t} \right), \quad (1.7)$$

где $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))$ рассматривается как столбец (вектор в $\mathbb{R}^n$), $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^*$ — как строка (транспонированный или сопряженный вектор), и предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. D_2 называется *квадратичной производной в среднем*.

Теорема 1.2. *Пусть $\xi(t)$ — процесс диффузионного типа вида (1.6). Тогда $D_2\xi(t)$ существует и $D_2\xi(t) = E_t^\xi[\alpha(t)]$ где $\alpha(t) = A(t)A^*(t)$, $A^*(t)$ — транспонированная матрица $A(t)$ и $A(t)A^*(t)$ — произведение матриц. Если $\xi(t)$ — диффузионный процесс, то $D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t))$, где α — коэффициент диффузии (см. § 8.3.7). В частности, $D_2\xi(t) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$ и, следовательно, $\xi(t)$ не случайный и имеет C^1 -гладкие траектории.*

◁ Матричное произведение вектора-столбца $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))$ справа и вектора-строки $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^*$ слева является матрицей ранга 1. Поскольку $\xi(t + \Delta t) - \xi(t) = \int_t^{t+\Delta t} a(s) ds + \int_t^{t+\Delta t} A(s) dw(s)$, то, принимая во внимание свойства интегралов Лебега и Ито, легко видеть, что $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^*$ аппроксимируется выражением $a(t)a(t)^*(\Delta t)^2 + (a(t)\Delta t)(A(t)\Delta w(t))^* + (A(t)\Delta w(t))(a(t)\Delta t)^* + A(t)A(t)^*\Delta t$. Так что, только $A(t)A(t)^*\Delta t$ является бесконечно малой того же порядка, как и Δt , тогда как остальные слагаемые являются бесконечно малыми более высокого порядка, чем Δt . Применяя формулу (1.7), получаем утверждение теоремы, поскольку

$AA^* = \alpha$ (см. выше). Если $\xi(t)$ п.н. имеет C^1 -гладкие выборочные траектории, то $A = 0$ п.н. и, таким образом, $D_2\xi(t) = 0$. С другой стороны, если $D_2\xi(t) = 0$, это означает, что в выражении $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^*$ нет бесконечно малых слагаемых того же порядка, что и Δt . Следовательно, $A = 0$. $\triangleright$

В частности, из теоремы 1.2 следует, что D_2 принимает значение в симметрических неотрицательно определенных матрицах.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Из теорем 1.1 и 1.2 понятно, что даже если производные в среднем берутся от процесса диффузионного типа, то из-за того, что мы задействуем условное математическое ожидание относительно «настоящего», регрессии производных в среднем оказываются векторными и тензорными полями, зависящими от t, x . Поэтому, несмотря на то, что в гл. 2 и 3 в правых частях уравнений и включений стоят векторные и тензорные поля, решение может быть процессом диффузионного типа (или из даже более широкого класса процессов) и не обязательно диффузионным процессом (как ожидалось).

Имеется эквивалентное (1.7) определение D_2 , которое иногда удобнее:

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{(\xi(t + \Delta t) - \xi(t)) \otimes (\xi(t + \Delta t) - \xi(t))}{\Delta t} \right), \quad (1.8)$$

где $\otimes$ — тензорное произведение.

В дальнейшем мы будем часто иметь дело с частным случаем процессов (1.6) с $A = \sigma I$, где $\sigma > 0$ — вещественная константа, I — единичный оператор; т. е. с процессами диффузионного типа в $\mathbb{R}^n$ вида

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \beta(s) ds + \sigma w(t). \quad (1.9)$$

Подчеркнем, что теоремы 1.1 и 1.2 выполняются для процессов (1.9).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ называется *симметрической производной в среднем*. Производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ называется *антисимметрической производной в среднем*.

Рассмотрим векторные поля $v^\xi(t, x) = \frac{1}{2}(Y^0(t, x) + Y_*^0(t, x))$ и $u^\xi(t, x) = \frac{1}{2}(Y^0(t, x) - Y_*^0(t, x))$, где $Y^0(t, x)$ и $Y_*^0(t, x)$ — регрессии из формулы (1.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. $v^\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t)) = D_S \xi(t)$ называется *текущей скоростью процесса* $\xi(t)$; $u^\xi(t) = u^\xi(t, \xi(t)) = D_A \xi(t)$ называется *осмотической скоростью процесса* $\xi(t)$.

Текущая скорость является естественным аналогом обычной (физической) скорости детерминированных процессов. Осмотическая скорость в каком-то смысле измеряет «как быстро нарастает стохастичность». Эти свойства вытекают из формул для текущей и осмотической скоростей, нахождению которых посвящен § 1.2.

Пусть $Z(t, x)$ — C^2 -гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^n$ и $\xi(t)$ — стохастический процесс в $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. L_1 -пределы вида

$$DZ(t, \xi(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{Z(t + \Delta t, \xi(t + \Delta t)) - Z(t, \xi(t))}{\Delta t} \right), \quad (1.10)$$

$$D_*Z(t, \xi(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{Z(t, \xi(t)) - Z(t - \Delta t, \xi(t - \Delta t))}{\Delta t} \right) \quad (1.11)$$

называются соответственно *производными в среднем справа и слева* от Z вдоль $\xi(\cdot)$ в момент времени t .

Как и в определении 1.1, если $\xi(t)$ — марковский процесс, то $E_t^\xi(\cdot)$ можно заменить на $E(\cdot | P_t^\xi)$ в (1.10) и на $E(\cdot | F_t^\xi)$ в (1.11) (см. замечание 1.1).

Конечно, $DZ(t, \xi(t))$ и $D_*Z(t, \xi(t))$ могут быть представлены как суперпозиции $\xi(t)$ с некоторыми борелевскими векторными полями (регрессиями; ср. (1.3)). Эти векторные поля (если это не приведет к путанице) будем также обозначать через DZ и D_*Z соответственно.

Лемма 1.3. Для процесса (1.9) в $\mathbb{R}^n$ имеют место следующие формулы:

$$DZ = \frac{\partial}{\partial t} Z + (Y^0 \cdot \nabla) Z + \frac{\sigma^2}{2} \nabla^2 Z, \quad (1.12)$$

$$D_*Z = \frac{\partial}{\partial t} Z + (Y_*^0 \cdot \nabla) Z - \frac{\sigma^2}{2} \nabla^2 Z, \quad (1.13)$$

где $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$, ∇^2 — лапласиан, точка обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, и векторные поля $Y^0(t, x)$ и $Y_*^0(t, x)$ введены в (1.3).

◁ Векторное поле $Z(t, x)$ можно рассматривать как отображение $Z : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и применить формулы Ито (8.10) и (8.12).

Формула (1.12) следует немедленно из (8.10). Действительно, при применении формулы (1.1) к (8.10) с Z вместо f , мы видим, что последнее слагаемое справа дает нуль, так как интеграл Ито является мартингалом относительно $\mathcal{P}_t^\xi$ (см. лемму 1.2 и теорему 1.1). Очевидно, что $E_t^\xi(Z'(\beta)) = ((Y^0 \cdot \nabla)Z)(\xi(t))$ и, поскольку $A = \sigma I$, $\frac{1}{2}\text{tr}Z''(A, A) = \frac{\sigma^2}{2}\nabla^2 Z$.

Нетрудно видеть, что обратную формулу Ито (8.12) можно также применить к $Z(t, \xi(t))$, а также, что

$$Y_*^0(t, \xi(t)) = D_*\xi(t) = E_t^\xi(\beta(t)) - 2u^\xi(t, \xi(t))$$

и что

$$-2u^\xi(t, \xi(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{w(t) - w(t - \Delta t)}{\Delta t} \right)$$

существует по лемме 1.6. Далее,

$$E_t^\xi(Z'(\beta(t))) + \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\int_{t-\Delta t}^t Z'_* dw}{\Delta t} \right) = ((Y_*^0 \cdot \nabla)Z)(\xi(t)). \quad (1.14)$$

Таким образом, (1.13) следует из (8.12) и (1.14), так как выражение для $\frac{1}{2}\text{tr}Z''$ такое же, как в доказательстве формулы (1.12). $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Легко видеть, что для процесса (1.6) в аналогах формул (1.12) и (1.13) вместо $\frac{\sigma^2}{2}\nabla^2 Z$ будет стоять $\frac{1}{2}\text{tr}Z''(A, A)$, а все остальные слагаемые будут такими же, как в (1.12) и (1.13).

1.2. Формулы для текущей и осмотической скоростей

Рассмотрим диффузионный процесс вида

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t A(s, \xi(s)) dw(s). \quad (1.15)$$

Пусть поле линейных операторов (матриц) $A(t, x)$ гладко и невырождено. Обозначим через $\alpha(t, x) = (a^{ij}(t, x))$ поле $A(t, x)A^*(t, x)$ (коэффициент диффузии). Напомним, что это поле состоит из симметрических матриц и является $(2, 0)$ -тензорным полем. Так как матрицы $A(t, x)$ невырождены, то $\alpha(t, x)$ положительно определены.

Так как все эти матрицы невырождены и гладки, то существует гладкое поле симметрических положительно определенных обратных матриц $(\alpha_{ij}(t, x))$ $((0, 2)$ -тензорное поле). Это поле можно рассматривать как новую зависящую от времени риманову метрику $\alpha_t(\cdot, \cdot) = \alpha_{ij}(t, x) dx^i \otimes dx^j$ на $\mathbb{R}^n$. Отметим, что $\alpha_t(\cdot, \cdot)$ можно считать сужением на поверхность уровня $t = \text{const}$ римановой метрики $\bar{\alpha}(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ с матрицей метрического тензора в точке $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ вида

$$(\bar{\alpha}_{kl}(t, x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\alpha_{ij}(t, x)) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что определители матриц $(\bar{\alpha}_{kl}(t, x))$ и $(\alpha_{ij}(t, x))$ совпадают. Форма объема метрики $\alpha_t(\cdot, \cdot)$ на поверхности уровня $t = \text{const}$ имеет вид

$$\Lambda_{\alpha_t} = \sqrt{\det(\alpha_{ij}(t, x))} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

и, значит, форма объема метрики $\bar{\alpha}(\cdot, \cdot)$ — вид

$$\Lambda_{\bar{\alpha}} = \sqrt{\det(\alpha_{ij}(t, x))} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = dt \wedge \Lambda_{\alpha_t}.$$

Обозначим символом $\rho^\xi(t, x)$ вероятностную плотность распределения случайного элемента $\xi(t)$ относительно формы объема Λ_{α_t} на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, т. е. для любой непрерывной ограниченной функции $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^T E(f(t, \xi(t))) dt &= \int_0^T \left(\int_{\Omega} f(t, \xi(t)) d\mathbf{P} \right) dt = \\ &= \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) \rho^\xi(t, x) \Lambda_{\alpha_t} \right) dt. \end{aligned}$$

Теорема 1.3 [36, 45]. Пусть $\xi(t)$ — диффузионный процесс (1.15). Тогда в предположении, что ρ^ξ нигде не равно нулю

$$u^\xi(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial x^j} (\alpha^{ij}(t, x) \rho^\xi(t, x))}{\rho^\xi(t, x)} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (1.16)$$

где (α^{ij}) — матрица оператора AA^* .

◁ Выберем произвольную гладкую функцию $f(t, x)$ с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$. Отметим, что $f(t, \xi(t))$ является $\mathcal{N}_t^\xi$ -измеримой. Следовательно,

$$\begin{aligned} E\left(f(\xi(t))E_t^\xi\left(\int_{t-\Delta t}^t A(t, \xi(t)) dw(t)\right)\right) = \\ = E\left(f(\xi(t))\int_{t-\Delta t}^t A(t, \xi(t)) dw(t)\right). \end{aligned}$$

Поскольку $f(\xi(t - \Delta t))$ и $\int_{t-\Delta t}^t A(t, \xi(t)) dw(t)$ независимы и

$$E\int_{t-\Delta t}^t A(t, \xi(t)) dw(t) = 0,$$

то получим

$$\begin{aligned} E(f(\xi(t)))\left(\int_{t-\Delta t}^t A(t, \xi(t)) dw(t)\right) = \\ = E\left((f(\xi(t)) - f(\xi(t - \Delta t)))\left(\int_{t-\Delta t}^t A(t, \xi(t)) dw(t)\right)\right). \end{aligned}$$

По формуле Ито

$$\begin{aligned} f(\xi(t)) - f(\xi(t - \Delta t)) = \int_{t-\Delta t}^t (df \cdot a(s, \xi(s))) ds + \\ + \frac{1}{2} \int_{t-\Delta t}^t \text{tr } f''(\xi(s)) ds + \int_{t-\Delta t}^t (df \cdot A(s, \xi(s))) dw(s) \end{aligned}$$

(через $\cdot$ мы обозначаем спаривание 1-форм и векторов).

Таким образом,

$$\begin{aligned}
& E \left(f(\xi(t)) \int_{t-\Delta t}^t A(t, \xi(t)) dw(t) \right) \cong \\
& \cong E \left(\int_{t-\Delta t}^t (df \cdot a(s, \xi(s))) A(s, \xi(s)) ds dw(s) \right) + \\
& + \frac{1}{2} \int_{t-\Delta t}^t \text{tr} f''(\xi(s)) (A(s, \xi(s)), A(s, \xi(s))) ds dw(s) + \\
& + \int_{t-\Delta t}^t (df \cdot A(s, \xi(s))) A(s, \xi(s)) ds.
\end{aligned}$$

Первые два интеграла в правой части равны нулю. Вычисления в координатах дают равенство $(df \cdot A)A = df \cdot (AA^*)$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T E(f(t, \xi(t)) u^\xi(t, \xi(t))) dt = \\
& = -\frac{1}{2} \int_0^T E \left(f(t, \xi(t)) \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left(\frac{\int_{t-\Delta t}^t A(s, \xi(s)) dw(s)}{\Delta t} \right) \right) dt = \\
& = -\frac{1}{2} \int_0^T E(df \cdot AA^*) dt = -\frac{1}{2} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} df \cdot AA^* \cdot \rho^\xi \Lambda_{\alpha_t} \right) dt = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot d(AA^* \cdot \rho^\xi) \Lambda_{\alpha_t} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{d(AA^* \cdot \rho^\xi)}{\rho^\xi} \rho^\xi \Lambda_{\alpha_t} \right) dt = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^T E \left(f \frac{d(AA^* \cdot \rho^\xi)}{\rho^\xi} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^T E \left(f(t, \xi(t)) \frac{\partial}{\partial x^j} (\alpha^{ij} \rho^\xi) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) dt.
\end{aligned}$$

Поскольку это выполняется для произвольной функции f как выше, это означает, что

$$u^\xi = \frac{1}{2} \frac{d(AA^* \cdot \rho^\xi)}{\rho^\xi} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial x^j}(\alpha^{ij} \rho^\xi)}{\rho^\xi} \frac{\partial}{\partial x^i} \triangleright$$

Лемма 1.4. Для $v^\xi(t, x)$ и $\rho^\xi(t, x)$ процесса (1.15) выполняется равенство типа уравнения непрерывности следующего вида

$$\frac{\partial \rho^\xi(t, x)}{\partial t} = -\text{Div}_t (v^\xi(t, x) \rho^\xi(t, x)), \quad (1.17)$$

где Div_t обозначает дивергенцию относительно римановой метрики $\alpha_t(\cdot, \cdot)$ на поверхности уровня $t = \text{const}$.

$\triangleleft$ Обозначим символом Λ_E форму объема $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Таким образом, $\Lambda_{\alpha_t} = \sqrt{\det(\alpha_{ij})} \Lambda_E$.

Напомним, что $\text{Div}_t(\rho^\xi v^\xi) = d((\rho^\xi v^\xi) \rfloor \Lambda_{\alpha_t})$, где $\rfloor$ — внутреннее произведение вектора $(\rho^\xi v^\xi)$ и n -формы Λ_{α_t} , а внешний дифференциал d рассматривается на поверхности уровня $t = \text{const}$, т. е. содержит дифференцирование только по пространственным координатам x^i . Тогда $(\rho^\xi v^\xi) \rfloor \Lambda_{\alpha_t} = \sqrt{\det(\alpha_{ij})} \sum_{i=1}^n (\rho^\xi v^\xi)^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n$ и, таким образом,

$$\text{Div}_t(\rho^\xi v^\xi) = \frac{(\rho^\xi v^\xi)^i}{\sqrt{\det(\alpha_{ij})}} \frac{\partial \sqrt{\det(\alpha_{ij})}}{\partial x^i} + \frac{\partial (\rho^\xi v^\xi)^i}{\partial x^i}. \quad (1.18)$$

Зафиксируем гладкую функцию $f(t, x)$ с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$ и два числа $s < t$. Символом df мы обозначаем дифференциал относительно пространственных координат x^i : $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. Отметим, что вычисления в координатах дают

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} (df \cdot (\rho^\xi v^\xi(t, \xi(\tau)))) \Lambda_{\alpha_t} \right) dt = \\ &= \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} (df \cdot (\rho^\xi v^\xi(t, \xi(t))) \sqrt{\det(\alpha_{ij})}) \Lambda_E \right) dt = \\ &= - \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(t, x) \left[\sqrt{\det(\alpha_{ij})} \frac{\partial (\rho^\xi v^\xi)^i}{\partial x^i} + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\rho^\xi v^\xi)^i \frac{\partial \sqrt{\det(\alpha_{ij})}}{\partial x^i} \Big] \Big) \Lambda_E \Big) dt = - \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(t, x) \left[\frac{\partial (\rho^\xi v^\xi)^i}{\partial x^i} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \frac{(\rho^\xi v^\xi)^i}{\sqrt{\det(\alpha_{ij})}} \frac{\partial \sqrt{\det(\alpha_{ij})}}{\partial x^i} \right] \sqrt{\det(\alpha_{ij})} \right) \Lambda_E \right) dt = \\
& = - \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(t, x) \left[\frac{\partial (\rho^\xi v^\xi)^i}{\partial x^i} + \frac{(\rho^\xi v^\xi)^i}{\sqrt{\det(\alpha_{ij})}} \frac{\partial \sqrt{\det(\alpha_{ij})}}{\partial x^i} \right] \right) \Lambda_{\alpha_t} \right) dt = \\
& \quad = - \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(\tau, x) \operatorname{Div}_t(\rho^\xi v^\xi) \right) \Lambda_{\alpha_t} \right) dt.
\end{aligned}$$

Так же, как и в доказательстве леммы 1.3, из формулы Ито нетрудно вывести, что

$$\begin{aligned}
& E(f(t, \xi(t)) - f(s, \xi(s))) = \\
& = E \left(\int_s^t \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau + \int_s^t df \cdot Y^0(\tau, \xi(\tau)) d\tau + \frac{1}{2} \int_s^t \operatorname{tr} f''(A, A) d\tau \right),
\end{aligned}$$

а из обратной формулы Ито, что

$$\begin{aligned}
& E(f(t, \xi(t)) - f(s, \xi(s))) = \\
& = E \left(\int_s^t \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau + \int_s^t df \cdot Y_*^0(\tau, \xi(\tau)) d\tau - \frac{1}{2} \int_s^t \operatorname{tr} f''(A, A) d\tau \right).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$E(f(t, \xi(t)) - f(s, \xi(s))) = E \left(\int_s^t \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau + \int_s^t df \cdot v^\xi(\tau, \xi(\tau)) d\tau \right).$$

Поскольку $E(f(t, \xi(t))) - E(f(s, \xi(s))) = E(f(t, \xi(t)) - f(s, \xi(s)))$, то для приращения $E(f(t, \xi(t)))$ на малом отрезке мы получаем формулу

$$E(f(t, \xi(t))) dt = E \left(\frac{\partial f}{\partial t} + df \cdot v^\xi(t, \xi(t)) \right) dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\int_0^T E(f(t, \xi(t))) dt &= \int_0^T E\left(\frac{\partial f}{\partial t} + df \cdot v^\xi(t, \xi(t))\right) dt = \\
&= \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \rho^\xi + [df \cdot (\rho^\xi v^\xi(t, \xi(t)))] \right) \Lambda_{\alpha_t} \right) dt = \\
&= \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} (f(t, x) \rho^\xi) \Lambda_{\alpha_t} \right) dt - \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(t, x) \frac{\partial \rho^\xi}{\partial t} \right) \Lambda_{\alpha_t} \right) dt - \\
&\quad - \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f(t, x) \operatorname{Div}_t (\rho^\xi v^\xi)) \Lambda_{\alpha_t} \right) dt = \\
&= \int_0^T E(f(t, \xi(t))) dt - \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(t, x) \frac{\partial \rho^\xi}{\partial t} \right) \Lambda_{\alpha_t} \right) dt - \\
&\quad - \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f(t, x) \operatorname{Div}_t (\rho^\xi v^\xi)) \Lambda_{\alpha_t} \right) dt.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(t, x) \frac{\partial \rho^\xi}{\partial t} \right) \Lambda_{\alpha_t} \right) dt + \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f(t, x) \operatorname{Div}_t (\rho^\xi v^\xi)) \Lambda_{\alpha_t} \right) dt = 0.$$

Поскольку это выполняется для любой функции $f(t, x)$ как выше, то отсюда следует, что $\frac{\partial \rho^\xi}{\partial t} = -\operatorname{Div}_t(\rho^\xi v^\xi)$. $\triangleright$

Лемма 1.5. *Имеет место формула*

$$\operatorname{Div}_t(\rho^\xi v^\xi) = \alpha_t(v^\xi, \operatorname{Grad}_t \rho^\xi) + \rho^\xi \operatorname{Div}_t v^\xi,$$

где Grad_t обозначает градиент относительно римановой метрики $\alpha_t(\cdot, \cdot)$ на поверхности уровня $t = \text{const}$.

$\triangleleft$ В точности аналогично выводу формулы (1.18) получаем

$$\operatorname{Div}_t(v^\xi) = \frac{(v^\xi)^i}{\sqrt{\det(\alpha_{ij})}} \frac{\partial \sqrt{\det(\alpha_{ij})}}{\partial x^i} + \frac{\partial (v^\xi)^i}{\partial x^i}. \quad (1.19)$$

Напомним, что $\frac{\partial(\rho^\xi v^\xi)^i}{\partial x^i} = \rho^\xi \frac{\partial(v^\xi)^i}{\partial x^i} + (v^\xi)^i \frac{\partial \rho^\xi}{\partial x^i}$. Тогда из формулы (1.18) с использованием формулы (1.19) выводим, что

$$\text{Div}_t(\rho^\xi v^\xi) = \rho^\xi \text{Div}_t v^\xi + (v^\xi)^i \frac{\partial \rho^\xi}{\partial x^i},$$

где $(v^\xi)^i \frac{\partial \rho^\xi}{\partial x^i}$ — производная плотности ρ^ξ по направлению векторного поля v^ξ на указанной поверхности уровня. Но по определению градиента Grad_t последняя производная равна $\alpha_t(v^\xi, \text{Grad}_t \rho^\xi)$. $\triangleright$

Пусть A постоянно и не вырождено. Тогда обратная матрица $(\alpha_{ij}) = (\alpha^{ij})^{-1}$ корректно определена и может рассматриваться как матрица нового скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$. В этом случае имеет место

Следствие 1.1. *Если A постоянно и невырождено, то*

$$u^\xi(t, x) = \frac{1}{2} \text{Grad} \ln \rho^\xi(t, x) = \text{Grad} \ln \sqrt{\rho^\xi(t, x)}, \quad (1.20)$$

где Grad обозначает градиент относительно скалярного произведения с матрицей (α_{ij}) .

Действительно, если A постоянно, то (α_{ij}) также постоянно, и формула (1.16) принимает вид

$$\begin{aligned} u^\xi(t, x) &= \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial q^j}(\alpha^{ij} \rho^\xi(t, x))}{\rho^\xi(t, x)} = \frac{1}{2} \alpha^{ij} \frac{\frac{\partial}{\partial q^j}(\rho^\xi(t, x))}{\rho^\xi(t, x)} = \\ &= \frac{1}{2} \text{Grad} \ln \rho^\xi(t, x) = \text{Grad} \ln \sqrt{\rho^\xi(t, x)}. \end{aligned}$$

Для процесса (1.9) из двух доказанных выше теорем можно получить полезные следствия. Отметим, что в этом случае плотность ρ берется относительно меры Лебега λ на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$.

Лемма 1.6. *Для процесса (1.9) в $\mathbb{R}^n$ векторное поле $u^\xi(t, x)$ представимо в виде*

$$u^\xi(t, x) = \frac{1}{2} \sigma^2 \text{grad} \ln \rho^\xi(t, x). \quad (1.21)$$

Лемма 1.7. *Для процесса (1.9) в $\mathbb{R}^n$ векторное поле $v^\xi(t, x)$ и плотность $\rho^\xi(t, x)$ удовлетворяют уравнению непрерывности*

$$\frac{\partial \rho^\xi(t, x)}{\partial t} = -\text{div}(\rho^\xi v^\xi). \quad (1.22)$$

1.3. Вычисление производных в среднем для винеровского процесса

Для винеровского процесса $w(t)$ в $\mathbb{R}^n$ из Леммы 1.2 (i) следует, что $Dw(t) = 0$, $t \in [0, l)$, поскольку $w(t)$ — мартингал.

Лемма 1.8. Для $t \in (0, T]$ имеет место равенство $D_*w(t) = \frac{w(t)}{t}$.

◁ В этом случае из определения осмотической скорости $u^w(t, w(t))$ следует, что $D_*w(t) = -2u^w(t, w(t))$. Напомним, что плотность $\rho^w(t, x)$ задается формулой (8.6): $\rho^w(t, x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$. Таким образом, согласно формуле (1.21) имеем $u^w(t, x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{t}$, откуда $D_*w(t) = \frac{w(t)}{t}$. ▷

Очевидным образом процесс $\frac{w(t)}{t}$ не существует при $t = 0$. Однако, имеет место следующее утверждение.

Лемма 1.9. Интеграл $\int_0^t \frac{w(s)}{s} ds$ существует п. н. для всех $t \in [0, T]$.

◁ Стандартными вычислениями с использованием плотности $\rho^w(t, x)$ легко получить оценку $E \int_0^t \left\| \frac{w(s)}{s} \right\| ds < C \cdot \sqrt{t}$, где константа $C > 0$ зависит только от размерности n . Теперь результат следует из классического неравенства Чебышева. ▷

Следствие 1.2. $D_S w(t) = \frac{w(t)}{2t}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Г. А. Свиридюк обратил мое внимание на следующее обстоятельство. Так как для винеровского процесса $E(w(t)^2) = t$, то на феноменологическом уровне рассуждений можно сказать, что средний пробег частицы винеровского процесса за время t равен $\sqrt{t}$ и, следовательно, у белого шума $\dot{w}(t)$ он равен $\frac{1}{2\sqrt{t}}$. Но для текущей скорости $D_S w(t) = \frac{w(t)}{2t}$ аналогичные феноменологические рассуждения дают тот же результат для среднего пробега частицы: $\frac{1}{2\sqrt{t}}$. Это в каком-то смысле естественное соотношение между производной $\dot{w}(t)$ винеровского процесса (существующей только в смысле обобщенных функций) и его текущей скоростью, которая, как было сказано выше, является естественным аналогом обычной физической скорости.

Обратимся к вычислению производных в среднем высших порядков от $w(t)$. Принимая во внимание систему обозначений из [12, 43], мы ищем k -е производные как D^w , D_*^w или D_S^w (см. (1.4) и (1.5))

от $(k-1)$ -х производных. Эти обозначения подчеркивают, что мы всегда используем σ -алгебру «настоящее» процесса $w(t)$.

Лемма 1.10 [12, 43]. (i) $D^w\left(\frac{w(t)}{t}\right) = -\frac{w(t)}{t^2}$, $t \in (0, l)$;

(ii) $D_*^w\left(\frac{w(t)}{t}\right) = 0$, $t \in (0, T]$;

(iii) $D_S^w\left(\frac{w(t)}{t}\right) = -\frac{w(t)}{2t^2}$, $t \in (0, T]$.

$\triangleleft$ Действительно,

$$D^w\left(\frac{w(t)}{t}\right) = \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{t}\right) w(t) + \frac{1}{t} Dw(t) = -\frac{w(t)}{t^2}$$

и

$$D_*^w\left(\frac{w(t)}{t}\right) = \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{t}\right) w(t) + \frac{1}{t} D_* w(t) = -\frac{w(t)}{t^2} + \frac{w(t)}{t^2} = 0.$$

Утверждение (iii) следует из последних двух формул. $\triangleright$

Лемма 1.11. (i) $D^w\left(\frac{w(t)}{t^k}\right) = -k \frac{w(t)}{t^{k+1}}$;

(ii) $D_*^w\left(\frac{w(t)}{t^k}\right) = -(k-1) \frac{w(t)}{t^{k+1}}$;

(iii) $D_S^w\left(\frac{w(t)}{t^k}\right) = -\frac{2k-1}{2} \frac{w(t)}{t^{k+1}}$.

$$\begin{aligned} \triangleleft \text{ (i)} \quad D^w\left(\frac{w(t)}{t^k}\right) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{t^k} w(t) + \frac{1}{t^k} Dw(t) = \\ &= -k \frac{w(t)}{t^{k+1}} + 0 = -k \frac{w(t)}{t^{k+1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad D_*^w\left(\frac{w(t)}{t^k}\right) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{t^k} w(t) + \frac{1}{t^k} D_* w(t) = \\ &= -k \frac{w(t)}{t^{k+1}} + \frac{1}{t^k} \frac{w(t)}{t} = -(k-1) \frac{w(t)}{t^{k+1}}. \end{aligned}$$

(iii) Из последних двух формул мы получаем, что

$$D_S^w\left(\frac{w(t)}{t^k}\right) = -\frac{2k-1}{2} \frac{w(t)}{t^{k+1}}. \triangleright$$

Лемма 1.12. Для целого числа $k \geq 2$

$$D_S^k w(t) = (-1)^{k-1} \frac{\prod_{i=1}^{k-1} (2i-1)}{2^k} \frac{w(t)}{t^k}.$$

Эта формула доказывается по индукции, начиная с утверждений следствия 1.2, леммы 1.10 (iii) и леммы 1.11 (iii).

Пусть $P(t)$ — непрерывная по t неслучайная $n \times n$ матричная функция, а $w(t)$ — n -мерный винеровский процесс. Рассмотрим интеграл Ито $\int_0^t P(s) dw(s)$. Ниже нам понадобится формула симметрической производной в среднем от этого интеграла.

Теорема 1.4. Для $t > 0$ имеет место формула

$$D_S^w \int_0^t P(s) dw(s) = P(t) \frac{w(t)}{2t}.$$

◁ Действительно, поскольку $\int_0^t P(s) dw(s)$ — мартингал относительно «прошлого» винеровского процесса, то $D^w \int_0^t P(s) dw(s) = 0$ (см. лемму 1.2). Чтобы вычислить производную в среднем слева, достаточно рассмотреть слагаемое из интегральной суммы, задающей интеграл, вида $P(t - \Delta t)(w(t) - w(t - \Delta t))$. По определению производной в среднем слева получаем

$$D_* \int_0^t P(s) dw(s) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^w \frac{P(t - \Delta t)(w(t) - w(t - \Delta t))}{\Delta t}.$$

Поскольку функция $P(t)$ неслучайна, то ее можно вынести за знак условного математического ожидания, а поскольку она непрерывна, то $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(t - \Delta t) = P(t)$; $D_* \int_0^t P(s) dw(s) = P(t) D_* w(t)$. Но по лемме 1.8 $D_* w(t) = \frac{w(t)}{t}$. Следовательно, $D_S \int_0^t P(s) dw(s) = P(t) \frac{w(t)}{2t}$. ▷

Пусть $\xi(t)$ — процесс диффузионного типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Процесс $w_*^\xi(t) = -\int_0^t D_*^\xi w(s) + w(t)$ называется *обратным винеровским процессом* относительно $\xi(t)$.

Очевидно, что $w_*^\xi(t)$ — обратный мартингал относительно $\mathcal{F}_t^\xi$. Подчеркнем, что $w_*^\xi(t)$ зависит от заданного процесса $\xi(t)$. Из лемм 1.8 и 1.9 следует, что $w_*^\xi(t) = -\int_0^t \frac{w(s)}{s} ds + w(t)$ и этот процесс корректно определен. Чтобы вычислить $w_*^\xi(t)$ для произвольного процесса $\xi(t)$, надо знать $D_*^\xi w(t)$. Вычисление $D_*^\xi w(t)$ для процессов с единичным коэффициентом диффузии приведено в следующем параграфе (формула (1.30)). Отметим, что удобно использо-

вать $w_*^\xi(t)$ для представления $\xi(t)$ через этот обратный мартингал и, таким образом, для вычисления обратных производных.

Из лемм 1.8 и 1.10 очевидным образом следует, что $D_*^w w_*^w(t) = 0$ и $D^w w_*^w(t) = -D_* w(t)$. Отметим, что эти равенства не выполняются, если D_*^w и D^w заменить на D_* и D соответственно. Например, в [57] показано, что $w_*^w(t)$ — винеровский процесс относительно его собственного «прошлого».

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Мы отсылаем читателя к книгам Э. Нельсона [63, 64], где описан другой подход к вычислению производных в среднем.

1.4. Вычисление производных в среднем для процессов диффузионного типа

Этот раздел посвящен вычислению производных в среднем для процессов Ито диффузионного типа вида (1.9). Чтобы сделать это, мы сначала опишем метод для вычисления условных математических ожиданий при изменении вероятностной меры.

На некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ рассмотрим новую вероятностную меру μ . Пусть μ абсолютно непрерывна относительно P с плотностью θ , и пусть $\mathcal{B}$ — σ -подалгебра $\mathcal{F}$ и ψ — измеримое отображение из $(\Omega, \mathcal{F})$ в $\mathbb{R}^n$ с борелевской σ -алгеброй. Обозначим через $E^0(\psi | \mathcal{B})$ условное математическое ожидание для ψ относительно $\mathcal{B}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, а через $E'(\psi | \mathcal{B})$ — то же самое ожидание на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Зная $E^0(\psi | \mathcal{B})$, можно вычислить $E'(\psi | \mathcal{B})$ следующим образом. Для любой функции λ , измеримой относительно $\mathcal{B}$, имеем

$$\begin{aligned} E'(\lambda\psi) &= E'(\lambda E'(\psi | \mathcal{B})) = E^0(\lambda E'(\psi | \mathcal{B})\theta) = \\ &= E^0(\lambda E'(\psi | \mathcal{B})E^0(\theta | \mathcal{B})), \end{aligned}$$

и с другой стороны

$$E'(\lambda\psi) = E^0(\lambda\psi\theta) = E^0(\lambda E^0(\psi\theta | \mathcal{B})).$$

Таким образом,

$$E'(\psi | \mathcal{B}) = E^0(\theta | \mathcal{B})^{-1} E^0(\psi\theta | \mathcal{B}). \quad (1.23)$$

Рассмотрим процесс диффузионного типа (1.9) и для простоты положим $\sigma = 1$. Для пары $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$, где $\tilde{\Omega} = C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$ — простран-

ство непрерывных кривых, а $\widetilde{\mathcal{F}}$ — σ -алгебра цилиндрических множеств на $\widetilde{\Omega}$, рассмотрим два вероятностных пространства $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \nu)$ и $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \mu)$, где ν является мерой Винера, а мера μ соответствует процессу $\xi(t)$. Обозначим координатный процесс на $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}})$ через $\zeta(t)$. Напомним, что $\zeta(t)$, рассматриваемый как процесс на $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \nu)$, является винеровским процессом, и обозначим его через $W(t)$. Процесс $\zeta(t)$, рассматриваемый на $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \mu)$, является процессом $\xi(t)$.

Хорошо известно, что, если $\xi(t)$ удовлетворяет условию

$$P\left(\int_0^T \beta(s)^2 ds < \infty\right) = 1, \quad (1.24)$$

то μ абсолютно непрерывна относительно ν . При некоторых дополнительных условиях можно показать, что плотность μ относительно ν имеет вид (см., например, [21])

$$\theta(T) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T \beta(s)^2 ds + \int_0^T (\beta(s) \cdot dW(s))\right) \quad (1.25)$$

(упомянутые выше условия означают, что $\theta(T)$ — плотность вероятности) и, таким образом, μ и ν эквивалентны. Ниже в этом разделе мы предполагаем, что (1.24) и упомянутые условия выполнены.

Определим $\theta(t)$ аналогично (1.25) с заменой T на t . Тогда, используя формулу Ито, легко показать, что

$$\theta(T) = 1 + \int_0^T \theta(s)(\beta(s) \cdot dW(s)) \quad (1.26)$$

(см. детали, например, в [21]).

Напомним, что по теореме 1.1 $D\xi(t) = E_t^\xi(\beta(t))$. Для вычисления $D_*\xi(t)$ нам понадобится несколько технических утверждений.

Обозначим (условное) математическое ожидание на $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \nu)$ через E^0 , а на $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \mu)$ — через E' .

Лемма 1.13.

$$E_t^{0\zeta}(\theta(t))^{-1} E_t^{0\zeta}(\theta(t)\beta(t)) = E_t^\xi(\beta(t)). \quad (1.27)$$

◁ Используя формулы (1.23) и (1.26) нетрудно вычислить

$$\begin{aligned}
D\xi(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t'^{\zeta} \left(\frac{\zeta(t + \Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t} \right) = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^{0\zeta}(\theta(l))^{-1} E_t^{0\zeta} \left(\frac{\zeta(t + \Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t} \theta(l) \right) = \\
&= E_t^{0\zeta}(\theta(l))^{-1} \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^{0\zeta} \left(\frac{\zeta(t + \Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t} \right) + \\
&+ E_t^{0\zeta}(\theta(l))^{-1} \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^{0\zeta} \left(\frac{\zeta(t + \Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t} \right) \left(\int_0^l \theta(t)(\beta(t) \cdot dW(t)) \right).
\end{aligned}$$

Поскольку $\zeta(t)$ на $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \nu)$ есть $W(t)$ (см. выше), то

$$E_t^{0\zeta} \left(\frac{\zeta(t + \Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t} \right) = 0.$$

Выберем произвольную гладкую функцию $f : M \rightarrow R$ с компактным носителем. Тогда, поскольку здесь $\xi(t) = W(t)$ и поэтому

$$f(\zeta(t))(\zeta(t + \Delta t) - \zeta(t)) = \int_0^{t+\Delta t} f(W(t)) dW(s),$$

можно применить обычные свойства умножения интегралов Ито, чтобы получить

$$\begin{aligned}
&E^0(f(\zeta(t))) \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^{0\zeta} \left(\frac{\zeta(t + \Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t} \right) = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E^0(f(\zeta(t))) \left(\frac{\zeta(t + \Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t} \right) = \quad (1.28) \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E^0 \left(\frac{\int_t^{t+\Delta t} f(W(t)) \theta(s) \beta(s) ds}{\Delta t} \right) = E^0(f(\zeta(t)) \theta(t) \beta(t)).
\end{aligned}$$

Таким образом, поскольку f — произвольная функция вышеупомянутого типа,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^{0\zeta} \left(\frac{\zeta(t + \Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t} \int_0^t \theta(s)(\beta(s) \cdot dW(s)) \right) = E_t^{0\zeta}(\theta(t) \beta(t)).$$

С другой стороны, по теореме 1.1 $D\xi(t) = E_t^\xi(\beta(t))$, что и доказывает данную лемму. $\triangleright$

Рассмотрим регрессию для $E_t^W(\theta(T))$, т. е. борелевскую функцию $E_t^W(\theta(T))(x)$ на $\mathbb{R}^n$ такую, что $E_t^W(\theta(T))(\zeta(t)) = E_t^W(\theta(T))$. Как обычно, $E_t^W(\theta(T))$ и ее регрессию мы обозначаем одним и тем же символом. Введем обозначение: $\kappa(t) = \theta(T)^{-1} \text{grad } E_t^W(\theta(T))$, где $\text{grad } E_t^W(\theta(T))$ означает градиент от регрессии, в который подставлено $\zeta(t)$.

Лемма 1.14. *Имеют место следующие формулы:*

$$D_*\xi(t) = E_t^\xi(\beta(t)) + \frac{\xi(t)}{t} - E_t^\xi(\kappa(t)), \quad (1.29)$$

$$D_*^\xi w(t) = \frac{\xi(t)}{t} - E_t^\xi(\kappa(t)). \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad D_*\xi(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t'^\zeta \left(\frac{\zeta(t) - \zeta(t - \Delta t)}{\Delta t} \right) = \\ &= E_t^{0\zeta}(\theta(T))^{-1} \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^{0\zeta} \left(\frac{\zeta(t) - \zeta(t - \Delta t)}{\Delta t} \theta(T) \right). \end{aligned}$$

Используя те же самые рассуждения, что и в доказательстве леммы 1.13, легко получаем

$$\begin{aligned} &E^0(f(\zeta(t))) \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^{0\zeta} \left(\frac{\zeta(t) - \zeta(t - \Delta t)}{\Delta t} \theta(T) \right) = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E^0 \left((f(W(t)) - f(W(t - \Delta t))) \frac{W(t) - W(t - \Delta t)}{\Delta t} \theta(T) \right) + \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E^0 \left(f(W(t - \Delta t)) \frac{W(t) - W(t - \Delta t)}{\Delta t} \theta(T) \right). \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части преобразуется аналогично формуле (1.28), т. е. равно $E^0(f(\zeta(t)) \theta(t) \beta(t))$. Вычислим первое слагаемое. Здесь мы применяем правила умножения интегралов Ито, формулу Ито и интегрирование по частям. Мы обозначаем тем же самым символом условное математическое ожидание и соответствующую

регрессию. Итак,

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E^0 \left((f(W(t)) - f(W(t - \Delta t))) \frac{W(t) - W(t - \Delta t)}{\Delta t} \theta(T) \right) = \\
& = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E^0 \left([f''(W(t - \Delta t)) \Delta t + \right. \\
& + (\text{grad } f(W(t - \Delta t))) (W(t) - W(t - \Delta t))] \frac{W(t) - W(t - \Delta t)}{\Delta t} \theta(T) \Big) = \\
& = E^0 (\text{grad } f(W(t)) \theta(T)) = \int_{[0, T] \times \mathbb{R}^n} [(\text{grad } f(W(t))) \theta(T)] \rho^W d\lambda = \\
& = \int_{[0, T] \times \mathbb{R}^n} \left[f(W(t)) \left(-\frac{\text{grad } \rho^W}{\rho^W} \right) \theta(T) \right] \rho^W d\lambda + \\
& + \int_{[0, T] \times \mathbb{R}^n} \left[f(W(t)) \left[-\frac{\text{grad } E_t^W(\theta(T))}{\theta(T)} \right] \theta(T) \right] \rho^W d\lambda = \\
& = E^0 \left(f(W(t)) \left(-\frac{\text{grad } \rho^W}{\rho^W} \right) \theta(T) \right) - \\
& - E^0 \left(f(W(t)) [\theta(T)^{-1} \text{grad } E_t^W(\theta(T))] \theta(T) \right) = \\
& = E^0 \left(f(\zeta(t)) \left(\frac{W(t)}{t} \right) \theta(T) \right) - E^0 \left(f(\zeta(t)) [\theta(T)^{-1} \text{grad } E_t^W(\theta(T))] \theta(T) \right),
\end{aligned}$$

где $-\frac{\text{grad } \rho^W}{\rho^W} = \frac{W(t)}{t}$ по лемме 1.8.

Из только что полученных формул следует, что

$$\begin{aligned}
D_* \xi(t) &= E_t^W(\theta(T))^{-1} \left\{ E_t^W(\theta(t) \beta(t)) + E_t^W \left[\left(\frac{W(t)}{t} \right) \theta(T) \right] + \right. \\
&\quad \left. + E_t^W \left([\theta(T)^{-1} \text{grad } E_t^W(\theta(T))] \theta(T) \right) \right\}
\end{aligned}$$

и, применяя (1.23), (1.26) и (1.27), получаем (1.29); (1.30) — следствие (1.27) и (1.29). $\triangleright$

Следствие 1.3. $D_* \xi(t) = E_t^\xi(\beta(t)) - 2u^W(t, \xi(t)) - E_t^\xi(\kappa(t))$.

Действительно, по леммам 1.6 и 1.8 $-2u^W(t, x) = -\frac{\text{grad } \rho^W}{\rho^W} = \frac{x}{t}$.

Подставив $\xi(t)$ в эти равенства, получим утверждение следствия.

Лемма 1.15. $D^\xi E_t^\xi(\kappa(t)) = 0$, $D_*^\xi E_t^\xi(\kappa(t)) = 0$.

◁ Применим лемму 1.1 и формулу (1.23) следующим образом:

$$\begin{aligned}
D^\xi E_t^\xi(\kappa(t)) &= D^\xi E_t^\xi [\theta(T)^{-1} \text{grad } E_t^W(\theta(T))] = \\
&= D^\xi [\theta(T)^{-1} \text{grad } E_t^W(\theta(T))] = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\xi \left\{ \frac{\theta(T)^{-1} \text{grad} (E_{t+\Delta t}^W(\theta(T)) - E_t^W(\theta(T)))}{\Delta t} \right\} = E_t^W(\theta(T))^{-1} \times \\
&\times \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^W \left(\left\{ \frac{\theta(T)^{-1} \text{grad} (E_{t+\Delta t}^W(\theta(T)) - E_t^W(\theta(T)))}{\Delta t} \right\} \theta(T) \right) = \\
&= E_t^W(\theta(T))^{-1} \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^W \left(\frac{\text{grad} (E_{t+\Delta t}^W(\theta(T)) - E_t^W(\theta(T)))}{\Delta t} \right) = \\
&= E_t^W(\theta(T))^{-1} \text{grad } D^W (E_t^W \theta(T)) = E_t^W(\theta(T))^{-1} \text{grad } D^W \theta(T) = 0.
\end{aligned}$$

Доказательство второго равенства аналогично. ▷

Лемма 1.16. (i) $D^\xi \left(\frac{\xi(t)}{t} \right) = E_t^\xi \left(\frac{\beta(t)}{t} \right) - \frac{\xi(t)}{t^2}$;
(ii) $D_*^\xi \left(\frac{\xi(t)}{t} \right) = E_t^\xi \left(\frac{\beta(t)}{t} - \frac{\kappa(t)}{t} \right)$.

Лемма 1.16 — следствие теоремы 1.1 и леммы 1.14. В частности, (ii) следует непосредственно из теоремы 1.1 и конструкции производной.

Лемма 1.17. $D^\xi u^W(t, \xi(t)) = D^W u^W(t, \xi(t)) + E_t^\xi(\beta(t) \cdot \nabla) u^W(t, \xi(t))$.

$$\begin{aligned}
\triangleleft \quad D^\xi E_t^\xi u^W(t, \xi(t)) &= \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta t} E_t^\xi [u^W(t + \Delta t, \xi(t + \Delta t)) - u^W(t, \xi(t))] = \\
&= (E_t^W \theta(T))^{-1} \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta t} E_t^W [(u^W(t + \Delta t, \xi(t + \Delta t)) - u^W(t, \xi(t))) \theta(T)] = \\
&= (E_t^W \theta(T))^{-1} \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ E_t^W [u^W(t + \Delta t, \xi(t + \Delta t)) - u^W(t, \xi(t))] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E_t^W \left[\left(u^W(t + \Delta t, \xi(t + \Delta t)) - u^W(t, \xi(t)) \right) \int_0^l \theta(s) \beta(s) \cdot dW(s) \right] \Bigg\} = \\
& = (E_t^W \theta(T))^{-1} \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ E_t^W [u^W(t + \Delta t, \xi(t + \Delta t)) - u^W(t, \xi(t))] + \right. \\
& \quad + E_t^W \left[\int_t^{t+\Delta t} D^W u^W(s, \xi(s)) ds \int_0^l (\theta(s) \beta(s) \cdot dW(s)) \right] + \\
& \quad \left. + E_t^W \left[\int_t^{t+\Delta t} \theta(s) (\beta(s) \cdot \nabla) u^W(s, \xi(s)) ds \right] \right\} = \\
& = (E_t^W \theta(T))^{-1} \left\{ D^W u^W(t, \xi(t)) + \right. \\
& \quad \left. + D^W u^W(t, \xi(t)) E_t^W \int_0^l \theta(s) \beta(s) \cdot dW(s) + E_t^W (\theta(t) \beta(t) \cdot \nabla) u^W(t, \xi(t)) \right\} = \\
& = (E_t^W \theta(T))^{-1} \left\{ D^W u^W(t, \xi(t)) E_t^W \theta(T) + E_t^W (\theta(T) \beta(T) \cdot \nabla) u^W(t, \xi(t)) \right\} = \\
& = D^W u^W(t, \xi(t)) + E_t^\xi (\beta(t) \cdot \nabla) u^W(t, \xi(t)).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
& u^W(t + \Delta t, \xi(t + \Delta t)) - u^W(t, \xi(t)) = \\
& = \int_t^{t+\Delta t} D^W u^W(s, \xi(s)) ds + \int_t^{t+\Delta t} (dW(s) \cdot \nabla) u^W(s, \xi(s))
\end{aligned}$$

по формуле Ито. $\triangleright$

Лемма 1.18. *Выполняются следующие равенства:*

$$DD\xi(t) = D^\xi \beta(t), \quad (1.31)$$

$$D_* D_* \xi(t) = D_*^\xi \beta(t) + E_t^\xi \left(\frac{\beta(t)}{t} - \frac{\kappa(t)}{t} \right), \quad (1.32)$$

$$D_* D\xi(t) = D_*^\xi \beta(t), \quad (1.33)$$

$$DD_*\xi(t) = D^\xi\beta(t) + E_t^\xi\left(\frac{\beta(t)}{t}\right) - \frac{\xi(t)}{t^2}, \quad (1.34)$$

$$DD_*\xi(t) = D^\xi\beta(t) - D^W u^W(t, \xi(t)) - E_t^\xi(\beta(t) \cdot \nabla)u^W(t, \xi(t)). \quad (1.35)$$

◁ Формулы (1.31)–(1.35) следуют из лемм 1.14–1.17, следствия 1.3 и теоремы 1.1. ▷

Естественно, формулы (1.34) и (1.35) эквивалентны.

ГЛАВА 2

УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ¹

2.1. Дифференциальные уравнения с производными в среднем справа

Всюду в дальнейшем мы для простоты будем рассматривать уравнения, их решения и другие объекты на конечном отрезке времени $t \in [0, T]$.

Пусть заданы измеримые по Борелю отображения $a(t, x)$ и $\alpha(t, x)$ из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и в $\bar{S}_+(n)$ соответственно.

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t)), \end{cases} \quad (2.1)$$

которую назовем *дифференциальным уравнением первого порядка с производными в среднем справа*.

Учитывая теоремы 1.1 и 1.2, легко видеть, что задача нахождения процесса диффузионного типа, P -п. н. удовлетворяющего (2.1), в принципе, корректна. Понятно, что первое уравнение системы (2.1) определяет снос, а второе — коэффициент диффузии процесса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что (2.1) имеет решение на $[0, T]$ с начальным условием $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и заданный на нем при $t \in [0, T]$ процесс $\xi(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ такой, что $\xi(0) = x_0$, и при $t \in [0, T]$ для $\xi(t)$ P -п. н. выполняется (2.1).

Для дальнейшего нам потребуется следующее техническое утверждение.

¹Исследования, вошедшие в эту главу, поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 15-01-00620.

Лемма 2.1. Пусть $\alpha(t, x)$ — непрерывное по совокупности переменных отображение из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $S_+(n)$. Тогда существует непрерывное по совокупности переменных отображение $A(t, x)$ из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в пространство $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ такое, что при любых $t \in R$, $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется $A(t, x)A^*(t, x) = \alpha(t, x)$.

◁ Поскольку симметрические матрицы $\alpha(t, x)$ положительно определены, то все их диагональные миноры положительны и, в частности, отличны от нуля. Тогда имеет место разложение Гаусса (см. [16, теорема II.9.3]) $\alpha = \zeta \delta z$, где ζ — нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали, z — верхнетреугольная матрица с единицами на диагонали, δ — диагональная матрица. При этом элементы матриц ζ , δ и z выражаются рационально через элементы α , т. е. указанные матрицы непрерывны по совокупности переменных t, x . Из того, что α — симметрические матрицы, легко увидеть, что $z = \zeta^*$ (z равно транспонированному ζ). Также нетрудно видеть, что в рассматриваемых условиях элементы диагональной матрицы δ положительны. Следовательно, корректно определена диагональная матрица $\sqrt{\delta}$, на диагонали которой стоят квадратные корни из соответствующих элементов матрицы δ . Рассмотрим матрицы $A(t, x) = \zeta \sqrt{\delta}$. По построению $A(t, x)$ непрерывно по совокупности переменных t, x и при этом $A(t, x)A^*(t, x) = \zeta(t, x) \delta(t, x) z(t, x) = \alpha(t, x)$. ▷

Следствие 2.1. Если в условии леммы 2.1 заменить требование непрерывности $A(t, x)$ требованием измеримости по Борелю (или гладкости), то существует измеримое по Борелю (соответственно гладкое) отображение матриц $A(t, x)$ из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в пространство $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ такое, что при любых $t \in R$, $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется $A(t, x)A^*(t, x) = \alpha(t, x)$.

Для случая, когда $\alpha(t, x)$ действует в $\overline{S}_+(n)$, можно построить непрерывное $A(t, x)$ при более обременительных предположениях.

Лемма 2.2. Если $\alpha(t, x)$ — отображение гладкости C^2 из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $\overline{S}_+(n)$, то существует непрерывное по совокупности переменных отображение $A(t, x)$ из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в пространство $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ матриц такое, что при любых $t \in R$, $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется $A(t, x)A^*(t, x) = \alpha(t, x)$.

Лемма 2.2 выводится из [27, Теорема 1].

Теорема 2.1. Пусть в системе (2.1) $\alpha(t, x)$ непрерывно по совокупности переменных, положительно определено (т. е. при всех

$t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит $S_+(n)$), и для него выполняется оценка

$$\|\operatorname{tr} \alpha(t, x)\| < K_1(1 + \|x\|)^2 \quad (2.2)$$

для некоторого $K_1 > 0$. Пусть $a(t, x)$ измеримо по Борелю и для него выполняется оценка

$$\|a(t, x)\| < K_2(1 + \|x\|) \quad (2.3)$$

для некоторого $K_2 > 0$. Тогда для любого начального условия $\xi(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ уравнение (2.1) имеет решение, определенное на всем отрезке $[0, T]$.

◁ Так как $\alpha(t, x)$ непрерывно и положительно определено, то по лемме 2.1 существует непрерывное $A(t, x)$ такое, что $A(t, x)A^*(t, x) = \alpha(t, x)$. Непосредственно из определения следа в данном случае получаем, что $\operatorname{tr} \alpha(t, x)$ равен сумме квадратов всех элементов матрицы $A(t, x)$, т. е. является квадратом евклидовой нормы в пространстве $n \times n$ матриц. Поскольку в конечномерном пространстве $S(n)$ симметрических $n \times n$ матриц все нормы эквивалентны, то из условия (2.2) сразу следует, что $\|A(t, x)\| < K_3(1 + \|x\|)$ для некоторого $K_3 > 0$. Так как $\alpha(t, x)$ положительно определено, то матрица $A(t, x)$ при всех t, x не вырождена. Поскольку $a(t, x)$ измеримо и удовлетворяет (2.3), то при описанных выше свойствах $A(t, x)$ по [10, теорема III.3.3] существует решение стохастического дифференциального уравнения

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t A(s, \xi(s)) dw(s), \quad (2.4)$$

определенного на всем отрезке $[0, T]$. Из теорем 1.1 и 1.2 очевидным образом следует, что решение $\xi(t)$ последнего уравнения Р-п. н. удовлетворяет (2.1). ▷

Теорема 2.2. Пусть $\alpha(t, x)$ C^2 -гладко, неотрицательно определено (т. е. при всех $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит $\bar{S}_+(n)$) и удовлетворяет (2.2). Пусть $a(t, x)$ непрерывно и удовлетворяет (2.3). Тогда для любого начального условия $\xi(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ уравнение (2.1) имеет решение, определенное на всем отрезке $[0, T]$.

◁ По лемме 2.2 существует непрерывное $A(t, x)$ такое, что $\alpha(t, x) = A(t, x)A^*(t, x)$. Так же, как и в доказательстве теоремы 2.1,

выводится оценка $\|A(t, x)\| < K_3(1 + \|x\|)$ для некоторого $K_3 > 0$. Тогда, так как $a(t, x)$ и $A(t, x)$ непрерывны и выполнено (2.3), уравнение (2.4) удовлетворяет условиям [10, теорема III.2.4], т. е. для него существует решение, определенное на всем отрезке $[0, T]$. Как и ранее, очевидно, что Р-п. н. оно удовлетворяет (2.1). $\triangleright$

Отметим, что поскольку однозначные отображения являются частным случаем многозначных, то для уравнений с измеримой правой частью, удовлетворяющих условиям теоремы 2.4 (см. ниже), как следствие мы тоже получаем теорему существования решений. Также имеет место теорема существования решений в случае непрерывных правых частей, у которых $\alpha(t, x)$ принимает значения в $\bar{S}_+(n)$, если уравнение удовлетворяет условиям теоремы 2.5 (см. ниже).

2.2. Дифференциальные включения с производными в среднем справа

Пусть $\mathbf{a}(t, x)$ и $\alpha(t, x)$ — многозначные отображения из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и в $\bar{S}_+(n)$ соответственно. *Дифференциальным включением с производными в среднем справа* будем называть систему вида

$$\begin{cases} D\xi(t) \in \mathbf{a}(t, x), \\ D_2\xi(t) \in \alpha(t, \xi(t)). \end{cases} \quad (2.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Будем говорить, что (2.5) имеет решение на $[0, T]$ с начальным условием $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и заданный на нем при $t \in [0, T]$ процесс $\xi(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ и начальным значением $\xi(0) = x_0$ такой, что Р-п. н. для него выполняется (2.5).

В простейших случаях вопрос о существовании решения для (2.5) сводится к теоремам существования решения для (2.1). Приведем пример подобного утверждения. Напомним, что значение обозначения «норма множества» приведено в конце Предисловия.

Теорема 2.3. Пусть $\alpha(t, x)$ принимает значения в положительно определенных матрицах $S_+(n)$, имеет замкнутые выпуклые образы, полунепрерывно снизу и для каждого $\alpha \in \alpha(t, x)$ выполняется оценка

$$\|\mathrm{tr} \alpha(t, x)\| < K_1(1 + \|x\|)^2$$

для некоторого $K_1 > 0$. Пусть $\mathbf{a}(t, x)$ является измеримым по Борелю многозначным отображением и удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{a}(t, x)\| < K_2(1 + \|x\|) \quad (2.6)$$

для некоторого $K_2 > 0$. Тогда для любого начального условия $\xi(0) = \xi_0$ существует решение (2.5), определенное на всем отрезке $[0, T]$.

◁ При сделанных предположениях по теореме Майкла (теорема 8.1) многозначное отображение $\alpha(t, x)$ имеет непрерывный однозначный селектор $\alpha(t, x)$. Измеримое по Борелю многозначное отображение $\mathbf{a}(t, x)$ имеет измеримый однозначный селектор $a(t, x)$. Тогда уравнение

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t)) \end{cases}$$

удовлетворяет условиям теоремы 2.1 и, следовательно, имеет решение, которое очевидным образом является и решением (2.5). ▷

В случае, когда и $\alpha(t, x)$, и $\mathbf{a}(t, x)$ полунепрерывны снизу, имеют замкнутые выпуклые образы и $\alpha(t, x)$ принимает значения в $\bar{S}_+$, удовлетворяют оценкам из условия теоремы 2.3 и известно, что непрерывный селектор $\alpha(t, x)$ отображения $\alpha(t, x)$, который существует по теореме Майкла (теорема 8.1), представим в виде $\alpha(t, x) = A(t, x)A^*(t, x)$ с непрерывным $A(t, x)$, нетрудно доказать существование решения для (2.5) путем сведения к теореме 2.2.

Для случая, когда $\alpha(t, x)$ и $\mathbf{a}(t, x)$ не имеют непрерывных селекторов, докажем следующее утверждение о существовании решения.

Теорема 2.4. Пусть $\mathbf{a}(t, x)$ — ограниченное измеримое по Борелю многозначное отображение из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ с замкнутыми образами.

Пусть $\alpha(t, x)$ — ограниченное измеримое по Борелю многозначное отображение с замкнутыми образами из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $S_+(n)$ и существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех t, x ε_0 -окрестность множества $\alpha(t, x)$ в $S(n)$ не пересекает множество $S_0(n)$ симметрических вырожденных $n \times n$ матриц.

Тогда для любого начального условия $\xi(0) = \xi_0 \in \mathbb{R}^n$ включение (2.5) имеет решение.

◁ Так как $\mathbf{a}(t, x)$ и $\alpha(t, x)$ являются измеримыми по Борелю многозначными отображениями, то они имеют измеримые по Бо-

рею селекторы $a(t, x)$ и $\alpha(t, x)$, которые по построению ограничены. По следствию 2.1 существует измеримое $A(t, x)$ такое, что $\alpha(t, x) = A(t, x)A^*(t, x)$. При этом по построению $A(t, x)$ ограничено и равномерно отделено от множества вырожденных матриц в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Тогда стохастическое дифференциальное уравнение

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t A(s, \xi(s)) dw(s)$$

удовлетворяет условиям [20, теорема II.6.1] и имеет решение, которое очевидным образом является решением (2.5). $\triangleright$

Теорема 2.5. *Выберем произвольное начальное значение $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbf{a}(t, x)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми образами из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, и пусть оно удовлетворяет оценке*

$$\|\mathbf{a}(t, x)\|^2 < K(1 + \|x\|^2) \quad (2.7)$$

для некоторого $K > 0$.

Пусть $\alpha(t, x)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми образами из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $\bar{\mathbb{S}}_+(n)$ такое, что для каждого $\alpha(t, x) \in \alpha(t, x)$ выполняется оценка

$$|\mathrm{tr} \alpha(t, x)| < K(1 + \|x\|^2) \quad (2.8)$$

при некотором $K > 0$.

Тогда существует решение включения (2.5) с начальным условием ξ_0 при $t \in [0, T]$.

Теорема 2.5 является частным случаем теоремы 3.1, доказанной ниже.

2.3. Дифференциальные включения с производными в среднем слева

Уравнения и включения с производными в среднем слева возникают при описании некоторых специальных стохастических процессов в математической физике. Например, в [42, 43] (см. также литературу в этих работах) выведено уравнение второго порядка с производными слева на группах соболевских диффеоморфизмов, которой

описывает процесс, чье математическое ожидание является потоком вязкой жидкости (см. гл. 6). Следует отметить, что такие уравнения и включения весьма сложны для исследования по сравнению с уравнениями и включениями с производными в среднем справа. Тем не менее имеется простой метод, связанный с использованием обращения времени у решений уравнений и включений с производными в среднем справа, который позволяет получить некоторые результаты и для случая производных слева. Здесь мы проиллюстрируем этот метод на простом примере.

Система

$$\begin{cases} D_*\xi(t) = a(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t)) \end{cases} \quad (2.9)$$

называется *уравнением первого порядка с производными в среднем слева*.

Мы не вводим понятие, аналогичное оператору D_2 в данном случае, так как из свойств интеграла Ито следует, что для процесса диффузионного типа $\xi(t)$ результат применения возможного аналога совпадает с $D_2\xi(t)$ (для случая диффузионных процессов это следует из результатов [63, 64]).

Пусть $\mathbf{a}(t, x)$ и $\boldsymbol{\alpha}(t, x)$ являются многозначными отображениями из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и в $\bar{S}_+(n)$ соответственно. Система вида

$$\begin{cases} D_*\xi(t) \in \mathbf{a}(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t, \xi(t)) \end{cases} \quad (2.10)$$

называется *включением первого порядка с производными в среднем слева*.

Рассмотрим решение $\eta(t)$, заданное на отрезке $t \in [0, T]$, с начальным условием $\eta(0) = 0$ следующего дифференциального включения с производными в среднем справа:

$$\begin{cases} D\eta(t) \in -\mathbf{a}(1-t, \eta(t)), \\ D_2\eta(t) \in \boldsymbol{\alpha}(1-t, \eta(t)). \end{cases} \quad (2.11)$$

Теорема 2.6. *Процесс $\xi(t) = \xi_0 - \eta(T) + \eta(T-t)$ является решением (2.10) с начальным условием $\xi(0) = \xi_0$, где $\eta(t)$ — решение (2.11) с начальным условием $\eta(0) = 0$.*

Действительно, $D_*\xi(t) = -D\eta(T-t) \in \mathbf{a}(t, \eta(T-t)) = \mathbf{a}(t, \xi(t))$. Для $D_2\xi(t)$ рассуждения аналогичны.

2.4. Уравнения с текущими скоростями

Как сказано выше, текущая скорость является прямым аналогом обычной скорости физических детерминированных процессов. Так что случай уравнений с текущими скоростями, по-видимому, является наиболее естественным с физической точки зрения.

Систему вида

$$\begin{cases} D_S \xi(t) = v(t, \xi(t)), \\ D_2 \xi(t) = \alpha(t, \xi(t)) \end{cases} \quad (2.12)$$

мы называем *уравнением первого порядка с текущими скоростями*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Говорят, что (2.12) имеет решение на интервале $[0, T]$, если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и заданный на нем при $t \in [0, T]$ процесс $\xi(t)$, для которого выполняется (2.12).

Теорема 2.7. Пусть $v : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\alpha : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow S_+(n)$ — гладкие по совокупности переменных (в частности, это означает, что при каждом t поле α определяет зависящую от времени риманову метрику $\alpha_t(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{R}^n$, введенную в § 1.2). Пусть также выполняются оценки

$$\|v(t, x)\| < K(1 + \|x\|) \quad (2.13)$$

и

$$|\operatorname{tr} \alpha(t, x)| < K(1 + \|x\|^2), \quad (2.14)$$

и пусть для всех индексов i, j элементы матрицы $\alpha_t(x)$ удовлетворяют неравенству

$$\left| \frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial x^j}(t, x) \right| < K(1 + \|x\|) \quad (2.15)$$

при некотором $K > 0$. Пусть ξ_0 — случайный элемент со значениями в $\mathbb{R}^n$, у которого вероятностная плотность распределения ρ_0 относительно формы объема Λ_{α_t} метрики $\alpha_t(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{R}^n$ (см. § 1.2) гладка и нигде не равна нулю. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ уравнение (2.12) имеет решение, корректно определенное на всем отрезке $t \in [0, T]$, которое единственно как диффузионный процесс.

◁ Поскольку $v(t, x)$ гладко и для него выполнена оценка (2.13), то поток g_t этого векторного поля корректно определен на всем отрезке $t \in [0, T]$. Символом $g_t(x)$ обозначим орбиту этого потока, т. е.

решение уравнения $x'(t) = v(t, x)$ с начальным условием $g_0(x) = x$. Поскольку $v(t, x)$ гладко, то его поток также гладкий.

Используя лемму 1.5, приведем уравнение непрерывности (1.17) к виду

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} = -\alpha_t(v, \text{Grad}_t \rho) - \rho \text{Div}_t v. \quad (2.16)$$

Предположим, что $\rho(t, x)$ нигде не равно нулю в $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. Тогда мы можем разделить (2.16) на ρ и, таким образом, преобразовать его к виду

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\alpha_t(v, \text{Grad}_t p) - \text{Div}_t v, \quad (2.17)$$

где $p = \ln \rho$. Введем обозначение: $p_0 = \ln \rho_0$.

Покажем, что решение уравнения (2.17) с начальными условиями $p(0) = p_0$ описывается формулой

$$p(t, x) = p_0(g_{-t}(x)) - \int_0^t (\text{Div}_\tau v)(s, g_s(g_{-t}(x))) ds.$$

Введем произведение $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ и рассмотрим функцию p_0 как заданную на поверхности уровня $(0, \mathbb{R}^n)$. Рассмотрим векторное поле $(1, v(t, x))$ на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. Орбиты его потока $\hat{g}_t$, начинающиеся в точках поверхности $(0, \mathbb{R}^n)$, имеют вид $\hat{g}_t(0, x) = (t, g_t(x))$, и поток является гладким, как и g_t . Рассмотрим на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ риманову метрику $\bar{\alpha}(\cdot, \cdot)$ (см. § 5.1). Отметим, что для каждого (t, x) точка $\hat{g}_{-t}(t, x)$ принадлежит $(0, \mathbb{R}^n)$, где функция p_0 задана. Таким образом, с одной стороны, $(1, v)p(t, x)$ — производная функции $p(t, x)$ по направлению векторного поля $(1, v)$ — по построению равна $-\text{Div}_t v(t, x)$. А, с другой стороны, нетрудно вычислить, что

$$(1, v)p(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} p(t, x) + \alpha_t(v(t, x), \text{Grad}_t p(t, x)).$$

Так что (2.17) выполняется.

Подчеркнем, что $\rho = e^p$ действительно нигде не равно нулю и, таким образом, рассуждения корректны.

Из построения следует, что для заданных поля α и начальной плотности ρ_0 , удовлетворяющих условиям теоремы, плотности построенного вида и гладкие векторные поля, у которых потоки полны, находятся во взаимно-однозначном соответствии. Так что после

нахождения плотности $\rho(t, x)$ для решения уравнения (2.12) мы можем найти также осмотическую скорость $u^\xi(t, x)$ по формуле (1.16), т. е. $u = \frac{1}{2} \text{Grad } p + \frac{1}{2} \Xi = \text{Grad} \ln \sqrt{\rho} + \frac{1}{2} \Xi$. Отметим, что u однозначно определяется плотностью ρ и полем α и, таким образом, производная в среднем справа для решения также однозначно определяется формулой

$$a(t, x) = v(t, x) + \frac{1}{2} \text{Grad } p + \frac{1}{2} \Xi = v(t, x) + \text{Grad} \ln \sqrt{\rho} + \frac{1}{2} \Xi.$$

Из леммы 2.1 и из условия теоремы вытекает, что имеется гладкое поле $A(t, x)$ такое, что $A(t, x)A^*(t, x) = \alpha(t, x)$ и выполняется оценка $\|A(t, x)\| < K(1 + \|x\|)$. Тогда из общей теории уравнений с производными в среднем справа следует, что $\xi(t)$, как выше, удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t A(s, \xi(s)) dw(s). \quad (2.18)$$

Из условия теоремы и из результатов [10] следует, что (2.18) имеет сильное и сильно единственное решение $\xi(t)$ с начальной плотностью ρ_0 , которое корректно определено на отрезке $t \in [0, T]$. Таким образом, из теоремы 1.2 выводим, что $D_2 \xi(t) = \alpha(t, \xi(t))$. Тот факт, что $D_S \xi(t) = v(t, \xi(t))$, следует из построения. $\triangleright$

Лемма 2.3. Пусть $\alpha(x)$, $\rho(t, x)$ и Λ_α — такие же, как в теореме 2.7. Пусть также векторные поля v и α из теоремы 2.7 автономны. Тогда поток $\widehat{g}_t$ векторного поля $(1, v(x))$ на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ сохраняет форму объема $\rho(t, x) dt \wedge \Lambda_\alpha$ (т. е. $\widehat{g}_t^*(\rho(t, x) dt \wedge \Lambda_\alpha) = \rho_0(x) dt \wedge \Lambda_\alpha$, где $\widehat{g}_t^*$ — обратный образ) и, таким образом, для любого измеримого множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ и любого $t \in [0, T]$ выполняется соотношение

$$\int_Q \rho_0(x) \Lambda_\alpha = \int_{g_t(Q)} \rho(t, x) \Lambda_\alpha.$$

$\triangleleft$ Достаточно показать, что $L_{(1, v)}(\rho(t, x) dt \wedge \Lambda_\alpha) = 0$, где $L_{(1, v)}$ — производная Ли по направлению $(1, v)$. Очевидным образом, $L_{(1, v)}(\rho(t, x) dt \wedge \Lambda_\alpha) = (L_{(1, v)} \rho(t, x)) dt \wedge \Lambda_\alpha + \rho(t, x)(L_{(1, v)} dt \wedge \Lambda_\alpha)$. Для функций производная Ли совпадает с обычной производной по

направлению, следовательно, $L_{(1,v)}\rho(t, x) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \alpha(v, \text{Grad } \rho)$ (см. доказательство теоремы 2.7), и, таким образом,

$$(L_{(1,v)}\rho(t, x)) dt \wedge \Lambda_\alpha = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \alpha(v, \text{Grad } \rho) \right) dt \wedge \Lambda_\alpha.$$

Поскольку ни форма Λ_α , ни векторное поле $v(x)$ не зависят от t , то $L_{(1,v)}dt \wedge \Lambda_\alpha = dt \wedge (L_v \Lambda_\alpha) = \text{Div } v (dt \wedge \Lambda_\alpha)$, так как производная Ли по направлению v формы объема Λ_α равна $(\text{Div } v)\Lambda_\alpha$. Принимая во внимание (2.16), получаем $L_{(1,v)}(\rho(t, x) dt \wedge \Lambda_\alpha) = 0$. $\triangleright$

2.5. Включения с текущими скоростями

В этом параграфе мы рассмотрим дифференциальные включения с текущими скоростями на плоском n -мерном торе. Переход на тор позволяет упростить многие конструкции и сосредоточиться на свойствах самих включений, а не на технических трудностях, связанных с системами на $\mathbb{R}^n$. Напомним, что плоский тор — это фактор-пространство $\mathbb{R}^n$ по целочисленной решетке, на котором рассматривается риманова метрика, унаследованная из скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$. Так что, с одной стороны, геометрические конструкции на плоском торе практически такие же, как в евклидовом пространстве, а, с другой стороны, плоский тор является компактным многообразием, что резко упрощает исследование.

Отметим, что исследование дифференциальных включений с текущими скоростями является задачей, существенно более сложной, чем исследование аналогичных уравнений. Существование решений включений на настоящий момент удается доказать при сильных дополнительных предположениях, которые, по сути дела, выполняют-ся лишь для некоторых специальных классов включений.

2.5.1. Некоторые технические конструкции. Напомним, что в лемме 2.1 на основе разложения Гаусса показано, что каждая матрица $\alpha \in S_+(n)$ представима в виде $\alpha = \zeta \delta \zeta^*$, где ζ — нижне-треугольная матрица с единицами на диагонали, ζ^* — ее транспонированная, т. е. верхне-треугольная матрица с единицами на диагонали, и δ — диагональная матрица, чьи угловые миноры (отметим, что все они положительны) совпадают с угловыми минорами матрицы α . Обозначим диагональные элементы матрицы δ через $\delta_1, \dots, \delta_n$. Тогда $A = \zeta \sqrt{\delta}$, где $\sqrt{\delta}$ — диагональная матрица с $\sqrt{\delta_1}, \dots, \sqrt{\delta_n}$ на диагонали, такова, что $\alpha = A A^*$.

Если при $t \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathcal{T}^n$ поле $\alpha(t, m)$ непрерывно (измеримо, гладко), то $A(t, m)$ тоже непрерывно (измеримо, гладко соответственно, см. следствие 2.1).

Обозначим через $T_-(n)$ множество ниже-треугольных $n \times n$ матриц с нулями на диагонали. Это линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ всех $n \times n$ матриц. Очевидно, что ζ , описанное выше, принадлежит линейному подмногообразию $T_-(n) + I$ в $\mathbb{R}^{n^2}$, где I — единичная $n \times n$ матрица. Обозначим через $T : S_+(n) \rightarrow T_-(n)$ гладкое отображение $\alpha \in S_+(n)$ в

$$T\alpha = \zeta - I \in T_-(n). \quad (2.19)$$

Обозначим через S_{LC} множество симметрических положительно определенных матриц с постоянным (равным $C > 0$) определителем. В частности, это означает, что $\delta_1 \dots \delta_n = \text{const} = C$, а $\sqrt{\delta_1} \dots \sqrt{\delta_n} = \sqrt{C}$, где точка обозначает произведение.

Пусть $L_0(n)$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, состоящее из векторов $X = (X^1, \dots, X^n)$ таких, что $X^1 + \dots + X^n = 0$. Введем гладкое отображение $L_C : S_{LC} \rightarrow L_0$, переводящее симметрическую матрицу $\alpha \in S_{LC}$ в

$$L_C(\alpha) = \left(\ln \frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{C}}, \dots, \ln \frac{\sqrt{\delta_n}}{\sqrt{C}} \right) \in L_0(n), \quad (2.20)$$

где δ_i — диагональные элементы матрицы δ , соответствующей α .

Отметим, что $T_-(n)$ и $L_0(n)$ — линейные пространства, т. е. понятие выпуклого множества в них корректно определено.

Напомним и слегка упростим для нашего случая конструкцию римановой метрики, порожденной гладким полем симметрических положительно определенных тензоров типа $(2, 0)$ с матрицами $\alpha(m) = (\alpha^{ij}(m))$ (см. § 1.2). Отметим, что в отличие от § 1.2 здесь мы имеем дело с более простой ситуацией, когда указанное поле автономно. Поскольку все эти матрицы невырождены, поле обратных матриц (α_{ij}) существует и также гладко, кроме того, в каждом m матрица $(\alpha_{ij})(m)$ симметрична и положительно определена. Поэтому последнее поле задает на $\mathcal{T}^n$ новую риманову метрику (гладкое поле симметрических положительно определенных $(0, 2)$ -тензоров) $\alpha(\cdot, \cdot) = \alpha_{ij} dq^i \otimes dq^j$. Рассмотрим ее форму объема

$$\Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij})} dq^1 \wedge dq^2 \wedge \dots \wedge dq^n.$$

Лемма 2.4 [61]. Для любого гладкого автономного $(2, 0)$ -тензорного поля $\alpha(m)$ на плоском торе $\mathcal{T}^n$ со значениями в S_{LC} :

(i) форма объема Λ_α соответствующей римановой метрики $\alpha(\cdot, \cdot)$ (см. выше) равна $\sqrt{C}\Lambda_E$, где $\Lambda_E = dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$ — форма объема евклидовой метрики на $\mathcal{T}^n$, унаследованной из $\mathbb{R}^n$ при факторизации по целочисленной решетке;

(ii) для любого гладкого векторного поля $v(t, m)$ на $\mathcal{T}^n$ его дивергенция $\text{Div } v$ относительно Λ_α совпадает с обычной дивергенцией $\text{div } v$ (т. е. относительно Λ_E);

(iii) для любого случайного элемента со значениями в $\mathcal{T}^n$ его плотность распределения относительно Λ_α равна плотности распределения относительно Λ_E , деленной на $\sqrt{C}$.

⟨ Действительно, $\Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij})} dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n$, и поскольку $\det(\alpha_{ij}) = C$, то

$$\Lambda_\alpha = \sqrt{C}\Lambda_E = \sqrt{C} dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n.$$

Напомним, что дивергенция $\text{Div } v$ находится из равенства

$$\mathcal{L}_v \Lambda_\alpha = (\text{Div } v) \Lambda_\alpha,$$

где $\mathcal{L}_v$ — производная Ли вдоль v (см. подробности, например, в [12]). Напомним также, что $\mathcal{L}_v \Lambda_\alpha = d(v \rfloor \Lambda_\alpha)$, где $\rfloor$ обозначает внутреннее произведение векторов и дифференциальных форм. Поскольку C постоянно, то

$$d(v \rfloor \Lambda_\alpha) = \frac{\partial v^i}{\partial q^i} \sqrt{C} \Lambda_E = \frac{\partial v^i}{\partial q^i} \Lambda_\alpha.$$

Следовательно,

$$\text{Div } v = \frac{\partial v^i}{\partial q^i} = \text{div } v.$$

Утверждение (iii) вытекает из (i). ▷

2.5.2. Существование решений в случае квадратичных производных из S_{LC} . Пусть $\mathbf{v}(t, m)$ — многозначное векторное поле, $\alpha(t, m)$ — многозначное симметрическое положительно определенное $(2, 0)$ -тензорное поле на $\mathcal{T}^n$. Система вида

$$\begin{cases} D_S \xi(t) \in \mathbf{v}(t, \xi(t)), \\ D_2 \xi(t) \in \alpha(t, \xi(t)) \end{cases} \quad (2.21)$$

называется *дифференциальным включением с текущими скоростями первого порядка*. Понятие решение включения (2.21) в точности аналогично понятию решения для уравнения с текущими скоростями, введенному в определении 2.3.

Мы накладываем на $\mathbf{v}(t, m)$ и $\alpha(t, m)$ следующие условия.

Условие 2.1. Многозначное векторное поле $\mathbf{v}(m)$ на $\mathbb{T}^n$ автономно, равномерно ограничено и имеет замкнутые образы. Существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_k \rightarrow 0$ такая, что для любого ε_k поле $\mathbf{v}(m)$ имеет гладкую ε_k -аппроксимацию $v_i(m)$, и все эти аппроксимации имеют равномерно ограниченные одной и той же константой по совокупности $t \in [0, T]$ и $m \in \mathbb{T}^n$ первые частные производные $\frac{\partial v_i}{\partial m_j}$.

Условие 2.2. (i) Многозначное $(2, 0)$ -тензорное поле α на $\mathcal{T}^n$ принимает значения в S_{LC} ; оно автономно и полунепрерывно сверху; (ii) значения α замкнуты и равномерно ограничены; (iii) для каждого $m \in \mathcal{T}^n$ множество $T(\alpha(m))$ выпукло в $T_-(n)$ и множество $L_C(\alpha(m))$ выпукло в $L_0(n)$.

Лемма 2.5. При выполнении условия 2.1 многозначное векторное поле $\mathbf{v}(t, m)$ имеет непрерывный селектор, к которому равномерно сходится подпоследовательность последовательности аппроксимаций $v_i(m)$ при $i \rightarrow \infty$.

Действительно, из теоремы Асколи (см. [19]) нетрудно вывести, что при выполнении условия 2.1 последовательность $v_i(t, m)$ компактна в пространстве непрерывных векторных полей на $\mathcal{T}^n$.

Теорема 2.8. Пусть многозначное векторное поле $\mathbf{v}(t, m)$ на $\mathcal{T}^n$ удовлетворяет условию 2.1, а многозначное $(2, 0)$ -тензорное поле $\alpha(m)$ удовлетворяет условию 2.2. Рассмотрим случайный элемент ξ_0 со значениями в $\mathcal{T}^n$, у которого распределение относительно формы объема Λ_E равно $\sqrt{C}\rho_0$, где ρ_0 гладко и нигде не равно нулю. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ включение (2.21) имеет решение, определенное на всем интервале $t \in [0, T]$.

◁ Так как отображения T и L_C гладки, многозначные отображения $T\alpha$ со значениями в $T_-(n)$ и $L_C\alpha$ со значениями в $L_0(n)$ полунепрерывны сверху, поскольку таково α . По условию 2.2 их значения выпуклы, замкнуты и равномерно ограничены. Тогда по теореме 8.2 для любой последовательности положительных чисел $\varepsilon_q \rightarrow 0$ существуют последовательности однозначных непрерывных

ε_q -аппроксимаций, которые поточечно сходятся к борелевским селекторам полей $T\alpha$ и $L_C\alpha$ соответственно. Выберем указанные последовательности аппроксимаций для последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$ из условия 2.1. Без ограничения общности все эти аппроксимации можно считать гладкими. Так что существует последовательность $\alpha_k(m)$ однозначных гладких и равномерно ограниченных $(2, 0)$ -тензорных полей из S_{LC} , которая поточечно сходится к борелевскому селектору $\alpha(m)$ многозначного поля $\alpha(m)$. Компоненты поля $\alpha_k(m)$ мы обозначаем через α_k^{ij} .

Построим римановы метрики $\alpha_k(\cdot, \cdot)$ из тензорных полей $\alpha_k(m)$, как выше.

Рассмотрим последовательность уравнений

$$\begin{cases} D_S \xi(t) = v_k(\xi(t)), \\ D_2 \xi(t) = \alpha_k(\xi(t)). \end{cases} \quad (2.22)$$

Отметим, что по лемме 2.4 для всех этих уравнений можно рассматривать одно и то же начальное условие ξ_0 , поскольку его плотности относительно всех $\alpha_k(\cdot, \cdot)$ совпадают между собой. Отметим также, что все v_k и α_k равномерно ограничены одной и той же константой, так как они являются ε -аппроксимациями равномерно ограниченных многозначных отображений. Поскольку все указанные ε -аппроксимации как минимум C^1 -гладки и заданы на компактном множестве, то их частные производные равномерно ограничены для каждого k своей константой. Так что все уравнения (2.22) удовлетворяют условиям теоремы 2.7, т. е. для каждого уравнения существует решение. Решение k -го уравнения обозначим через $\xi_k(t)$.

Как сказано в § 2.5.1, каждое $\alpha_k(m)$ представимо в виде $\alpha_k(m) = A_k(m)A_k^*(m)$, где $A_k(m)$ гладки и равномерно ограничены.

На банаховом многообразии $C^0([0, T], \mathcal{T}^n)$ непрерывных кривых в $\mathcal{T}^n$ введем σ -алгебру $\mathcal{C}$, порожденную цилиндрическими множествами, и обозначим через μ_k меру на $(C^0([0, T], \mathcal{T}^n), \mathcal{C})$, порожденную решением $\xi_k(t)$. Также введем семейство полных σ -подалгебр $\mathcal{P}_t$, порожденных цилиндрическими множествами с основаниями над $[0, t]$, $t \in [0, T]$, и семейство полных σ -подалгебр $\mathcal{N}_t$, порожденных прообразами борелевских множеств в $\mathcal{T}^n$ при отображении $x(\cdot) \mapsto x(t)$. Понятно, что $\mathcal{N}_t$ является σ -подалгеброй в $\mathcal{P}_t$ и что $\mathcal{P}_t$ является прошлым, а $\mathcal{N}_t$ — настоящим для координатных процессов (ср. § 8.3.1).

Лемма 2.6. *Множество мер μ_k на $(C^0([0, T], \mathcal{T}^n), \mathcal{C})$ слабо компактно.*

◁ Прежде всего отметим, что поскольку все процессы $\xi_k(t)$ принимают значения в компактном торе, то все $E\xi_k(t)$ равномерно ограничены.

Зафиксируем два вещественных числа $0 \leq s < t \leq T$ с малой разностью $t - s$. Тогда при любом k приращение ξ_k на $[s, t]$ аппроксимируется выражением $v_k(\frac{s+t}{2})(t-s) + A_k(s)(w(t) - w(s))$. Рассмотрим

$$E\left(\left(v_k\left(\frac{s+t}{2}\right)(t-s) + A_k(s)(w(t) - w(s))\right)\right. \\ \left.\left(v_k\left(\frac{s+t}{2}\right)(t-s) + A_k(s)(w(t) - w(s))\right)^*\right).$$

Так как v_k и A_k равномерно ограничены при всех k одной и той же константой, то рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 1.2, легко видеть, что среди полученных в этом выражении слагаемых только $\alpha_k(t-s)$ имеет порядок малости $t-s$, а все остальные слагаемые являются бесконечно малыми более высокого порядка, чем $t-s$. Значит существует константа h_1 такая, что при малой разности $t-s$ указанное выражение по норме не превосходит $h_1(t-s)$. С помощью интегрирования отсюда нетрудно вывести, что существует константа $h > 0$, зависящая от T и от константы, ограничивающей нормы v_k и α_k , такая, что при любых $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ и любом k выполняется неравенство $E(\xi_k(t_2) - \xi_k(t_1))^4 < h(t_2 - t_1)^2$. Теперь утверждение леммы следует из [9, гл. VI, § 4, теорема 2]. ▷

Продолжим доказательство теоремы 2.8. Так как множество $\{\mu_k\}$ мер на $(C^0([0, T], \mathcal{T}^n), \mathcal{C})$ слабо компактно, то можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ . Без ограничения общности можно считать, что последовательность μ_k слабо сходится к μ . Рассмотрим координатный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0, T], \mathcal{T}^n), \mathcal{C}, \mu)$, т. е. для каждого элементарного события $m(\cdot) \in C^0([0, T], \mathcal{T}^n)$ по определению $\xi(t, m(\cdot)) = m(t)$. Напомним, что $\mathcal{P}_t$ является «прошлым» для $\xi(t)$, а $\mathcal{N}_t$ — «настоящим».

По построению $D_S \xi_k(t) = v_k(t, \xi_k(t))$ при любом k . Это означает, что для любой ограниченной непрерывной вещественной функции f на $C^0([0, T], \mathcal{T}^n)$, измеримой относительно $\mathcal{N}_t$, при всех k выполня-

ется равенство

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} \left[\frac{m(t + \Delta t) - m(t - \Delta t)}{2\Delta t} - v_k(m(t)) \right] f(m(\cdot)) d\mu_k = 0.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как μ_k слабо сходится к μ , то существует $K(\varepsilon)$ такое, что при $k > K(\varepsilon)$

$$\left\| \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} \left[\frac{m(t + \Delta t) - m(t - \Delta t)}{2\Delta t} \right] f(m(\cdot)) d\mu_k - \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} \left[\frac{m(t + \Delta t) - m(t - \Delta t)}{2\Delta t} \right] f(m(\cdot)) d\mu \right\| < \varepsilon$$

и

$$\left\| \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} f(\cdot) v(m(t)) d\mu_k - \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} f(\cdot) v(m(t)) d\mu \right\| < \varepsilon.$$

Наконец, так как $v_k(t, m)$ равномерно сходятся к $v(t, m)$, то равномерно для всех μ_i , включая μ , и равномерно по t

$$\int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} f(m(\cdot)) v_k(m(t)) d\mu_i \rightarrow \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} f(m(\cdot)) v(m(t)) d\mu_i$$

при $k \rightarrow \infty$, т. е. для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует K_1 такое, что при $k > K_1$ при всех i и при всех $t \in [0, T]$

$$\left\| \int_{[0,T] \times \Omega} f(m(\cdot)) v_k(m(t)) d\mu_i - \int_{[0,T] \times \Omega} f(m(\cdot)) v(m(t)) d\mu_i \right\| < \varepsilon_1.$$

Тогда при $k > \max(K, K_1)$

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} \left[\frac{m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{2\Delta t} - v(m(t)) \right] f(m(\cdot)) d\mu_k - \right. \\
& \left. - \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} \left[\frac{m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{2\Delta t} - v_k(m(t)) \right] f(m(\cdot)) d\mu \right\| < \\
& < \left\| \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} \left[\frac{m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{2\Delta t} \right] f(m(\cdot)) d\mu_k - \right. \\
& \left. - \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} \left[\frac{m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{2\Delta t} \right] f(m(\cdot)) d\mu \right\| + \\
& + \left\| \int_{[0,T] \times \Omega} f(m(\cdot)) v_k(m(t)) d\mu_k - \int_{[0,T] \times \Omega} f(m(\cdot)) v(m(t)) d\mu_k \right\| + \\
& + \left\| \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} f(\cdot) v(m(t)) d\mu_k - \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} f(\cdot) v(m(t)) d\mu \right\| < 2\varepsilon + \varepsilon_1.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} \left[\frac{m(t+\Delta t) - m(t-\Delta t)}{2\Delta t} - v(m(t)) \right] f(m(\cdot)) d\mu = 0.$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ — произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, то отсюда вытекает, что

$$D_S \xi(t) = v(\xi(t)). \quad (2.23)$$

Напомним, что по построению $v(\xi(t)) \in \mathbf{v}(\xi(t))$ μ -п. н.

По построению для любого $\xi_k(t)$ его квадратичная производная равна $\alpha_k(\xi_k(t))$. Это означает, что для любой функции $f(m(\cdot))$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{C^0([0, T], \mathcal{T}^n)} \left[\frac{(m(t + \Delta t) - m(t))(m(t + \Delta t) - m(t))^*}{\Delta t} - \alpha_k(m(t)) \right] f(m(\cdot)) d\mu_k = 0.$$

Так как $\alpha_k(t, m)$ стремится к $\alpha(t, m)$ при $k \rightarrow \infty$ поточечно, то $\alpha_k(t, m)$ стремится к $\alpha(t, m)$ п. н. относительно всех мер μ_k и относительно μ . Выберем $\delta > 0$. По теореме Егорова (см., например, [18]) для любого i существует подмножество $\tilde{K}_\delta^i \subset C^0([0, T], \mathcal{T}^n)$ такое, что $(\mu_i)(\tilde{K}_\delta^i) > 1 - \delta$ и последовательность $\alpha_k(m(t))$ сходится к $\alpha(m(t))$ равномерно на $\tilde{K}_\delta^i$. Введем обозначение: $\tilde{K}_\delta = \bigcup_{i=0}^\infty \tilde{K}_\delta^i$. Последовательность $\alpha_k(m(t))$ сходится к $\alpha(m(t))$ равномерно на $\tilde{K}_\delta$ при всех i и $\mu(\tilde{K}_\delta) > 1 - \delta$.

Поле $\alpha(m(t))$ непрерывно на множестве полной меры μ на $C^0([0, T], \mathcal{T}^n)$. Действительно, рассмотрим последовательность $\delta_i \rightarrow 0$ и соответствующую последовательность $\tilde{K}_{\delta_i}$. По построению $\alpha(m(t))$ является равномерным пределом последовательности непрерывных функций на каждом $\tilde{K}_{\delta_i}$. Поэтому $\alpha(m(t))$ непрерывно на каждом $\tilde{K}_{\delta_i}$, т. е. и на любом конечном объединении $\bigcup_{i=1}^n \tilde{K}_{\delta_i}$. Очевидным образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{i=1}^n \tilde{K}_{\delta_i}) = 1$.

Из-за описанной выше равномерной сходимости на $\tilde{K}_\delta$ при всех k мы выводим из ограниченности $f(m(\cdot))$, что при достаточно большом k

$$\left\| \int_{\tilde{K}_\delta} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k \right\| < \delta.$$

Так как $f(m(\cdot))$ ограничено, то имеется некоторое число $\Xi > 0$ такое, что $|f(m(\cdot))| < \Xi$ для любого $m(\cdot)$. Напомним, что все $\alpha_k(m)$ и $\alpha(m)$ равномерно ограничены, т. е. их нормы не превосходят некоторого числа $Q > 0$. Тогда, поскольку

$$\mu_k \left(C^0([0, T], \mathcal{T}^n) \setminus \tilde{K}_\delta \right) < \delta$$

при всех достаточно больших k , то

$$\left\| \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n) \setminus \tilde{K}_\delta} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k \right\| < 2\delta Q \Xi$$

при всех достаточно больших k . Так как δ — произвольное положительное число, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} [\alpha_k(m(t)) - \alpha(m(t))] f(m(\cdot)) d\mu_k = 0.$$

Функция $\alpha(m(t))$ — μ -п. н. непрерывна и ограничена на $C^0([0,T], \mathcal{T}^n)$ (см. выше). Так как к тому же меры μ_k слабо сходятся к μ , то по лемме из [10, § VI.1]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} \alpha(m(t)) f(m(\cdot)) d\mu_k = \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} \alpha(m(t)) f(m(\cdot)) d\mu.$$

Очевидным образом,

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} \left[\frac{(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^*}{\Delta t} \right] f(m(\cdot)) d\mu_k = \\ & = \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} \left[\frac{(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^*}{\Delta t} \right] f(m(\cdot)) d\mu. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{C^0([0,T], \mathcal{T}^n)} \left[\frac{(m(t+\Delta t) - m(t))(m(t+\Delta t) - m(t))^*}{\Delta t} - \right. \\ & \quad \left. - \alpha(m(t)) \right] f(m(\cdot)) d\mu = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $f(m(\cdot))$ — произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{N}_t$, то это означает, что $D_2\xi(t) = \alpha(\xi(t))$. Но по построению $\alpha(\xi(t)) \in \boldsymbol{\alpha}(\xi(t))$ μ -п. н.

Вместе с (2.23) это означает, что $\xi(t)$ является искомым решением включения (2.21). Теорема 2.8 доказана. $\triangleright$

2.5.3. Случай наличия гладких селекторов. Упрощенным вариантом теоремы 2.8 является утверждение о существовании решения при α , удовлетворяющем условию 2.2, и однозначном и гладком v . Этот случай исследован в [44]. Однако, то же самое верно и в случае, когда $\mathbf{v}$ имеет гладкий селектор. Приведем для этого случая результаты из [23].

Теорема 2.9. Пусть $\mathbf{v}(t, m)$ — многозначное равномерно ограниченное векторное поле на $\mathcal{T}^n$, имеющее гладкий селектор, а $\alpha(m)$ — многозначное $(2, 0)$ -тензорное поле, удовлетворяющее условию 2.2. Пусть также ξ_0 — случайный элемент со значениями в $\mathcal{T}^n$, чья плотность ρ_0 гладка и нигде не равна нулю. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ включение (2.21) имеет решение, которое существует на всем интервале $t \in [0, T]$.

Доказательство теоремы 2.9 очевидным образом является частным случаем доказательства теоремы 2.8.

Приведем теоремы существования решений из [23], использующие критерии наличия у многозначного отображения гладкого селектора.

Для телесного замкнутого выпуклого множества A и вектора V в $\mathbb{R}^n$ введем так называемую опорную функцию $\Psi(A, V) = \sup_{y \in A} (y, V)$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение. Рассмотрим многозначное векторное поле $\mathbf{v}(t, m)$ на $\mathcal{T}^n$, у которого образы телесны, выпуклы и замкнуты. Поскольку касательное расслоение к тору тривиально, то можно рассмотреть постоянное векторное поле V на торе. Обозначим через $\Psi(t, m, V)$ опорную функцию $\Psi(\mathbf{v}(t, m), V)$.

Условие 2.3. При любом V функция $\Psi(t, m, V)$ является гладкой.

Теорема 2.10. Пусть $\mathbf{v}(t, m)$ — многозначное равномерно ограниченное непрерывное векторное поле на $\mathcal{T}^n$, имеющее телесные выпуклые замкнутые образы и удовлетворяющее условию 2.3, а $\alpha(m)$ — многозначное $(2, 0)$ -тензорное поле, удовлетворяющее условию 2.2. Пусть также ξ_0 — случайный элемент со значениями в $\mathcal{T}^n$, чья плотность ρ_0 гладка и нигде не равна нулю. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ включение (2.21) имеет решение, которое существует на всем интервале $t \in [0, T]$.

◁ В работе [3] доказано, что при выполнении условия 2.3 непрерывное многозначное равномерно ограниченное векторное поле с замкнутыми выпуклыми образами имеет гладкий селектор. Так что утверждение теоремы следует из теоремы 2.9. ▷

Теперь рассмотрим случай, когда образы поля $\mathbf{v}(t, m)$ не телесны. Вместо этого предположим, что каждый образ $\mathbf{v}(t, m)$ лежит в подпространстве $T_m \mathcal{T}^n$, причем указанные подпространства имеют постоянную размерность $k < n$, не зависящую от $m \in \mathcal{T}^n$. Поставив каждому $m \in \mathcal{T}^n$ в соответствие указанное подпространство, мы получим отображение Φ из $\mathcal{T}^n$ в многообразие аффинных подпространств размерности k в касательных пространствах к $T_m \mathcal{T}^n$.

Условие 2.4. Отображение Φ является гладким.

Теорема 2.11. Пусть $\mathbf{v}(t, m)$ — многозначное равномерно ограниченное непрерывное векторное поле на $\mathcal{T}^n$ такое, что каждый образ $\mathbf{v}(t, m)$ лежит в подпространстве $T_m \mathcal{T}^n$, причем указанные подпространства имеют постоянную размерность $k < n$, не зависящую от $m \in \mathcal{T}^n$, и выполнено условие 2.4. Пусть $\alpha(m)$ — многозначное $(2, 0)$ -тензорное поле, удовлетворяющее условию 2.2. Пусть также ξ_0 — случайный элемент со значениями в $\mathcal{T}^n$, чья плотность ρ_0 гладка и нигде не равна нулю. Тогда для начального условия $\xi(0) = \xi_0$ включение (2.21) имеет решение, которое существует на всем интервале $t \in [0, T]$.

◁ В работе [26] доказано, что в рассматриваемом случае при выполнении условия 2.4 непрерывное многозначное равномерно ограниченное векторное поле с замкнутыми выпуклыми образами имеет гладкий селектор. Так что утверждение теоремы следует из теоремы 2.9. ▷

ГЛАВА 3

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ¹

3.1. Оптимальные решения для включений с производными в среднем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Совершенное решение включения (2.5) — это стохастический процесс с непрерывными выборочными траекториями такой, что он является решением в смысле определения 2.2 и мера, соответствующая ему на пространстве непрерывных кривых, является слабым пределом мер, порожденных решениями последовательности уравнений Ито диффузионного типа с непрерывными коэффициентами.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Отметим, что совершенные решения, аппроксимируемые решениями уравнений диффузионного типа, естественным образом возникают в приложениях. Однако это открытый вопрос: все ли решения являются совершенными или существуют несовершенные решения?

Ниже мы имеем дело с последовательностью процессов $\xi_i(t)$ (решениями последовательности стохастических дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$) таких, что для одной и той же константы $C_2 > 0$ при всех i выполняется оценка $E(\sup_{0 \leq t \leq T} \|\xi_i(t)\|^2) \leq C_2$ (см. [10, § III.2, лемма 1]). В представлении через координатный процесс последнее неравенство означает, что

$$\int_{\Omega} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|^2 \right) d\mu_i \leq C_2 \quad (3.1)$$

для всех мер μ_i , порожденных процессами $\xi_i(t)$ как выше. Для таких процессов нам будет нужно использовать следующее техническое утверждение.

¹Результаты этой главы получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском государственном университете).

Лемма 3.1. Рассмотрим последовательность вероятностных мер μ_k на $(\Omega, \mathcal{F})$ такую, что (3.1) выполняется для всех i . Пусть меры μ_i слабо сходятся к некоторой мере μ при $i \rightarrow \infty$. Введем меры ν_i соотношениями $d\nu_i = (1 + \|x(\cdot)\|_{C^0}) d\mu_i$ и меры ν_i^1 соотношениями $d\nu_i^1 = (1 + \|x(\cdot)\|_{C^0}^2) d\mu_i$. Тогда меры ν_i слабо сходятся к мере ν , заданной соотношением $d\nu = (1 + \|x(\cdot)\|_{C^0}) d\mu$, а меры ν_i^1 слабо сходятся к мере ν^1 , заданной соотношением $d\nu^1 = (1 + \|x(\cdot)\|_{C^0}^2) d\mu$.

Действительно, выберем произвольную ограниченную непрерывную функцию $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Утверждение леммы 3.1 вытекают из того, что по формуле (3.1) случайные величины $f(\xi_k)(1 + \|\xi_k\|)$ равномерно интегрируемы так же, как $f(\xi_k)(1 + \|\xi_k\|^2)$ (см., например, [49, лемма 8]).

Следствие 3.1. Пусть $b : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная вектор-функция такая, что $\|b(t, x(\cdot))\| < K(1 + \|x(\cdot)\|_{C^0})$, и аналогично b^1 такая, что $\|b^1(t, x(\cdot))\| < K(1 + \|x(\cdot)\|_{C^0}^2)$ для некоторого $K > 0$. Тогда

- (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b(t, x(\cdot)) d\mu_k = \int_{\Omega} b(t, x(\cdot)) d\mu;$
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b(t, x(\cdot))^2 d\mu_k = \int_{\Omega} b(t, x(\cdot))^2 d\mu.$

Действительно,

$$\int_{\Omega} b(t, x(\cdot)) d\mu_k = \int_{\Omega} \frac{b(t, x(\cdot))}{1 + \|x(\cdot)\|} d\nu_k$$

по лемме 3.1 стремится к $\int_{\Omega} \frac{b(t, x(\cdot))}{1 + \|x(\cdot)\|} d\nu$, поскольку $\frac{b(t, x(\cdot))}{1 + \|x(\cdot)\|}$ непрерывно и ограничено. Но $\frac{b(t, x(\cdot))}{1 + \|x(\cdot)\|} d\nu = b(t, x(\cdot)) d\mu$. Доказательство (ii) в точности аналогично.

Напомним, что смысл обозначения «норма множества» описан в конце Предисловия.

Теорема 3.1. Выберем произвольное начальное значение $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbf{a}(t, x)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми образами из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и пусть оно удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{a}(t, x)\|^2 < K(1 + \|x\|^2) \quad (3.2)$$

для некоторого $K > 0$.

Пусть $\alpha(t, x)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми образами из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $\bar{S}_+(n)$ такое, что для каждого $\alpha(t, x) \in \alpha(t, x)$ выполняется оценка

$$|\operatorname{tr} \alpha(t, x)| < K(1 + \|x\|^2) \quad (3.3)$$

при некотором $K > 0$.

Тогда для каждой последовательности $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $\varepsilon_i > 0$, каждая пара последовательностей $a_i(t, x)$ и $\alpha_i(t, x)$ ε_i -аппроксимаций отображений $\mathbf{a}(t, x)$ и $\alpha(t, x)$, соответственно, порождает совершенное решение включения (2.5) с начальным условием ξ_0 .

◁ Выберем последовательность $\varepsilon_i \rightarrow 0$ и последовательности ε_i -аппроксимаций $a_i(t, x)$ и $\tilde{\alpha}_i(t, x)$ как в условии теоремы. Без ограничения общности можно предполагать, что $\tilde{\alpha}_i(t, x)$ являются $\frac{\varepsilon_i}{2}$ -аппроксимациями отображения $\alpha(t, x)$.

В качестве нормы в $S(n)$ возьмем сужение на $S(n)$ евклидовой нормы (т. е. квадратный корень из суммы квадратов всех элементов матрицы) в пространстве $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, изоморфном $\mathbb{R}^{n^2}$. Поскольку все нормы в конечномерном пространстве $S(n)$ эквивалентны, для этой нормы (3.3) также выполняется, возможно с другой константой, для которой мы сохраним обозначение K .

Все $a_i(t, x)$ удовлетворяют (3.2) с некоторой константой большей, чем K из условия теоремы. Тем не менее мы сохраним обозначение K для этой константы. Поскольку $1 + \|x\|^2 \leq (1 + \|x\|)^2$, то для $a_i(t, x)$

$$\|a_i(t, x)\| < K(1 + \|x\|) \quad (3.4)$$

также выполняется.

Аппроксимации $\tilde{\alpha}_i(t, x)$ принимают значения в $\bar{S}_+(n)$. Введем обозначение: $\alpha_i(t, x) = \tilde{\alpha}_i(t, x) + \frac{\varepsilon_i}{4}I$, где I — единичная матрица. Сразу из построения следует, что $\alpha_i(t, x)$ при любом i является непрерывной, ε_i -аппроксимацией отображения $\alpha(t, x)$ и что в любой точке (t, x) оно принадлежит $S_+(n)$, т. е. является строго положительно определенным. Кроме того, $\alpha_i(t, x)$ удовлетворяет (3.3), где константа $K > 0$ больше, чем константа из условия теоремы, но тем не менее мы сохраним обозначение K для нее.

По лемме 2.1 существует непрерывное $A_i(t, x)$ такое, что $\alpha_i(t, x) = A_i(t, x)A_i^*(t, x)$. Непосредственно из определения следа мы получаем, что $\operatorname{tr} \alpha_i(t, x)$ равно сумме квадратов всех элементов матрицы $A_i(t, x)$, т. е. это квадрат евклидовой нормы в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Следовательно, из (3.3) и из очевидного неравенства $1 + \|x\|^2 \leq (1 + \|x\|)^2$

вытекает, что $A_i(t, x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|A_i(t, x)\| < K(1 + \|x\|). \quad (3.5)$$

Без ограничения общности можно предположить, что указанные выше непрерывные ε_i -аппроксимации a_i и A_i являются гладкими. Действительно, если некоторое a_i не гладко, то можно аппроксимировать его последовательностью гладких отображений a_{ij} , которая сходится к a_i при $j \rightarrow \infty$ относительно равномерной нормы на компактах. Следовательно, при достаточно большом j график отображения a_{ij} лежит в ε_i -окрестности графика $\mathbf{a}$. Таким образом, a_{ij} — ε_i -аппроксимация $\mathbf{a}$. Тогда заменим непрерывное a_i этим a_{ij} , т. е. примем его за новое a_i . Для A_i рассуждения те же самые. Отметим, что после такой замены оценки (3.4) и (3.5) остаются справедливыми. Таким образом, все стохастические дифференциальные уравнения

$$\xi_i(t) = \xi_0 + \int_0^t a_i(s, \xi_i(s)) ds + \int_0^t A_i(s, \xi_i(s)) dw(s) \quad (3.6)$$

имеют сильные решения $\xi_i(t)$, корректно определенные на всем интервале $[0, T]$ (см. § 8.3.7, подробное изложение можно найти в [10]). В частности, это означает, что каждый процесс ξ_i может быть задан на любом подходящем вероятностном пространстве, где $w(t)$ подчинен своему собственному «прошлому».

Рассмотрим измеримое пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$, введенное в § 8.3.1. Обозначим через $\mathcal{P}_t$ σ -подалгебру в $\tilde{\mathcal{F}}$, порожденную цилиндрическими множествами с базами на $[0, t]$, а через $\mathcal{N}_t$ — σ -алгебру, порожденную прообразами борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ при отображении $x(\cdot) \mapsto x(t)$.

Поскольку все решения $\xi_i(t)$ сильные, то они все могут быть заданы на некотором едином вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P})$ и, таким образом, могут рассматриваться как измеримые отображения из $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ в $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ (см. § 8.3.1).

На измеримом пространстве $([0, T], \mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ -алгебра, через λ_1 мы обозначаем меру Лебега.

Как это отмечено в § 8.3.1, каждый процесс $\xi_i(t)$ определяет меру μ_i на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ и на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu_i)$ координатный процесс описывает $\xi_i(t)$.

Поскольку все $a_i(t, x)$ удовлетворяют (3.4), а все $A_i(t, x)$ удовлетворяют (3.5) с одним и тем же K (см. выше), то уравнения (3.6) удовлетворяют условию леммы III.2.1 из [10] и замечанию после этой леммы при всех i , и, таким образом, оценка

$$E\left(\sup_{t \leq T} \|\xi_i(t)\|^2\right) \leq C_2 \quad (3.7)$$

выполняется для ξ_i , где C_2 зависит только от интервала $[0, T]$ и от K из формул (3.4) и (3.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В доказательстве леммы III.2.1 из [10] оценка (3.7) выведена из соотношения

$$E\left(\sup_{t \leq T} \|\xi_i(t)\|^2\right) \leq K \left(1 + \int_0^t E\left(\sup_{u \leq s} \|\xi_i(u)\|^2 ds\right)\right).$$

Поскольку решения сильные, то они могут быть заданы на различных вероятностных пространствах, и последнее неравенство выполняется на любом из этих пространств. В частности, оно выполняется на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu_i)$, где решение описано как координатный процесс. Это означает, что (3.1) выполняется при всех i для некоторого C_2 , зависящего только от интервала $[0, T]$ и от K из (3.4) и (3.5).

Кроме того, по следствию из [10, § III.2] множество мер $\{\mu_i\}$ слабо компактно. Так что для заданных последовательностей аппроксимаций a_i и A_i из последовательности соответствующих мер μ_i можно выделить подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ . Для простоты мы положим, что сама последовательность μ_i слабо сходится к μ . Обозначим через $\xi(t)$ координатный процесс на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu)$. Отметим, что $\mathcal{P}_t$ является «прошлым», а $\mathcal{N}_t$ — «настоящим» σ -алгебрами для $\xi(t)$.

Лемма 3.2 [10]. $\int_{\tilde{\Omega}} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|^2\right) d\mu \leq C_2$, где константа $C_2 > 0$ зависит только от интервала $[0, T]$ и от K из (3.4) и (3.5).

Так как последовательность мер μ_i слабо сходится к μ , то лемма 3.2 следует непосредственно из замечания 3.2 и следствия 3.1 (ii).

Продолжим доказательство теоремы 3.1. Так как $\|a_i(t, x(t))\|^2 \leq K(1 + \|x(t)\|^2)$ по (3.2), то, принимая во внимание лемму 3.2, получим,

что для некоторого $K_1 > 0$

$$\int_{[0,T] \times \Omega} \|a_i(t, x(t))\|^2 d\lambda_1 \times d\mu \leq K_1. \quad (3.8)$$

Введем отображения $\tilde{a}_i : [0, T] \times \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ по формуле $\tilde{a}_i(t, x(\cdot)) = a_i(t, x(t))$. Тогда из формулы (3.8) вытекает, что множество всех $\tilde{a}_i$ равномерно ограничено относительно нормы в гильбертовом пространстве $L_2([0, T] \times \tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, заданном относительно мер λ_1 в $[0, T]$ и μ в $\tilde{\Omega}$. Следовательно, множество всех $\tilde{a}_i$ слабо относительно компактно в $L_2([0, T] \times \tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, так что можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится в $L_2([0, T] \times \tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ к некоторому $\mathbf{a} : [0, T] \times \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Для простоты пусть сама $\tilde{a}_i(t, x(\cdot))$ будет этой подпоследовательностью.

Введем также $a(t, x(\cdot)) = E(\mathbf{a} | \mathcal{N}_t)$ на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu)$, $x(\cdot) \in \tilde{\Omega}$.

По лемме Мазура (см., например, [18]) для слабо сходящейся последовательности $\tilde{a}_i(t, x(\cdot))$ к $\mathbf{a} : [0, T] \times \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ в $L_2([0, T] \times \tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ существует последовательность конечных выпуклых комбинаций ее элементов, которая сходится в том же пространстве сильно (по норме). Выпуклые комбинации имеют вид

$$\bar{a}_k(t, x(\cdot)) = \sum_{i=j(k)}^{n(k)} \beta_i \tilde{a}_i(t, x(\cdot)),$$

где $\beta_i \geq 0$, $i = j(k), \dots, n(k)$, $\sum_{i=j(k)}^{n(k)} \beta_i = 1$ и $j(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Введем $\tilde{\mathbf{a}}(t, x(\cdot)) = \mathbf{a}(t, x(t))$. Так как $\mathbf{a}(t, x)$ имеет выпуклые образы, то $\bar{a}_i$ являются ε -аппроксимациями отображений $\tilde{\mathbf{a}}(t, x(\cdot))$ для некоторой последовательности $\varepsilon \rightarrow 0$. Поскольку сходимости сильная в $L_2([0, T] \times \tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, то предел $\mathbf{a}(t, x(\cdot))$ принадлежит $\tilde{\mathbf{a}}(t, x(\cdot))$ μ -п. н. Тогда из свойств условного математического ожидания следует, что μ -п. н. выполняется и что $a(t, \xi(\cdot))$ — селектор отображения $\tilde{\mathbf{a}}(t, \xi(\cdot)) = \mathbf{a}(t, \xi(t))$, измеримый относительно $\mathcal{N}_t$.

Отметим, что по построению и по свойствам условного математического ожидания последовательность $\bar{a}_i(t, x(\cdot))$ сходится сильно к $a(t, x(\cdot))$ в $L_2([0, T] \times \tilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, где $\tilde{\Omega}$ снабжено σ -алгеброй $\mathcal{N}_t$. Следовательно, она сходится также и по вероятности, и можно выбрать подпоследовательность, которая сходится μ -п. н. Чтобы не менять обозначения, мы полагаем, что $\bar{a}_i(t, x(\cdot))$ сходится к $a(t, x(\cdot))$ μ -п. н.

Выберем $\delta > 0$. По тереме Егорова (см., например, [18]) существует множество $K_\delta \subset \tilde{\Omega}$ такое, что $\mu(K_\delta) > 1 - \delta$, и на этом множестве последовательность $\bar{a}_i(t, x(\cdot))$ сходится к $a(t, x(\cdot))$ равномерно.

Пусть $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная ограниченная непрерывная функция, измеримая относительно $\mathcal{M}$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Из указанной выше равномерной сходимости на K_δ и ограниченности f вытекает, что при всех i и всех $t \in [0, T]$ одновременно существует $N(\varepsilon) > 0$ такое, что при $k > N(\varepsilon)$

$$\left\| \int_{K_\delta} f(x(\cdot)) (\bar{a}_k(t, x(\cdot)) - a(t, x(\cdot))) d\mu_i \right\| < \varepsilon. \quad (3.9)$$

Так как f ограничено, то существует некоторое $\Xi > 0$ такое, что $|f(x(\cdot))| < \Xi$ для всех $x(\cdot) \in \Omega$. Отметим также, что $\mu(\Omega \setminus K_\delta) < \delta$. С другой стороны, $\|a_i(t, \xi_i(t))\| < K(1 + \|\xi_i(t)\|)$ по (3.4) и $\sup_i \int_\Omega \|\bar{\xi}_i\|_{C^0}^2 d\mu < C_2$ по (3.7). Отметим также соотношение (см. [4])

$$\int_{\|\xi_i\| > c} \|\xi_i\|_{C^0} d\mu_i < \frac{1}{c} \int_{\|\xi_i\| > c} \|\xi_i\|_{C^0}^2 d\mu.$$

Таким образом, принимая во внимание замечание 3.2, получим

$$\left\| \int_{\tilde{\Omega} \setminus K_\delta} f(x(\cdot)) (\bar{a}_k(t, x(\cdot)) - a(t, x(\cdot))) d\mu_i \right\| < \frac{\delta \Xi K(1 + C_2)}{c},$$

т. е. поскольку δ — произвольное положительное число, то приведенная выше норма интеграла становится меньше любого положительного числа когда $\delta \rightarrow 0$. Вместе с (3.9) это означает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \int_{\Omega} f(x(\cdot)) (\bar{a}_k(t, x(\cdot)) - a(t, x(\cdot))) d\mu_i \right\| = 0 \quad (3.10)$$

для всех i равномерно.

Отметим, что $a(t, x(\cdot))$ непрерывно на множестве полной меры μ в $\tilde{\Omega}$. Действительно, оно является равномерным пределом непрерывных функций на K_δ при любом $\delta > 0$ и, таким образом, на любом конечном объединении множеств K_δ . Так что оно непрерывно на конечных объединениях множеств K_δ . Очевидным образом $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{i=1}^j \mu(K_{\delta_i})) = 1$ для последовательности $\delta_i \rightarrow 0$.

Тогда по свойствам слабой сходимости мер и по (3.4) можно применить следствие 3.1 (i) и получить, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x(\cdot)) a(t, x(\cdot)) d\mu_k = \int_{\Omega} f(x(\cdot)) a(t, x(\cdot)) d\mu$$

и что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x(\cdot)) (x(t + \Delta t) - x(t)) d\mu_k &= \\ &= \int_{\Omega} f(x(\cdot)) (x(t + \Delta t) - x(t)) d\mu. \end{aligned}$$

Поскольку по построению $D\xi_k(t) = a_k(t, \xi_k(t))$, то

$$\lim_{\Delta t \rightarrow +0} \int_{\Omega} f(x(\cdot)) (x(t + \Delta t) - x(t) - a_k(t, x(t))) d\mu_k = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow +0} \left(\sum_{i=j(k)}^{n(k)} \beta_i \left(\int_{\Omega} f(x(\cdot)) (x(t + \Delta t) - x(t) - a_i(t, x(t))) d\mu_i \right) \right) = 0.$$

Выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=j(k)}^{n(k)} \beta_i \left(\int_{\Omega} f(x(\cdot)) (x(t + \Delta t) - x(t) - a_i(t, x(t))) d\mu_i \right) - \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Omega} f(x(\cdot)) (x(t + \Delta t) - x(t) - a(t, x(\cdot))) d\mu \right\| \leq \\ & \leq \left\| \int_{\Omega} f(x(\cdot)) ((x(t + \Delta t) - x(t)) d\mu_k - \int_{\Omega} f(x(\cdot)) ((x(t + \Delta t) - x(t)) d\mu) \right\| + \\ & + \left\| \sum_{i=j(k)}^{n(k)} \beta_i \left(\int_{\Omega} f(x(\cdot)) a_i(t, x(t)) d\mu_i - \int_{\Omega} f(x(\cdot)) a_i(t, x(t)) d\mu \right) \right\| + \\ & + \left\| \int_{\Omega} f(x(\cdot)) \bar{a}_k(t, x(\cdot)) d\mu - \int_{\Omega} f(x(\cdot)) a(t, x(\cdot)) d\mu \right\|, \end{aligned}$$

где правая часть этого неравенства становится меньше любого положительного числа при достаточно большом k . Так что

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \int_{\Omega} f(x(\cdot))(x(t + \Delta t) - x(t) - a(t, x(\cdot))) d\mu = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \left(\sum_{i=j(k)}^{n(k)} \beta_i \left(\int_{\Omega} f(x(\cdot))(x(t + \Delta t) - x(t) - a_i(t, x(t))) d\mu_i \right) \right) = 0, \end{aligned}$$

и, таким образом, $D\xi(t) = a(t, \xi(\cdot)) \in \tilde{\mathbf{a}}(t, \xi(\cdot)) = \mathbf{a}(t, \xi(t))$ μ -п. н.

Так как $\|A_i(t, x(t))\|^2 = \text{tr } \alpha_i(t, x(t)) \leq K(1 + \|x(t)\|^2)$ по (3.3), то, принимая во внимание лемму 3.2, получаем

$$\int_{\Omega \times [0, T]} \|A_i(t, x(t))\|^2 d\mu \times d\lambda_1 \leq K_2 \quad (3.11)$$

для всех i и некоторого $K_2 > 0$. Введем $\tilde{A}_i(t, x(\cdot)) = A_i(t, x(t))$. Тогда из (3.11) следует, что множество всех $\tilde{A}_i$ равномерно ограничено относительно нормы в гильбертовом пространстве $L_2([0, T] \times \tilde{\Omega}, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$. Следовательно, это множество слабо относительно компактно в этом пространстве, и, таким образом, можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится в $L_2([0, T] \times \tilde{\Omega}, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ к некоторому $A : [0, T] \times \tilde{\Omega} \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Для простоты пусть сама $\tilde{A}_i(t, x(\cdot))$ будет этой подпоследовательностью. Рассмотрим также $A(t, x(\cdot)) = E(A|\mathcal{N}_t)$ на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu)$, $x(\cdot) \in \tilde{\Omega}$. По построению μ -п. н. $A(t, \xi(\cdot))A^*(t, \xi(\cdot))$ является селектором $\alpha(t, \xi(t))$.

Тогда, применяя лемму Мазура и теорему Егорова, аналогично рассуждениям выше показываем, что для $f(\cdot)$

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \int_{\Omega} f(\cdot) [(x(t + \Delta t) - x(t))(x(t + \Delta t) - x(t))^* - \\ & - A(t, x(t))A^*(t, x(t))] d\mu = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $D_2\xi(t) = A(t, \xi(t))A(t, \xi(t))^*$. Теорема 3.1 доказана. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Отметим, что все последовательности ε -аппроксимаций при всех последовательностях $\varepsilon_i \rightarrow 0$, использованных при доказательстве теоремы 3.1, удовлетворяют (3.4) и (3.5) с одним и тем

же K , так что по следствию из [10, § III.2] множество мер $\{\mu_i\}$ (соответствующих всем последовательностям и всем i) слабо компактно.

Пусть f — непрерывная ограниченная вещественная функция на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Для решений включения (2.5) рассмотрим функционал качества вида

$$J(\xi(\cdot)) = E \int_0^T f(t, \xi(t)) dt. \quad (3.12)$$

Мы ищем решения, на которых этот функционал качества принимает минимальное значение.

Теорема 3.2. Среди совершенных решений включения (2.5), построенных в доказательстве теоремы 3.1, имеется решение $\xi(t)$, на котором значение J минимально.

◁ Поскольку все меры на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$, построенные в доказательстве теоремы 3.1 о совершенных решениях включения (2.5), являются вероятностными и функция f в (3.12) ограничена, то множество значений J на этих мерах ограничено. Если это множество значений имеет минимум, тогда соответствующая мера μ — именно та, которую мы ищем: координатный процесс на пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu)$ и есть оптимальное решение.

Предположим, что указанное выше множество значений не имеет минимума, но тогда оно имеет инфимум $\aleph$, который является предельной точкой в этом множестве. Пусть μ_i^* — последовательность такая, что для соответствующих решений $\xi_i^*(t)$ значения $J(\xi_i^*(t))$ сходятся к $\aleph$. Каждая μ_i^* есть слабый предел последовательности мер μ_{ij} , соответствующих некоторой последовательности ε_j -аппроксимаций при $j \rightarrow \infty$. Выберем из последовательности подпоследовательность (для простоты мы обозначаем ее тем же символом μ_{ij}) такую, что для соответствующих решений $\xi_{ij}(t)$ и для всех i мы получаем равномерную сходимость значений $J(\xi_{ij}(\cdot))$ к $J(\xi_i^*(\cdot))$ при $j \rightarrow \infty$. Тогда $J(\xi_{ii}(\cdot)) \rightarrow \aleph$ при $i \rightarrow \infty$. Поскольку множество всех мер, соответствующих всем аппроксимациям, слабо компактно (см. выше), то можно выбрать из μ_{ii} подпоследовательность (обозначим ее тем же символом μ_{ii}), которая слабо сходится к некоторой мере μ^* . По построению для координатного процесса $\xi^*(t)$ на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu^*)$ получаем $J(\xi^*(\cdot)) = \aleph$, т. е. значение минимально. Поскольку μ^* — предел мер μ_{ii} , то $\xi^*(t)$ — совершенное решение (2.5), которое мы ищем. ▷

3.2. Случай включений типа геометрического броуновского движения

Здесь мы имеем дело со следующим обобщением так называемого геометрического броуновского движения, а именно, с процессом $S(t)$, который удовлетворяет системе стохастических дифференциальных уравнений²

$$\begin{aligned} dS^\alpha(t) = & S^\alpha a^\alpha(t; S^1(t), \dots, S^n(t)) dt + \\ & + S^\alpha(t) A_\beta^\alpha(t; S^1(t), \dots, S^n(t)) dw^\beta, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где w^β — независимые винеровские процессы в $\mathbb{R}^1$, которые в совокупности образуют винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$, $a(t, x)$ — векторное поле на $\mathbb{R}^n$, $A(t, x)$ — отображение из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в пространство линейных операторов $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, а (A_β^α) обозначает матрицу оператора A . Отметим, что (стандартное) геометрическое броуновское движение удовлетворяет (3.13) в случае, где $a(t)$ и $A(t)$ зависят только от времени t (т. е. не зависят от точки $x \in \mathbb{R}^n$).

Процессы, удовлетворяющие (3.13), возникают в различных стохастических моделях.

Предположим, что координаты S^α решения (3.13) положительны при всех t . Тогда по формуле Ито процесс

$$\xi(t) = \ln S(t) = \{\ln S^1(t), \dots, \ln S^n(t)\}$$

удовлетворяет уравнению

$$d\xi^\alpha(t) = \left(a^\alpha - \frac{1}{2} (A_\beta^\alpha \delta^{\beta\gamma} A_\gamma^\alpha) \right) (t, \xi(t)) dt + A_\beta^\alpha(t, \xi(t)) dw^\beta(t), \quad (3.14)$$

поскольку $dw^\alpha dw^\beta = \delta^{\alpha\beta} dt$ (здесь $\delta^{\alpha\beta}$ — символ Кронекера: $\delta^{\alpha\alpha} = 1$, $\delta^{\alpha\beta} = 0$ для $\alpha \neq \beta$).

Аналогично из формулы Ито выводим, что если процесс $\xi(t)$ удовлетворяет (3.14), то $S(t) = \exp \xi(t) = (\exp \xi^1(t), \dots, \exp \xi^n(t))$ удовлетворяет (3.13). Отметим, что в этом случае координаты S^α положительны.

Обозначим через B симметрическую положительно определенную матрицу AA^* (где A^* — оператор, сопряженный к A как выше),

²Напомним, что мы используем соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющемуся верхнему и нижнему индексу.

а через $\text{diag } B$ — вектор, построенный из диагональных элементов матрицы B . Отметим, что $A_\beta^\alpha \delta^{\beta\gamma} A_\gamma^\alpha$ — это α -й элемент $B^{\alpha\alpha}$ из $\text{diag } B$. Если процесс удовлетворяет (3.14), он также удовлетворяет следующему уравнению с производными в среднем:

$$\begin{cases} D\xi(t) = (a - \frac{1}{2} \text{diag } B)(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) = B(t, \xi(t)) \end{cases} \quad (3.15)$$

или, эквивалентно,

$$\begin{cases} D\xi(t) + \frac{1}{2} \text{diag } D_2\xi(t) = a(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) = B(t, \xi(t)). \end{cases} \quad (3.16)$$

Пусть $\xi(t)$ — решение уравнения (3.15) (или (3.16)). Мы называем его *логарифмом* процесса $S(t) = \exp \xi(t) = (e^{\xi^1(t)}, \dots, e^{\xi^n(t)})$.

Отметим, что если уравнение (3.15) (или (3.16)) задано априори с некоторым $B \in \bar{S}_+(n)$, то процесс $S(t) = \exp(\xi(t))$ может не удовлетворять (3.13). Таким образом, модели, основанные на уравнениях (3.15) или (3.16), покрывают более широкий класс задач, чем те, которые основаны на (3.14).

Рассмотрим многозначные отображения $\mathbf{a} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{B} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{S}_+(n)$ и следующее включение с производными в среднем:

$$\begin{cases} D\xi(t) + \frac{1}{2} \text{diag } D_2\xi(t) \in \mathbf{a}(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \mathbf{B}(t, \xi(t)). \end{cases} \quad (3.17)$$

Включение (3.17) называется *включением типа геометрического броуновского движения*. Такое включение может быть построено из уравнения вида (3.16) с управлением обычным способом. Пусть правые части $a(t, x, u)$ и $B(t, x, u)$ уравнения (3.16) зависят от управляющего параметра u , а $U(t, x)$ — множество возможных значений управляющего параметра в (t, x) . Тогда, построив

$$\mathbf{a}(t, x) = \text{cl} \bigcup_{u \in U(t, x)} a(t, x, u) \quad \text{и} \quad \mathbf{B}(t, x) = \text{cl} \bigcup_{u \in U(t, x)} B(t, x, u),$$

где cl обозначает выпуклое замыкание, получим включение (3.17).

Ниже опишем условия, при которых решения (3.17) существуют, и докажем существование оптимального решения максимизирующего (или минимизирующего) функционал качества J , введенный в предыдущем параграфе.

Подчеркнем, что включение (3.17) имеет вид, аналогичный уравнению (3.16). Включение вида, аналогичного (3.15), не корректно.

Теорема 3.3. *Зафиксируем произвольное начальное значение $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbf{a}(t, x)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми образами из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, и пусть для всех $a \in \mathbf{a}(t, x)$ выполняется оценка*

$$\|a\|^2 < K(1 + \|x\|^2) \quad (3.18)$$

для некоторого $K > 0$.

Пусть $\mathbf{B}(t, x)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми образами из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $\bar{S}_+(n)$ такое, что для каждого $B(t, x) \in \mathbf{B}(t, x)$ выполняется оценка

$$|\operatorname{tr} B(t, x)| < K(1 + \|x\|) \quad (3.19)$$

для некоторого $K > 0$.

Тогда для каждой последовательности $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $\varepsilon_i > 0$, каждая пара последовательностей $a_i(t, x)$ и $B_i(t, x)$ ε_i -аппроксимаций $\mathbf{a}(t, x)$ и $\mathbf{B}(t, x)$, соответственно, порождает совершенное решение включения (3.17) с начальным условием ξ_0 .

◁ Теорема 3.3 доказывается по той же схеме рассуждений, как и теорема 3.1, с небольшими модификациями, вызванными наличием дополнительного слагаемого $\frac{1}{2} \operatorname{diag} D_2 \xi(t)$ в первом включении системы (3.17) по сравнению с первым включением системы (2.5) и, как следствие, различием между неравенствами (3.3) и (3.19). Поэтому приведем подробно первую часть доказательства — частично повторяющую первую часть доказательства теоремы 3.1, но содержащую указанные модификации — и оставим завершение доказательства читателю, поскольку оно совпадает с завершением доказательства теоремы 3.1.

Зафиксируем последовательность $\varepsilon_i \rightarrow 0$ и последовательности ε_i -аппроксимаций $a_i(t, x)$ и $\tilde{B}_i(t, x)$ из условия теоремы. Без потери общности мы можем считать, что $\tilde{B}_i(t, x)$ являются $\frac{\varepsilon_i}{2}$ -аппроксимациями $\mathbf{B}(t, x)$.

Как норму в $S(n)$ мы возьмем сужение на $S(n)$ евклидовой нормы в пространстве $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, изоморфном $\mathbb{R}^{n^2}$. Без потери общности мы положим, что (3.19) выполняется в этой норме.

Отметим, что $a_i(t, x)$ удовлетворяют (3.18) с некоторой константой, которая больше, чем K из условия теоремы. Тем не менее сохраним обозначение K для этой константы. Так как $1 + \|x\|^2 \leq (1 + \|x\|)^2$,

то для $a_i(t, x)$ выполняется оценка

$$\|a_i(t, x)\| < K(1 + \|x\|). \quad (3.20)$$

Аппроксимации $\tilde{B}_i(t, x)$ принимают значения в $\bar{S}_+(n)$. Введем обозначение: $B_i(t, x) = \tilde{B}_i(t, x) + \frac{\varepsilon_i}{4}I$, где I — единичная матрица. Непосредственно из построения следует, что $B_i(t, x)$ при любом i является непрерывной ε_i -аппроксимацией $\mathbf{B}(t, x)$ и что в каждой точке (t, x) она принадлежит $S_+(n)$, т. е. она строго положительно определена. Кроме того, $B_i(t, x)$ удовлетворяет (3.19), где константа $K > 0$ больше, чем константа из условия теоремы. Но тем не менее мы сохраним обозначение K для новой константы.

По лемме 2.1 существуют непрерывные поля $A_i(t, x)$ такие, что $B_i(t, x) = A_i(t, x)A_i^*(t, x)$. Прямо по определению следа получаем, что $\text{tr } B_i(t, x)$ равен сумме квадратов всех элементов матрицы $A_i(t, x)$, т. е. квадрату евклидовой нормы $A_i(t, x)$ в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Следовательно, из (3.19) и из очевидного неравенства $(1 + \|x\|) \leq (1 + \|x\|)^2$ вытекает, что все $A_i(t, x)$ удовлетворяют

$$\|A_i(t, x)\| < K(1 + \|x\|). \quad (3.21)$$

Без ограничения общности, как и в доказательстве теоремы 3.1, можно считать, что указанные выше непрерывные аппроксимации a_i и A_i являются гладкими (см. доказательство теоремы 3.1).

Рассмотрим последовательность стохастических дифференциальных уравнений

$$d\xi_i(t) = \left(a_i - \frac{1}{2} \text{diag } B_i \right) (t, \xi_i(t)) dt + A_i(t, \xi_i(t)) dw(t), \quad (3.22)$$

где $w(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что каждое $(a_i - \frac{1}{2} \text{diag } B_i)(t, x)$ гладко, как разность гладких отображений.

Рассмотрим $\|(a_i - \frac{1}{2} \text{diag } B_i)(t, x)\|$ и покажем, что для него выполняется оценка типа (3.20) с константой большей, чем K . Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| \left(a_i - \frac{1}{2} \text{diag } B_i \right) (t, x) \right\| &\leq \|a_i(t, x)\| + \left\| \frac{1}{2} \text{diag } B_i(t, x) \right\| < \\ &< K(1 + \|x\|) + K_1 \text{tr } B_i(t, x) < K_2(1 + \|x\|). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Таким образом, коэффициенты уравнений (3.22) гладки и удовлетворяют оценкам (3.23) и (3.21). Значит каждое уравнение (3.22) этой последовательности имеет единственное сильное решение $\xi_i(t)$, корректно определенное на всем промежутке $[0, T]$ (см. [10]).

Дальнейшее доказательство совпадает с доказательством теоремы 3.1. $\triangleright$

Отметим, что для мер, соответствующих ε -аппроксимациям из доказательства теоремы 3.3, выполняется замечание 3.3, т. е. это множество мер слабо компактно.

Пусть f — непрерывная ограниченная вещественная функция на $\mathbb{R}^n$. Для решений (3.17) рассмотрим функционал качества (3.12).

Теорема 3.4. *Среди совершенных решений включения (3.17), построенных в доказательстве теоремы 3.3, имеется решение $\bar{\xi}(t)$, на котором значение J минимально (или максимально).*

Доказательство теоремы 3.4 совпадает с доказательством теоремы 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Отметим, что с помощью тех же рассуждений, как в доказательстве теоремы 3.4, можно доказать существование максимального (минимального) решения для другого функционала качества. Например, пусть f — непрерывная ограниченная вещественная функция на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$. Для решений (3.17) рассмотрим функционал качества вида

$$J_1(\xi(\cdot)) = Ef(T, \xi(T)) dt. \quad (3.24)$$

Тогда существует совершенное решение $\xi(t)$, на котором значение J_1 максимально (минимально).

Пример применения. Рассмотрим включение (3.17), полученное из уравнения с управлением. Напомним, что решения $\xi(t)$ включения (3.17) — логарифмы процессов $S(t)$, которые часто возникают в приложениях. Естественно предполагать, что на конечном временном интервале $[0, T]$ значения всех координат процесса $S(t)$ не могут уйти в бесконечность, и, таким образом, их сумма не превышает некоторого числа $C > 0$. При этих предположениях рассмотрим функцию $g: \mathbb{R}^n \rightarrow R$, заданную формулой

$$g(X) = \begin{cases} x^1 + \dots + x^n, & x^1 + \dots + x^n < C, \\ C, & x^1 + \dots + x^n \geq C, \end{cases} \quad (3.25)$$

где $x^1, \dots, x^n$ — координаты вектора $X \in \mathbb{R}^n$. Введем функцию $f(X) = g(e^{x^1}, \dots, e^{x^n})$. Отметим, что по построению f является ограниченной непрерывной функцией, так что можно рассмотреть функционал качества J_1 (см. (3.24)) с этой f . Тогда оптимальное решение, существование которого доказано в теореме 3.4, максимизирует среднее значение тотальной цены в конечный момент времени T среди процессов $S(t) = \exp \xi(t)$, логарифмы которых $\xi(t)$ удовлетворяют (3.17). Если рассмотрим функционал качества J (см. (3.12)), оптимальное решение максимизирует (минимизирует) интеграл среднего значения тотальной цены от начального значения времени до момента T .

3.3. Аналог леммы Филиппова

Здесь, следуя [17], получим модификацию известной леммы Филиппова из оптимального управления детерминированными системами, а именно, покажем, что для уравнений с управлением с производными в среднем для оптимальных решений соответствующих включений, существование которых доказано в двух предыдущих параграфах, существует управление их реализующее.

Мы отсылаем читателя к § 8.1, где описаны понятия замкнутости и непрерывности многозначного отображения.

Нам понадобится следующее техническое утверждение.

Лемма 3.3. Пусть многозначное отображение $F : [0, T] \times C^0 \times \mathbb{R}^m \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$ замкнуто, отображение $g : [0, T] \times C^0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно и для любого $t \in [0, T]$ найдется $u(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}^m$ такое, что

$$g(t, x(\cdot)) \in F(t, x(\cdot), u(t, x(\cdot))).$$

Тогда многозначная функция $\Gamma : [0, T] \times C^0 \rightarrow C(\mathbb{R}^m)$,

$$\Gamma(t, x(\cdot)) = \{u(t, x(\cdot)) \mid u(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}^m, g(t, x(\cdot)) \in F(t, x(\cdot), u(t, x(\cdot)))\}$$

замкнута.

◁ Нам необходимо доказать, что многозначное отображение Γ замкнуто. По теореме 8.5 это означает, что для любых последовательностей $\{t_k, x_k(\cdot)\} \in [0, T] \times C^0$, $\{t_k, x_k(\cdot)\} \rightarrow \{t, x(\cdot)\}$, и для $u_k(t, x(\cdot))$ таких, что

$$u_k(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}^m,$$

$$g(t_k, x_k(\cdot)) \in F(t_k, x_k(\cdot), u_k(t, x(\cdot))),$$

$$u_k(t, x(\cdot)) \rightarrow u(t, x(\cdot))$$

выполнено $u(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}^m$, $g(t, x(\cdot)) \in F(t, x(\cdot), u(t, x(\cdot)))$.

Мнозначное отображение F замкнуто. Тогда по теореме 8.5 для любых последовательностей

$$\{t_k, x_k(\cdot), u_k(t, x(\cdot))\} \in [0, T] \times C^0 \times \mathbb{R}^m,$$

$$\{t_k, x_k(\cdot), u_k(t, x(\cdot))\} \rightarrow \{t, x(\cdot), u_k(t, x(\cdot))\},$$

и $y_k \subset \mathbb{R}^n$ таких, что $y_k \in F(t_k, x_k(\cdot), u_k(t, x(\cdot)))$, $y_k \rightarrow y$, выполнено $y \in F(t, x(\cdot), u(t, x(\cdot)))$.

Так как отображение g непрерывно, то для любых $\{t_k, x_k(\cdot)\} \rightarrow \{t, x(\cdot)\}$ $g(t_k, x_k(\cdot)) \rightarrow g(t, x(\cdot))$. Объединив два утверждения, получим замкнутость отображения Γ . $\triangleright$

Будем рассматривать управляемую систему с обратной связью вида

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t, \xi(t), u_1(t\xi(t))), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t), u_2(t\xi(t))), \\ u_1(t, \xi(t)) \in U_1(t, \xi(t)), \\ u_2(t, \xi(t)) \in U_2(t, \xi(t)). \end{cases} \quad (3.26)$$

Здесь $a : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\alpha : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{S}_+(n)$ — измеримые по Борелю отображения; $\mathbb{R}^m$ — пространство управляющих параметров; $U_1, U_2 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ — многозначные функции обратной связи, где $\mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ — множество компактов в $\mathbb{R}^m$.

Решением управляемой системы (3.26) назовем пару $\{\xi(t), (u_1, u_2)\}$, состоящую из процесса $\xi(t)$ и управления (u_1, u_2) . Здесь $\xi(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — процесс диффузионного типа такой, что Р-п.н. удовлетворяет (3.26) почти всюду на $[0, T]$, а $u_1, u_2 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — измеримые по Борелю функции, удовлетворяющие включениям из (3.26) всюду на $[0, T]$.

Введем многозначные отображения $\mathbf{a}(t, x) = a(t, x, U_1(t, x))$ и $\boldsymbol{\alpha}(t, x) = \alpha(t, x, U_1(t, x))$. От управляемой системы перейдем к ассоциированному с ней дифференциальному включению

$$\begin{cases} D\xi(t) \in \mathbf{a}(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t, \xi(t)). \end{cases} \quad (3.27)$$

Очевидно, что каждая траектория системы (3.26) является решением включения (3.27). Установим и обратную зависимость.

Теорема 3.5. Пусть $\mathbf{a}(t, x)$ является полунепрерывным сверху многозначным отображением с замкнутыми выпуклыми образами из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{a}(t, x)\|^2 < K(1 + \|x\|^2) \quad (3.28)$$

для некоторого $K > 0$.

Пусть $\alpha(t, x)$ является полунепрерывным сверху многозначным отображением с замкнутыми выпуклыми образами из $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ в $\bar{S}_+(n)$ таким, что для любого $\alpha(t, x) \in \alpha(t, x)$ имеет место следующая оценка:

$$|\operatorname{tr} \alpha(t, x)| < K(1 + \|x\|^2) \quad (3.29)$$

для некоторого $K > 0$.

Многозначные отображения $U_1(t, x), U_2(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ полунепрерывны сверху и

$$\begin{cases} D\xi(t) \in \mathbf{a}(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \alpha(t, \xi(t)) \end{cases}$$

почти для всех $t \in I$.

Тогда существуют такие измеримые селекторы $u_1 \in S_{U_1}$ и $u_2 \in S_{U_2}$ (где S_{U_1}, S_{U_2} — множество селекторов многозначных отображений U_1 и U_2 соответственно), что

$$\begin{cases} D\xi(t) = \mathbf{a}(t, \xi(t), u_1(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t), u_2(t)), \\ u_1(t) \in U_1(t), \\ u_2(t) \in U_2(t) \end{cases}$$

почти для всех $t \in [0, T]$.

◁ Рассмотрим последовательность $\varepsilon_i \rightarrow 0$ и соответствующие ей последовательности непрерывных аппроксимаций $a_i(t, x)$ и $\alpha_i(t, x)$, как в теореме 3.1 (напомним, что $\alpha_i(t, x)$ принадлежат $S_+(n)$). Все $a_i(t, x)$ удовлетворяют (3.28) с некоторой константой, большей чем K . Сохраним обозначение K для этой константы. Так как $1 + \|x\|^2 \leq (1 + \|x\|)^2$, то для $a_i(t, x)$ выполнена оценка

$$\|a_i(t, x)\| < K(1 + \|x\|). \quad (3.30)$$

По лемме 2.1 существуют непрерывные $A_i(t, x)$ такие, что $\alpha_i(t, x) = A_i(t, x)A_i^*(t, x)$. Из определения следа получаем, что $\text{tr } \alpha_i(t, x)$ равно сумме квадратов всех элементов $A_i(t, x)$, т. е. это квадрат евклидовой нормы в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Следовательно, из (3.29) и неравенства $1 + \|x\|^2 \leq (1 + \|x\|)^2$ следует, что $A_i(t, x)$ удовлетворяет

$$\|A_i(t, x)\| < K(1 + \|x\|). \quad (3.31)$$

Без ограничения общности мы можем предполагать, что непрерывные ε_i -аппроксимации a_i и A_i являются гладкими. Таким образом, стохастические уравнения

$$\xi_i(t) = \xi_0 + \int_0^t a_i(s, \xi_i(s)) ds + \int_0^t A_i(s, \xi_i(s)) dw(s)$$

имеют сильные решения $\xi_i(t)$, определенные на всем интервале $[0, T]$.

Процесс $\xi_i(t)$ определяет меру μ_i на $(\Omega, \mathcal{F})$. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_i)$ процесс $\xi_i(t)$ является координатным процессом, т. е. $\xi(t, x(\cdot)) = x(t)$, $x(\cdot) \in \Omega$.

По замечанию из [10, § III.2] множество мер $\{\mu_i\}$ слабо компактно. Таким образом, для заданной последовательности аппроксимаций a_i и A_i из последовательности соответствующих мер μ_i можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой мере μ . Для простоты предположим, что сама последовательность μ_i слабо сходится к μ . Обозначим через $\xi(t)$ координатный процесс на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Будем использовать следующее утверждение:

Лемма 3.4 [10]. $\int_{\Omega} (\sup_{0 \leq t \leq T} \|x(t)\|^2) d\mu \leq C_2$, где константа $C_2 > 0$ зависит только от интервала $[0, T]$ и K из (3.30) и (3.31).

Так как $\|a_i(t, x(t))\|^2 \leq K(1 + \|x(t)\|^2)$ по (3.28), то, используя лемму 3.4, получим, что для некоторого $K_1 > 0$

$$\int_{[0, T] \times \Omega} \|a_i(t, x(t))\|^2 d\lambda_1 \times d\mu \leq K_1. \quad (3.32)$$

Введем отображения $\tilde{a}_i : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ по формуле $\tilde{a}_i(t, x(\cdot)) = a_i(t, x(t))$. Из (3.8) следует, что множество всех $\tilde{a}_i$ равномерно ограничено относительно нормы в гильбертовом пространстве $L_2([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, определенного относительно мер λ_1 в $[0, T]$ и μ в Ω . Так как

множество всех $\tilde{a}_i$ слабо относительно компактно в $L_2([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, то можно выбрать подпоследовательность, которая слабо сходится в $L_2([0, T] \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ к определенному $a : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Для простоты пусть само $\tilde{a}_i(t, x(\cdot))$ будет этой подпоследовательностью.

Введем также $\bar{a}(t, x(\cdot)) = E(a | \mathcal{N}_t)$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $x(\cdot) \in \Omega$. Из доказательства теоремы 3.1 следует, что $\bar{a}(t, x(\cdot))$ непрерывно на множестве полной меры μ в Ω и $D\xi(t) = \bar{a}(t, \xi(\cdot))$.

Рассмотрим многозначную функцию $\Gamma : [0, T] \times C^0 \rightarrow C(\mathbb{R}^m)$:

$$\Gamma(t, x(\cdot)) = \{u(t, x(\cdot)) \mid u(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}^m, \bar{a}(t, x(\cdot)) \in a(t, x(\cdot), U_1(t, x(\cdot)))\}.$$

Нетрудно видеть, что многозначная функция $\Phi = \Gamma \cap U_1 : [0, T] \times C^0 \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ корректно определена и ее измеримый селектор является искомой функцией $u_1 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно доказать измеримость многозначного отображения Φ .

Из теоремы 8.3 следует замкнутость многозначного отображения a на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, но тогда в силу леммы 3.3 многозначная функция Γ замкнута на множестве полной меры μ в Ω . Следовательно (по теореме 8.4), многозначное отображение Φ полунепрерывно сверху на множестве полной меры μ в Ω , откуда в силу измеримости полунепрерывного сверху многозначного отображения легко вытекает измеримость Φ на множестве полной меры μ в Ω .

Аналогично доказывается измеримость,

$$\Psi = \Pi \cap U_2 : [0, T] \times C^0 \rightarrow K(\mathbb{R}^m),$$

$$\Pi(t, x(\cdot)) = \{u(t, x(\cdot)) \mid u(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}^m, \bar{\alpha}(t, x(\cdot)) \in \alpha(t, x(\cdot), U_2(t, x(\cdot)))\}.$$

Так что существуют измеримые селекторы $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ такие, что

$$\begin{cases} D\xi(t) = a(t, \xi(t), u_1(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t, \xi(t), u_2(t)). \end{cases} \quad (3.33)$$

Таким образом, при указанных выше условиях для любого решения $\xi(t)$ включения 3.27 найдутся такие измеримые функции $u_1, u_2 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, что пара $\{\xi(t), (u_1, u_2)\}$ будет решением системы (3.26). Теорема 3.5 доказана. $\triangleright$

В частности, полученное утверждение верно для оптимальных решений, чье существование доказано в двух предыдущих параграфах.

ГЛАВА 4

УРАВНЕНИЯ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ¹

4.1. Постановка задачи

Как отмечено в Предисловии, термин «уравнение леонтьевского типа» предложен Г. А. Свиридюком. Этот термин обусловлен тем обстоятельством, что при некоторых дополнительных предположениях система моделирует межотраслевую экономику «затраты–выпуск» Леонтьева с учетом запасов. Это специальный тип так называемых алгебро-дифференциальных уравнений, в которых в левой части при производной стоит вырожденная матрица, а перед неизвестным в правой части — невырожденная матрица, и, кроме того, в правой части имеется свободный член, зависящий только от времени. В работах А. Л. Шестакова и Г. А. Свиридюка [29, 65] в терминах этих уравнений была создана и изучена модель динамического искажения сигналов в радио устройствах (при этом зависящий от времени свободный член интерпретируется как входящий сигнал). В работах Л. А. Власенко, А. Г. Руткаса, М. С. Филиповской и др. рассматриваемые системы возникают при математическом моделировании колебаний и электрических цепей.

В указанных выше задачах, естественно, надо учитывать помехи, которые обычно описываются белым шумом. Однако, уравнения леонтьевского типа имеют характерную особенность — при нахождении и исследовании решений приходится использовать производные свободных членов достаточно высокого порядка. При наличии помех нужны производные белого шума, что требует использования обобщенных функций. В настоящей главе мы реализуем подход,

¹Результаты этой главы получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском государственном университете).

в котором вместо белого шума используется текущая скорость (симметрическая производная в среднем), которая, как сказано выше, является прямым аналогом обычной скорости детерминированного процесса. В основном мы используем текущую скорость винеровского процесса, для которого в § 1.2 найдены формулы для симметрических производных высокого порядка. Это дает возможность для получения аналитических формул для решений уравнений леонтьевского типа с помехами. Альтернативный подход к этой задаче, также использующий текущие скорости винеровского процесса, разработан А. Л. Шестаковым и Г. А. Свиридюком [66].

Затем мы выводим уравнение, аналогичное леонтьевскому, но в терминах текущей скорости его решения, как это сделано для общих уравнений с текущими скоростями в § 2.4.

Мы начинаем исследование с общего уравнения леонтьевского типа со случайными возмущениями (помехами), которое имеет вид

$$\tilde{L}\xi(t) = \tilde{M} \int_0^t \xi(s) ds + f(t) + B\tilde{w}(t),$$

где $\tilde{L}$ — вырожденная матрица $n \times n$, $\tilde{M}$ и B — невырожденные матрицы $n \times n$, $\xi(t)$ — n -мерный случайный процесс, $f(t)$ — гладкая n -мерная вектор-функция, $\tilde{w}(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$. Физический смысл состоит в следующем: $f(t)$ — сигнал, входящий в устройство, описываемое матрицами $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$, тогда как $B\dot{\tilde{w}}(t)$ (где $\dot{\tilde{w}}(t)$ — «производная» винеровского процесса, т. е. белый шум) описывает помехи.

4.2. Стохастические уравнения леонтьевского типа и их канонический вид

Как отмечено в § 4.1, стохастическое дифференциальное уравнение леонтьевского типа — это стохастическое дифференциальное уравнение в $\mathbb{R}^n$ вида

$$\tilde{L}\xi(t) = \tilde{M} \int_0^t \xi(s) ds + \int_0^t f(s) ds + B\tilde{w}(t),$$

где $\xi(t)$ — случайный, а $f(t)$ — детерминированный n -мерные векторы, $\tilde{L}$, $\tilde{M}$ и B — $n \times n$ матрицы, где $\tilde{L}$ — вырождена (имеет нулевой определитель), тогда как $\tilde{M}$ и B невырождены, $\tilde{w}(t)$ — винеровский процесс. Их физическая интерпретация следующая: $f(t)$ — входящий сигнал в устройство, описываемое операторами $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$, $B\dot{w}$, где $\dot{w}(t)$ — белый шум, это помехи, а $\xi(t)$ — выходящий сигнал. Вектор-функция $f(t)$ предполагается гладкой.

Если матричный пучок $\tilde{M} + \lambda\tilde{L}$ регулярен (т. е. характеристический многочлен $\det \tilde{M} + \lambda \det \tilde{L}$ не является тождественно равным нулю), то можно применить так называемое преобразование Кронекера — Вейерштрасса и свести матрицы $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ к квази-диагональному виду (см. [8]). Это преобразование описывается парой невырожденных линейных операторов (матриц), которые мы обозначим $A = (a_j^i)$ (действует слева) и A_R (действует справа). Сопряженный к A оператор мы обозначаем A^* . В квази-диагональной форме при подходящей нумерации векторов базиса в матрице $L = ALA_R$ сначала вдоль диагонали идут жордановы клетки с нулями на диагонали, а последняя матрица вдоль диагонали — единичная матрица. В $M = A\tilde{M}A_R$ в строках, соответствующих жордановым клеткам стоит единичная матрица, а последний блок представляет из себя невырожденную матрицу общего вида. В следующем параграфе для полноты мы приведем примеры указанных матриц в явном виде.

Обозначим через $(\cdot, \cdot)$ стандартное скалярное произведение (евклидову метрику) в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что винеровский процесс $\tilde{w}(t)$ является гауссовым со средним значением 0 и матрицей ковариаций tI , где I — единичная матрица, т. е. с плотностью распределения (8.6) относительно формы объема евклидовой метрики $(\cdot, \cdot)$.

Введем матрицу $C = AB$. Поскольку матрицы A и B невырождены, то C также невырождена, как и матрица $CC^* = ABB^*A^*$. Следовательно, обратная матрица $(CC^*)^{-1} = C^{*-1}C^{-1}$ корректно определена. Таким образом (см. [10]), $C\tilde{w}(t)$ также является гауссовым процессом со средним 0 и матрицей ковариаций tCC^* и, следовательно, с плотностью

$$\rho^{C\tilde{w}}(t, x) = \left((2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \Delta^{-\frac{1}{2}} \right) \exp \left(\frac{-((CC^*)^{-1}x, x)}{2t} \right) \quad (4.1)$$

относительно той же самой формы объема, где Δ — определитель матрицы CC^* .

Введем новое скалярное произведение (евклидову метрику) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $\mathbb{R}^n$ формулой $\langle X, Y \rangle = ((CC^*)^{-1}X, Y)$.

Теорема 4.1. (i) Для любых векторов X и Y в $\mathbb{R}^n$ выполняется тождество $\langle CX, CY \rangle = \langle X, Y \rangle$.

(ii) Процесс $w(t) = C\tilde{w}(t)$ является винеровским в $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

◁ Напомним, что

$$(CC^*)^{-1} = C^{*-1}C^{-1}.$$

Тогда

$$\langle CX, CY \rangle = (C^{*-1}C^{-1}CX, CY) = (C^{-1}CX, C^{-1}CY) = \langle X, Y \rangle.$$

Форма объема метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ отличается от формы объема метрики $(\cdot, \cdot)$ коэффициентом $\Delta^{-\frac{1}{2}}$, т. е. плотность $C\tilde{w}(t)$ относительно формы объема метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ имеет вид

$$((2\pi t)^{-\frac{n}{2}}) \exp\left(\frac{-((CC^*)^{-1}x, x)}{2t}\right) = ((2\pi t)^{-\frac{n}{2}}) \exp\left(\frac{-\langle x, x \rangle}{2t}\right). \quad (4.2)$$

Очевидным образом выполнены все остальные свойства винеровского процесса для $C\tilde{w}(t)$ в $\mathbb{R}^n$ с метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. ▷

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — естественный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ с $(\cdot, \cdot)$.

Следствие 4.1. $Ce_1, \dots, Ce_n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ с $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Следствие 4.2. Введем $\eta(t) = A_{\mathbb{R}}^{-1}\xi(t)$. В $\mathbb{R}^n$ с $\langle \cdot, \cdot \rangle$ стохастическое уравнение леонтьевского типа принимает вид

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(s) ds + \int_0^t Af(s) ds + w(t).$$

Принимая во внимание формулу (1.20), мы видим, что выражение для регрессии текущей скорости для $w(t)$ содержит $\text{Grad}(C^{-1}x, C^{-1}x)$, где Grad — градиент относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Лемма 4.1. $d\langle x, x \rangle = d(C^{-1}x, C^{-1}x) = 2C^{*-1}C^{-1}x$, где d — внешний дифференциал.

Лемма 4.2. $\text{Grad}\langle x, x \rangle = \text{Grad}(C^{-1}x, C^{-1}x) = 2x$.

Доказательство вытекает из формулы поднятия индексов

$$\text{Grad}(C^{-1}x, C^{-1}x) = CC^*d(C^{-1}x, C^{-1}x)$$

и из леммы 4.1.

Следовательно, в $\mathbb{R}^n$ с $\langle \cdot, \cdot \rangle$ формулы для текущей скорости и для симметрических производных винеровского процесса $w(t)$ высокого порядка имеют обычный вид, как в леммах 1.8–1.12.

4.3. Решения стохастических уравнений леонтьевского типа

Итак (см. следствие 4.2), если матричный пучок $\widetilde{M} + \lambda\widetilde{L}$ регулярен, то после применения преобразования Кронекера — Вейерштрасса стохастическое уравнение леонтьевского типа в $\mathbb{R}^n$ с $\langle \cdot, \cdot \rangle$ принимает вид

$$L\eta(t) = \int_0^t M\eta(\tau) d\tau + \int_0^t Af(\tau) d\tau + w(t), \quad (4.3)$$

где $\eta(t) = A_{\mathbb{R}}^{-1}\xi(t)$,

$$L = A\widetilde{L}A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

и

$$M = A\widetilde{M}A_R =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-q}^{n-q} & a_{n-q+1}^{n-q} & \dots & a_n^{n-q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-q}^{n-q+1} & a_{n-q+1}^{n-q+1} & \dots & a_n^{n-q+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-q}^n & a_{n-q+1}^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Везде ниже мы имеем дело с уравнением (4.3) в $\mathbb{R}^n$ с $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Понятно (ср. (1.9)), что здесь для простоты начальное условие в (4.3) предполагается равным нулю: $\xi(0) = 0$. Отметим, однако, что решения, которые мы построим, этому условию не удовлетворяют и, более того, в момент времени 0 они не определены. Поэтому мы аппроксимируем решения процессами, которые удовлетворяют нулевому начальному условию, но становятся решениями только после некоторого заранее выбранного сколь угодно малого момента времени $t_0 > 0$ (см. подробности в замечании 4.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Перепишем (4.3) в форме

$$L\eta(t) - M \int_0^t \eta(s) ds - A \int_0^t f(s) ds = w(t).$$

Мы видим, что «настоящее» для процесса

$$L\eta(t) - M \int_0^t \eta(s) ds - A \int_0^t f(s) ds$$

совпадает с «настоящим» для $w(t)$. Поэтому мы используем последнюю σ -алгебру для вычисления производных в среднем, т. е. мы

применяем к (4.3) производные D^w , D_*^w или D_S^w . Отметим, что решения, найденные ниже, измеримы относительно «настоящего» процесса $w(t)$ при всех t .

Принимая во внимание структуру матриц (4.4) и (4.5), мы видим, что (4.3) распадается на несколько независимых систем уравнений. Одно из них — «внизу» — соответствует единичной диагональной матрице в L и последнему блоку — невырожденной матрице — в M . Обозначим последнюю матрицу через K и через $\zeta(t)$ — вектор размерности $q + 1$, построенный из последних $q + 1$ координат вектора $\eta(t)$. Тогда $\zeta(t)$ описывается уравнением

$$\zeta(t) = K \int_0^t \zeta(s) ds + \int_0^t Af(\tau) d\tau + w(t) \quad (4.6)$$

в $\mathbb{R}^{q+1}$. Здесь $w(t)$ — $q+1$ -мерный винеровский процесс, построенный из последних $q + 1$ координат процесса $w(t)$ в $\mathbb{R}^n$, а $Af(t)$ — $q + 1$ -мерный вектор, построенный из последних $q + 1$ координат $Af(t)$. Для (4.6) известна аналитическая формула для решения:

$$\zeta(t) = \int_0^t e^{K(t-\tau)} Af(\tau) d\tau + \int_0^t e^{K(t-\tau)} dw(\tau).$$

Другие подсистемы соответствуют жордановым клеткам в L и единичной матрице, построенной из строк и столбцов в M . Как пример, рассмотрим $(p + 1) \times (p + 1)$ матрицу (жорданову клетку) N в левом верхнем углу (4.4)

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и соответствующую единичную матрицу из (4.5). Остальные системы в точности аналогичны.

Обозначим через $(Af)_{(p+1)}$ $(p + 1)$ -мерный вектор, построенный из первых $p + 1$ координат Af , через $\eta_{(p+1)}(t)$ — $(p + 1)$ -мерный вектор с координатами $(\eta^1(t), \dots, \eta^{p+1}(t))$, построенный из первых

$(p+1)$ координат $\eta(t)$ и через $w_{(p+1)}(t)$ — вектор с координатами $(w^1(t), \dots, w^{p+1}(t))$, построенный из первых $p+1$ координат винеровского процесса $w(t)$. Понятно, что координаты Af имеют вид $(Af)^i = \sum_{j=1}^n a_j^i f^j$. Тогда $\eta_{(p+1)}(t)$ описывается уравнением

$$N\eta_{(p+1)}(t) = \int_0^t (\eta_{(p+1)}(s) + (Af)_{(p+1)}(s)) ds + w_{(p+1)}(t).$$

Записанная в координатах эта система принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1(t) \\ \eta^2(t) \\ \vdots \\ \eta^p(t) \\ \eta^{p+1}(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^t \left(\eta^1(s) + \sum_{j=1}^n a_j^1 f^j \right) ds \\ \int_0^t \left(\eta^2(s) + \sum_{j=1}^n a_j^2 f^j \right) ds \\ \vdots \\ \int_0^t \left(\eta^p(s) + \sum_{j=1}^n a_j^p f^j \right) ds \\ \int_0^t \left(\eta^{p+1}(s) + \sum_{j=1}^n a_j^{p+1} f^j \right) ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^p(t) \\ w^{p+1}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Из последнего уравнения (4.7) находим

$$\int_0^t \eta^{p+1}(s) ds = - \int_0^t \left(\sum_{j=1}^n a_j^{p+1} f^j \right) ds - w^{p+1}(t). \quad (4.8)$$

Поскольку текущая скорость (симметрическая производная в среднем) соответствует физической скорости, то из этого уравнения находим $\eta^{p+1}(t)$, применяя производную D_S^w к обеим частям равенства (см. замечание 4.1). Очевидным образом производные в среднем D^w и D_*^w (и, таким образом, D_S^w), примененные к интегралам

в обеих частях последнего равенства, дают соответственно $\eta^{p+1}(t)$ и $\sum_{j=1}^n a_j^{p+1} f^j$. Значит получаем

$$\eta^{p+1}(t) = - \sum_{j=1}^n a_j^{p+1} f^j - D_S^w w^{p+1}(t) = - \sum_{j=1}^n a_j^{p+1} f^j - \frac{w^{p+1}(t)}{2t}. \quad (4.9)$$

Из предпоследнего уравнения мы получаем, что

$$\eta^{p+1}(t) = \int_0^t \left(\eta^p(s) + \sum_{j=1}^n a_j^p f^j \right) ds + w^p(t). \quad (4.10)$$

Используя аналогичные рассуждения, выводим, что

$$\eta^p(t) = D_S^w \eta^{p+1}(t) - \sum_{j=1}^n a_j^p f^j - D_S^w w^p(t).$$

Подставив выражение для $\eta^{p+1}(t)$ из (4.9) в последнее равенство и используя лемму 1.10, получаем

$$\eta^p(t) = - \sum_{j=1}^n a_j^{p+1} \frac{df^j}{dt} - \sum_{j=1}^n a_j^p f^j + \frac{w^{p+1}(t)}{4t^2} - \frac{w^p(t)}{2t}. \quad (4.11)$$

В точности аналогично для $1 \leq i \leq p$ получаем рекуррентную формулу

$$\eta^i(t) = D_S^w \eta^{i+1}(t) - \sum_{j=1}^n a_j^i f^j - D_S^w w^i(t). \quad (4.12)$$

Принимая во внимание лемму 1.12, из (4.12) выводим явное выражение для любого $\eta^i(t)$, $1 \leq i \leq p$, в виде

$$\begin{aligned} \eta^i(t) = & - \sum_{k=i}^p \left(\sum_{j=1}^n a_j^{k+1} \frac{d^{k-i} f^j}{dt^{k-i}} \right) - \sum_{j=1}^n a_j^i f^j + \\ & + \sum_{k=i+1}^{p+1} \left((-1)^{k-i+1} \frac{\prod_{j=1}^{k-i} (2j-1)}{2^{k-i+1}} \frac{w^k(t)}{t^{k-i+1}} \right) - \frac{w^i(t)}{2t}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Вернемся к вопросу о нулевых начальных условиях для решений системы (4.7). Из определения симметрических производных в среднем ясно, что они корректно определены только на открытых интервалах, поскольку в них задействованы приращения и вправо, и влево.

Из формулы (4.13) легко понять, что построенные выше решения имеют вид суммы, в которой некоторые слагаемые имеют сомножители типа $\frac{w^j(t)}{t^k}$, $k \geq 1$. Так что решения стремятся к бесконечности, когда $t \rightarrow 0$, т. е. в точке $t = 0$ они не существуют.

Вариант выхода из этих трудностей состоит в следующем. Зафиксируем произвольное малое значение времени $t_0 \in (0, T)$ и зададим функцию $t_0(t)$ формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0, & 0 \leq t \leq t_0, \\ t, & t_0 \leq t. \end{cases}$$

В формулах (4.9), (4.11) и (4.12) заменим $\frac{w^j(t)}{t^k}$ на $\frac{w^j(t)}{(t_0(t))^k}$. После этого процессы примут нулевое значение при $t = 0$, но только при $t > t_0$ они станут решениями (4.3). Отметим, что для двух разных значений $t_0^{(1)}$ и $t_0^{(2)}$, при $t > \max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$ значения соответствующих решений п. н. совпадают.

Напомним, что значения производных в среднем существенно зависят от того, σ -алгебру «настоящее» какого процесса мы используем. Проиллюстрируем это на примере полученных выше формул.

В замечании 4.1 мы обосновали использование σ -алгебры «настоящее» n -мерного винеровского процесса (т. е. использование производной D_S^w), исходя из рассмотрения (4.3) как единой системы. Однако, вообще говоря, в условие конкретной задачи может входить требование об использовании какой-нибудь другой σ -алгебры. Тогда формулы для решений изменятся. Например, так произойдет, если рассматривать уравнения системы (4.7) по отдельности. Уравнение (4.8) не зависит от других уравнений системы (4.7) и может исследоваться отдельно от (4.7). В этом случае, рассуждая как в замечании 4.1, можно прийти к выводу, что в конструкции производных в среднем для процессов $\xi^{p+1}(t)$ и $w^{p+1}(t)$ надо использовать σ -алгебру «настоящее» процесса $w^{p+1}(t)$. Перепишем затем уравне-

ние (4.10) в виде

$$\xi^{p+1}(t) - \int_0^t \xi^p(s) ds = w^p(t).$$

Опять рассуждая аналогично замечанию 4.1, придем к выводу, что для производных в среднем процессов из этого уравнения надо использовать σ -алгебру «настоящее» процесса $w^p(t)$ и т. д. Напомним, что координаты n -мерного процесса $w(t)$ являются независимыми 1-мерными винеровскими процессами. По свойствам условного математического ожидания это означает, что $E_t^{w^i}(w^j(t)) = E(w^j(t)) = 0$ при $i \neq j$. Аналог рекуррентной формулы (4.12) примет вид $\xi^i(t) = D_S^{w^i} \xi^{i+1}(t) - D_S^{w^i} w^i(t)$. Однако, из сказанного выше и конструкции производных в среднем вытекает, что $D_S^{w^i} \xi^{i+1}(t) = 0$, т. е.

$$\xi^i(t) = -D_S^{w^i} w^i(t) = -\frac{w^i(t)}{2t}, \quad i = 1, \dots, p+1.$$

4.4. Случай с непостоянными коэффициентами

Классическое уравнение леонтьевского типа, у которого входящие в него матрицы зависят от времени, имеет вид

$$\tilde{L}(t)\dot{\xi}(t) = \tilde{M}(t)\xi(t) + \tilde{f}(t), \quad (4.14)$$

где $\tilde{L}(t)$ — вырожденная матрица $n \times n$, $\tilde{M}(t)$ — невырожденная матрица $n \times n$, $\xi(t)$ — n -мерный процесс, $f(t)$ — гладкая n -мерная вектор-функция. При наличии помех в уравнении (4.14) появляется дополнительное слагаемое в правой части, выраженное через белый шум. Как обычно, вместо уравнения с белым шумом мы переходим к стохастическому дифференциальному уравнению

$$\tilde{L}(t)\eta(t) = \int_0^t \tilde{M}(s)\eta(s) ds + \int_0^t f(s) ds + w(t). \quad (4.15)$$

Мы имеем дело с уравнениями на некотором интервале $[0, T] \subset \mathbb{R}$. Предположим, что матричный пучок $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ невырожден. Сначала мы рассмотрим аналитический случай, в котором существуют матрицы $P(t)$ и $Q(t)$ из теоремы 8.6 (i), корректно определенные на

всем интервале $[0, T] \subset \mathbb{R}$. Введем матрицы $L(t) = P(t)\tilde{L}(t)Q(t)$ и $M(t) = P(t)\tilde{M}(t)Q(t)$. Чтобы перевести уравнение (4.15) в форму с матрицами L и M , надо применить матрицу $P(t)$ к каждому вектору в $\mathbb{R}^n$ и заменить $\xi(t)$ на $\eta(t) = Q^{-1}(t)\xi(t)$. После этого, принимая во внимание помехи, перейдем к следующему стохастическому дифференциальному уравнению в форме Ито:

$$L(t)\eta(t) = \int_0^t M(s)\eta(s)ds + \int_0^t P(s)f(s)ds + \int_0^t P(s)dw(s) \quad (4.16)$$

с начальными условиями $\eta(0) = 0$, где $w(t)$ — винеровский процесс. По формуле (8.2) уравнение (4.16) имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & N(t) \end{pmatrix} \eta(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} J(s) & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix} \eta(s) ds + \\ + \int_0^t P(s)f(s)ds + \int_0^t P(s)dw(s).$$

Для верхней пары блоков мы получаем систему

$$\begin{pmatrix} \eta^1(t) \\ \eta^2(t) \\ \vdots \\ \eta^d(t) \end{pmatrix} = \int_0^t J(s) \begin{pmatrix} \eta^1(s) \\ \eta^2(s) \\ \vdots \\ \eta^d(s) \end{pmatrix} ds + \\ + \int_0^t \begin{pmatrix} P_1^1(s) & P_2^1(s) & \cdots & P_n^1(s) \\ P_1^2(s) & P_2^2(s) & \cdots & P_n^2(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^d(s) & P_2^d(s) & \cdots & P_n^d(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1(s) \\ f^2(s) \\ \vdots \\ f^n(s) \end{pmatrix} ds + \quad (4.17) \\ + \int_0^t \begin{pmatrix} P_1^1(s) & P_2^1(s) & \cdots & P_n^1(s) \\ P_1^2(s) & P_2^2(s) & \cdots & P_n^2(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^d(s) & P_2^d(s) & \cdots & P_n^d(s) \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} w^1(s) \\ w^2(s) \\ \vdots \\ w^n(s) \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что это уравнение имеет единственное решение с нулевыми начальными данными (см. [10]).

Для нижней пары блоков мы получаем систему

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 0 & N_{d+2}^{d+1}(t) & N_{d+3}^{d+1}(t) & \cdots & N_n^{d+1}(t) \\ 0 & 0 & N_{d+3}^{d+2}(t) & \cdots & N_n^{d+2}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N_n^{n-1}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^{d+1}(t) \\ \eta^{d+2}(t) \\ \vdots \\ \eta^{n-1}(t) \\ \eta^n(t) \end{pmatrix} = \\
 & = \int_0^t \begin{pmatrix} \eta^{d+1}(s) \\ \eta^{d+2}(s) \\ \vdots \\ \eta^{n-1}(s) \\ \eta^n(s) \end{pmatrix} ds + \\
 & + \int_0^t \begin{pmatrix} P_1^{d+1}(s) & P_2^{d+1}(s) & \cdots & P_n^{d+1}(s) \\ P_1^{d+2}(s) & P_2^{d+2}(s) & \cdots & P_n^{d+2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^n(s) & P_2^n(s) & \cdots & P_n^n(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{d+1}(s) \\ \vdots \\ f^{n-1}(s) \\ f^n(s) \end{pmatrix} ds + \\
 & + \int_0^t \begin{pmatrix} P_1^{d+1}(s) & P_2^{d+1}(s) & \cdots & P_n^{d+1}(s) \\ P_1^{d+2}(s) & P_2^{d+2}(s) & \cdots & P_n^{d+2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^n(s) & P_2^n(s) & \cdots & P_n^n(s) \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} w^{d+1}(s) \\ \vdots \\ w^{n-1}(s) \\ w^n(s) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Из физических соображений производные в среднем решений этого уравнения надо вычислять относительно σ -алгебры «настоящее» $\mathcal{N}_t^w$ винеровского процесса. Мы используем текущие скорости (поскольку они являются естественными аналогами физической скорости детерминированных процессов) и принимаем во внимание формулы для симметрических производных в среднем (т. е. текущих скоростей) из леммы 1.12, следствия 1.2 и теоремы 1.4. Отметим также, что для неслучайной гладкой функции (такой как $N(t)$ и $P(t)$) симметрическая производная в среднем совпадает с обычной производной.

Из последнего уравнения (4.18) выводим, что при $t > 0$ справедлива следующая формула:

$$\eta^n = - \sum_{j=1}^n P_j^n f^j - \sum_{j=1}^n P_j^n \frac{w^j}{2t}. \quad (4.19)$$

Тогда

$$D_S^w \eta_n = - \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n P_j^n f^j - \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} P_j^n \right) \frac{w^j}{2t} + \sum_{j=1}^n P_j^n \frac{w^j}{4t^2}.$$

Из $(n-1)$ -го уравнения получаем

$$\left(\frac{d}{dt} N_n^{n-1} \right) \eta_n + N_n^{n-1} D_S^w \eta_n = \eta^{n-1} + \sum_{j=1}^n P_j^{n-1} f^j + \sum_{j=1}^{n-1} P_j^n \frac{w^j}{2t}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \eta^{n-1} = & \left(\frac{d}{dt} N_n^{n-1} \right) \left(- \sum_{j=1}^n P_j^n f^j - \sum_{j=1}^n P_j^n \frac{w^j}{2t} \right) + \\ & + N_n^{n-1} \left(- \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n P_j^n f^j - \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} P_j^n \right) \frac{w^j}{2t} + \sum_{j=1}^n P_j^n \frac{w^j}{4t^2} \right) - \\ & - \sum_{j=1}^n P_j^{n-1} f^j - \sum_{j=1}^{n-1} P_j^n \frac{w^j}{2t}. \end{aligned}$$

Очевидным образом при $d+1 \leq i \leq n-1$ имеет место следующая рекуррентная формула:

$$D_S^w \sum_{j=i+1}^n N_j^i \eta^j = \eta^i + \sum_{j=1}^n P_j^i f^j + \sum_{j=1}^n P_j^i \frac{w^j}{2t}, \quad (4.20)$$

где нетрудно видеть, что

$$D_S^w \sum_{j=i+1}^n N_j^i \eta^j = \sum_{j=i+1}^n \left(\left(\frac{d}{dt} N_j^i \right) \eta^j + N_j^i D_S^w \eta^j \right).$$

Используя (4.20), можно найти все координаты $\eta(t)$ шаг за шагом тем же способом, что и выше.

Отметим, что формулы (4.19) и (4.20) для решений некорректны при $t = 0$. Чтобы избежать эту трудность, надо использовать прием из замечания 4.2, т. е. заменить время t на функцию $t_0(t)$.

Если матрицы $\tilde{L}(t)$ и $\tilde{M}(t)$ гладки, но не аналитичны, то можем применить теорему 8.6 (ii) и получить решение на некотором подинтервале с помощью тех же рассуждений.

Теперь рассмотрим систему в случае, когда матрицы $\tilde{L}(t)$ и $\tilde{M}(t)$ гладки и дополнительно удовлетворяют условию ранг-степень. Применив теорему 8.7 и использованные выше рассуждения, сведем (4.16) к

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta(t) &= \int_0^t \begin{pmatrix} J(s) & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix} \eta(s) ds + \\ &+ \int_0^t P(s) f(s) ds + \int_0^t P(s) dw(s). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Очевидным образом, для верхней пары блоков в (4.21) получим уравнения того же типа, что и (4.17). Но для нижней пары блоков уравнение превращается в

$$\begin{aligned} &\int_0^t \begin{pmatrix} \eta^{d+1}(s) \\ \eta^{d+2}(s) \\ \vdots \\ \eta^{n-1}(s) \\ \eta^n(s) \end{pmatrix} ds = \\ &= - \int_0^t \begin{pmatrix} P_1^{d+1}(s) & P_2^{d+1}(s) & \cdots & P_n^{d+1}(s) \\ P_1^{d+2}(s) & P_2^{d+2}(s) & \cdots & P_n^{d+2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^n(s) & P_2^n(s) & \cdots & P_n^n(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{d+1}(s) \\ \vdots \\ f^{n-1}(s) \\ f^n(s) \end{pmatrix} ds - \\ &- \int_0^t \begin{pmatrix} P_1^{d+1}(s) & P_2^{d+1}(s) & \cdots & P_n^{d+1}(s) \\ P_1^{d+2}(s) & P_2^{d+2}(s) & \cdots & P_n^{d+2}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^n(s) & P_2^n(s) & \cdots & P_n^n(s) \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} w^{d+1}(s) \\ \vdots \\ w^{n-1}(s) \\ w^n(s) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Таким образом, для (4.22) получаем следующие формулы для решений:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \eta^{d+1}(t) \\ \eta^{d+2}(t) \\ \vdots \\ \eta^{n-1}(t) \\ \eta^n(s) \end{pmatrix} = \\
& = - \begin{pmatrix} P_1^{d+1}(t) & P_2^{d+1}(t) & \dots & P_n^{d+1}(t) \\ P_1^{d+2}(t) & P_2^{d+2}(t) & \dots & P_n^{d+2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^n(t) & P_2^n(t) & \dots & P_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{d+1}(t) \\ \vdots \\ f^{n-1}(t) \\ f^n(t) \end{pmatrix} - \\
& - \begin{pmatrix} P_1^{d+1}(t) & P_2^{d+1}(t) & \dots & P_n^{d+1}(t) \\ P_1^{d+2}(t) & P_2^{d+2}(t) & \dots & P_n^{d+2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^n(t) & P_2^n(t) & \dots & P_n^n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{w^{d+1}}{2t} \\ \vdots \\ \frac{w^{n-1}}{2t} \\ \frac{w^n}{2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Чтобы выполнялись начальные условия $\eta(0) = 0$, в $\frac{w^i(t)}{2t}$ заменим t на $t_0(t)$, как и выше (см. замечание 4.2).

Для исследования стохастических уравнений леонтьевского типа с матрицами, зависящими от пространственной переменной, можно использовать только теорему 8.8, что приводит к дополнительным трудностям и позволяет доказать существование только локальных решений в смысле стохастического анализа. Поэтому мы рассмотрим только самый простой случай, в котором априори система представлена в виде

$$\begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \eta(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} J(\eta(s)) & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix} \eta(s) ds + f(t) + w(t), \tag{4.24}$$

где $J(x)$ — некоторая $d \times d$ матрица, гладкая по $x \in \mathbb{R}^n$.

Для верхней пары блоков мы получаем систему

$$\begin{pmatrix} \eta^1(t) \\ \eta^2(t) \\ \vdots \\ \eta^d(t) \end{pmatrix} = \int_0^t J(\eta(s)) \begin{pmatrix} \eta^1(s) \\ \eta^2(s) \\ \vdots \\ \eta^d(s) \end{pmatrix} ds + \int_0^t \begin{pmatrix} f^1(s) \\ f^2(s) \\ \vdots \\ f^n(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} w^1(t) \\ w^2(t) \\ \vdots \\ w^n(t) \end{pmatrix}.$$

Поскольку линейный оператор $J(x)$ очевидным образом удовлетворяет условию Ито (подлинейного роста) и $J(x)$ гладко по x , то эта система имеет единственное решение с нулевыми начальными условиями (см. [10]).

Система для нижней пары блоков имеет вид

$$\int_0^t \begin{pmatrix} \eta^{d+1}(s) \\ \vdots \\ \eta^{n-1}(s) \\ \eta^n(s) \end{pmatrix} ds = - \int_0^t \begin{pmatrix} f^{d+1}(s) \\ \vdots \\ f^{n-1}(s) \\ f^n(s) \end{pmatrix} ds - \begin{pmatrix} w^{d+1}(t) \\ \vdots \\ w^{n-1}(t) \\ w^n(t) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, формула для решения имеет вид

$$\begin{pmatrix} \eta^{d+1}(t) \\ \vdots \\ \eta^{n-1}(t) \\ \eta^n(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f^{d+1}(t) \\ \vdots \\ f^{n-1}(t) \\ f^n(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{w^{d+1}}{2t} \\ \vdots \\ \frac{w^{n-1}}{2t} \\ \frac{w^n}{2t} \end{pmatrix}.$$

Чтобы удовлетворить нулевому начальному условию $\eta(0) = 0$, в $\frac{w^i(t)}{2t}$ заменим t на $t_0(t)$, как и выше (см. замечание 4.2).

4.5. Уравнения леонтьевского типа в терминах текущих скоростей решения

4.5.1. Основная конструкция. Пусть $\tilde{L}$ — вырожденная матрица, а $\tilde{M}$ — невырожденная матрица такие, что матричный пучок $\lambda\tilde{L} + \tilde{M}$ регулярен. Везде ниже в этом разделе мы предполагаем, что этот пучок удовлетворяет условию ранг-степень (см. определение 8.7). Возьмем матрицы P и Q из теоремы 8.7 и построим матрицы $L = P\tilde{L}Q$ и $M = P\tilde{M}Q$. Из теоремы 8.7 вытекает, что

$$L = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что поскольку $\widetilde{M}$ невырождена, J также невырождена.

Введем матрицу $\bar{L} = QLQ^*$. Для C^∞ -гладкой вектор-функции $f(t)$ рассмотрим систему

$$\begin{cases} \tilde{L}D_S\xi(t) = \tilde{M}\xi(t) + \tilde{f}(t), \\ D_2\xi(t) = \bar{L}, \end{cases} \quad (4.25)$$

которую называем *стохастическим уравнением леонтьевского типа в текущих скоростях решения*. Адекватные начальные условия для решений уравнения (4.25) будут рассмотрены ниже. Отметим, что и матрица L , и матрица $\bar{L}$ по построению симметричны и неотрицательно определены. Поэтому вторая строка в (4.25) корректна.

Рассмотрим $\eta(t) = Q^{-1}\xi(t)$ и $f(t) = P\tilde{f}(t)$. Тогда в соответствии с преобразованием уравнения (4.25), указанным в теореме 8.7, получаем первую строку в (4.25) в форме $LD_S\eta(t) = M\eta(t) + f(t)$. Поскольку $\eta(t) = Q^{-1}\xi(t)$, то из определения L и определения D_2 по формуле (1.7) получаем, что вторая строка (4.25) для $\eta(t)$ принимает вид $D_2\eta(t) = L$. Таким образом, уравнение (4.25) преобразовано в уравнение для $\eta(t)$ вида

$$\begin{cases} LD_S\eta(t) = M\eta(t) + f(t), \\ D_2\eta(t) = L, \end{cases} \quad (4.26)$$

где вторая строка корректна, поскольку L симметрична и неотрицательно определена. Так что $\mathbb{R}^n$ разлагается в прямую сумму двух подпространств $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{R}^{n-d}$, и уравнение (4.26) разлагается в два независимых уравнения в этих подпространствах:

$$\begin{cases} D_S\eta^{(1)}(t) = J\eta^{(1)}(t) + f^{(1)}(t), \\ D_2\eta^{(1)}(t) = I_d \end{cases} \quad (4.27)$$

в $\mathbb{R}^d$ и

$$\begin{cases} \eta^{(2)}(t) + f^{(2)}(t) = 0, \\ D_2\eta^{(2)}(t) = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

в $\mathbb{R}^{n-d}$.

Из второй строки (4.28) вытекает, что решение (4.28) неслучайно. Тогда из первой строки следует, что решение имеет вид $\eta^{(2)}(t) = -f^{(2)}(t)$ с очевидными начальными условиями $\eta^{(2)}(0) = -f^{(2)}(0)$.

Для исследования (4.27) мы применяем теорему 2.7.

Для простоты обозначим C^∞ -гладкое векторное поле $Jx + f^{(1)}(t)$ на $\mathbb{R}^d$ символом $v(t, x)$, а символом g_t — его поток.

Из второй строки (4.27) следует, что решение, если оно существует, должно иметь форму (1.9). Зафиксируем вероятностную плотность ρ_0 на $\mathbb{R}^d$ нигде не равную нулю. В этом случае из теоремы 2.7 следует, что плотность $\rho(t)$ решения с начальной плотностью ρ_0 имеет вид $\rho(t) = e^{p(t)}$, где $p(t, x) = p_0(g_{-t}(x)) - \int_0^t (\operatorname{div} v)(s, g_s(g_{-t}(x))) ds$, $p_0 = \ln \rho_0$.

Подчеркнем, что $\rho(t, x)$ корректно определено для всех $t \in [0, T]$. Обозначим через $\eta_0^{(1)}$ случайный элемент в $\mathbb{R}^d$ с плотностью ρ_0 , а через $\eta^{(1)}(t)$ — искомое решение.

По построению $D_S \eta^{(1)}(t) = v(t, \eta^{(1)}(t))$. По лемме 1.6 осмотическая скорость решения стохастического дифференциального уравнения с постоянным A имеет вид $u = \frac{1}{2} \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} \ln \sqrt{\rho}$.

Введем обозначение: $a(t, x) = v(t, x) + u(t, x)$. Используя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 2.7, приходим к выводу, что $\eta^{(1)}(t)$ должно удовлетворять стохастическому дифференциальному уравнению

$$\eta^{(1)}(t) = \eta_0^{(1)} + \int_0^t a(s, \eta^{(1)}(s)) ds + w(s), \quad (4.29)$$

которое имеет решение. Это и есть решение (4.27) в форме (1.9), которое мы ищем.

Таким образом, мы доказали

Теорема 4.2. При описанных выше условиях уравнение (4.25) с начальными условиями $\eta^{(2)} = -f^{(2)}(0)$ в $\mathbb{R}^{n-d}$ и случайным элементом $\eta^{(1)}(0)$ в $\mathbb{R}^d$ с плотностью ρ_0 , нигде не равной нулю, имеет решение.

4.5.2. Одно обобщение. Рассмотрим некоторую симметрическую положительно определенную матрицу Ξ в $\mathbb{R}^d$. Поскольку она положительно определена, то не вырождена, и (см. лемму 2.1) существует невырожденная матрица A в $\mathbb{R}^d$ такая, что $\Xi = AA^*$, где A^* — транспонированная A . Введем матрицу $\Theta = \begin{pmatrix} \Xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и матрицу $\bar{\Theta} = Q\Theta Q^*$ в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} \tilde{L} D_S \xi(t) = \tilde{M} \xi(t) + \tilde{f}(t), \\ D_2 \xi(t) = \bar{\Theta}. \end{cases} \quad (4.30)$$

Теми же рассуждениями, как (4.25) было преобразовано к виду (4.26), применяя P и Q , преобразуем (4.30) в уравнение

$$\begin{cases} LD_S \eta(t) = M\eta(t) + f(t), \\ D_2 \eta(t) = \Theta. \end{cases} \quad (4.31)$$

Отметим, что поскольку по построению матрицы $\bar{\Theta}$ и Θ симметричны и положительно определены, уравнения (4.30) и (4.31) корректны.

Так же, как выше, (4.31) распадается в два независимых уравнения:

$$\begin{cases} D_S \eta^{(1)}(t) = J\eta^{(1)}(t) + f^{(1)}(t), \\ D_2 \eta^{(1)}(t) = \Xi \end{cases} \quad (4.32)$$

в $\mathbb{R}^d$ и

$$\begin{cases} \eta^{(2)}(t) + f^{(2)}(t) = 0, \\ D_2 \eta^{(2)}(t) = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

в $\mathbb{R}^{n-d}$. Отметим, что (4.33) совпадает с (4.28), и для его исследования можно применить те же рассуждения, что выше.

Для изучения (4.32) введем в $\mathbb{R}^d$ новое скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ такое, что для произвольных векторов X и Y в $\mathbb{R}^d$ его значение задается как $\langle X, Y \rangle = (\Xi^{-1} X, Y)$. Зафиксируем начальное распределение ρ_0 в $\mathbb{R}^d$ нигде не равное нулю. Рассмотрим векторное поле $v(t, x) = Mx + f(t)$ и обозначим через g_t его поток. Тогда из теоремы 2.7 следует, что плотность ρ_0 имеет вид $\rho(t) = e^{p(t)}$, где $p(t, x) = p_0(g_{-t}(x)) - \int_0^t (\text{Div } v)(s, g_s(g_{-t}(x))) ds$, $p_0 = \ln \rho_0$ и Div обозначает дивергенцию в $\mathbb{R}^d$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Дополнительная модификация построения здесь состоит в том, что

$$\eta^{(1)}(t) = \eta_0^{(1)} + \int_0^t a(s, \eta^{(1)}(s)) ds + Aw(s)$$

(аналог (4.29)). Таким образом, мы доказали следующее утверждение

Теорема 4.3. *При сделанных выше предположениях уравнение (4.30), преобразованное к виду (4.31), с начальными условиями $\eta^{(2)}(0) = -f^{(2)}(0)$ в $\mathbb{R}^{n-d}$ и случайным элементом с полностью ρ_0 , нигде не равной нулю в $\mathbb{R}^d$, имеет решение.*

ГЛАВА 5

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ¹

Стохастическая механика Нельсона — это математическая теория, основанная на классической физике, но дающая те же предсказания, что и квантовая механика для широкого класса задач, в которых и та, и другая теории применимы. Можно считать, что стохастическая механика является особым способом квантования, отличным от гамильтонова и лагранжева (в терминах интегралов по траекториям) способов. Одной из главных отличительных черт стохастической механики является то, что в ней квантуется второй закон Ньютона, а не уравнения Гамильтона или Лагранжа. Стохастический аналог закона Ньютона известен как уравнение Ньютона — Нельсона.

К настоящему времени на языке стохастической механики исследовано большое число задач квантовой теории. Однако не было осуществлено описание движения квантовой частицы в калибровочном поле, по-видимому, из-за того, что ранее не было известно описание классической частицы в калибровочном поле в терминах второго закона Ньютона. Такое описание было предложено в [50] (см. также [12, 43]), где было построено и изучено специальное уравнение второго порядка на расслоении со связностью, которое интерпретировалось как второй закон Ньютона, описывающий движение классической частицы в классическом калибровочном поле. На основе этого, следуя [51, 52], здесь мы изучаем соответствующее уравнение Ньютона — Нельсона на расслоениях со связностями. Рассматриваются два случая: когда база расслоения — риманово многообразие и само расслоение (главное и векторное) вещественно, и когда база расслоения — пространство–время общей теории относительности и расслоение комплексно. Последний случай интерпретируется

¹Исследования, вошедшие в эту главу, поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 15-01-00620.

как описание движения квантовой релятивистской частицы в классическом калибровочном поле. Для частного случая группы симметрий $U(1)$ исследуется связь с квантовой электродинамикой.

5.1. Дополнительные факты из геометрии многообразий

Напомним, что на каждом расслоении $\mathcal{E} \rightarrow M$ над многообразием M , в каждом касательном пространстве $T_{(m,x)}\mathcal{E}$ к пространству расслоения $\mathcal{E}$ имеется специальное подпространство $\mathcal{V}_{(m,x)}$, называемое *вертикальным*, которое состоит из векторов, касательных к слою $\mathcal{E}_m$ в точке (m, x) , $m \in M$. Векторы из подпространств $\mathcal{V}_{(m,x)}$ называются вертикальными. *Связность* $\mathcal{H}$ на $\mathcal{E}$ — это набор подпространств в касательном пространстве к $\mathcal{E}$ такой, что $T_{(m,x)}\mathcal{E} = \mathcal{H}_{(m,x)} \oplus \mathcal{V}_{(m,x)}$ в каждой точке $(m, x) \in \mathcal{E}$, и этот набор удовлетворяет некоторым дополнительным условиям гладкости и инвариантности: на главных расслоениях распределение $\mathcal{H}$ инвариантно относительно правого действия структурной группы расслоения, а на векторных расслоениях — относительно так называемого действия числовой прямой (см. гл. 8; подробности имеются, например, в [12, 43]).

Пусть M — вещественное риманово или псевдориманово многообразие с метрикой $g(\cdot, \cdot)$. Пусть $\Pi : \mathcal{E} \rightarrow M$ — главное расслоение над M со структурной группой G . Через $\mathfrak{g}$ мы обозначаем алгебру Ли группы Ли G . Пусть на $\mathcal{E}$ задана связность $\mathcal{H}$ с формой связности θ (см. § 8.5) и формой кривизны $\Phi = D\theta$. Здесь D — ковариантный дифференциал: $D\theta(X) = d\theta(\mathcal{H}X, \mathcal{H}X)$ (см. подробности, например, в [5]). Напомним, что 1-форма θ и 2-форма Φ эквивариантны, принимают значения в алгебре $\mathfrak{g}$ и что Φ горизонтальна (принимает нулевые значения на вертикальных векторах). Предполагается, что форма кривизны удовлетворяет уравнениям

$$D\Phi = 0, \quad D * \Phi = *J \quad (5.1)$$

(из них первое — классическое тождество Бьянки), где J — некоторая 1-форма на $\mathcal{E}$ со значениями в $\mathfrak{g}$.

Мы предполагаем, что G является группой $GL(k, \mathbb{R})$ (или $GL(k, \mathbb{C})$) невырожденных матриц $k \times k$ с вещественными (комплексными) коэффициентами или какой-нибудь ее подгруппой. Пусть $\mathcal{F}$ — k -мерное вещественное (соответственно комплексное)

векторное пространство, на котором G действует слева, и пусть на $\mathcal{F}$ задано скалярное произведение $h(\cdot, \cdot)$, инвариантное относительно действия G . Мы предполагаем, что задано некоторое отображение $e : \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ (где $\mathfrak{g}^*$ — коалгебра, т. е. сопряженное к $\mathfrak{g}$ пространство), которое постоянно на орбитах группы G . Это отображение называется *зарядом*.

Рассмотрим векторное расслоение $\pi : Q \rightarrow M$ со стандартным слоем $\mathcal{F}$, ассоциированное с $\mathcal{E}$. Точки пространства расслоения Q мы обозначаем символами (m, q) , где $m \in M$, а $q \in Q_m$, Q_m — слой в точке m . Обозначим через $\lambda : \mathcal{E} \times \mathcal{F} \rightarrow Q$ факторизацию, которая определяет расслоение Q (см. гл. 8, подробности имеются, например, в [5]). Касательное отображение $T\lambda$ переносит связность $\mathcal{H}$ из касательных пространств к $\mathcal{E}$ в касательные пространства к Q . Полученную связность на Q мы обозначаем через $\mathcal{H}^\pi$. Векторы, лежащие в пространствах $\mathcal{H}^\pi$, называются *горизонтальными*. Напомним, что пространства связности являются ядрами так называемого отображения связности $K^\pi : TQ \rightarrow Q$, которое строится следующим образом. Рассмотрим разложение касательного вектора $X \in T_{(m,q)}Q$ в $(m, q) \in Q$ на горизонтальную и вертикальную компоненты: $X = \mathcal{H}X + \mathcal{V}X$, где $\mathcal{H}X \in \mathcal{H}_{(m,q)}^\pi$ и $\mathcal{V}X \in \mathcal{V}_{(m,q)}$. Введем оператор $\mathbf{p} : \mathcal{V}_{(m,q)} \rightarrow Q_m$ — естественный изоморфизм линейного касательного пространства $\mathcal{V}_{(m,q)} = T_q Q_m$ к слою Q_m на сам слой (векторное пространство) Q_m . Тогда $K^\pi X = \mathbf{p}\mathcal{V}X$.

На многообразии Q (пространстве расслоения) построим риманову метрику g^Q следующим образом: в горизонтальных подпространствах $\mathcal{H}^\pi$ введем ее как обратный образ $T\pi^*g$, в вертикальных пространствах $\mathcal{V}$ — как h , и положим, что $\mathcal{H}^\pi$ и $\mathcal{V}$ ортогональны друг другу. Отметим, что в комплексном случае построенная метрика может называться римановой в весьма обобщенном смысле.

Обозначим проекцию касательного расслоения TM на M символом $\tau : TM \rightarrow M$. Введем связность Леви — Чивита $\mathcal{H}^\tau$ метрики g на M . Ее отображение связности $K^\tau : T^2M \rightarrow TM$ строится аналогично случаю K^π , где Q заменяется на TM и TQ — на $T^2M = TTM$.

Напомним стандартную конструкцию связности на пространстве расслоения Q , основанную на связностях $\mathcal{H}^\pi$ и $\mathcal{H}^\tau$ (см., например, [12, 15]). Отображение этой связности $K^Q : T^2Q \rightarrow TQ$ имеет вид: $K^Q = K^H + K^V$, где $K^H : T^2Q \rightarrow \mathcal{H}^\pi$ и $K^V : T^2Q \rightarrow \mathcal{V}$, а последние отображения задаются формулами: $K^H = T\pi^{-1} \circ K^\tau \circ T^2\pi$, где $T^2\pi = T(T\pi) : T^2Q \rightarrow T^2M$, а $T\pi^{-1}$ — линейный изоморфизм

касательных пространств к M на пространства связностей $\mathcal{H}^\pi$; $K^V = \mathbf{p}^{-1} \circ K^\pi \circ TK^\pi$.

Напомним, что λ взаимно однозначно отображает стандартный слой $\mathcal{F}$ на слои расслоения Q , поэтому заряд e корректно определен на всем Q . Поскольку касательное отображение $T\lambda$ является также взаимно однозначным отображением связностей и Φ эквивариантно, то можно ввести дифференциальную форму $\tilde{\Phi}$ на Q со значениями в $\mathfrak{g}$ следующим образом. Рассмотрим $(m, q) = \lambda((m, p), f)$, где $(m, p) \in \mathcal{E}$ и $f \in \mathcal{F}$. Для $X, Y \in T_{(m, q)}Q$ обозначим символами $\mathcal{H}X$ и $\mathcal{H}Y$ их горизонтальные компоненты. Затем определим $\tilde{\Phi}_{(m, q)}(X, Y) = \Phi_{(m, p)}(T\lambda^{-1}\mathcal{H}X, T\lambda^{-1}\mathcal{H}Y)$.

Обозначим через $\bullet$ спаривание элементов из $\mathfrak{g}$ и из $\mathfrak{g}^*$. Рассмотрим $((m, q), X)$ — вектор, касательный к Q в (m, q) . Понятно, что $e((m, q)) \bullet \tilde{\Phi}_{(m, q)}(\cdot, X)$ является обычной 1-формой (т. е. дифференциальной формой со значениями в вещественных числах). Обозначим через $e((m, q)) \bullet \tilde{\Phi}_{(m, q)}(\cdot, X)$ касательный вектор к Q , физически эквивалентный 1-форме $e((m, q)) \bullet \tilde{\Phi}_{(m, q)}(\cdot, X)$, т. е. полученный поднятием индексов с использованием римановой метрики g^Q .

Лемма 5.1. Векторное поле $e((m, q)) \bullet \tilde{\Phi}_{(m, q)}(\cdot, X)$ горизонтально, т. е. принадлежит пространствам связности $\mathcal{H}^\pi$.

$\triangleleft$ По построению форма $\tilde{\Phi}(\cdot, \cdot)$ горизонтальна, т. е. $\tilde{\Phi}(Y, \dot{q}) = 0$ для любого вектора $Y \in V$. Тогда для того же Y имеем $e(q) \bullet \tilde{\Phi}(Y, \dot{q}) = 0$ и по построению $g^Q(e(q) \bullet \tilde{\Phi}(\cdot, \dot{q}), Y) = 0$. $\triangleright$

Введем ковариантную производную $\frac{D^Q}{dt} = K^Q \frac{d}{dt}$ на пространстве расслоения Q . Рассмотрим уравнение

$$\frac{D^Q}{dt} \dot{q} = \overline{e((m, q)) \bullet \tilde{\Phi}_{(m, q)}(\cdot, \dot{q})}, \quad (5.2)$$

которое может быть интерпретировано как уравнение движения классической частицы в классическом калибровочном поле.

Из леммы 5.1 следует, что уравнение (5.2) эквивалентно системе

$$\frac{D^H}{dt} \dot{q} = \overline{e(q) \bullet \tilde{\Phi}(\cdot, \dot{q})}, \quad (5.3)$$

$$\frac{D^V}{dt} \dot{q} = 0. \quad (5.4)$$

Теорема 5.1 [50]. Пусть $q(t)$ — решение (5.2) с горизонтальным начальным условием $\dot{q}(0) = \dot{q}_0 \in H^\pi$. Тогда $q(t)$ горизонтально (т. е. $\dot{q} \in H^\pi$) при всех t , при которых оно определено, и $e(q(t))$ постоянно.

◁ В локальных координатах представим $q(t)$ в виде $q(t) = (m(t), c(t))$, где $m(t) \in \mathcal{M}$, $c(t)$ принадлежит слою $m(t)$. Тогда $\dot{q} = (m, c, \dot{m}, \dot{c})$. Отметим, что $K^\pi \dot{q} = (m, \dot{c} + \Gamma_m^\pi(c, \dot{m}))$, где $\Gamma_m^\pi(\cdot, \cdot)$ — локальный коэффициент связности H^π . Так что условие $\dot{q}_0 \in H^\pi$ в локальных координатах записывается в виде $\dot{c}_0 + \Gamma_m^\pi(c_0, \dot{m}_0) = 0$. Далее, $TK^\pi \frac{d}{dt} \dot{q} = \frac{d}{dt}(m, \dot{c} + \Gamma_m^\pi(c, \dot{m})) = (m, c, \dot{m}, \frac{d}{dt}(\dot{c} + \Gamma_m^\pi(c, \dot{m})))$. По (5.3) $\frac{D}{dt}^V \dot{q} = K^V \frac{d}{dt} \dot{q} = p^{-1} \circ K^\pi \circ TK^\pi \frac{d}{dt} \dot{q} = 0$, откуда следует, что $TK^\pi \frac{d}{dt} \dot{q}$ принадлежит связности H^π . Это означает, что

$$\frac{d}{dt}(m, \dot{c} + \Gamma_m^\pi(c, \dot{m})) = (m, c, \dot{m}, -\Gamma_m^\pi(\dot{m}, \dot{c} + \Gamma_m^\pi(c, \dot{m}))).$$

Значит

$$\frac{d}{dt}(\dot{c} + \Gamma_m^\pi(c, \dot{m})) = -\Gamma_m^\pi(\dot{m}, \dot{c} + \Gamma_m^\pi(c, \dot{m})).$$

Последнее равенство представляет из себя линейное дифференциальное уравнение относительно $\dot{c} + \Gamma_m^\pi(c, \dot{m})$ с нулевыми начальными условиями. Поэтому $\dot{c} + \Gamma_m^\pi(c, \dot{m}) = 0$, откуда и вытекает первое утверждение. Поскольку кривая $q(t) = (m(t), c(t))$ горизонтальна, она представима в виде $(m(t), b_t(f))$, где $(m(t), b_t)$ — некоторый горизонтальный подъем кривой $m(t)$ в $\mathcal{E}$, а f — некоторый фиксированный вектор в $\mathcal{F}$. Так что $b_t(f)$ лежит в орбите G в $\mathcal{F}$, т. е. $e(q(t)) = e(b_t(f))$ постоянно. ▷

Ниже нам потребуются следующие свойства связности $\mathcal{H}^Q$.

Теорема 5.2. Пусть $(m(t), q(t))$ — гладкая кривая в Q . Пусть $X(t)$ — параллельный перенос вектора $X \in T_{(m(t_0), q(t_0))}Q$ относительно связности $\mathcal{H}^Q$ вдоль $(m(t), q(t))$.

(i) И горизонтальная $\mathcal{H}X(t)$, и вертикальная $\mathcal{V}X(t)$ компоненты вектора $X(t)$ являются параллельными векторными полями вдоль $(m(t), q(t))$ относительно $\mathcal{H}^Q$, причем параллельный перенос горизонтальных векторов сохраняет нормы и скалярные произведения относительно g^Q .

(ii) Векторное поле $T\pi X(t)$ является параллельным вдоль $m(t)$ на M относительно связности $\mathcal{H}^\pi$.

◁ Уравнение параллельного векторного поля относительно $\mathcal{H}^Q$ имеет вид $\frac{D^Q}{dt}X(t) = 0$. Оно эквивалентно системе $\frac{D^H}{dt}X(t) = 0$ и $\frac{D^V}{dt}X(t) = 0$. Поскольку $\frac{D^H}{dt}X(t) = K^H \frac{d}{dt}X(t)$, $K^H = T\pi^{-1} \circ K^\tau \circ T^2\pi$, то нетрудно видеть, что $K^\tau \circ T^2\pi \frac{d}{dt}X(t) = 0$. Так как $T^2\pi \frac{d}{dt}X(t) = \frac{d}{dt}T\pi X(t)$, то $\frac{D}{dt}T\pi X(t) = K^\tau \frac{d}{dt}T\pi X(t) = 0$. В частности, это означает что векторное поле $T\pi X(t)$ является параллельным вдоль $m(t)$ в M относительно $\mathcal{H}^\tau$. Поскольку параллельный перенос относительно связности Леви-Чивита сохраняет нормы и скалярные произведения в метрике g , а g^Q на пространствах $\mathcal{H}^\pi$ является обратным образом g , то отсюда следует, что параллельный перенос горизонтальных векторов относительно $\mathcal{H}^Q$ сохраняет нормы и скалярные произведения относительно g^Q .

По построению $T\pi X(t) = T\pi \mathcal{H}X(t)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{D^H}{dt}\mathcal{H}X(t) &= K^H \frac{d}{dt}\mathcal{H}X(t) = T\pi^{-1} \circ K^\tau \circ T^2\pi \frac{d}{dt}\mathcal{H}X(t) = \\ &= T\pi^{-1} \circ K^\tau \frac{d}{dt}T\pi \mathcal{H}X(t) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{H}X(t)$ горизонтально, $K^\pi \mathcal{H}X(t) = 0$ при всех t из области определения кривой $(m(t), q(t))$. Это означает, что $\frac{d}{dt}K^\pi \mathcal{H}X(t)$ горизонтально (не имеет вертикальной компоненты), т. е. $K^\pi \frac{d}{dt}K^\pi \mathcal{H}X(t) = 0$. Но $\frac{d}{dt}K^\pi \mathcal{H}X(t) = TK^\pi \frac{d}{dt}\mathcal{H}X(t)$. Так что

$$\begin{aligned} \frac{D^V}{dt}\mathcal{H}X(t) &= K^V \frac{d}{dt}\mathcal{H}X(t) = \mathbf{p}^{-1} \circ K^\pi \circ TK^\pi \frac{d}{dt}\mathcal{H}X(t) = \\ &= \mathbf{p}^{-1} \circ K^\pi \frac{d}{dt}K^\pi \mathcal{H}X(t) = 0. \end{aligned}$$

Так как мы показали выше, что $\frac{D^H}{dt}\mathcal{H}X(t) = 0$, то это означает, что $\frac{D^Q}{dt}\mathcal{H}X(t) = 0$.

По условию $\frac{D^Q}{dt}X(t) = 0$. С другой стороны,

$$\frac{D^Q}{dt}X(t) = \frac{D^Q}{dt}\mathcal{H}X(t) + \frac{D^Q}{dt}\mathcal{V}X(t) \quad \text{и} \quad \frac{D^Q}{dt}\mathcal{H}X(t) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{D^Q}{dt}\mathcal{V}X(t) = 0. \triangleright$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Как сказано выше, мы будем иметь дело с двумя технически различающимися случаями: вещественными расслоениями над римановыми многообразиями и комплексными расслоениями над лоренцевыми многообразиями. Чтобы различать формулы, соответствующие этим случаям, мы сохраним обозначения связностей $\mathcal{H}^\pi$, $\mathcal{H}^\tau$ и $\mathcal{H}^Q$ для первого случая и введем обозначения $\overline{\mathcal{H}}^\pi$, $\overline{\mathcal{H}}^\tau$ и $\overline{\mathcal{H}}^Q$, соответственно, для второго. Подчеркнем, что все конструкции и результаты настоящего параграфа верны в обоих случаях.

5.2. Случай вещественных расслоений над римановыми многообразиями

5.2.1. Производные в среднем на римановом многообразии. В этом параграфе мы рассматриваем римановы многообразия. Случай лоренцевых многообразий (т. е. специальный случай псевдоримановых), на которых из-за того, что необходима инвариантность относительно группы Лоренца, производные в среднем вводятся по-другому, будет рассмотрен в дальнейших параграфах.

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ со значениями в римановом многообразии M , заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Символом $\mathcal{N}_t^\xi$ обозначим минимальную σ -подалгебру σ -алгебры $\mathcal{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств в M при отображении $\xi(t) : \Omega \rightarrow M$ («настоящее» процесса $\xi(t)$), и символом $E_t^\xi = E(\cdot | \mathcal{N}_t^\xi)$ — условное математическое ожидание относительно $\mathcal{N}_t^\xi$. Напомним, что условное математическое ожидание случайного элемента ϑ относительно $\mathcal{N}_t^\xi$ может быть представлено как $\Theta(\xi(t))$, где Θ — измеримое по Борелю отображение, так называемая *регрессия*, которая обычно обозначается так: $\Theta(m) = E(\vartheta | \xi(t) = m)$ (см., например, [25]).

Выберем точку $m \in M$ и рассмотрим нормальную карту U_m в этой точке относительно экспоненциального отображения связности Леви-Чивита на M . Построим в U_m следующие регрессии:

$$Y^{U_m}(t, m') = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \middle| \xi(t) = m' \right), \quad (5.5)$$

$$Y_*^{U_m}(t, m') = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \middle| \xi(t) = m' \right). \quad (5.6)$$

Введем обозначения: $X^0(t, m) = Y^{U_m}(t, m)$, $X_*^0(t, m) = Y_*^{U_m}(t, m)$. Отметим, что $X^0(t, m)$ и $X_*^0(t, m)$ являются векторными полями на M , т. е. при заменах координат они преобразуются как сечения касательного расслоения TM .

Производные в среднем справа и слева процесса $\xi(t)$ определяются соответственно формулами

$$D\xi(t) = X^0(t, \xi(t)), \quad D_*\xi(t) = X_*^0(t, \xi(t)). \quad (5.7)$$

Вектор $v^\xi(t) = \frac{1}{2}(D + D_*)\xi(t)$ называется *текущей скоростью* процесса $\xi(t)$. Из свойств условного математического ожидания следует, что существует регрессия, т. е. векторное поле $v^\xi(t, m)$ на M такое, что $v^\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t))$.

Введем приращения процесса $\xi(t)$: $\Delta\xi(t) = E_t^\xi(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))$ и так называемую квадратичную производную в среднем D_2 формулой

$$D_2\xi(t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E_t^\xi \frac{\Delta\xi(t) \otimes \Delta\xi(t)}{\Delta t}.$$

Если она существует, то принимает значения в симметрических неотрицательно определенных $(2, 0)$ -тензорах (см. гл. 1 и подробности в [43]).

Всюду далее мы будем иметь дело с процессами, вдоль которых корректно определен параллельный перенос относительно соответствующей связности. Сейчас мы предполагаем, что корректно определен параллельный перенос вдоль $\xi(\cdot)$ относительно $\mathcal{H}^\tau$. Это предположение выполнено, например, если $\xi(t)$ является процессом Ито на M , т. е. разверткой Ито (см. § 8.6, подробное изложение имеется в [12]) некоторого процесса Ито в каком-нибудь касательном пространстве к M и, в частности, семимартингалом. Обозначим через $\Gamma_{t,s}$ оператор указанного параллельного переноса векторов из (случайной) точки $\xi(s)$ процесса в (случайную) точку $\xi(t)$.

Для векторного поля $Z(t, m)$ на M его ковариантные производные в среднем справа $\mathbf{D}Z(t, \xi(t))$ и слева $\mathbf{D}_*Z(t, \xi(t))$ вдоль $\xi(\cdot)$ строятся по формулам

$$\mathbf{D}Z(t, \xi(t)) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E_t^\xi \left(\frac{\Gamma_{t, t+\Delta t} Z(t + \Delta t, \xi(t + \Delta t)) - Z(t, \xi(t))}{\Delta t} \right), \quad (5.8)$$

$$\mathbf{D}_*Z(t, \xi(t)) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E_t^\xi \left(\frac{Z(t, \xi(t)) - \Gamma_{t, t-\Delta t} Z(t - \Delta t, \xi(t - \Delta t))}{\Delta t} \right). \quad (5.9)$$

Уравнением Ньютона — Нельсона с силовым полем $\alpha(m, X)$, $X \in T_m M$, на римановом многообразии мы называем систему вида

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{D}D_* + \mathbf{D}_*D)\xi(t) = \bar{\alpha}(\xi(t), v^\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \frac{\hbar}{m}I, \end{cases} \quad (5.10)$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h — постоянная Планка, а m — масса частицы. Связь этого уравнения с квантовой механикой описана, например, в [12, 43, 62, 64]. Обычно в правой части этого уравнения на римановом многообразии имеется дополнительное слагаемое в терминах кривизны Риччи. Мы рассматриваем уравнение Ньютона — Нельсона в форме (5.10), имея в виду дальнейшее применение его в релятивистской теории, в которой указанное дополнительное слагаемое не используется. Мы отсылаем читателя к [12, 43, 62, 64], где проведено исследование этого уравнения. Если силовое поле α потенциально с потенциалом V , то волновая функция, соответствующая уравнению Шредингера с потенциалом V , и решения уравнения (5.10) при некоторых естественных дополнительных условиях выражаются друг через друга. Отметим, что в нашем случае в уравнение Шредингера входит оператор Лапласа — Бельтрами $\nabla\nabla^*$, где ∇ — ковариантная производная, а в случае с дополнительным слагаемым с тензором Риччи — оператор Лапласа — де Рама $d\delta + \delta d$.

5.2.2. Производные в среднем на вещественном векторном расслоении над римановым многообразием. В этом параграфе мы модифицируем аппарат производных в среднем из параграфа 5.2.1 так, что его удастся использовать нужным для нас образом для процессов на пространстве вещественного векторного расслоения Q над римановым многообразием M .

Рассмотрим случайный процесс $\eta(t)$ на пространстве вещественного векторного расслоения Q и процесс $\xi(t) = \pi\eta(t)$ на M . Здесь мы обозначаем через $\Gamma_{t,s}^\pi$ параллельный перенос случайных векторов из слоя $Q_{\xi(s)}$ в слой $Q_{\xi(t)}$ вдоль $\xi(\cdot)$ относительно связности $\mathcal{H}^\pi$. Для $\eta(t)$ мы вводим ковариантные производные в среднем формулами

$$\mathbf{D}\eta(t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E_t^\xi \left(\frac{\Gamma_{t,t+\Delta t}^\pi \eta(t + \Delta t) - \eta(t)}{\Delta t} \right), \quad (5.11)$$

$$\mathbf{D}_*\eta(t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E_t^\xi \left(\frac{\eta(t) - \Gamma_{t,t-\Delta t}^\pi \eta(t - \Delta t)}{\Delta t} \right). \quad (5.12)$$

(аналоги (5.8) и (5.9)). Как и выше, $v^\eta(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}_*)\eta(t)$ называется *текущей скоростью* процесса $\eta(t)$. Подчеркнем, что в формулах (5.11) и (5.12) используется условное математическое ожидание относительно «настоящего» процесса $\xi(t)$, а не $\eta(t)$.

Лемма 5.2. (i) $T\pi\mathbf{D}\eta(t) = D\xi(t)$;

(ii) $T\pi\mathbf{D}_*\eta(t) = D_*\xi(t)$;

(iii) $T\pi v^\eta = v^\xi$.

Чтобы задать производные в среднем векторного поля вдоль $\eta(t)$ на Q , мы используем оператор параллельного переноса $\Gamma_{t,s}^Q$ векторов, касательных к Q в точке $\eta(s)$, в векторы, касательные к Q в точке $\eta(t)$, вдоль $\eta(\cdot)$ относительно связности $\mathcal{H}^Q$. Аналогично формулам (5.8) и (5.9) для векторного поля $Z(t, (m, q))$ на Q мы вводим ковариантные производные формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^Q Z(t, \eta(t)) &= \\ &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} E_t^\xi \left(\frac{\Gamma_{t, t+\Delta t}^Q Z(t + \Delta t, \eta(t + \Delta t)) - Z(t, \eta(t))}{\Delta t} \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_*^Q Z(t, \eta(t)) &= \\ &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} E_t^\xi \left(\frac{Z(t, \eta(t)) - \Gamma_{t, t-\Delta t}^Q Z(t - \Delta t, \eta(t - \Delta t))}{\Delta t} \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Лемма 5.3. $\Gamma_{t,s}^Q$ переводит $\mathcal{H}_{\eta(s)}^\pi$ на $\mathcal{H}_{\eta(t)}^\pi$, а $\mathcal{V}_{\eta(s)}$ — на $\mathcal{V}_{\eta(t)}$, и при этом параллельный перенос горизонтальных компонент сохраняет нормы и скалярные произведения относительно метрики g^Q .

Утверждение леммы 5.3 следует из теоремы 5.2 и того факта (см. [12, 15, 43]), что параллельный перенос вдоль случайного процесса может быть описан как предел параллельных переносов вдоль процессов, чьи выборочные траектории являются кусочно-геодезическими (т. е. в частности, кусочно гладкими) аппроксимациями выборочных траекторий рассматриваемого процесса.

Символами $\mathbf{D}^H$ и $\mathbf{D}_*^H$ мы обозначаем производные, введенные формулами (5.13) и (5.14) соответственно, для горизонтальных компонент векторов (т. е. принимающие значения в $\mathcal{H}^\pi$), а символами $\mathbf{D}^V$ и $\mathbf{D}_*^V$ — для вертикальных компонент (т. е. принимающие значения в $\mathcal{V}$). Таким образом, $\mathbf{D}^Q = \mathbf{D}^H + \mathbf{D}^V$, $\mathbf{D}_*^Q = \mathbf{D}_*^H + \mathbf{D}_*^V$.

Вектор $\frac{1}{2}(\mathbf{D}^Q \mathbf{D}_* + \mathbf{D}_*^Q \mathbf{D})\eta$ называется *ускорением* процесса η в пространстве расслоения Q .

5.2.3. Уравнение Ньютона — Нельсона на пространстве вещественного векторного расслоения над римановым многообразием. В соответствии с общей идеологией стохастической механики уравнение Ньютона — Нельсона, соответствующее закону Ньютона (5.2), имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{D}^Q \mathbf{D}_* + \mathbf{D}_*^Q \mathbf{D})\eta(t) = \overline{e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^\eta(t))}, \\ D_2 \xi(t) = \frac{\hbar}{m} I, \end{cases} \quad (5.15)$$

где $\xi(t) = \pi\eta(t)$.

Разложим текущую скорость v^η в правой части (5.15) в сумму вертикальной и горизонтальной компонент: $v^\eta = v_\eta^H + v_\eta^V$, где $v_\eta^H \in \mathcal{H}^\pi$ и $v_\eta^V \in \mathcal{V}$. Из того, что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, \cdot)$ линейна по обоим аргументам, следует, что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^\eta) = \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v_\eta^H) + \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v_\eta^V)$, а из того, что эта форма горизонтальна (см. лемму 5.1) — что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v_\eta^V) = 0$.

Таким образом, первое уравнение системы (5.15) эквивалентно следующей системе:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^H \mathbf{D}_* + \mathbf{D}_*^H \mathbf{D})\eta(t) = \overline{e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v_\eta^H(t))}, \quad (5.16)$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^V \mathbf{D}_* + \mathbf{D}_*^V \mathbf{D})\eta(t) = 0. \quad (5.17)$$

Для удобства изложения обозначим $\overline{e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v_\eta^H(t))}$ символом $\alpha_{(t, \eta(t))}^H v_\eta^H$, где по построению $\alpha_{(t, (m', q'))}(\cdot)$ — линейный оператор в $\mathcal{H}_{(m', q')}^\pi$ ((1, 1)-тензор).

Введем горизонтальное (1, 2)-тензорное поле на Q : $\nabla^H \alpha(\cdot, \cdot) = K^H T \alpha(\cdot)$. Вектор $\text{tr } \nabla^H \alpha(\alpha \cdot, \cdot)$ также горизонтален по построению.

Теорема 5.3. Пусть для тензорного поля $\alpha_{(t, (m, q))}(\cdot)$ существует константа $C > 0$ такая, что

$$\int_0^T \left(\|\alpha_{(t, x(t))}(\cdot)\|^2 + \|\text{tr } \nabla^H \alpha_{(t, x(t))}(\alpha \cdot, \cdot)\|^2 \right) dt < C \quad (5.18)$$

для некоторого выбранного $T > 0$ и любой непрерывной кривой $x(t)$ в Q , $t \in [0, T]$, где $\|\alpha_{(t,x)}(\cdot)\|$ — операторная норма (все нормы порождены g^Q). Пусть обе связности $\mathcal{H}^\tau$ и $\mathcal{H}^\pi$ стохастически полны (см. определение 8.36). Тогда для любой точки (m, q) в Q , любого вектора $\beta_0 \in \mathcal{H}_{(m,q)}^\pi$ и любого момента времени $t_0 > 0$ существует случайный процесс $\eta(t)$ в Q такой, что

- он корректно определен на $[0, T]$;
- $\eta(0) = (m, q)$ и $D\eta(0) = \beta_0$;
- для всех $t \in (t_0, T)$ процессы $\eta(t)$ и $\xi(t) = \pi\eta(t)$ удовлетворяют (5.15);
- вдоль $\eta(t)$ заряд $e(\eta(t))$ имеет постоянное значение.

◁ Без потери общности мы для простоты положим $\frac{\hbar}{m} = 1$. На пространстве непрерывных кривых $C^0([0, T], T_m M)$ рассмотрим фильтрацию $\mathcal{P}_t$, где при каждом $t \in [0, T]$ σ -алгебра $\mathcal{P}_t$ порождена цилиндрическими множествами с основаниями на $[0, t]$. Зададим меру Винера ν на измеримом пространстве $(C^0([0, T], T_m M), \mathcal{P}_T)$ и рассмотрим в $T_m M$ стандартный винеровский процесс $W_m(t)$ — координатный процесс на вероятностном пространстве $(C^0([0, T], T_m M), \mathcal{P}_T, \nu)$. Поскольку $\mathcal{H}^\tau$ стохастически полно, то развертка Ито $W^M(t)$ процесса $W_m(t)$ относительно $\mathcal{H}^\tau$ на M корректно определена. Поскольку $\mathcal{H}^\pi$ также стохастически полно, то горизонтальный подъем $W^Q(t)$ на Q относительно $\mathcal{H}^\pi$ с начальным условием (m, q) также корректно определен. Подробное описание конструкции процессов $W^M(t)$ и $W^Q(t)$ имеется в [12].

Так как $T\pi : \mathcal{H}_{(m,q)}^\pi \rightarrow T_m M$ — линейный изоморфизм, который определяет метрический тензор q^Q в $\mathcal{H}_{(m,q)}^\pi$ переносом g из $T_m M$, перенесем в $\mathcal{H}_{(m,q)}^\pi$ меру Винера и винеровский процесс из $T_m M$ в $\mathcal{H}_{(m,q)}^\pi$. Обозначим полученный винеровский процесс через $W(t)$. Это координатный процесс на пространстве непрерывных кривых в $\mathcal{H}_{(m,q)}^\pi$ с σ -алгеброй $\mathcal{P}_T$, заданный мерой Винера.

Для $t \geq 0$ введем вещественную функцию

$$t_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_0}, & t < t_0, \\ \frac{1}{t}, & t \geq t_0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Ее производная $t_0'(t)$ равна 0 при $t < t_0$ и $-\frac{1}{t^2}$ при $t \geq t_0$.

Теперь рассмотрим в $\mathcal{H}_{(m,q)}^\pi$ следующее уравнение в форме Ито :

$$\begin{aligned} \beta(t) = & \beta_0 + \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma_{0,s}^Q \operatorname{tr} \nabla^H \alpha_{(s, W^Q(s))}(\alpha \cdot, \cdot) ds + \\ & + \int_0^t \Gamma_{0,s}^Q \alpha_{(s, W^Q(s))} dW(s) - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t t_0(s) \beta(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t t'_0(s) W(s) ds. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Поскольку уравнение (5.20) линейно по β , оно имеет сильное и сильно-единственное решение $\beta(t)$. Так как это решение сильное, оно определено на любом вероятностном пространстве, на котором корректно определен винеровский процесс, в частности, на пространстве непрерывных кривых в $\mathcal{H}_{(m,q)}^\pi$, снабженном мерой Винера. Рассмотрим на этом вероятностном пространстве плотность вида

$$\theta(T) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^T \beta(s)^2 ds + \int_0^T (\beta(s) \cdot dW(s)) \right). \quad (5.21)$$

Из формулы (5.18) и из леммы 5.3 следует, что плотность (5.21) корректно определена. Введем меру, имеющую плотность (5.21) относительно меры Винера. Хорошо известно, что после такой замены меры координатный процесс принимает вид

$$\zeta(t) = \int_0^t \beta(s) ds + w(t),$$

где $w(t)$ — некоторый винеровский процесс, не упреждающий относительно $\mathcal{P}_t$ (см. определение 8.12). Обозначим процесс $W^Q(t)$, рассматриваемый относительно новой меры, символом $\eta(t)$ и введем процесс $\xi(t) = \pi\eta(t)$. Процесс $\xi(t)$ получен из $W^M(t)$ заменой меры.

Уравнение (5.20) при этом превращается в

$$\begin{aligned}
 \beta(t) = & \beta_0 + \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma_{0,s}^Q \operatorname{tr} \nabla^H \alpha_{(s,\eta(t))}(\alpha \cdot, \cdot) ds + \\
 & + \int_0^t \Gamma_{0,s}^Q \alpha_{(s,\eta(s))} \beta(s) ds + \\
 & + \int_0^t \left(\Gamma_{0,s}^Q \alpha_{(s,\eta(s))}(\cdot) + \frac{1}{2} t_0(s) \right) dw(s) - \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^t t_0(s) \beta(s) ds - \frac{1}{2} t_0(t) \zeta(t).
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

По построению $\eta(0) = (m, q)$ и $D\eta(t) = \beta_0$. Процесс $\eta(t)$ удовлетворяет равенству (5.17) также по построению. Тот факт, что при $t \in (t_0, T)$ процессы $\eta(t)$ и $\xi(t) = \pi\eta(t)$ удовлетворяют (5.16) и что $D_2\xi(t) = I$, следуют из формул для производных в среднем, найденных в [12, гл. 12, 18]. Очевидным образом $\eta(t)$ является горизонтальным подъемом процесса $\xi(t)$ относительно связности $\mathcal{H}^\pi$ с начальным условием (m, q) . Напомним, что горизонтальный подъем $\eta(t)$ процесса $\xi(t)$ является параллельным переносом (m, q) вдоль $\xi(\cdot)$ относительно $\mathcal{H}^\pi$. Следовательно, он может быть представлен в виде $(\xi(t), b_t(f))$, где b_t — горизонтальный подъем процесса $\xi(t)$ на $\mathcal{E}$ относительно связности $\mathcal{H}$, а f — некоторый вектор стандартного слоя $\mathcal{F}$ (см. § 5.1). Таким образом, выборочные траектории процесса $\eta(t)$ лежат в орбите группы G и, следовательно, заряд e является постоянным вдоль $\eta(t)$. $\triangleright$

5.3. Случай комплексных расслоений над лоренцевыми многообразиями

5.3.1. Введение в релятивистскую стохастическую механику на лоренцевых многообразиях. Здесь мы используем релятивистскую версию стохастической механики, предложенную в [38, 56, 67, 68] с небольшими усовершенствованиями из [12, 43]. Необходимость специальных конструкций для релятивистского слу-

чая вызвано тем, что введенные для случая римановых многообразий и расслоений над ними производные в среднем оказываются нековариантными относительно группы Лоренца.

Из соображений удобства изложения здесь мы изменим обозначения: лоренцево многообразие будет обозначаться символом $\mathcal{M}$ (это позволит читателю не путать случаи риманова и лоренцева многообразий), а также мы не будем использовать сокращенное обозначение для условного математического ожидания относительно σ -алгебры «настоящее» (см. ниже).

Рассмотрим стохастический процесс $\xi(t)$ со значениями в лоренцевом многообразии $\mathcal{M}$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Как и выше, через $\mathcal{N}_t^\xi$ мы обозначаем минимальную σ -подалгебру σ -алгебры $\mathcal{F}$, порожденную прообразами борелевских множеств в $\mathcal{M}$ при отображении $\xi(t) : \Omega \rightarrow \mathcal{M}$ («настоящее» процесса $\xi(t)$). В этом параграфе (в отличие от всей остальной книги) нам удобнее обозначать условное математическое ожидание относительно $\mathcal{N}_t^\xi$ символом $E(\cdot | \mathcal{N}_t^\xi)$. Здесь t — инвариантный параметр, который может играть роль собственного времени. Напомним (см. выше), что условное математическое ожидание случайного элемента ϑ относительно $\mathcal{N}_t^\xi$ может быть представлено как $\Theta(\xi(t))$ где Θ — это так называемая *регрессия*, которая вводится формулой (см., например, [25])

$$\Theta(m) = E(\vartheta | \xi(t) = m).$$

Выберем событие (т. е. точку в $\mathcal{M}$) и рассмотрим нормальную карту U_m в этой точке относительно экспоненциального отображения связности Леви-Чивита на $\mathcal{M}$. Эту карту можно считать областью в касательном пространстве $T_m\mathcal{M}$, в которой метрика g задает структуру пространства Минковского. В U_m построим следующие регрессии

$$\begin{aligned} Y_+^{U_m}(t, m') &= \\ &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\frac{\xi(t+\Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \middle| \xi(t) = m', (\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^2 \leq 0 \right) + \\ &+ \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\frac{\xi(t) - \xi(t-\Delta t)}{\Delta t} \middle| \xi(t) = m', (\xi(t) - \xi(t-\Delta t))^2 \geq 0 \right), \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned}
& Y_-^{U_m}(t, m') = \\
& = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \middle| \xi(t) = m', (\xi(t) - \xi(t - \Delta t))^2 \leq 0 \right) + \\
& + \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \middle| \xi(t) = m', (\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^2 \geq 0 \right). \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Введем $X_+^0(t, m) = Y_+^{U_m}(t, m)$ и $X_-^0(t, m) = Y_-^{U_m}(t, m)$. Отметим, что $X_+^0(t, m)$ и $X_-^0(t, m)$ — векторные поля на $\mathcal{M}$, т. е. при заменах координат они преобразуются как сечения касательного расслоения $T\mathcal{M}$.

Релятивистские производные в среднем справа и слева процесса $\xi(t)$ определяются формулами

$$D_+\xi(t) = X_+^0(t, \xi(t)), \quad D_-\xi(t) = X_-^0(t, \xi(t)). \quad (5.25)$$

Показано, что производные в среднем, введенные формулами (5.25), ковариантны относительно группы Лоренца.

Вектор $v^\xi(t) = \frac{1}{2}(D_+ + D_-)\xi(t)$ называется *текущей скоростью* процесса $\xi(t)$. Из свойств условного математического ожидания следует, что существуют измеримые по Борелю векторные поля (регрессии) $v^\xi(t, m)$ на $\mathcal{M}$ такие, что $v^\xi(t) = v^\xi(t, \xi(t))$.

Введем «релятивистские» приращения процесса $\xi(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Delta_+\xi(t) &= E \left(\xi(t + \Delta t) - \xi(t) \middle| (\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^2 \leq 0 \right) + \\
&+ E \left(\xi(t) - \xi(t - \Delta t) \middle| (\xi(t) - \xi(t - \Delta t))^2 \geq 0 \right)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\Delta_-\xi(t) &= E \left(\xi(t) - \xi(t - \Delta t) \middle| (\xi(t) - \xi(t - \Delta t))^2 \geq 0 \right) + \\
&+ E \left(\xi(t + \Delta t) - \xi(t) \middle| (\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^2 \leq 0 \right).
\end{aligned}$$

Теперь, следуя [12], мы вводим релятивистскую квадратичную производную в среднем D_2 формулой

$$\begin{aligned}
D_2\xi(t) &= \lim_{\Delta\tau \downarrow 0} E \left(\frac{\Delta_+\xi(t) \otimes \Delta_+\xi(t)}{\Delta t} \middle| \mathcal{N}_t^\xi \right) = \\
&= \lim_{\Delta\tau \downarrow 0} E \left(\frac{\Delta_-\xi(t) \otimes \Delta_-\xi(t)}{\Delta t} \middle| \mathcal{N}_t^\xi \right).
\end{aligned}$$

Как и ранее, если она существует, то принимает значения в $(2, 0)$ -тензорах.

Везде ниже мы имеем дело с процессами, вдоль которых корректно определен параллельный перенос относительно некоторой связности. В данном случае мы работаем с $\xi(\cdot)$ и параллельным переносом относительно связности $\mathcal{H}^\tau$, и сформулированное предположение выполняется, если, например, $\xi(t)$ — процесс Ито на $\mathcal{M}$, т. е. развертка Ито (см. определение 8.35) процесса Ито в некотором касательном пространстве к $\mathcal{M}$ (см. [12, 43]). Обозначим через $\bar{\Gamma}_{t,s}$ оператор такого параллельного переноса векторов из (случайной) точки $\xi(s)$ процесса в (случайную) точку $\xi(t)$.

Напомним замечание 5.1 об изменении обозначений в нашем случае по сравнению с римановым вещественным случаем.

Для векторного поля $Z(t, m)$ на $\mathcal{M}$ релятивистские производные в среднем справа и слева $\mathbf{D}_+ Z(t, \xi(t))$ и $\mathbf{D}_- Z(t, \xi(t))$ строятся по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_+ Z(t, \xi(t)) &= \\ &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\left| \frac{\bar{\Gamma}_{t, t+\Delta t} Z(t + \Delta t, \xi(t + \Delta t)) - Z(t, \xi(t))}{\Delta t} \right| \right. \\ &\quad \left. \mathcal{N}_t^\xi, (\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^2 \leq 0 \right) + \quad (5.26) \\ &+ \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\left| \frac{Z(t, \xi(t)) - \bar{\Gamma}_{t, t-\Delta t} Z(t - \Delta t, \xi(t - \Delta t))}{\Delta t} \right| \right. \\ &\quad \left. \mathcal{N}_t^\xi, (\xi(t) - \xi(t - \Delta t))^2 \geq 0 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_- Z(t, \xi(t)) &= \\ &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\left| \frac{Z(t, \xi(t)) - \bar{\Gamma}_{t, t-\Delta t} Z(t - \Delta t, \xi(t - \Delta t))}{\Delta t} \right| \right. \\ &\quad \left. \mathcal{N}_t^\xi, (\xi(t) - \xi(t - \Delta t))^2 \leq 0 \right) + \quad (5.27) \\ &+ \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\left| \frac{\bar{\Gamma}_{t, t+\Delta t} Z(t + \Delta t, \xi(t + \Delta t)) - Z(t, \xi(t))}{\Delta t} \right| \right. \\ &\quad \left. \mathcal{N}_t^\xi, (\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^2 \geq 0 \right). \end{aligned}$$

Релятивистское уравнение Ньютона — Нельсона имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{D}_+ D_- + \mathbf{D}_- D_+) \xi(t) = \bar{\alpha}(\xi(t), v^\xi(t)), \\ D_2 \xi(t) = \frac{\hbar}{m} I, \end{cases} \quad (5.28)$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h — постоянная Планка и m — масса (масса покоя) частицы.

Если связность Леви-Чивита метрики g стохастически полна, в [12] показано, что при некоторых условиях типа ограниченности силового поля уравнение (5.28) имеет решение с подходящими начальными условиями для силового поля вида $\alpha(\xi(t), v^\xi(t)) = \bar{\alpha}(\xi(t))v^\xi$, где $\bar{\alpha}(m) : T_m \mathcal{M} \rightarrow T_m \mathcal{M}$ — линейный оператор. Естественные соотношения между (5.28) и уравнением Клейна — Гордона в некоторых случаях описаны в [38, 56, 67, 68].

5.3.2. Производные в среднем на комплексных векторных расслоениях над лоренцевым многообразием. В этом параграфе мы модифицируем аппарат § 5.3.1 так, что его удастся использовать на пространстве комплексного векторного расслоения Q над лоренцевым многообразием $\mathcal{M}$.

Рассмотрим стохастический процесс $\eta(t)$ на пространстве расслоения Q и введем процесс $\xi(t) = \pi\eta(t)$ на $\mathcal{M}$. Через $\bar{\Gamma}_{t,s}^\pi$ обозначим параллельный перенос случайных векторов из слоя $Q_{\xi(s)}$ в слой $Q_{\xi(t)}$ вдоль $\xi(\cdot)$ относительно связности $\mathcal{H}^\pi$ (ср. § 5.3.1). Для $\eta(t)$ мы вводим ковариантные производные в среднем формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_+ \eta(t) = & \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\frac{\bar{\Gamma}_{t,t+\Delta t}^\pi \eta(t+\Delta t) - \eta(t)}{\Delta t} \middle| \right. \\ & \left. \mathcal{N}_t^\xi, (\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^2 \leq 0 \right) + \\ & + \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\frac{\eta(t) - \bar{\Gamma}_{t,t-\Delta t}^\pi \eta(t-\Delta t)}{\Delta t} \middle| \right. \\ & \left. \mathcal{N}_t^\xi, (\xi(t) - \xi(t-\Delta t))^2 \geq 0 \right), \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_-\eta(t) = & \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\left| \frac{\eta(t) - \bar{\Gamma}_{t, t-\Delta t}^\pi \eta(t-\Delta t)}{\Delta t} \right| \right. \\
& \left. \mathcal{N}_t^\xi, (\xi(t) - \xi(t-\Delta t))^2 \leq 0 \right) + \\
& + \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\left| \frac{\bar{\Gamma}_{t, t+\Delta t}^\pi \eta(t+\Delta t) - \eta(t)}{\Delta t} \right| \right. \\
& \left. \mathcal{N}_t^\xi, (\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^2 \geq 0 \right). \tag{5.30}
\end{aligned}$$

(аналоги (5.26) и (5.27)). Как и выше, $v^\eta(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_+ + \mathbf{D}_-)\eta(t)$ называется *текущей скоростью* процесса $\eta(t)$.

- Лемма 5.4.** (i) $T\pi\mathbf{D}_+\eta(t) = D_+\xi(t)$;
(ii) $T\pi\mathbf{D}_-\eta(t) = D_-\xi(t)$;
(iii) $T\pi v^\eta = v^\xi$.

Утверждение леммы 5.4 следует из формул (5.23), (5.24), (5.29) и (5.30) и из определения текущей скорости.

Для задания производных в среднем векторных полей вдоль $\eta(t)$ на Q мы используем параллельный перенос $\bar{\Gamma}_{t,s}^Q$ векторов, касательных к Q в $\eta(s)$, в векторы, касательные к Q в $\eta(t)$, вдоль $\eta(\cdot)$ относительно связности $\mathcal{H}^Q$. Аналогично формулам (5.26) и (5.27), для векторного поля $Z(t, (m, q))$ на Q введем ковариантные производные в среднем формулами

$$\begin{aligned}
& \mathbf{D}_+^Q Z(t, \eta(t)) = \\
& = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\left| \frac{\bar{\Gamma}_{t, t+\Delta t}^Q Z(t+\Delta t, \eta(t+\Delta t)) - Z(t, \eta(t))}{\Delta t} \right| \right. \\
& \quad \left. \mathcal{N}_t^\xi, (\xi(t+\Delta t) - \xi(t))^2 \leq 0 \right) + \\
& + \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\left| \frac{Z(t, \eta(t)) - \bar{\Gamma}_{t, t-\Delta t}^Q Z(t-\Delta t, \eta(t-\Delta t))}{\Delta t} \right| \right. \\
& \quad \left. \mathcal{N}_t^\xi, (\xi(t) - \xi(t-\Delta t))^2 \geq 0 \right); \tag{5.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{D}_-^Q Z(t, \eta(t)) = \\
& = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\left| \frac{Z(t, \eta(t)) - \bar{\Gamma}_{t, t-\Delta t}^Q Z(t - \Delta t, \eta(t - \Delta t))}{\Delta t} \right| \right. \\
& \quad \left. \mathcal{N}_t^\xi, (\xi(t) - \xi(t - \Delta t))^2 \leq 0 \right) + \\
& + \lim_{\Delta t \downarrow 0} E \left(\left| \frac{\bar{\Gamma}_{t, t+\Delta t}^Q Z(t + \Delta t, \eta(t + \Delta t)) - Z(t, \eta(t))}{\Delta t} \right| \right. \\
& \quad \left. \mathcal{N}_t^\xi, (\xi(t + \Delta t) - \xi(t))^2 \geq 0 \right). \quad (5.32)
\end{aligned}$$

Напомним (см., например, [12, 15]), что параллельный перенос вдоль случайного процесса может быть представлен как предел параллельных переносов вдоль процессов, чьи выборочные траектории являются кусочно-геодезическими (т. е. кусочно-гладкими) аппроксимациями выборочных траекторий первоначального процесса. Таким образом, из теоремы 5.2 следует, что параллельный перенос относительно $\mathcal{H}^Q$ сохраняет распределения $\mathcal{H}^\pi$ и $\mathcal{V}$ инвариантными, т. е. $\bar{\Gamma}_{t,s}^Q$ переводит $\mathcal{H}_{\eta(s)}^\pi$ на $\mathcal{H}_{\eta(t)}^\pi$ и $\mathcal{V}_{\eta(s)}$ на $\mathcal{V}_{\eta(t)}$, соответственно. Обозначим через $\mathbf{D}_+^H$ и $\mathbf{D}_-^H$ производные, введенные формулами (5.31) и (5.32), соответственно, для горизонтальных компонент векторов (т. е. принимающий значения в $\mathcal{H}^\pi$), а через $\mathbf{D}_+^V$ и $\mathbf{D}_-^V$ — для вертикальных компонент векторов (т. е. принимающих значения в $\mathcal{V}$). Таким образом, $\mathbf{D}_+^Q = \mathbf{D}_+^H + \mathbf{D}_+^V$ и $\mathbf{D}_-^Q = \mathbf{D}_-^H + \mathbf{D}_-^V$.

Вектор $\frac{1}{2}(\mathbf{D}_+^Q \mathbf{D}_- + \mathbf{D}_-^Q \mathbf{D}_+) \eta$ называется *4-ускорением* процесса η в пространстве расслоения Q .

5.3.3. Движение квантовой частицы в классическом калибровочном поле. По общей идеологии стохастической механики уравнение Ньютона — Нельсона, соответствующее закону Ньютона (5.2), имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{D}_+^Q \mathbf{D}_- + \mathbf{D}_-^Q \mathbf{D}_+) \eta(t) = \overline{e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^\eta(t))}, \\ D_2 \xi(t) = \frac{\hbar}{m} I, \end{cases} \quad (5.33)$$

где $\xi(t) = \pi \eta(t)$. Мы интерпретируем (5.33) как уравнение движения квантовой частицы в классическом калибровочном поле.

Текущая скорость v^η в правой части (5.33) раскладывается в сумму ее вертикальной и горизонтальной компонент: $v^\eta = v_\eta^H + v_\eta^V$, где $v_\eta^H \in \mathcal{H}^\pi$ и $v_\eta^V \in \mathcal{V}$. Из того, что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, \cdot)$ линейно по обоим аргументам, следует, что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^\eta) = \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v_\eta^H) + \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v_\eta^V)$, а из того, что эта форма горизонтальна (см. лемму 5.1) — что $\tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v_\eta^V) = 0$. Поэтому первое уравнение системы (5.33) эквивалентно следующей системе:

$$\frac{1}{2} (\mathbf{D}_+^H \mathbf{D}_- + \mathbf{D}_-^H \mathbf{D}_+) \eta(t) = \overline{e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v_\eta^H(t))}, \quad (5.34)$$

$$\frac{1}{2} (\mathbf{D}_+^V \mathbf{D}_- + \mathbf{D}_-^V \mathbf{D}_+) \eta(t) = 0. \quad (5.35)$$

Поскольку Φ — 2-форма, то $e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(v_\eta^H(t), v_\eta^H(t)) = 0$, т. е. $\overline{e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v_\eta^H(t))}$ ортогонально $v_\eta^H(t)$ относительно g^Q .

Для простоты изложения обозначим $e(\eta(t)) \bullet \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v_\eta^H(t))$ символом $\alpha_{(t, \eta(t))} v_\eta^H$, где $\alpha_{(t, (m', q'))}(\cdot)$ — линейный оператор в $\mathcal{H}_{(m', q')}^\pi$ ((1, 1)-тензор) по построению. Введем горизонтальное (1, 2)-тензорное поле $\nabla^H \alpha(\cdot, \cdot) = K^H T \alpha(\cdot)$ на Q . Векторное поле $\text{tr } \nabla^H \alpha(\alpha, \cdot)$ также горизонтально по построению.

Предположим, что и $\mathcal{H}^\tau$, и $\mathcal{H}^\pi$ стохастически полны (см. [12]). Выберем точку $(m, q) \in Q$ и в $T_m \mathcal{M}$ зафиксируем лоренц-ортогональный репер, состоящий из векторов X_0, X_1, X_2, X_3 , где X_0 времениподобный, а остальные векторы пространственноподобны. Введем в $T_m \mathcal{M}$ евклидову метрику, изменив знак X_0^2 с минуса на плюс. Тогда $T_m \mathcal{M}$ становится евклидовым пространством.

Зафиксируем $T > 0$. На банаховом пространстве $C^0([0, T], T_m \mathcal{M})$ введем σ -алгебру $\mathcal{P}$, порожденную цилиндрическими множествами, и семейство ее подалгебр $\mathcal{P}_t$, порожденное цилиндрическими множествами с основаниями на $[0, t]$. Поскольку $T_m \mathcal{M}$ теперь имеет структуру евклидова пространства, то можно определить меру Винера ν на $(C^0([0, T], T_m \mathcal{M}), \mathcal{P})$ и, таким образом, рассмотреть стандартный винеровский процесс $W_m(t)$ в $T_m \mathcal{M}$ — координатный процесс на $(C^0([0, T], T_m \mathcal{M}), \mathcal{P}, \nu)$. Мы предполагаем все $\mathcal{P}_t$ полными, т. е. содержащими все множества нулевой меры ν .

Так как связность $\mathcal{H}^\tau$ стохастически полна, развертка Ито $W^\mathcal{M}(t)$ процесса $W_m(t)$ относительно $\mathcal{H}^\tau$ на $\mathcal{M}$ определена корректно. Поскольку $\mathcal{H}^\pi$ также стохастически полна, горизонталь-

ный подъем процесса $W^Q(t)$ на Q относительно $\mathcal{H}^\pi$, начинающийся в (m, q) , также определен корректно. Более подробно построение процессов $W^\mathcal{M}(t)$ и $W^Q(t)$ описано в [12]. Вдоль W^Q рассмотрим элементы $\alpha_j^i(t, x)$ матрицы $\alpha_{t,x}(\cdot)$ и координаты $V^k(t, x)$ вектора $\text{tr} \nabla^H \alpha_{t,x}(\alpha_{t,x} \cdot, \cdot)$ относительно базисов, полученных как горизонтальный подъем параллельного переноса репера $X_0, \dots, X_3$.

Отметим, что условие (5.18) не имеет в данном случае естественного физически осмысленного аналога. Вместо него мы делаем следующее

Условие 5.1. Вдоль выборочных траекторий $x(t)$ процесса W^Q для некоторого $C > 0$ ν -п. н. выполняется неравенство

$$\int_0^T \left(\alpha_j^i(t, x(t))^2 + V^k(t, x(t))^2 \right) dt < C$$

для всех индексов i, j, k .

Теорема 5.4. Пусть обе связности $\mathcal{H}^\tau$ и $\mathcal{H}^\pi$ стохастически полны и выполнено условие 5.1. Тогда для любого вектора $\beta_0 \in \mathcal{H}_{(m,q)}^\pi$ и любого момента времени $t_0 > 0$ существует процесс $\eta(t)$ в Q такой, что

- он корректно определен на $[0, T]$;
- $\eta(0) = (m, q)$ и $\mathbf{D}_+ \eta(0) = \beta_0$;
- для $t \in (t_0, T)$ процессы $\eta(t)$ и $\xi(t) = \pi \eta(t)$ удовлетворяют уравнению (5.33);
- вдоль $\eta(t)$ заряд $e(\eta(t))$ имеет постоянное значение.

Замечание 5.2. Из физических соображений вектор β_0 следует выбирать как горизонтальный подъем времениподобного вектора в $T_m \mathcal{M}$, направленного в будущее.

< **Доказательство теоремы 5.4.** Для простоты и без потери общности мы полагаем $\frac{\hbar}{m} = 1$.

Поскольку $T\pi : \mathcal{H}_{(m,q)}^\pi \rightarrow T_m \mathcal{M}$ — линейный изоморфизм, то можно перенести и евклидову метрику, и винеровский процесс из $T_m \mathcal{M}$ в $\mathcal{H}_{(m,q)}^\pi$. Обозначим последний винеровский процесс символом $W(t)$. Это координатный процесс на вероятностном пространстве $(C^0([0, T], \mathcal{H}_{(m,q)}^\pi), \mathcal{P}, \nu)$.

Далее мы будем использовать функцию $t_0(t)$, введенную формулой (5.19), и ее производную.

Теперь рассмотрим в $\mathcal{H}_{(m,q)}^\pi$ следующее стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито:

$$\begin{aligned} \beta(t) = & \beta_0 + \frac{1}{2} \int_0^t \bar{\Gamma}_{0,s}^Q \operatorname{tr} \nabla^H \alpha_{(s, W^Q(s))}(\alpha \cdot, \cdot) ds + \\ & + \int_0^t \bar{\Gamma}_{0,s}^Q \alpha_{(s, W^Q(s))} dW(s) - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t t_0(s) \beta(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t t'_0(s) W(s) ds. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Отметим, что несмотря на то, что вид уравнения (5.36) практически совпадает с (5.20), в этих уравнениях задействованы разные связности и разные операторы параллельного переноса. Тем не менее рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 5.3, в основном сохраняются.

Из условия 5.1 следует, что (5.36) корректно определено. Из линейности уравнения (5.36) следует, что оно имеет сильное и сильно единственное решение $\beta(t)$. После замены меры Винера на меру с плотностью

$$\theta(T) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^T \beta(s)^2 ds + \int_0^T (\beta(s) \cdot dW(s)) \right) \quad (5.37)$$

относительно ν (где β^2 и $(\beta(s) \cdot dW(s))$ найдены относительно евклидова скалярного произведения в $\mathcal{H}_{(m,q)}^\pi$); из условия 5.1 следует, что плотность (5.37) задана корректно) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \beta(t) = & \beta_0 + \frac{1}{2} \int_0^t \bar{\Gamma}_{0,s}^Q \operatorname{tr} \nabla^H \alpha_{(s, \eta(t))}(\alpha \cdot, \cdot) ds + \\ & + \int_0^t \bar{\Gamma}_{0,s}^Q \alpha_{(s, \eta(s))} \beta(s) ds + \int_0^t \bar{\Gamma}_{0,s}^Q \alpha_{(s, \eta(s))} dw(s) - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t t_0(s) \beta(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t t'_0(s) \zeta(s) ds. \end{aligned} \quad (5.38)$$

По построению $\eta(0) = (m, q)$ и $\mathbf{D}_+\eta(t) = \beta_0$. Равенство (5.35) выполнено для $\eta(t)$ и $\xi(t) = \pi\eta(t)$ также по построению. То, что при $t \in (t_0, T)$ процессы $\eta(t)$ и $\xi(t)$ удовлетворяют (5.34) и что $D_2\xi(t) = I$, вытекают из формул производных в среднем, выведенных в [12, гл. 12, 18] (см. также [43, гл. 9, 15].)

Тот факт, что заряд e является постоянным вдоль решения, доказывается в точности так же, как в доказательстве теоремы 5.3. $\triangleright$

Частные случаи группы G , равной $U(1)$, $SU(2)$ или $SU(3)$, и $\mathcal{F}$, являющимся комплексным линейным пространством соответствующей размерности, представляют особый интерес. Они описывают калибровочные поля, изучаемые в современной физике. Рассмотрим случай $G = U(1)$ и $\mathcal{F} = \mathbb{C}^1$ с $h(X, Y) = X\bar{Y}$ (черта означает комплексное сопряжение).

Алгебра Ли $\mathfrak{u}(1)$ — это вещественная прямая, следовательно заряд превращается в вещественно-значную функцию, а θ и Φ — в обычные дифференциальные формы со значениями в $\mathbb{R}$. Из структурных уравнений (5.1) и из того, что $U(1)$ — коммутативная группа, выводим, что $\Phi = D\theta = d\theta$. Это означает, что, во-первых, Φ является подъемом некоторой 2-формы Ψ с $\mathcal{M}$ на $\mathcal{E}$, и, во-вторых, что уравнения (5.1) превращаются в обычные уравнения Максвелла в геометрически инвариантной форме (см., например, [12]). Если (как обычно) предположим, что замкнутая форма Ψ точна, т. е. $\Psi = dA$, где A — 1-форма на $\mathcal{M}$, тогда 1-форму A можно считать 4-потенциалом, а Ψ — электромагнитным полем. Напомним, что на пространстве Минковского все замкнутые формы точны.

Так как значение заряда e вдоль решения, построенного в теореме 5.3, постоянно, то легко видеть, что $e \bullet \tilde{\Phi}$ превращается в подъем вектора $e\bar{\Psi}$ с $\mathcal{M}$ на Q . Таким образом, уравнение (5.33) сводится к уравнению Ньютона — Нельсона на $\mathcal{M}$, которое соответствует классическому уравнению Лоренца движения заряженной частицы в электромагнитном поле. Отметим, что в [38, 56, 67, 68] установлены соотношения между этим уравнением Ньютона — Нельсона и уравнением Клейна — Гордона.

ГЛАВА 6

ГРУППЫ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ И ВЯЗКАЯ ГИДРОДИНАМИКА¹

6.1. Основная идея использования производных в среднем в вязкой гидродинамике

Сначала опишем основную идею об описании вязкой гидродинамики на языке производных в среднем на феноменологическом уровне строгости.

Идея состоит в следующем. Пусть жидкости движутся по плоскому n -мерному тору $\mathcal{T}^n$.² Рассмотрим векторное пространство $\text{Vect}^{(s)}$ всех соболевских H^s -векторных полей ($s > \frac{n}{2} + 1$) на $\mathcal{T}^n$.

Пусть на n -мерном плоском торе $\mathcal{T}^n$ задан случайный поток $\xi(t, m)$ с начальными данными $\xi(0, m) = m \in \mathcal{T}^n$. Предположим, что это общее решение стохастического дифференциального уравнения вида

$$\xi(t, m) = m + \int_0^t a(s, \xi(s, m)) ds + \sigma w(t). \quad (6.1)$$

Пусть $D_*\xi(t, m) = v(t, \xi(t, m))$, где $v(t, m)$ — C^1 -гладкое по t и C^2 -гладкое по $m \in \mathcal{T}^n$ векторное поле на $\mathcal{T}^n$. Пусть $\sigma > 0$ — вещественная константа и пусть $\xi(t, m)$ удовлетворяет соотношению

$$D_*D_*\xi(t, m) = F(t, m), \quad (6.2)$$

¹Исследования, вошедшие в эту главу, выполнены при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 гг., проект 1.1539.2014/К.

²Напомним, что плоский тор — это фактор-пространство евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ по целочисленной решетке в случае, когда риманова метрика на $\mathcal{T}^n$ наследуется из скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$.

где $F(t, m)$ — векторное поле на $\mathcal{T}^n$. Принимая во внимание формулу (1.13), получаем, что

$$D_* D_* \xi(t, m) = \left(\frac{\partial}{\partial t} v + (v, \nabla) v - \frac{\sigma^2}{2} \nabla^2 v \right) = \frac{\partial}{\partial t} v + (v, \nabla) v - \frac{\sigma^2}{2} \nabla^2 v.$$

Таким образом, (6.2) означает, что $v(t, m)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t} v + (v, \nabla) v - \frac{\sigma^2}{2} \nabla^2 v = F(t, m), \quad (6.3)$$

которое является *уравнением Бюргерса* с вязкостью $\frac{\sigma^2}{2}$ и внешней силой $F(t, m)$. Мы интерпретируем (6.2) как стохастический аналог второго закона Ньютона на группе соболевских диффеоморфизмов $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Случай вязких несжимаемых жидкостей требует дополнительных конструкций. Введем L^2 -скалярное произведение на $\text{Vect}^{(s)}$ формулой

$$(X, Y) = \int_{\mathcal{T}^n} \langle X(m), Y(m) \rangle \mu(dm), \quad (6.4)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — плоская риманова метрика на $\mathcal{T}^n$, а μ — соответствующая форма объема.

Обозначим через β подпространство в $\text{Vect}^{(s)}$, состоящее из всех бездивергентных векторных полей. Затем рассмотрим ортогональную проекцию относительно (6.4) $P : \text{Vect}^{(s)} \rightarrow \beta$. Из разложения Ходжа следует, что ядро P — это подпространство, состоящее из всех градиентов. Таким образом, для любого $Y \in \text{Vect}^{(s)}$ мы имеем

$$P(Y) = Y - \text{grad } p, \quad (6.5)$$

где p — это некоторая H^{s+1} -функция на $\mathcal{T}^n$, единственная с точностью до аддитивной константы для заданного Y .

Пусть на плоском n -мерном торе $\mathcal{T}^n$ задан случайный поток $\xi(t, m)$ с начальными данными $\xi(0, m) = m \in \mathcal{T}^n$. Пусть $\xi(t, m)$ является общим решением стохастического дифференциального уравнения типа (6.1) и пусть $D_* \xi(t, m) = u(t, \xi(t, m))$, где $u(t, m)$ — C^1 -гладкое по t и C^2 -гладкое по $m \in \mathcal{T}^n$ бездивергентное векторное поле на $\mathcal{T}^n$, а $\sigma > 0$ — вещественная константа. Предположим, что $\xi(t, m)$ удовлетворяет соотношению

$$PD_* D_* \xi(t, m) = F(t, m), \quad (6.6)$$

где $F(t, m)$ — бездивергентное векторное поле на $\mathcal{T}^n$. Принимая во внимание формулы (1.13) и (6.5), получаем

$$\begin{aligned} PD_*D_*\xi(t, m) &= P \left(\frac{\partial}{\partial t}u + (u, \nabla)u - \frac{\sigma^2}{2}\nabla^2u \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}u + (u, \nabla)u - \frac{\sigma^2}{2}\nabla^2u - \text{grad } p. \end{aligned}$$

Таким образом, (6.6) означает, что $u(t, m)$ — бездивергентное векторное поле, удовлетворяющее соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t}u + (u, \nabla)u - \frac{\sigma^2}{2}\nabla^2u - \text{grad } p = F(t, m), \quad (6.7)$$

которое является *уравнением Навье — Стокса* с вязкостью $\frac{\sigma^2}{2}$ и внешней силой $F(t, m)$.

Мы интерпретируем (6.6) как стохастический аналог второго закона Ньютона на группе соболевских диффеоморфизмов $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, подчиненный механической связи.

В работе [42] (см. также [43]) на основе этой идеи было получено описание и исследованы уравнения Бюргерса, Рейнольдса и Навье — Стокса. Здесь, следуя [53], опишем обобщение этой конструкции на случай анизотропных жидкостей, у которых в эйлеровом описании (т. е. в уравнениях типа Бюргерса, Рейнольдса и Навье — Стокса) оператор Лапласа заменен более общим дифференциальным оператором второго порядка, зависящим от времени. Частным случаем является случай уравнений Бюргерса и Навье — Стокса с вязкостью, зависящей от времени.

Строгая реализация идей, описанных в этом параграфе, предполагает использование геометрии групп диффеоморфизмов, которой посвящен следующий параграф.

6.2. Группы диффеоморфизмов

В этом параграфе опишем некоторые свойства групп соболевских диффеоморфизмов на плоском n -мерном торе (см. подробности в [39]).

Пусть $\mathcal{T}^n$ — плоский n -мерный тор и $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ — его группа соболевских диффеоморфизмов класса H^s ($s > \frac{n}{2} + 1$). Напомним, что для $s > \frac{n}{2} + 1$ отображения из H^s имеют гладкость C^1 .

$\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ является гильбертовым многообразием и группой относительно суперпозиции с единицей $e = \text{id}$. Касательное пространство $T_e \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ — это пространство всех H^s -векторных полей на $\mathcal{T}^n$. Обозначим через β подпространство в $T_e \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, состоящее из бездивергентных H^s -векторных полей на $\mathcal{T}^n$.

Касательное расслоение $T\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ — это множество H^s -отображений из $\mathcal{T}^n$ в $T\mathcal{T}^n$ такое, что проекции на $\mathcal{T}^n$ дают отображения из $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

В любом $T_f \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ можно определить L^2 -скалярное произведение по формуле

$$(X, Y) = \int_{\mathcal{T}^n} \langle X(m), Y(m) \rangle_{f(m)} \mu(dm). \quad (6.8)$$

Семейство этих скалярных произведений образует так называемую слабую риманову метрику на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. В частности, в $T_e \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ (6.8) принимает вид

$$(X, Y)_e = \int_{\mathcal{T}^n} \langle X(m), Y(m) \rangle_m \mu(dm). \quad (6.9)$$

Правый сдвиг $R_f : \mathcal{D}^s(T^n) \rightarrow \mathcal{D}^s(T^n)$, где $R_f(\Theta) = \Theta \circ f$, $\Theta, f \in \mathcal{D}^s(T^n)$ — C^∞ -гладкое отображение. Касательное отображение к правому сдвигу имеет вид

$$TR_f(X) = X \circ f, \quad X \in T\mathcal{D}^s(T^n).$$

С другой стороны, левый сдвиг $L_f : \mathcal{D}^s(T^n) \rightarrow \mathcal{D}^s(T^n)$, где $L_f(\Theta) = f \circ \Theta$, $\Theta, f \in \mathcal{D}^s(T^n)$, только непрерывен. Зафиксируем вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и обозначим через $l_x : T^n \rightarrow T^n$ отображение $l_x(m) = m + x$ по модулю факторизации по целочисленной решетке пространства $\mathbb{R}^n$. Отметим, что левый сдвиг Ll_x C^∞ -гладок.

Напомним, что $T\mathcal{T}^n = \mathcal{T}^n \times \mathbb{R}^n$. Введем операторы

$$B : T\mathcal{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

— проекции на второй сомножитель в $\mathcal{T}^n \times \mathbb{R}^n$, и

$$A(m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{T}_m^n,$$

— обратный к B линейный изоморфизм $\mathbb{R}^n$ на касательное пространство к $\mathcal{T}^n$ в $m \in \mathcal{T}^n$.

Введем обозначение:

$$Q_{g(m)} = A(g(m)) \circ B,$$

где $g \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, $m \in \mathcal{T}^n$. Для каждого $Y \in T_f \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ получаем, что $Q_g Y = A(g(m)) \circ B(Y(m)) \in T_g \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ при всех $f \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Лемма 6.1. *Имеют место следующие соотношения:*

$$TR_{g^{-1}}(Q_g X) = Q_e(TR_{g^{-1}} X),$$

$$TR_g(Q_{g^{-1}} X) = Q_e(TR_g X).$$

Лемма 6.2. Q_g является параллельным переносом в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ относительно связности Леви-Чивита метрики (6.8).

Доказательства лемм 6.1 и 6.2 можно найти, например, в [43].

Таким образом, для гладкого векторного поля $Y(t)$ вдоль гладкой кривой $g(t)$ в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ ковариантная производная в момент времени t^* определяется как

$$\left. \frac{\overline{D}}{dt} Y(t) \right|_{t=t^*} = \left. \frac{d}{dt} (Q_{g(t^*)} Y(t)) \right|_{t=t^*}.$$

Напомним, что (см. [43]) геодезическая — это гладкая кривая $g(t)$ в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ такая, что

$$\frac{\overline{D}}{dt} \dot{g}(t) = 0. \quad (6.10)$$

Для такой кривой $g(t)$ построим вектор $v(t) \in T_e \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ по формуле $v(t) = \dot{g}(t) \circ g^{-1}(t)$.

Лемма 6.3. *Если $g(t)$ — геодезическая, кривая $R_f g(t)$ — также геодезическая.*

Лемма 6.4. *Пусть $g(t)$ — геодезическая и $x \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор, тогда $l_x g(t)$ — геодезическая.*

Рассмотрим оператор $\overline{A} : \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow T \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ такой, что $\overline{A}_e$ совпадает с введенным выше A , и для каждого $g \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ отображение $\overline{A}_g : \mathbb{R}^n \rightarrow T_g \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ получается из $\overline{A}_e$ правым сдвигом, т. е. для $X \in \mathbb{R}^n$

$$\overline{A}_g(X) = TR_g \circ A_e(X) = (A \circ g)(X).$$

Каждое правоинвариантное векторное поле $\overline{A}(X)$ является C^∞ -гладким на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ для каждого $X \in \mathbb{R}^n$.

Для любой точки $m \in T^n$ обозначим через $\exp_m : T_m T^n \rightarrow T^n$ отображение, которое переводит вектор $X \in T_m T^n$ в точку $m + X$ по модулю факторизации по целочисленной решетке на T^n . Семейство таких отображений порождает отображение $\overline{\exp} : T_e \mathcal{D}^s(T^n) \rightarrow \mathcal{D}^s(T^n)$, которое переводит вектор $X \in T_e \mathcal{D}^s(T^n)$ в $e + X \in \mathcal{D}^s(T^n)$, где $e + X$ — диффеоморфизм T^n вида $(e + X)(m) = m + X(m)$.

Рассмотрим суперпозицию $\overline{\exp} \circ \overline{A}_e : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. По построению для произвольного $X \in \mathbb{R}^n$ получаем, что

$$\overline{\exp} \circ \overline{A}_e(X)(m) = m + X,$$

т. е. тот же самый вектор X добавляется к каждой точке m .

Let $w(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Построим случайный процесс

$$W(t) = \overline{\exp} \circ \overline{A}_e \left(\int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s) \right) \quad (6.11)$$

в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, где $\mathbf{B}(t)$ — (неслучайный) линейный оператор, зависящий от времени. По построению для $\omega \in \Omega$ соответствующая выборочная траектория $W_\omega(t)$ — это диффеоморфизм вида $W_\omega(t)(m) = m + \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega$. Отметим, что для заданного $\omega \in \Omega$ и заданного $t \in \mathbb{R}$ получаем, что $\int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega$ — постоянный вектор в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что для заданного ω и t действие $W_\omega(t)$ совпадает с $l_{\int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega}$.

Пусть $\mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$ — группа соболевских сохраняющих объем H^s -диффеоморфизмов на $\mathcal{T}^n$ ($s > \frac{n}{2} + 1$), подгруппа и гильбертово подмногообразие в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ (см. [39, 43]). Так же как для $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ можно ввести правый сдвиг и левый сдвиг. Первый — C^∞ -гладкий, а второй — непрерывен.

Касательное пространство к $\mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$ в единице $e = \text{id}$ обозначается через $T_e \mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$. Это пространство всех бездивергентных H^s -векторных полей на $\mathcal{T}^n$. Касательное пространство в $\eta \in \mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$ состоит из суперпозиций $X \circ \eta$, где $X \in T_e \mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$. Отметим, что касательное отображение к правому сдвигу имеет ту же форму, как просто для правого сдвига: $TR_g X = X \circ g$, $X \in T_e \mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$.

Правоинвариантное векторное поле $\overline{X}$ на $\mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$ порождено единственным вектором $X \in T_e \mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$ по формуле

$$\overline{X}_g = TR_g X = X \circ g.$$

Отметим, что $\overline{X}$ является C^k -гладким тогда и только тогда, когда X , как вектор на $\mathcal{T}^n$, принадлежит соболевскому классу H^{s+k} . В частности, $\overline{X}$ C^∞ -гладко тогда и только тогда, когда X C^∞ -гладко.

Отметим, что поле операторов A можно рассматривать как отображение $A: \mathbb{R}^n \rightarrow T_e \mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$.

На $\mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$ мы используем слабую риманову метрику, которая является сужением (6.8) на касательное расслоение $\mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$. Рассмотрим ортогональную проекцию относительно скалярного произведения (6.9):

$$P: H^s \rightarrow T_e \mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n).$$

Из разложения Ходжа (см., например, [39, 43]) вытекает, что эта проекция существует и ядро P является пространством всех градиентов. Так что для произвольного $Y \in H^s$ имеет место представление

$$P(Y) = Y - \text{grad } p, \quad (6.12)$$

где p — некоторая H^{s+1} -функция на $\mathcal{T}^n$ (единственная с точностью до аддитивной константы).

Ковариантная производная на $\mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$ вводится формулой

$$\frac{\overline{D}}{dt} = P \frac{\overline{D}}{dt}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\tilde{D}}{dt} \dot{g}(t) = \overline{F}(t, g(t), \dot{g}(t)) \quad (6.13)$$

на $\mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$. Если F достаточно гладко, то для любого начального данного $g(0) = e$, $\dot{g}(0) = u_0 \in T_e \mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$ уравнение (6.13) имеет решение, корректно определенное на некотором интервале $t \in [0, T]$. Это решение описывает поток идеальной несжимаемой жидкости на $\mathcal{T}^n$ под действием внешней силы F . Если $F = 0$, это геодезическая связности Леви-Чивита метрики (6.9) и она описывает поток в отсутствие внешних сил. Ниже, если не сказано противное, мы имеем дело с $g(t)$ в случае $F = 0$.

6.3. Вязкая гидродинамика

Здесь мы предполагаем, что $s > \frac{n}{2} + 2$. Так что диффеоморфизмы из $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ имеют гладкость C^2 также, как и векторные поля из $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ на торе. Везде ниже мы используем один и тот же стохастический процесс $W(t)$, построенный из выбранного нами винеровского процесса $w(t)$ в $\mathbb{R}^n$ по формуле (6.11).

Пусть $g(t)$ — решение уравнения (6.10) на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ с начальным условием $g(0) = e$ и $\dot{g}(0) = v_0 \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Это решение существует на некотором интервале $t \in [0, T]$. Рассмотрим $v(t) = \dot{g}(t) \circ g^{-1}(t) \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Этот бесконечномерный вектор может быть также описан как векторное поле на $\mathcal{T}^n$, которое мы обозначим через $v(t, m)$.

Рассмотрим случайный процесс $\eta(t) = W(t) \circ g(t)$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. В конечномерном представлении $\eta(t)$ является случайным диффеоморфизмом на $\mathcal{T}^n$ вида

$$\eta(t, m) = g(t, m) + \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s).$$

Построим дополнительный случайный процесс $\xi(t) = \eta(T - t)$, или, в конечномерном описании, $\xi(t, m) = g(T - t, m) + \int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s)$. Поскольку $\int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)$ — мартингал относительно его собственного «прошлого», то из свойств относительного математического ожидания выводим, что $D_*\xi(t) = \dot{g}(T - t, m) = v(T - t, g(T - t, m))$, и поэтому $D_*D_*\xi(t) = \frac{D}{ds}\dot{g}(s)|_{s=T-t} = 0$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Рассмотрим случайный процесс

$$\begin{aligned} \xi_t(s) &= \xi(s) \circ \xi^{-1}(t) = \\ &= W(T - s) \circ g(T - s) \circ g^{-1}(T - t) \circ (W(T - t))^{-1}. \end{aligned}$$

Отметим, что случайный диффеоморфизм $(W(T - t))^{-1}$ действует по правилу

$$(W(T - t))^{-1}(m) = m - \int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s).$$

При $s = t$ мы получаем

$$\begin{aligned} \xi_t(t) &= \xi(t) \circ \xi^{-1}(t) = \\ &= W(T - t) \circ g(T - t) \circ g^{-1}(T - t) \circ (W(T - t))^{-1} = e. \end{aligned}$$

По построению

$$m = \xi(t, \xi^{-1}(t, m)) = g(T - t, \xi^{-1}(t, m)) + \int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s).$$

Тогда

$$g(T - t, \xi^{-1}(t, m)) = m - \int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s).$$

Так что

$$\xi^{-1}(t, m) = g^{-1}\left(T - t, m - \int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s)\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \xi_t(s, m) &= \xi\left(s, g^{-1}\left(T - t, m - \int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s)\right)\right) = \\ &= g\left(T - s, g^{-1}\left(T - t, m - \int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s)\right)\right) + \int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s). \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\xi_t(t, m) = m - \int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s) + \int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) w(s) = m,$$

т. е. $\xi_t(t) = e$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Тогда σ -алгебра «настоящее» $\mathcal{N}_t^\xi$ тривиальна, и это означает, что условное математическое ожидание относительно этой σ -алгебры совпадает с обычным математическим ожиданием. Таким образом, принимая во внимание соотношения между $v(t)$ и $g(t)$ и определение D_* , мы получаем, что

$$\begin{aligned} D_*\xi_t(s) &= E\left(v\left(T - t, m - \int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s)\right)\right) = \\ &= E\left(Q_e T R_{W(T-t)}^{-1} v(T - t)\right). \end{aligned}$$

Введем на $\mathcal{T}^n$ векторное поле

$$V(t, m) = E \left(v \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s) \right) \right)$$

(в бесконечномерном описании $V(t) = E(Q_\epsilon T R_{W(t)}^{-1} v(t))$).

Теорема 6.1. $V(t, m)$ удовлетворяет следующему аналогу уравнения Бюргерса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V(T-t, m) + (V(T-t, m) \cdot \nabla) V(T-t, m) - \\ - \tilde{\mathfrak{B}}(t) V(T-t, m) = 0, \end{aligned} \quad (6.14)$$

где $\tilde{\mathfrak{B}}(t)$ — дифференциальный оператор второго порядка,

$$\tilde{\mathfrak{B}}(t) = \frac{1}{2} \tilde{\mathfrak{B}}^{ij}(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j},$$

с матрицей $(\tilde{\mathfrak{B}}^{ij})(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^*(t)$.

◁ Выберем $t \in [0, T]$ и $\omega \in \Omega$ и рассмотрим кривую $\zeta_{t,\omega}(s)$, $s \in [0, T]$, зависящую от параметра ω , вида

$$\begin{aligned} \zeta_{t,\omega}(s) &= R_{W_\omega(T-t)}^{-1} g(T-s, g^{-1}(T-t)) = \\ &= g \left(T-s, g^{-1} \left(T-t, m - \int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s) \right) \right). \end{aligned}$$

Отметим, что $\zeta_{t,\omega}(s)$ задана по аналогии с $\xi_{t,\omega}(s)$, введенном выше, но в формуле для $\xi_{t,\omega}(s)$ имеется дополнительный стохастический член $\int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s)$. Таким образом, мы можем рассматривать $\zeta_{t,\omega}(s)$ как гладкую кривую с начальным условием

$$\zeta_{t,\omega}(t) = R_{W_\omega(T-t)}^{-1} e = (W_\omega(T-t))^{-1}.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \zeta_{t,\omega}(s) \right|_{s=t} &= -\dot{g} \left(T-s, g^{-1} \left(T-t, m - \int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s) \right) \right) = \\ &= -T R_{W_\omega(T-t)}^{-1} v(T-s). \end{aligned}$$

Поскольку $g(T-s)$ — геодезическая, то по лемме 6.4 кривая $\zeta_{t,\omega}(s)$ — тоже геодезическая при почти всех $\omega \in \Omega$. Напомним, что действие $W_\omega(t)$ совпадает с действием $l_{\int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega}$. Значит

$$W_\omega(t)\zeta_{t,\omega}(s) = l_{\int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega} \zeta_{t,\omega}(s)$$

тоже геодезическая. Итак,

$$\frac{\overline{D}}{ds} \frac{d}{ds} l_{\int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega} \zeta_{t,\omega}(s) = 0.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} l_{\int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega} \zeta_{t,\omega}(s) &= Q_e \frac{d}{ds} \zeta_{t,\omega}(s) \Big|_{s=t} = \\ &= -Q_e T R_{W_\omega(T-t)}^{-1} v(T-t). \end{aligned}$$

Напомним, что

$$EQ_e T R_{W_\omega(T-t)}^{-1} v(T-t) = V(T-t), \quad D_* \xi_t(s) = V(T-t).$$

Из этого мы выводим, что

$$\begin{aligned} D_* D_* \xi_t(s) &= D_* V(T-t, \xi_t(s)) \Big|_{s=t} = \\ &= -E \left(\frac{\overline{D}}{ds} \frac{d}{ds} l_{\int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega} \zeta_{t,\omega}(s) \right) = 0. \end{aligned}$$

Но, с другой стороны, принимая во внимание формулы (1.12) и (1.13) для регрессий, получаем, что

$$\begin{aligned} D_* D_* \xi_t(s) &= D_* V(T-t, \xi_t(s)) = \frac{\partial}{\partial t} V(T-t, m) + \\ &+ (V(T-t, m) \cdot \nabla) V(T-t, m) - \tilde{\mathfrak{B}}(t) V(T-t, m). \end{aligned}$$

Сравнив последнюю формулу с результатами вычислений $D_* D_* \xi_t(s)$, получаем уравнение (6.14). $\triangleright$

Теперь перейдем к случаю несжимаемых жидкостей.

Пусть $g(t)$ — решение уравнения (6.13) с $F = 0$. Рассмотрим $u(t) = \dot{g}(t) \circ g^{-1}(t) \in T_e \mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$. Этот бесконечномерный вектор можно также представить как бездивергентное векторное поле на $\mathcal{T}^n$, которое мы обозначим через $u(t, m)$. Напомним (см., например, [39]), что $u(t, m)$ удовлетворяет уравнению Эйлера без внешней силы: $\frac{\partial u}{\partial t} = -P((u \cdot \nabla)u)$, которое после применения формулы (6.12) принимает обычный вид $\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \text{grad } p = 0$.

Рассмотрим введенный выше процесс $W(t)$. По построению он принимает значения в $\mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$. Таким образом, на $\mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$ мы можем повторить приведенную выше конструкцию для $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, т. е. определить $\eta(t) = W(t) \circ g(t)$, где $t \in [0, T]$ и $\xi(t) = \eta(T-t)$ (т. е. в конечномерных обозначениях $\xi(t, m) = g(T-t, m) + \int_0^{T-t} \mathbf{B}(s) dw(s)$). Легко видеть, что $D_* \xi(t) = \dot{g}(T-t, m) = u(T-t, g(T-t, m))$ и, таким образом, $\overline{PD}_* D_* \xi(t) = \frac{D}{ds} \dot{g}(s)|_{s=T-t} = 0$ на $\mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$.

Так же, как выше, процесс $\xi_t(s) = \xi(s) \circ \xi^{-1}(t)$ обладает свойством $\xi_t(t) = e$. Его конечномерное описание в точности аналогично случаю $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Введем на $\mathcal{T}^n$ векторное поле

$$U(t, m) = E \left(u \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s) \right) \right)$$

(прямой аналог $V(t, m)$). Мы также обозначим это поле как бесконечномерный вектор $U(t) = E(Q_e TR_{W(t)}^{-1} u(t))$.

Лемма 6.5. Векторное поле $U(t, m)$ бездивергентно.

◁ По построению для элементарного события $\omega \in \Omega$ диффеоморфизм $(W(t)_\omega)^{-1}$ представляет собой сдвиг тора целиком на постоянный вектор. Следовательно, Q_e , примененное к $TR_{W(t)_\omega}^{-1} u(t)$, означает параллельный перенос на торе бездивергентного векторного поля целиком $u(t)$ на тот же самый постоянный вектор назад. Так что $Q_e TR_{W(t)}^{-1} u(t)$ — случайное бездивергентное векторное поле на торе. Следовательно его математическое ожидание бездивергентно. ▷

Итак, $U(t) \in T_e \mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$. Легко показать, что

$$D_* \xi_t(s)|_{s=t} = U(T-t). \quad (6.15)$$

Отметим, что $l_x g(t)$ — не геодезическая на $\mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$. Так что, мы имеем $PD_* D_* \xi_t(s)|_{s=t} = D_* U(T-t, \xi_t(s))|_{s=t} \neq 0$. Следовательно,

нет аналога теоремы 6.1. Принимая во внимание формулу (6.12), мы можем доказать только следующую теорему.

Теорема 6.2. $U(t, m)$ удовлетворяет следующему аналогу классического уравнения Рейнольдса:

$$\frac{\partial}{\partial t} U + E \left[((u \cdot \nabla) u) \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s) \right) \right] - \tilde{\mathfrak{B}}(t) U - \text{grad } p = 0. \quad (6.16)$$

◁ Из формулы Ито следует, что

$$\begin{aligned} du \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s) \right) &= \frac{\partial u}{\partial t} \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s) \right) dt + \\ &+ \mathfrak{B}u \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s) \right) dt - u' \mathbf{B}(t) dw(t), \end{aligned}$$

где u' — линейный оператор — производная u в $m \in \mathcal{T}^n$.

Напомним, что $u(t, m)$ удовлетворяет уравнению Эйлера без внешней силы, т. е. $\frac{\partial u}{\partial t} = -P((u \cdot \nabla)u)$. Поскольку

$$E \left(\frac{d}{dt} u(t, m - \sigma w(t)) \right) = \frac{\partial}{\partial t} E u(t, m - \sigma w(t)) = \frac{\partial}{\partial t} U(t)$$

и $E(u' \mathbf{B}(t) dw(t)) = 0$, то выводим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U &= E \left(\frac{d}{dt} u \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s) \right) \right) = \\ &= E \left[-P((u \cdot \nabla)u) \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mathfrak{B}(t) u \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s) \right) \right] = \\ &= -E \left[((u \cdot \nabla)u) \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s) \right) \right] + \mathfrak{B}U + \text{grad } p. \end{aligned}$$

Так что (6.16) выполняется. ▷

Теперь мы можем преобразовать (6.16) к виду, аналогичному стандартной форме уравнения Рейнольдса. Для бездивергентного векторного поля $X(m)$ на $\mathcal{S}^n$ введем случайное бездивергентное векторное поле

$$\check{U}_X(t, m) = X\left(m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)\right) - E\left(X\left(m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)\right)\right),$$

которое в бесконечномерном описании имеет вид

$$\check{U}(t) = Q_e T R_{W(T-t)}^{-1} X - E\left(Q_e T R_{W(T-t)}^{-1} X\right).$$

Для $X = u(t)$ получаем

$$\begin{aligned} \check{U}_u(t, m) &= u\left(m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)\right) - E\left(u\left(m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)\right)\right) = \\ &= u\left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)\right) - U(t, m); \\ E\left(\check{U}_u(t, m)\right) &= \\ &= E\left(u\left(m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)\right)\right) - E\left(E\left(u\left(m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)\right)\right)\right) = \\ &= E\left(u\left(m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)\right)\right) - E\left(u\left(m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u\left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)\right) = U(t, m) + \check{U}_u(t, m). \quad (6.17)$$

Из (6.17) вытекает, что

$$E\left[\left((u \cdot \nabla)\left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)\right)\right)\right] = (U \cdot \nabla)U + E\left[\left(\check{U}_{u(t)} \cdot \nabla\right) \check{U}_{u(t)}\right].$$

Так что (6.16) преобразуется в уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}U + (U \cdot \nabla)U - \tilde{\mathfrak{B}}(t)U - \text{grad} p = -E \left[\left(\check{U}_{u(t)} \cdot \nabla \right) \check{U}_{u(t)} \right], \quad (6.18)$$

которое является аналогом стандартной формы уравнения Рейнольдса.

Разница между (6.18) и соответствующим аналогом уравнения Навье — Стокса состоит в том, что (6.18) содержит внешнюю силу $-E[(\check{U}_{u(t)} \cdot \nabla)\check{U}_{u(t)}]$, зависящую от $u(t, m)$, а не от $U(t, m)$.

Теперь покажем, что небольшая модификация приведенной выше схемы рассуждений позволяет удалить внешнюю силу в (6.18). Для этого мы вводим специальное случайное силовое поле в уравнение (6.13).

Для случайного бездивергентного п. н. H^{s+1} -векторного поля $X_\omega(m)$ на T^n (т. е. случайное векторное поле $X_\omega \in T_e \mathcal{D}_\mu^{s+1}(T^n) \subset T_e \mathcal{D}_\mu^s(T^n)$) построим случайное векторное поле $\check{U}_{X_\omega}(t, m)$ такое, что для $\omega \in \Omega$ оно описывается формулой

$$\check{U}_{X_\omega}(t, m) = X_\omega \left(m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega \right) - E \left(X_\omega \left(m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega \right) \right).$$

Теперь построим неслучайное H^s -векторное поле $PE[(\check{U}_{X_\omega} \cdot \nabla)\check{U}_{X_\omega}]$ и случайное векторное поле $\mathfrak{F}_\omega(t, X_\omega) \in T_e \mathcal{D}_\mu^s(T^n)$ по формуле

$$\mathfrak{F}_\omega(t, X_\omega) = Q_e TR_{W(t)} PE \left[\left(\check{U}_{X_\omega} \cdot \nabla \right) \check{U}_{X_\omega} \right].$$

Отметим, что $PE[(\check{U}_{X_\omega} \cdot \nabla)\check{U}_{X_\omega}]$ и поэтому $\mathfrak{F}_\omega(t, X_\omega)$ теряет производные, т. е. они принадлежат соболевскому классу H^s только если X_ω принадлежит H^{s+1} . Таким образом, $\mathfrak{F}_\omega(t, X_\omega)$ корректно определено только на плотном подмножестве $T_e \mathcal{D}_\mu^{s+1}(\mathcal{T}^n)$ в $T_e \mathcal{D}_\mu^s(\mathcal{T}^n)$.

Теперь введем правоинвариантное силовое поле $\bar{\mathfrak{F}}_\omega(t, g, Y_\omega)$, где $Y_\omega \in T_g \mathcal{D}_\mu^s(T^n) \mathcal{D}_\mu^s(T^n)$ таково, что для $g \in \mathcal{D}_\mu^{s+1}(T^n)$ и $\omega \in \Omega$ оно задано формулой

$$\bar{\mathfrak{F}}_\omega(t, g, Y_\omega) = TR_g \mathfrak{F}_\omega(t, TR_g^{-1} Y_\omega),$$

где $TR_g^{-1} Y_\omega$ — п. н. бездивергентное H^{s+1} -векторное поле.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\overline{D}}{dt} \dot{g}_\omega(t) = \overline{\mathfrak{F}}_\omega(t, g_\omega(t), \dot{g}_\omega(t)) \quad (6.19)$$

на $\mathcal{D}_\mu^s(T^n)$.

Предположим, что для начальных данных $g_\omega(0) = e$ и $\dot{g}(0) = u_0 \in T_e \mathcal{D}_\mu^{s+1}(T^n)$ существует единственное H^{s+1} -решение g_ω , которое п. н. корректно определено на неслучайном интервале $t \in [0, T]$. Рассмотрим бездивергентное H^{s+1} -векторное поле $u_\omega(t, m)$ на T^n , заданное соотношением $u_\omega(t, m) = \dot{g}_\omega(t, m) \circ g_\omega^{-1}(t, m)$. Аналог вектора U , введенного выше, теперь принимает вид

$$\mathbb{U}(t, m) = E \left(u_\omega \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega \right) \right). \quad (6.20)$$

Легко видеть, что $\mathbb{U}(t, m)$ является бездивергентным векторным полем.

Теорема 6.3. *Бездивергентное векторное поле $\mathbb{U}$, заданное формулой (6.20), удовлетворяет следующему аналогу уравнения Навье — Стокса:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{U} + (\mathbb{U} \cdot \nabla) \mathbb{U} - \tilde{\mathfrak{B}}(t) \mathbb{U} - \text{grad } p = 0, \quad (6.21)$$

где

$$\tilde{\mathfrak{B}}(t) = \frac{1}{2} \tilde{\mathfrak{B}}^{ij}(t) \frac{\partial}{\partial x^i \partial x^j} \quad \text{и} \quad (\tilde{\mathfrak{B}}^{ij})(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^*(t).$$

◁ Поскольку

$$\mathbb{U}(t, m) = E \left(u_\omega \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega \right) \right),$$

и

$$\begin{aligned}
& E \left(du_\omega \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega \right) \right) = \\
& = E \left(\frac{\partial}{\partial t} u_\omega \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega \right) + \right. \\
& \left. + \tilde{\mathfrak{B}}(t) u_\omega \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega \right) \right) = \quad (6.22) \\
& = E \left(-P[(u_\omega \cdot \nabla) u_\omega] + \mathfrak{F}_\omega(t, u_\omega(t)) + \right. \\
& \left. + \tilde{\mathfrak{B}}(t) u_\omega \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega \right) \right),
\end{aligned}$$

то получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{U} = E \left(\frac{\partial}{\partial t} u_\omega \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega \right) \right) = \\
& = -E \left[((u_\omega \cdot \nabla) u_\omega) \left(t, m - \int_0^t \mathbf{B}(s) dw(s)_\omega \right) \right] + \\
& + \tilde{\mathfrak{B}} \mathbb{U} + \text{grad } p + E Q_e T \mathbb{R}_{W(t)}^{-1} \mathfrak{F}_\omega(t, u_\omega(t)) = \quad (6.23) \\
& = -(\mathbb{U} \cdot \nabla) \mathbb{U} + \tilde{\mathfrak{B}}(t) \mathbb{U} + \text{grad } p - E \left[\left(\check{U}_{u_\omega(t)} \cdot \nabla \right) \check{U}_{u_\omega(t)} \right] + \\
& + E Q_e T \mathbb{R}_{W(t)}^{-1} \mathfrak{F}_\omega(t, u_\omega(t)) = -(\mathbb{U} \cdot \nabla) \mathbb{U} + \tilde{\mathfrak{B}}(t) \mathbb{U} + \text{grad } p - \\
& - E \left[\left(\check{U}_{u_\omega(t)} \cdot \nabla \right) \check{U}_{u_\omega(t)} \right] + PE \left[\left(\check{U}_{u_\omega(t)} \cdot \nabla \right) \check{U}_{u_\omega(t)} \right].
\end{aligned}$$

Напомним, что для каждого бездивергентного векторного поля $\check{U}$ векторные поля $\frac{\partial}{\partial t} \check{U}$ и $\tilde{\mathfrak{B}}(t) \check{U}$ также бездивергентны. Из определения ортогонального проектора P выводим, что

$$PE \left[\left(\check{U}_{u_\omega(t)} \cdot \nabla \right) \check{U}_{u_\omega(t)} \right] = E \left[\left(\check{U}_{u_\omega(t)} \cdot \nabla \right) \check{U}_{u_\omega(t)} \right] - \text{grad } p.$$

Введем p_1 и p_2 соотношениями

$$P((\mathbb{U} \cdot \nabla)\mathbb{U}) = (\mathbb{U} \cdot \nabla)\mathbb{U} - \text{grad } p_1$$

и

$$PE \left[\left(\check{U}_{u_\omega(t)} \cdot \nabla \right) \check{U}_{u_\omega(t)} \right] = E \left[\left(\check{U}_{u_\omega(t)} \cdot \nabla \right) \check{U}_{u_\omega(t)} \right] - \text{grad } p_2.$$

Таким образом, уравнение (6.21) вытекает из (6.22) и (6.23). Следовательно (6.21) принимает вид естественного аналога уравнения Навье — Стокса

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{U} + (\mathbb{U} \cdot \nabla)\mathbb{U} - \mathfrak{B}\mathbb{U} - \text{grad } p = 0, \quad \text{grad } p = \text{grad } p_1 + \text{grad } p_2. \triangleright$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Частный случай оператора $\mathbf{B}(t)$ — это оператор $\sqrt{2}\sigma(t)I$, где $\sigma(t)$ — непрерывная вещественная функция и I — единичный оператор. Тогда $\mathfrak{B}(t) = \sigma^2(t)\Delta$, где Δ — лапласиан, и, таким образом, исследованные выше уравнения превращаются в уравнения Бюргерса, Рейнольдса и Навье — Стокса с вязкостью $\frac{1}{2}\sigma^2(t)$, зависящей от времени.

ГЛАВА 7

УРАВНЕНИЯ И ВКЛЮЧЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ В СРЕДНЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ¹

В этой главе мы изучаем уравнения и включения с производными в среднем на римановых многообразиях такие, что в правых частях имеются слагаемые с запаздыванием, причем запаздывающий член описывается в терминах риманова параллельного переноса вдоль случайных процессов.

Изучение таких систем мотивируется следующими физическими соображениями, связанными с описанием механического движения на нелинейных конфигурационных пространствах. Для таких систем Радон (см. [58]) показал, что риманов параллельный перенос вдоль кривой на многообразии является естественной заменой глобальной параллельности (например, в системах, связанных с гироскопами) на плоских конфигурационных пространствах. В частности, запаздывающий член с параллельным переносом описывает естественное запаздывание на искривленных конфигурационных пространствах.

Класс корректно определенных стохастических функционально-дифференциальных уравнений на римановых многообразиях, где запаздывающий член был задан в терминах риманова параллельного переноса, изучался в [60].

В этой главе всюду используются производные в среднем на многообразиях, кратко описанные в § 8.6, где также даны определения стохастически полной связности и стохастически полного многообразия.

¹ Данная глава является результатом совместной работы автора с С.-Е. А. Мохаммедом во время пребывания автора в Южно-Иллинойском университете по гранту фонда Фулбрайта в 2011 г.

7.1 Простейший случай на стохастически полном многообразии

Пусть M — гладкое n -мерное риманово многообразие, на котором мы фиксируем связность Леви-Чивита.

Следуя [43], обозначим через $\Gamma_{t,s} : T_{\xi(s)}M \rightarrow T_{\xi(t)}M$ оператор параллельного переноса вдоль семимартингала $\xi : [0, T] \times \Omega \rightarrow M$ относительно связности Леви-Чивита.

Рассмотрим два векторных поля $X, Y : [0, T] \times M \rightarrow TM$ на M , и пусть $h > 0$ — заданное фиксированное запаздывание. В этом параграфе мы изучим разрешимость следующего *стохастического уравнения с производными в среднем с запаздыванием*:

$$\begin{aligned} D\xi(t) &= X(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}Y(t, \xi(t-h)), \\ D_2\xi(t) &= I, \quad t \in [0, T], \\ \xi(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-h, 0]. \end{aligned} \tag{7.1}$$

В (7.1) I — единичная матрица, а начальное условие $\varphi : [-h, 0] \rightarrow M$ — гладкая кривая на M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Говорят, что уравнение (7.1) имеет решение на интервале $[-h, T]$, если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и заданный на нем семимартингал $\xi : [-h, T] \times \Omega \rightarrow M$ такой, что при $t \in [-h, T]$ уравнение (7.1) выполнено.

Зафиксируем точку $m_0 \in M$ и $T > 0$. Рассмотрим банахово пространство $C^0([0, T], T_{m_0}M)$ непрерывных кривых $[0, T] \rightarrow T_{m_0}M$ с обычной равномерной нормой. Пусть $\mathcal{C}$ — σ -алгебра, порожденная цилиндрическими множествами $C^0([0, T], T_{m_0}M)$. Для каждого $t \in [0, T]$ обозначим через $\mathcal{P}_t$ σ -подалгебру в $\mathcal{C}$, порожденную цилиндрическими множествами на $[0, t]$.

Рассмотрим $m_0 = \varphi(0)$.

Теорема 7.1. *Предположим, что для выбранного $T > 0$ векторные поля $X, Y : [0, T] \times M \rightarrow TM$ измеримы по Борелю по совокупности переменных и равномерно ограничены, а также, что риманово многообразие M стохастически полно. Тогда для любой начальной C^1 -кривой φ существует решение $\xi : [-h, T] \times \Omega \rightarrow M$ уравнения (7.1).*

◁ Мы докажем глобальное существование решений уравнения (7.1) последовательными шагами длины $h > 0$.

Сначала рассмотрим случай, когда $0 < T \leq h$. Пусть $\tilde{w}$ — стандартный винеровский процесс на $T_{m_0}M$, т. е. координатный процесс $\tilde{w}(t, x(\cdot)) = x(t)$ на вероятностном пространстве $(C^0([0, T], T_{m_0}M), \mathcal{C}, \nu)$, где ν — мера Винера. Напомним, что точка пространства $C^0([0, T], T_{m_0}M)$ — это непрерывная кривая $x(\cdot) \in C^0([0, T], T_{m_0}M)$. Понятно, что $\tilde{w}$ адаптирован к фильтрации $\{\mathcal{P}_t\}_{0 \leq t \leq T}$.

Поскольку M стохастически полно, развертка Ито $R_I \tilde{w}(\cdot)$ (см. § 8.6, подробности имеются в [43]) винеровского процесса $\tilde{w}$ корректно определена для всех $t \in [0, \infty)$.

В [43] показано, что $R_I x(t)$ и параллельный перенос вдоль $x(\cdot)$ существуют для ν -почти всех $x(\cdot) \in C^0([0, T], T_{m_0}M)$. Более того, из свойств параллельного переноса и развертки R_I следует, что стохастический процесс $\Gamma_{0,t} X(t, R_I \tilde{w}(t))$, $0 \leq t \leq T$, в $T_{m_0}M$ равномерно ограничен и подчинен фильтрации $\{\mathcal{P}_t\}_{0 \leq t \leq T}$. Поскольку $\varphi(\cdot)$ как минимум C^1 -гладко, то обычный параллельный перенос вдоль $\varphi(\cdot)$ корректно определен и можно построить кривую $\Gamma_{0,t-h} Y(t, \varphi(t-h))$, $t \in [0, T]$, в $T_{m_0}M$. Отметим, что по свойствам параллельного переноса последняя кривая равномерно ограничена. Введем процесс в $T_{m_0}M$: $a(t) := \Gamma_{0,t} X(t, R_I \tilde{w}(t)) + \Gamma_{0,t-h} Y(t, \varphi(t-h))$, $t \in [0, T]$.

Рассмотрим меру μ на $(C^0([0, T], T_{m_0}M), \mathcal{C})$ с плотностью ρ относительно ν вида

$$\rho(x(\cdot)) = \exp \left(\int_0^T \langle a(t), d\tilde{w}(t) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^T a(t)^2 dt \right). \quad (7.2)$$

Известно (см. [10]), что в условиях нашей теоремы

$$\int_{C^0([0, T], T_{m_0}M)} \rho d\nu = 1, \quad (7.3)$$

т. е. μ — вероятностная мера, и, более того,

$$w(t, x(\cdot)) = x(t) - \int_0^t a(\tau) d\tau$$

является винеровским процессом на $(C^0([0, T], T_{m_0}M), \mathcal{C}, \mu)$ относительно $\{\mathcal{P}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ (см. [10]). Легко видеть, что везде $\rho > 0$, т. е. ν абсолютно непрерывно относительно μ и имеет плотность ρ^{-1} . Другими словами, вероятностные меры μ и ν эквивалентны. Координатный процесс $z(t, x(\cdot)) = x(t)$, $0 \leq t \leq T$ на $(C^0([0, T], T_{m_0}M), \mathcal{C}, \mu)$

подчинен фильтрации $\{\mathcal{P}_t\}_{0 \leq t \leq T}$. Более того, $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}_t^z$ для всех $t \in [0, T]$. Поскольку меры μ и ν эквивалентны, то $R_I(z(t, x(\cdot))) = R_I x(t)$ существует μ -п. н. Таким образом, $z(t)$ и $w(t)$ связаны уравнением

$$dz(t) = a(t) dt + dw(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (7.4)$$

на $T_{m_0}M$. По определению процесс $R_I z(\cdot)$ существует на $(C^0([0, T], T_{m_0}M), \mathcal{C}, \mu)$. Введем процесс $\xi(t)$, $t \in [-h, T]$, который совпадает с $R_I z(t)$ при $t \in [0, T]$ и с $\varphi(t)$ при $t \in [-h, 0]$. В [43] показано, что $D\xi(t) = \Gamma_{t,0}a(t)$. Но по построению $\Gamma_{t,0}a(t) = X(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}Y(t, \xi(t-h))$. Тот факт, что $D_2\xi(t) = I$ при $t \in [0, T]$, вытекает из [43]. Таким образом, $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, является решением (7.1) в случае $0 < T \leq h$.

Следующий шаг — это случай, когда $h \leq T$. Мы предположим, что $h \leq T \leq 2h$. Для произвольного $T > h$ результат получается по индукции. Рассуждения здесь похожи приведенным выше, но со следующими модификациями. При $t \in [0, h]$ мы определяем процесс $a(t)$ той же самой формулой $a(t) := \Gamma_{0,t}X(t, R_I \tilde{w}(t)) + \Gamma_{0,t-h}Y(t, \varphi(t-h))$; но при $t \in [h, T]$ — по формуле $a(t) := \Gamma_{0,t}X(t, R_I \tilde{w}(t)) + \Gamma_{0,t-h}Y(t, R_I \tilde{w}(t-h))$, где задействован параллельный перенос вдоль стохастической части процесса. $\triangleright$

Теперь обратимся к случаю включений. Здесь мы имеем дело с многозначными векторными полями $\mathbf{X}(t, \cdot)$ и $\mathbf{Y}(t, \cdot)$, т. е. в касательном пространстве $T_m M$ для каждой точки $m \in M$ заданы замкнутые множества $\mathbf{X}(t, m)$ и $\mathbf{Y}(t, m)$, зависящие от времени t . Мы предполагаем, что эти многозначные векторы измеримы по Борелю в смысле многозначных отображений. Напомним, в частности, что эти векторные поля имеют измеримые по Борелю селекторы.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} D\xi(t) &\in \mathbf{X}(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}\mathbf{Y}(t, \xi(t-h)), \\ D_2\xi(t) &= I, \\ \xi(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-h, 0]. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Понятие решения для (7.5) аналогично понятию решения для (7.1).

Теорема 7.2. Пусть для некоторого $T > 0$ многозначные векторные поля $\mathbf{X}(t, m)$ и $\mathbf{Y}(t, m)$ измеримы по Борелю и равномерно ограничены при $t \in [0, T]$. Предположим также, что риманово многообразие M стохастически полно. Тогда для любой начальной C^1 -кривой φ существует решение $\xi(t)$ включения (7.5) при всех $t \in [-h, T]$.

Теорема 7.2 сводится к теореме 7.1 следующим образом. Как сказано выше, измеримые по Борелю многозначные векторные поля имеют измеримые по Борелю селекторы. Возьмем такие селекторы $X(t, m)$ и $Y(t, m)$ полей $\mathbf{X}(t, m)$ и $\mathbf{Y}(t, m)$ соответственно. Из условия следует, что $X(t, m)$ и $Y(t, m)$ удовлетворяют условиям теоремы 7.2. Тогда по теореме 7.2 уравнение (7.1) с этими $X(t, m)$ и $Y(t, m)$ имеет решение, которое является также и решением (7.5).

7.2 Постановка общей задачи

Пусть на римановом многообразии M заданы два векторных поля $X(t, m)$ и $Y(t, m)$ и два $(2, 0)$ -тензорных поля $\alpha(t, m)$ и $\beta(t, m)$, $t \geq 0$. Как и выше, обозначим через $\Gamma_{t,s}$ параллельный перенос вдоль гладкой кривой или случайного процесса векторов или тензоров из момента времени s в момент времени t . Ниже также будем иметь дело с многозначными векторными полями $\mathbf{X}(t, m)$ и $\mathbf{Y}(t, m)$, а также с многозначными $(2, 0)$ -тензорными полями $\alpha(t, m)$ и $\beta(t, m)$.

Зафиксируем $h > 0$. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} D\xi(t) &= X(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}Y(t-h, \xi(t-h)), \\ D_2\xi(t) &= \alpha(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}\beta(t-h, \xi(t-h)), \end{aligned} \quad (7.6)$$

которая называется *стохастическим дифференциальным уравнением общего вида с производными в среднем с запаздыванием*. Для многозначных векторных и тензорных полей система

$$\begin{aligned} D\xi(t) &\in \mathbf{X}(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}\mathbf{Y}(t-h, \xi(t-h)), \\ D_2\xi(t) &\in \alpha(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,t-h}\beta(t-h, \xi(t-h)) \end{aligned} \quad (7.7)$$

называется *стохастическим дифференциальным включением общего вида с производными в среднем с запаздыванием*.

Зафиксируем C^1 -кривую $\varphi: [-h, 0] \rightarrow M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Будем говорить, что уравнение (7.6) (включение (7.7) соответственно) имеет решение на интервале $[-h, \varepsilon)$ с начальным условием φ , если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и случайный процесс $\xi(\cdot): [-h, \varepsilon) \rightarrow M$, $\varepsilon > 0$, заданный при $t \in [-h, \varepsilon)$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и принимающий значения в M , такой, что он совпадает с φ на $[-h, 0]$ и удовлетворяет (7.6) (соответственно (7.7)) на $[0, \varepsilon)$.

Полезно сначала проанализировать упрощенный случай уравнений (7.6) и включений (7.7), когда запаздывающие слагаемые зависят только от времени. Такие системы задаются формулами

$$\begin{aligned} D\xi(t) &= X(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,0}Y(t), \\ D_2\xi(t) &= \alpha(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,0}\beta(t) \end{aligned} \quad (7.8)$$

и

$$\begin{aligned} D\xi(t) &\in \mathbf{X}(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,0}\mathbf{Y}(t), \\ D_2\xi(t) &\in \boldsymbol{\alpha}(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,0}\boldsymbol{\beta}(t). \end{aligned} \quad (7.9)$$

В этом случае $Y(t)$, $\mathbf{Y}(t)$, $\beta(t)$ и $\boldsymbol{\beta}(t)$ принимают значения в касательном пространстве к M в начальной точке m_0 . Согласно принадлежащей Радону и указанной выше механической интерпретации параллельного переноса (см. [58]) физический смысл (7.8) и (7.9) состоит в том, что вторые слагаемые в правых частях заданы в системах отсчета, которые являются естественной заменой постоянных систем отсчета в линейных конфигурационных пространствах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. Будем говорить, что уравнение (7.8) (включение (7.9) соответственно) имеет решение на интервале $[0, \varepsilon)$ с начальным условием $m_0 \in M$, если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и случайный процесс $\xi(\cdot): [0, \varepsilon) \rightarrow M$, $\varepsilon > 0$, заданный на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и принимающий значения в M , такой, что $\xi(0) = m_0$ и он удовлетворяет (7.8) ((7.9) соответственно) на $[0, \varepsilon)$.

Иногда будем рассматривать $Y(t)$ и $\beta(t)$ как случайные процессы. Важно отметить, что (7.6) может быть сведено к (7.8), а (7.7) — к (7.9). Это будет объяснено ниже в доказательстве теоремы 7.4.

7.3. Существование решений в общем случае на компактном многообразии

Теорема 7.3. Рассмотрим компактное риманово многообразие M и зафиксируем некоторую точку $m_0 \in M$. Пусть для $t \in M$, $t \geq 0$ векторы $X(t, m)$ и $Y(t) \subset T_{m_0}M$, а также тензоры $\alpha(t, m)$ и $\beta(t)$ в m_0 являются гладкими и равномерно ограниченными. Тогда уравнение (7.8) имеет решение с начальным условием $\xi(0) = m_0$ и это решение существует при всех $t > 0$.

◁ Перейдем на расслоение ортонормированных базисов OM над M . Пусть $\mathcal{H}$ — связность Леви-Чивита на OM . Касательное

отображение к естественной проекции $\pi: OM \rightarrow M$ индуцирует изоморфизм $T\pi: \mathcal{H}_b \rightarrow T_{\pi b}M$ в каждой точке $b \in OM$. Следовательно, в каждом $b \in OM$ получаем вектор

$$X^T(t, b) = T\pi^{-1}X(t, \pi b) \in \mathcal{H}_b \subset T_b OM.$$

Векторы $X^T(t, b)$ образуют горизонтальное (т. е. лежащее в $\mathcal{H}$) векторное поле на OM .

Зафиксируем ортонормированный базис $\mathcal{O}$ в $T_{m_0}M$. Базис $\mathcal{O}$ можно рассматривать как изоморфизм $\mathcal{O}: \mathbb{R}^n \rightarrow T_{m_0}M$, где $n = \dim M$ и $\mathbb{R}^n$ — арифметическое n -мерное пространство столбцов с n компонентами. Так что можно построить горизонтальное зависящее от времени базисное векторное поле $Y^T(t, b) = E(\mathcal{O}^{-1}Y(t))$ на OM , где $\mathcal{O}^{-1}Y(t)$ обозначает столбец из $\mathbb{R}^n$, состоящий из координат вектора Y относительно базиса $\mathcal{O}$.

Для ортонормированного базиса b в касательном пространстве $T_m M$ обозначим через b^* дуальный базис в кокасательном пространстве $T_m^* M$ (пространство, сопряженное к $T_m M$). Мы рассматриваем базисы b и b^* как линейные операторы из арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ в $T_m M$ и в $T_m^* M$ соответственно, которые переводят столбец из n вещественных чисел в вектор, имеющий эти координаты относительно b и, соответственно, в 1-форму, имеющую эти координаты относительно b^* . Их обратные операторы b^{-1} и b^{*-1} переводят соответствующие касательное и кокасательное пространства в арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$.

Теперь введем на OM $(2, 0)$ -тензорное поле $\alpha^T(t, b)$ следующим образом. Обратный образ $T^*\pi: T_{\pi b}^* M \rightarrow T_b^* OM$ переводит каждую 1-форму $\zeta \in T_{\pi b}^* M$ в множество $Z_b \in T_b^* OM$ такое, что каждое $\theta \in Z_b$ на векторе $V \in T_b OM$ принимает значение $\theta(V) = \zeta(T\pi V)$. Очевидным образом, каждая 1-форма θ в $T_b^* OM$ принадлежит обратному образу некоторой 1-формы ζ в $T_{\pi b}^* M$, а обратное отображение $(T\pi^*)^{-1}$ переводит θ в ζ . На каждой паре 1-форм θ_1 и θ_2 в $T_b^* OM$ тензор $\alpha^T(t, b)$ принимает значение

$$\alpha^T(t, b)(\theta_1, \theta_2) = T\pi^{-1}\alpha(t, \pi b)((T\pi^*)^{-1}\theta_1, (T\pi^*)^{-1}\theta_2) \in H_b.$$

Введем также $(2, 0)$ -тензорное поле $\beta^T(t, b)$ на OM следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta^T(t, b)(\theta_1, \theta_2) &= \\ &= T\pi^{-1}b\left(\mathcal{O}^{-1}\beta\left(\mathcal{O}^*b^{*-1}T\pi^{*-1}\theta_1, \mathcal{O}^*b^{*-1}T\pi^{*-1}\theta_2\right)\right) \in H_b. \end{aligned}$$

Отметим, что все поля X^T , Y^T , α^T и β^T гладки по построению.

Из [41, следствие 9.2.4] следует, что существует евклидово пространство $\mathbb{R}^K$ с достаточно большим K и хотя бы локально удовлетворяющим условию Липшица полем линейных операторов $A^T(t, b) : \mathbb{R}^K \rightarrow H_b$ таких, что $A^T(t, b)A^{T*}(t, b) = \alpha^T(t, b) + \beta^T(t, b)$.

Если поле $\alpha^T(t, b) + \beta^T(t, b)$ не вырождено (т. е. положительно определено) и гладко, то поле A единственно, гладко и для его построения можно использовать метод, описанный в [43]. Здесь мы не гарантируем, что $\alpha^T(t, b) + \beta^T(t, b)$ не вырождено.

Продолжим доказательство теоремы 7.3. Пусть $w(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^K$. Рассмотрим следующее уравнение Ито в форме Белополюской — Далецкого на OM :

$$d\zeta(t) = \mathbf{e}_{\zeta(t)} \left(\left(X^T(t, \zeta(t)) + Y^T(t, \zeta(t)) \right) dt + A^T(t, \zeta(t)) dw(t) \right). \quad (7.10)$$

Поскольку коэффициенты (7.10) хотя бы локально удовлетворяют условию Липшица и многообразие OM компактно (см. § 8.6), то оно имеет единственное сильное решение $\zeta(t)$ с начальным условием $\zeta(0) = \mathcal{O}$ и это решение существует при всех $t \geq 0$. Отметим, что $\zeta(t)$ является горизонтальным подъемом процесса $\xi(t) = \pi\zeta(t)$, т. е. поля Y^T и β^T параллельны вдоль $\xi(t)$. Таким образом, по построению и по лемме 8.2 $\xi(t)$ удовлетворяет (7.8) с начальным условием $\xi(0) = m_0$, и это решение существует при всех $t \geq 0$, так как многообразие OM компактно. $\triangleright$

Теорема 7.4. На компактном римановом многообразии M как выше, пусть при всех $m \in M$ и $t \geq 0$ векторы $X(t, m)$ и $Y(t, m)$ и тензоры $\alpha(t, m)$ и $\beta(t, m)$ гладки и равномерно ограничены. Тогда уравнение (7.6) имеет решение для любого начального значения $\varphi(t)$ как в определении 7.2 и это решение существует при $t \in [-h, h]$.

$\triangleleft$ Здесь мы используем обозначения из доказательства теоремы 7.3. Рассмотрим следующие функции $t \in [0, h]$ со значениями в $T_{\varphi(0)}M$: $Y(t) = \Gamma_{0, t-h}Y(t-h, \varphi(t-h))$ и $\beta(t) = \Gamma_{0, t-h}\beta(t-h, \varphi(t-h))$. Ясно, что решение $\xi(t)$ уравнения (7.8) с введенными $Y(t)$ и $\beta(t)$, которое существует по теореме 7.3, является искомым решением для (7.6) на $[-h, h]$. $\triangleright$

Отметим, что трудность с продолжением решения на $t \in (h, +\infty)$ связана с тем, что в этом случае надо будет использовать случайные поля $Y(t)$ и $\beta(t)$, полученные параллельным переносом вдоль $\xi(t)$

в $\xi(h)$. Для этого случая нет аналога (см. [41, следствие 9.2.4]). Однако, в двух частных случаях удастся все же получить существование решений при всех $t > h$.

Теорема 7.5. Пусть $X(t, m)$, $Y(t, m)$ и $\alpha(t, m)$ такие же, как в теореме 7.4. Тогда для любого начального условия $\varphi(t)$ как в определении 7.2 существует решение $\xi(t)$ уравнения

$$\begin{aligned} D\xi(t) &= X(t, \xi(t)) + \Gamma_{t, t-h} Y(t-h, \xi(t-h)), \\ D_2\xi(t) &= \alpha(t, \xi(t)), \end{aligned} \quad (7.11)$$

корректно определенное при всех $t \in [-h, \infty)$.

◁ Для $t \in [-h, h]$ утверждение теоремы следует из теоремы 7.4. Продолжение на $t \geq h$ можно построить следующим образом. Из [41, следствие 9.2.4] следует, что существует евклидово пространство $\mathbb{R}^K$ с достаточно большим K и локально липшицево непрерывное поле линейных операторов $A(t, m) : \mathbb{R}^K \rightarrow T_m M$ такое, что $A(t, m)A^*(t, m) = \alpha(t, m)$. Пусть $w(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^K$. Построим поле линейных операторов $A^T(t, b) : \mathbb{R}^K \rightarrow H_b$ как $T\pi^{-1}A(t, \pi b)|_{H_b}$. На OM введем векторное поле $X^T(t, b)$ как в доказательстве теоремы 7.3 и случайное векторное поле $Y_{m(\cdot)}^T(t, b)$ формулой

$$Y_{m(\cdot)}^T(t, b) = E_b \left(\mathcal{O}_{m(h)}^{-1} \Gamma_{h, t-h} Y(t-h, m(t-h)) \right), \quad (7.12)$$

где $m(\cdot)$ рассматривается как элементарное событие из $\tilde{\Omega}$ (см. § 8.3.1), а $\Gamma_{h, t}$ обозначает параллельный перенос вдоль $\xi(t)$.

Затем рассмотрим следующее уравнение Ито в форме Белопольской — Далецкого на OM :

$$\begin{aligned} d\zeta(t) &= \mathbf{e}_{\zeta(t)} \left(\left(X^T(t, \zeta(t)) + Y_{m(\cdot)}^T(t, \zeta(t)) \right) dt + \right. \\ &\quad \left. + A^T(t, \zeta(t)) dw(t) \right). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Отметим, что по построению $X^T(t, b)$ гладко, $A^T(t, b)$ локально липшицево и $Y_{m(\cdot)}^T(t, b)$ п. н. гладко по совокупности переменных t и b . Тогда существует решение $\zeta(t)$ уравнения (7.13) с начальным условием $\zeta(h) = \mathcal{O}_{m(h)}$ (см. [43]). Поскольку OM компактно (см. § 8.6), то $\zeta(t)$ существует на всем промежутке $t \in [h, 2h]$. Очевидным образом, процесс $\xi(t) = \pi\zeta(t)$ является продолжением искомого решения на $[h, 2h]$. Следующие шаги в точности аналогичны. ▷

Теорема 7.6. Пусть $X(t, m)$, $Y(t, m)$ и $\beta(t, m)$ такие же, как в теореме 7.4. Тогда для любого начального условия $\varphi(t)$, как в определении 7.2, существует решение $\xi(t)$ уравнения

$$\begin{aligned} D\xi(t) &= X(t, \xi(t)) + \Gamma_{t, t-h} Y(t-h, \xi(t-h)), \\ D_2\xi(t) &= \Gamma_{t, t-h} \beta(t, \xi(t)) \end{aligned} \quad (7.14)$$

корректно определенное при всех $t \in [-h, \infty)$.

◁ Рассуждения здесь аналогичны доказательству теоремы 7.5 со следующей модификацией. Из [41, следствие 9.2.4] следует, что существует евклидово пространство $\mathbb{R}^K$ с достаточно большим K и локально липшицево непрерывное поле линейных операторов $B(t, m) : \mathbb{R}^K \rightarrow T_m M$ такое, что $B(t, m)B^*(t, m) = \beta(t, m)$. Вместо (7.13) мы имеем дело с

$$\begin{aligned} d\zeta(t) &= \mathbf{e}_{\zeta(t)} \left(\left(X^T(t, \zeta(t)) + Y_{m(\cdot)}^T(t, \zeta(t)) \right) dt + \right. \\ &\quad \left. + B_{m(\cdot)}^T(t, \zeta(t)) dw(t) \right), \end{aligned} \quad (7.15)$$

где

$$B_{m(\cdot)}^T = T\pi^{-1}b \left(\mathcal{O}_{m(h)}^{-1} \Gamma_{h, t-h} B(t-h, m(t-h)) \right). \triangleright$$

7.4. Обобщение на включения и непрерывные уравнения

Условие 7.1. Пусть $\mathbf{X}(t, m)$ и $\mathbf{Y}(t, m)$ — многозначные векторные поля на M и $\boldsymbol{\alpha}(t, m)$ и $\boldsymbol{\beta}(t, m)$ — многозначные $(2, 0)$ -тензорные поля, принимающие значения в $S_+(n)$ в каждой точке $m \in M$. Мы предполагаем, что при всех $t \in \mathbb{R}$ и $m \in M$ образы всех этих полей являются замкнутыми выпуклыми множествами в соответствующих пространствах и что все эти поля полунепрерывны сверху по совокупности переменных.

Кроме того, мы будем работать с многозначными отображениями $\mathbf{Y}(t)$ из $[0, \infty)$ в касательное пространство в некоторой точке $m_0 \in M$ и $\boldsymbol{\beta}(t)$ из $[0, \infty)$ в $S_+(n)$ в пространство симметрических $(2, 0)$ -тензоров в m_0 . Мы также предполагаем, что их образы всех точек в $[0, \infty)$ замкнуты и выпуклы и эти отображения полунепрерывны сверху.

Теорема 7.7. Пусть M — компактное риманово многообразие, как выше. Выберем некоторую точку $m_0 \in M$. Пусть для $m \in M$, $t \geq 0$ многозначные векторы $\mathbf{X}(t, m)$ и $\mathbf{Y}(t) \subset T_{m_0}M$ и многозначные $(2, 0)$ -тензорные поля $\alpha(t, m)$ и $\beta(t)$ в m_0 удовлетворяют условию 7.1 и являются равномерно ограниченными. Тогда включение (7.9) имеет решение при начальном условии $\xi(0) = m_0$ и это решение существует при всех $t > 0$.

◁ Выберем последовательность положительных чисел $\varepsilon_q \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \infty$. По теореме 8.2 для полунепрерывных сверху многозначных отображений $\mathbf{X}(t, m)$ и $\mathbf{Y}(t)$ с замкнутыми выпуклыми образами существуют последовательности непрерывных ε_q -аппроксимаций $X_q(t, m)$ и $Y_q(t)$, соответственно, такие, что $X_q(t, m)$ ($Y_q(t)$ соответственно) поточечно сходятся к измеримому по Борелю селектору $\mathbf{X}(t, m)$ ($\mathbf{Y}(t)$ соответственно). Аналогичные ε -аппроксимации $\hat{\alpha}_q(t, m)$ и $\hat{\beta}_q(t)$ существуют и для $(2, 0)$ -тензорных полей $\alpha(t, m)$ и $\beta(t)$, соответственно, с дополнительным условием: так как $S_+(n)$ — выпуклое множество в $S(n)$, то эти аппроксимации принимают значения в $S_+(n)$ в соответствующих пространствах тензоров.

Так как непрерывную функцию можно аппроксимировать гладкой с точностью до произвольного $\varepsilon > 0$, то без потери общности можно считать, что $X_q(t, m)$ и $Y_q(t)$ гладкие.

Введем

$$\alpha_q(t, m) = \hat{\alpha}_q(t, m) + \frac{\varepsilon_q}{4} \tilde{g}(m) \quad \text{и} \quad \beta_q(t) = \hat{\beta}_q(t) + \frac{\varepsilon_q}{4} \tilde{g}(m),$$

где $g(m)$ — $(2, 0)$ -метрический тензор на M , соответствующий римановой метрике (которая является $(0, 2)$ -метрическим тензором) на M . Очевидным образом, $\alpha_q(t, m)$ ($\beta_q(t)$) поточечно сходятся к измеримому по Борелю селектору $\alpha(t, m)$ ($\beta(t)$ соответственно), и эти аппроксимации принимают значения в $\bar{S}_+(n)$ в соответствующих пространствах. Так что можно аппроксимировать $\frac{\varepsilon_q}{4}$ гладкими отображениями и, таким образом, без ограничения общности можно рассматривать $\alpha_q(t, m)$ и $\beta_q(t)$ как гладкие.

Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} D\xi_q(t) &= X_q(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,0}Y_q(t), \\ D_2\xi(t) &= \alpha_q(t, \xi(t)) + \Gamma_{t,0}\beta_q(t), \end{aligned}$$

которые удовлетворяют условиям теоремы 7.3. Обозначим через μ_q меры на пространстве выборочных траекторий, соответствующих ре-

шениям (7.16), которые существуют по теореме 7.3 на произвольном временном интервале $[0, T]$.

Оставшаяся часть доказательства проходит как простая модификация доказательства теоремы 4 из [33] (она основана на изометрическом вложении многообразия в евклидово пространство достаточно большой размерности). Показано, что множество мер $\{\mu_q\}$ слабо компактно, так что можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность. Далее показывается, что процесс, соответствующий предельной мере, удовлетворяет (7.9). $\triangleright$

Следствие 7.1. Утверждение теоремы 7.3 справедливо, если $X(t, m)$, $Y(t)$, $\alpha(t, m)$ и $\beta(t)$ непрерывны.

Действительно, однозначный непрерывный объект — это частный случай многозначного полунепрерывного сверху объекта.

Очевидным образом, модификации построений и рассуждений, использованных выше, позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 7.8. Пусть для компактного риманова многообразия M , как выше, для $m \in M$, $t \geq 0$ многозначные векторы $\mathbf{X}(t, m)$ и $\mathbf{Y}(t, m)$ и многозначные тензоры $\alpha(t, m)$ и $\beta(t, m)$ удовлетворяют условию 7.1 и равномерно ограничены. Тогда включение (7.7) имеет решение для любого начального значения $\varphi(t)$, как в определении 7.2, и это решение существует при $t \in [-h, h]$.

Теорема 7.9. Пусть $\mathbf{X}(t, m)$, $\mathbf{Y}(t, m)$ и $\alpha(t, m)$ такие же, как в теореме 7.8. Тогда для любого начального условия $\varphi(t)$, как в определении 7.2, существует решение $\xi(t)$ включения

$$\begin{aligned} D\xi(t) &\in \mathbf{X}(t, \xi(t)) + \Gamma_{t, t-h} \mathbf{Y}(t-h, \xi(t-h)), \\ D_2\xi(t) &\in \alpha(t, \xi(t)), \end{aligned} \quad (7.16)$$

которое существует при всех $t \in [-h, \infty)$.

Теорема 7.10. Пусть $\mathbf{X}(t, m)$, $\mathbf{Y}(t, m)$ и $\beta(t, m)$ такие же, как в теореме 7.8. Тогда для любого начального условия $\varphi(t)$, как в определении 7.2, существует решение $\xi(t)$ включения

$$\begin{aligned} D\xi(t) &\in \mathbf{X}(t, \xi(t)) + \Gamma_{t, t-h} \mathbf{Y}(t-h, \xi(t-h)), \\ D_2\xi(t) &\in \Gamma_{t, t-h} \beta(t, \xi(t)), \end{aligned} \quad (7.17)$$

которое корректно определено для всех $t \in [-h, \infty)$.

Следствие 7.2. Утверждения теорем 7.4, 7.5 и 7.6 выполняются, если $X(t, m)$, $Y(t, m)$, $\alpha(t, m)$ и $\beta(t, m)$ непрерывны.

ГЛАВА 8

ДОПОЛНЕНИЯ

8.1. Многозначные отображения

Многозначное отображение F множества X в множество Y — это такое соответствие, которое сопоставляет каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое *образом* x .

В случае, если X, Y — метрические пространства, то для многозначных отображений вводят несколько различных понятий непрерывности, которые в случае однозначных отображений переходят в стандартное определение непрерывности (мы не останавливаемся на описании этих понятий для многозначных отображений топологических пространств; см. [6]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Многозначное отображение называется *полуниепрерывным сверху* в точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что из $x' \in U(x)$ следует, что $F(x')$ лежит в ε -окрестности множества $F(x)$. F называется *полуниепрерывным сверху* на X , если оно полуниепрерывно сверху в каждой точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. Многозначное отображение $F : X \rightarrow Y$ называется *полуниепрерывным снизу* в точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что из $x' \in U(x)$ следует, что $F(x)$ лежит в ε -окрестности множества $F(x')$. F называется *полуниепрерывным снизу* на X , если оно полуниепрерывно снизу в каждой точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.3. Если F одновременно полуниепрерывно снизу и сверху, то оно называется *непрерывным по Хаусдорфу* (или просто непрерывным).

Непрерывные по Хаусдорфу отображения такие, что для каждого x его образ $F(x)$ есть ограниченное замкнутое множество, непрерывны относительно так называемой метрики Хаусдорфа в про-

пространстве всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств в Y . Именно, введем функцию уклонения множеств

$$\rho_*(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B),$$

где ρ — метрика в Y . Тогда метрика Хаусдорфа задается формулой

$$h(A, B) = \max(\rho_*(A, B), \rho_*(B, A)).$$

Многозначное отображение называется *замкнутым*, если его график является замкнутым множеством в $X \times Y$. Если F замкнуто и для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U(x)$ такая, что $F(U(x))$ относительно компактно, то F полунепрерывно сверху.

Важную техническую роль при исследовании многозначных отображений играют однозначные отображения в том или ином смысле аппроксимирующие многозначные. Опишем два сорта таких однозначных отображений — селекторы и ε -аппроксимации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.4. Пусть $F : X \rightarrow Y$ — многозначное отображение. Его *селектором* называется однозначное отображение $f : X \rightarrow Y$ такое, что для каждого $x \in X$ выполняется включение $f(x) \in F(x)$.

Далеко не всякое многозначное отображение имеет непрерывный селектор. Приведем классическую теорему о существовании непрерывных селекторов для полунепрерывных снизу отображений с выпуклыми замкнутыми образами.

Теорема 8.1 (теорема Майкла). *Если X — произвольное метрическое пространство, а Y — банахово пространство, то полунепрерывное снизу отображение такое, что образ любой точки является выпуклым замкнутым множеством, имеет непрерывный селектор.*

В приложениях чаще встречаются полунепрерывные сверху отображения. Они, вообще говоря, не имеют непрерывных селекторов, но имеют измеримые селекторы. Для исследования полунепрерывных сверху многозначных отображений оказываются полезными так называемые ε -аппроксимации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.5. При заданном $\varepsilon > 0$ непрерывное однозначное отображение $f_\varepsilon : X \rightarrow Y$ называется ε -аппроксимацией многозначного отображения $F : X \rightarrow Y$, если график отображения f_ε , как множество в $X \times Y$, лежит в ε -окрестности графика отображения F .

Из полунепрерывных сверху многозначных отображений в конечномерных пространствах $\mathbb{R}^n$, для которых доказано существование ε -аппроксимаций при любом $\varepsilon > 0$, мы укажем следующие классы:

- отображения с выпуклыми замкнутыми образами;
- так называемые отображения с образами асферичными во всех размерностях от 1 до $n - 1$ и слабо асферичными в размерности n (см. [7]). Этот класс многозначных отображений был впервые рассмотрен А. Д. Мышкисом в 1954 г. [24], в [7] и [11] для него были построены топологические характеристики типа числа Лефшеца и топологического индекса. Позже (в 80-х гг. XX века) этот класс был переоткрыт и назван «отображениями, чьи образы в каждой точке имеют uv^k -свойство при $k = 1, \dots, n$ » (см. точное определение, например, в [59]).

Следующее утверждение доказано в [34] (см. также [43]).

Теорема 8.2. Пусть $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми ограниченными образами. Для любой последовательности $\varepsilon_i \rightarrow 0$ существует последовательность непрерывных ε_i -аппроксимаций отображения Φ , которая поточечно сходится к измеримому по Борелю селектору Φ . Если Φ принимает значения в выпуклом множестве Ξ в $\mathbb{R}^n$, то указанные ε -аппроксимации также принимают значения в Ξ .

Пусть X — банахово пространство, $F : X \rightarrow X$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми образами. Пусть также для любого ограниченного множества $\Omega \subset X$ его образ $F(\Omega)$ относительно компактен. Тогда, если F переводит в себя шар B пространства X , то в B существует неподвижная точка $x \in F(x)$ (Теорема Какутани, аналог принципа Шаудера).

Следующие три утверждения можно найти, например, в [6]. Здесь через $C(Y)$, $K(Y)$ обозначены совокупности, состоящие из всех непустых замкнутых или, соответственно, компактных подмножеств топологического пространства Y .

Теорема 8.3. Если многозначное отображение $F : X \rightarrow C(Y)$ полунепрерывно сверху и пространство Y регулярно, то F замкнуто.

Теорема 8.4. Пусть многозначное отображение $F_0 : X \rightarrow C(Y)$ замкнуто, многозначное отображение $F_1 : X \rightarrow K(Y)$ полунепрерывно сверху и

$$F_0(x) \cap F_1(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in X.$$

Тогда пересечение $F = F_0 \cap F_1 : X \rightarrow K(Y)$ полунепрерывно сверху.

Теорема 8.5. Многозначное отображение $F : X \rightarrow Y$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любых последовательностей $x_k \subset X$, $y_k \subset Y$, таких, что $x_k \rightarrow x$, $y_k \in F(x_k)$, $y_k \rightarrow y$, выполнено $y \in F(x)$.

Пусть $F : R \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — многозначное отображение. *Дифференциальное включение*

$$\dot{x} \in F(t, x) \quad (8.1)$$

является аналогом дифференциального уравнения (и переходит в него, если F — однозначное отображение).

Решением (8.1) называется абсолютно непрерывная кривая $x(t)$, для которой почти всюду выполняется (8.1).

Если F полунепрерывно сверху, имеет выпуклые замкнутые ограниченные образы, то для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in R$ существует локальное (т. е. существующее при достаточно малых $t \geq 0$) решение указанного включения с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Известно также, что для полунепрерывного сверху F с замкнутыми ограниченными образами, которые, вообще говоря, не выпуклы, существует решение задачи Коши для дифференциального включения $\dot{x} \in \overline{\text{co}} F(t, x)$, где $\overline{\text{co}} F(t, x)$ — выпуклое замыкание $F(t, x)$.

8.2. Некоторые факты из теории матриц

Подробное описание материала этого параграфа имеется, например, в [28].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.6. Пусть заданы две $n \times n$ матричные функции $A(x)$ и $B(x)$, где x — вектор из линейного пространства X (например, X может быть $\mathbb{R}^1$ и в этом случае мы используем обозначение t вместо x). Выражение $\lambda A(x) + B(x)$, где λ — вещественный или комплексный параметр, называется *пучком переменных матриц*. Многочлен $\det(\lambda A(x) + B(x))$ (относительно λ) называется *характеристическим многочленом пучка*.

Теорема 8.6. (i) Пусть $A(t)$ и $B(t)$ аналитические по $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}^1$ и старший коэффициент характеристического многочлена нигде на (a, b) не равен нулю. Тогда существуют невырожденные матрицы $P(t)$ и $Q(t)$, аналитические по $t \in (a, b)$, такие, что

$$P(t)(\lambda A(t) + B(t))Q(t) = \lambda \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix}, \quad (8.2)$$

где I_d и I_{n-d} — единичные матрицы соответствующих размерностей, $N(t)$ — верхнетреугольная матрица с нулями на диагонали, $J(t)$ —

некоторый $d \times d$ блок. Матрицы $N(t)$ и $J(t)$ зависят от $t \in (a, b)$ аналитически.

(ii) Если $A(t)$ и $B(t)$ C^i -гладки в $t \in (a, b)$ ($i = 1, 2, \dots, \infty$), то существует подинтервал $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ такой, что при $t \in (a_1, b_1)$ существуют C^i -гладкие невырожденные матрицы $P(t)$ и $Q(t)$, корректно определенные и такие, что выполняется формула (8.2). В этом случае $N(t)$ и $J(t)$ C^i -гладки в $t \in (a_1, b_1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.7. Пусть, как и выше, старший коэффициент характеристического многочлена нигде не равен нулю на интервале (a, b) . Если характеристический многочлен удовлетворяет равенству

$$\text{rank}(A(t)) = \deg(\det(\lambda A(t) + B(t))), \quad (8.3)$$

то говорят, что матричный пучок удовлетворяет условию *ранг-степень*.

Отметим, что при выполнении условия ранг-степень, ранг матрицы $A(t)$ имеет постоянное значение на (a, b) .

Теорема 8.7. Если матричный пучок удовлетворяет условию ранг-степень, утверждение (ii) теоремы 8.6 выполняется на всем интервале (a, b) (т. е. $(a_1, b_1) = (a, b)$), и формула (8.2) имеет вид

$$P(t)(\lambda A(t) + B(t))Q(t) = \lambda \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Имеется следующее обобщение утверждения (ii) теоремы 8.6 для случая, когда матрицы зависят от вектора $x \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 8.8. Пусть матрицы $A(x)$ и $B(x)$ являются C^i -гладкими ($i = 1, 2, \dots, \infty$) по $x \in U$, где U — некоторая открытая область в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует открытая область $U_1 \subset U$, на которой существуют C^i -гладкие невырожденные матрицы $P(x)$ и $Q(x)$ ($x \in U_1$) такие, что

$$P(x)(\lambda A(x) + B(x))Q(x) = \lambda \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & N(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J(x) & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix}, \quad (8.5)$$

где I_d и I_{n-d} — единичные матрицы соответствующих размерностей, $N(x)$ — верхнетреугольная матрица с нулями на диагонали, $J(x)$ — некоторый $d \times d$ блок. Матрицы $N(x)$ и $J(x)$ C^i -гладки по $x \in U_1$.

8.3. Теория вероятностей и случайные процессы

Здесь мы описываем некоторые факты и конструкции из теории вероятностей и теории случайных процессов, которые частично выходят за рамки общего курса этих разделов математики. В основном это делается для удобства ссылок в тексте ниже, но в определенной мере приведенный здесь материал можно использовать для первого знакомства с предметом. Основные понятия теории вероятностей, включая понятия σ -алгебры (в том числе борелевской), меры и независимости случайных величин предполагаются известными.

Рассматриваются случайные величины (измеримые отображения), определенные на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и принимающие значения в конечномерном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ с борелевской σ -алгеброй. Для случайных величин со значениями в нелинейных многообразиях и для бесконечномерного случая имеют место аналогичные конструкции.

Подобное изложение приводимого здесь материала имеется в [10, 21, 22, 25, 30].

Будем говорить, что σ -подалгебра $\mathcal{B}_\xi$ в $\mathcal{F}$ порождена случайной величиной $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, если $\mathcal{B}_\xi$ есть минимальная σ -алгебра, содержащая прообразы всех борелевских множеств $\mathbb{R}^n$ при отображении ξ или, эквивалентно, $\mathcal{B}_\xi$ есть минимальная σ -алгебра, относительно которой измеримо ξ .

8.3.1. Случайный процесс. Цилиндрические множества.

Случайный процесс представляет собой зависящую от времени случайную величину. Говорят, что процесс $\eta(t)$, $t \in [0, \infty)$, имеет п. н. непрерывные траектории, если $\mathbf{P}$ -п. н. для $\omega \in \Omega$ кривая $\eta(t, \omega)$ непрерывна. Пространство непрерывных кривых $C^0([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ в этом случае называется *пространством (выборочных) траекторий*.

Зафиксируем конечное число точек $t_1, \dots, t_k \in [0, \infty)$ и конечный набор борелевских множеств $B_1, \dots, B_k \subset \mathbb{R}^n$. *Цилиндрическим* называется множество в $C^0([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ вида

$$J_{t_1, \dots, t_k} \times (B_1, \dots, B_k) = \{x(\cdot) \in C^0([0, \infty), \mathbb{R}^n) \mid x(t_i) \in B_i\},$$

т. е. множество кривых, которые в точках t_i принимают значения в подмножестве B_i , а в остальных точках — произвольные значения. Случайный процесс с п. н. непрерывными траекториями можно рассматривать как случайную величину со значениями в $C^0([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ с σ -алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами.

Обозначим $C^0([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ символом $\tilde{\Omega}$, а σ -алгебру, порожденную цилиндрическими множествами, — символом $\tilde{\mathcal{F}}$. Тогда, поскольку процесс $\xi(\cdot)$ можно рассматривать как измеримое отображение из $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$, он порождает вероятностную меру μ_ξ на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ обычным образом: $\mu_\xi(A) = P(\xi^{-1}(A))$ для $A \in \tilde{\mathcal{F}}$. Эта мера называется *мерой, порожденной процессом $\xi(t)$ на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ или распределением процесса $\xi(t)$* .

Для любой вероятностной меры μ , заданной на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$, можно построить случайный процесс $\eta_\mu(t)$ на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ следующим образом: $\eta_\mu(t, \omega) = \omega(t)$, где элементарное событие $\omega \in C^0([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ по определению является непрерывной кривой $\omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Процесс $\xi_\mu(t)$ называется *координатным процессом* на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mu)$.

Отметим, что для $\mu = \mu_\xi$, порожденной случайным процессом $\xi(t)$ с непрерывными выборочными траекториями в $\mathbb{R}^n$, соответствующий координатный процесс по построению имеет то же самое распределение, что и $\xi(t)$.

Каждый случайный процесс $\xi(t)$ в $\mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, определяет три семейства σ -подалгебр σ -алгебры $\mathcal{F}$:

- (i) «прошлое» $\mathcal{P}_t^\xi$ — порожденное прообразами борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ при всех отображениях $\xi(s) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ для $0 < s < t$;
- (ii) «будущее» $\mathcal{F}_t^\xi$ — порожденное аналогичным образом для $t < s < l$;
- (iii) «настоящее» $\mathcal{N}_t^\xi$ — порожденное самим отображением $\xi(t)$.

Все семейства мы считаем полными, т. е. пополняем всеми множествами вероятности нуль.

8.3.2. Условное математическое ожидание. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ случайных величин, суммируемых с квадратом. Пусть $\mathcal{F}_0$ — σ -подалгебра в $\mathcal{F}$. Рассмотрим $L_2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ — гильбертово пространство суммируемых с квадратом случайных величин, измеримых относительно $\mathcal{F}_0$. Понятно, что $L_2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ является замкнутым подпространством в $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Обозначим через $Q : L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ ортогональный проектор. Доказывается, что проектор Q продолжается до непрерывного проектора в соответствующих пространствах L_1 интегрируемых случайных величин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.8. Для любого $\xi \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ случайная величина $Q\xi \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P})$ называется *условным математическим ожиданием* ξ относительно $\mathcal{F}_0$ и обозначается $E(\xi | \mathcal{F}_0)$.

Важно отметить, что $E(\xi | \mathcal{F}_0)$ является (единственной с точностью до значений на множестве вероятности нуль) случайной величиной из $L_1(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P})$, такой, что для любого множества $A \in \mathcal{F}_0$ выполняется равенство $\int_A \xi d\mathbf{P} = \int_A E(\xi | \mathcal{F}_0) d\mathbf{P}$. Напомним, что существование такой функции вытекает из теоремы Радона — Никодима. Это описание $E(\xi | \mathcal{F}_0)$ можно рассматривать как эквивалентное определение.

Нетрудно видеть, что обычное математическое ожидание является условным математическим ожиданием относительно тривиальной σ -алгебры, состоящей из двух множеств $\emptyset$ и Ω .

Приведем некоторые свойства условного математического ожидания, большинство из которых сразу следуют из свойств проекторов. Подробное изложение этого материала имеется в [25, 30].

(i) Условное математическое ожидание является линейным оператором.

(ii) Если η измеримо относительно $\mathcal{F}_0$, то $E(\eta | \mathcal{F}_0) = \eta$.

(iii) Если $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_0$, то $E(E(\eta | \mathcal{F}_0) | \mathcal{F}_1) = E(\eta | \mathcal{F}_1)$. В частности, выполняется равенство $E(E(\eta | \mathcal{F}_0)) = E\eta$.

(iv) Если $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_0$, то $E(E(\eta | \mathcal{F}_1) | \mathcal{F}_0) = E(\eta | \mathcal{F}_1)$.

(v) Если η не зависит от $\mathcal{F}_0$, то $E(\eta | \mathcal{F}_0) = E\eta$.

(vi) Пусть ξ, η — случайные величины со значениями в $\mathbb{R}$.

Если ξ измерима относительно $\mathcal{F}_0$, то для любого η выполняется равенство

$$E(\xi\eta | \mathcal{F}_0) = \xi E(\eta | \mathcal{F}_0).$$

В случае векторнозначных случайных величин это свойство выполняется для скалярных произведений.

Пусть ξ, η — случайные величины, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и принимающие значения в $\mathbb{R}^n$. Через $E(\xi | \eta)$ обозначается условное математическое ожидание величины ξ относительно σ -подалгебры, порожденной прообразами борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ при отображении $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Нетрудно показать (см., например, [25]), что существует п. н. единственное измеримое по Борелю отображение $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $E(\xi | \eta) = Y(\eta)$. Отображение Y называется *регрессией* ξ по η и обычно обозначается выражением $Y(x) = E(\xi | \eta = x)$.

8.3.3. Мартингалы и семимартингалы. Случайный процесс $\eta(t)$ называется *мартингалом* относительно неубывающего семейства σ -алгебр $\mathcal{B}_t$, $t \in [0, \infty)$, если для каждого t величина $\eta(t)$ измерима относительно $\mathcal{B}_t$ и для любых $t \geq s \geq 0$ выполняется равенство $E(\eta(t) | \mathcal{B}_s) = \eta(s)$.

Непосредственно из определения мартингала и свойства (iii) условного математического ожидания следует, что обычное математическое ожидание мартингала есть величина постоянная.

Процесс $\eta(t)$ называется *локальным мартингалом*, если существует неубывающая последовательность марковских моментов (моментов остановки) τ_n такая, что $\lim \tau_n = \infty$, и для каждого $\tau_n(\omega)$ процесс $\eta(t \wedge \tau_n)$ является мартингалом, где $t \wedge \tau_n = \min(t, \tau_n(\omega))$.

Случайный процесс $\eta(t)$ называется *семимартингалом*, если $\eta(t) = A(t) + M(t)$, где $M(t)$ — локальный мартингал, а $A(t)$ — процесс, выборочные траектории которого п. н. имеют ограниченную вариацию по t (т. е. по ним корректен интеграл Стильеса от суммируемых функций).

Понятно, что мартингал является локальным мартингалом, а локальный мартингал — семимартингалом. Отметим, что имеется конструкция интегрирования случайных функций по семимартингалам (см. [22]), частным случаем которой является стохастический интеграл по винеровскому процессу.

При гладкой замене координат в $\mathbb{R}^n$ мартингалы и локальные мартингалы не преобразуются в аналогичные процессы, в то время как семимартингал преобразуется в семимартингал (разложение в сумму локального мартингала и процесса ограниченной вариации имеет место, однако слагаемые в этом разложении не являются результатом преобразования соответствующих слагаемых в прежней системе координат). Поэтому корректно определено понятие семимартингала со значениями в гладком многообразии.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется *обратным мартингалом* относительно невозрастающего семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_t$, если для каждого t величина $\xi(t)$ измерима относительно $\mathcal{F}_t$ и для любых $s \geq t \geq 0$ выполняется равенство $E(\eta(t) | \mathcal{F}_s) = \eta(s)$.

8.3.4. Слабая сходимость вероятностных мер. Подробное изложение материала этого параграфа имеется, например, в [4, 25]. Везде в этом параграфе X — сепарабельное полное метрическое пространство, $\mathcal{B}$ — его *борелевская σ -алгебра* (т. е. минимальная σ -ал-

гебра, порожденная открытыми множествами). Напомним, что мера μ на $(X, \mathcal{B})$ называется *вероятностной*, если $\mu(X) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.9. Говорят, что последовательность вероятностных мер μ_n на $(X, \mathcal{B})$ *слабо сходится к вероятностной мере μ_0* , если $\int_X f d\mu_n \rightarrow \int_X f d\mu_0$ для любой непрерывной и ограниченной функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.10. Семейство вероятностных мер $\{\mu_\alpha\}$ на $(X, \mathcal{B})$ называется *слабо относительно компактным*, если любая последовательность мер из $\{\mu_\alpha\}$ содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.

Отметим, что мера, к которой сходится подпоследовательность в определении 8.10, может не принадлежать $\{\mu_\alpha\}$, как и подразумевается в понятии относительной компактности. В дальнейшем, допуская вольность речи, мы иногда слабо относительно компактное семейство будем называть просто слабо компактным.

Теорема 8.9 (теорема Прохорова). *Семейство вероятностных мер $\{\mu_\alpha\}$ на $(X, \mathcal{B})$ слабо относительно компактно тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subset X$ такой, что $\mu_\alpha(K_\varepsilon) < \varepsilon$ для любого $\mu_\alpha \in \mathcal{M}$.*

8.3.5. Винеровский процесс. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $\mathcal{B}_t$ — неубывающее семейство σ -подалгебр σ -алгебр $\mathcal{F}$, где $t \in [0, \infty)$. Здесь и далее мы всегда будем предполагать, что все σ -подалгебры $\mathcal{B}_t$ (во всех рассматриваемых семействах) полны, т. е. содержат все множества из $\mathcal{F}$, имеющие вероятность нуль.

Мы будем рассматривать случайные процессы со значениями в некотором евклидовом пространстве со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, определенные на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Зафиксировав в этом пространстве ортонормированный базис, будем описывать векторы столбцами их координат, в связи с чем для простоты будем обозначать пространство через $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.11. Случайный процесс $w(t)$ в $\mathbb{R}^n$ называется *винеровским процессом*, подчиненным $\mathcal{B}_t$, если выполнены следующие условия:

- 1) выборочные траектории $w(t)$ п. н. непрерывны по t ;
- 2) $w(t)$ является квадратично-интегрируемым мартингалом относительно $\mathcal{B}_t$, причем $w(0) = 0$ и $E((w(t) - w(s))^2 | \mathcal{B}_t) = t - s$ при $t \geq s$.

Теорема 8.10 (теорема Леви). *Винеровский процесс $w(t)$ имеет стационарные независимые гауссовские приращения и при $t \geq s$ для него выполняются равенства*

$$E(w(t) - w(s)) = 0, \quad E((w(t) - w(s))^2) = t - s.$$

Иными словами, приращение $w(t) - w(s)$ при $t \geq s$ не зависит от $\mathcal{B}_s$ и имеет то же распределение, что и сам процесс $w(t - s)$.

Показано, что плотность распределения $\rho^w(t, x)$ винеровского процесса задается формулой

$$\rho^w(t, x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2t}}. \quad (8.6)$$

Очевидно, что $\mathcal{P}_t^w \subset \mathcal{B}_t$, где $\mathcal{P}_t^w$ — «прошлое» $w(t)$ (см. § 8.3.1).

Рассмотрим пространство $\tilde{\Omega} = C^0([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ непрерывных кривых в $\mathbb{R}^n$, определенных на $[0, \infty)$. В $\tilde{\Omega}$ рассмотрим σ -алгебру $\tilde{\mathcal{F}}$, порожденную цилиндрическими множествами (см. § 8.3.1). Любой винеровский процесс можно рассматривать как измеримое отображение пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ в измеримое пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$. Тем самым $\mathbf{P}$ порождает на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ меру ν , которая не зависит от конкретного винеровского процесса и определяется заданием скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$. Эта мера называется *мерой Винера*. По определению она задает распределения винеровского процесса в $\tilde{\Omega} = C^0([0, \infty), \mathbb{R}^n)$, т. е. совместные распределения случайных величин $w(t_1), \dots, w(t_k)$ в $\mathbb{R}^n$ при любом наборе $t_1, \dots, t_k$.

Рассмотрим совокупность $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \nu)$ как вероятностное пространство и определим на нем случайный процесс $\tilde{w}(t)$ формулой $\tilde{w}(t, \omega) = \omega(t)$ (так называемый *координатный процесс* на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \nu)$, см. выше), где элементарное событие $\omega \in C^0([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ есть по определению непрерывная кривая $\omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Построенный процесс $\tilde{w}(t)$ является винеровским, подчиненным семейству $\tilde{\mathcal{P}}_t$, где для каждого $t \in [0, \infty)$ σ -алгебра $\tilde{\mathcal{P}}_t$ порождена цилиндрическими множествами с основаниями на $[0, t]$. Подчеркнем, что $\tilde{\mathcal{P}}_t$ в данном случае совпадает с $\mathcal{P}_t^{\tilde{w}}$. Процесс $\tilde{w}(t)$ называется *стандартным винеровским процессом* или *броуновским движением*.

Для удобства дальнейших ссылок суммируем нужные нам свойства винеровского процесса в одном утверждении.

Теорема 8.11. Винеровский процесс $w(t)$ обладает свойствами:

1) выборочные траектории процесса $w(t, \omega)$ п. н. недифференцируемы при всех t , на любом сколь угодно малом промежутке имеют неограниченную вариацию;

2) координаты $w^i(t)$ процесса $w(t)$ являются одномерными винеровскими процессами, которые попарно независимы, ортогональная проекция $w(t)$ на k -мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$ является k -мерным винеровским процессом;

3) пусть b — ортогональный оператор в $\mathbb{R}^n$, тогда $b \circ w(t)$ — винеровский процесс; в частности, если $\tilde{w}(t)$ — стандартный винеровский процесс, то $b \circ \tilde{w}(t)$ — стандартный винеровский процесс в том смысле, что мера Винера инвариантна относительно действия ортогональных операторов в $\mathbb{R}^n$.

8.3.6. Стохастические интегралы. Перейдем к описанию стохастических интегралов по винеровскому процессу. Следуя [37], продемонстрируем специфику их конструкции на примере интегралов риманова типа, отсылая читателя к, например, [10], где описаны конструкции стохастических интегралов как интегралов лебегова типа.

Выберем промежутки $[0, T] \subset [0, \infty)$. Пусть $A : [0, T] \times \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ — случайная операторная функция, т. е. при каждом $t \in [0, T]$ $A(t) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ — случайный линейный оператор. Далее большую роль будет играть частный случай $k = n$, т. е. $A(t)$ — случайный линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим винеровский процесс $w(t)$ в $\mathbb{R}^k$. Зададим разбиение q отрезка $[0, T]$, $q = (0 = t_0 < t_1 < \dots < t_q = T)$, и рассмотрим интегральные суммы вида

$$\sum_I^q = \sum_{i=1}^{q-1} A(t_i)(w(t_{i+1}) - w(t_i)).$$

Предел этих сумм (обычно в смысле пространства $L_1((\Omega, \mathcal{F}, P), \mathbb{R}^n)$, но возможно в смысле какой-нибудь другой сходимости случайных величин) при $\text{diam } q \rightarrow 0$ (если он существует) называется *интегралом Ито* и обозначается $\int_0^T A(t) dw(t)$ (см. [37]). Так как выборочные траектории процесса $w(t)$ имеют п. н. неограниченную вариацию, интеграл Ито нельзя получить как интеграл Стильеса вдоль каждой траектории.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.12. Если $A(t)$ измеримо относительно σ -алгебры $\mathcal{B}_t$ при каждом t , то говорят, что $A(t)$ *не упреждает* относительно $\mathcal{B}_t$.

Для $A(t)$, не упреждающих относительно $\mathcal{B}_t$, при некоторых условиях ограниченности интеграл Ито существует как среднеквадратичный предел указанных выше интегральных сумм. В частности, интеграл Ито существует (как интеграл Лебега типа, см. [10]) при условии, что для каждого элемента $A_{ij}(t)$ матрицы оператора $A(t)$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}\left\{w \mid \int_0^l A_{ij}^2(t, w) dt < \infty\right\} = 1. \quad (8.7)$$

Интеграл Ито с переменным верхним пределом определяется формулой

$$\int_0^t A(\tau) dw(\tau) = \int_0^l \chi_t A(\tau) dw(\tau),$$

где χ_t — характеристическая функция множества $[0, t]$. Отметим, что $\int_0^t A(\tau) dw(\tau)$ обладает обычными свойствами линейности по A и dw . Другие важные для дальнейшего свойства этого интеграла суммируем в следующем утверждении.

Теорема 8.12. Процесс $\int_0^t A(\tau) dw(\tau)$ обладает следующими свойствами:

- 1) не упреждает относительно $\mathcal{B}_t$;
- 2) является мартингалом относительно $\mathcal{B}_t$;
- 3) имеет п. н. непрерывные по t выборочные траектории.

В отличие от обычного интеграла Римана по dt в теории стохастических интегралов является осмысленным понятие интеграла второго и более высокого порядка по dw . Например, интеграл k -го порядка от скалярной функции $\alpha(t)$ по $dw^1, \dots, dw^k$, где $w^1, \dots, w^k$ — одномерные винеровские процессы, определяются как предел интегральных сумм вида

$$\sum_{i=1}^{q-1} \alpha(t_i) (w^1(t_{i+1}) - w^1(t_1)) \cdot \dots \cdot (w^k(t_{i+1}) - w^k(t_i)).$$

В дальнейшем важную роль играет следующее утверждение о существовании и значениях некоторых интегралов высших порядков.

Теорема 8.13. Пусть $\alpha(t)$ — скалярная случайная функция, $w(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$, $w^i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ — его координаты (т. е. независимые одномерные винеровские процессы). Тогда

$$(i) \int_0^t \alpha(\tau) dw^i(\tau) dw^j(\tau) = 0, i \neq j;$$

$$(ii) \int_0^t \alpha(\tau) (dw^i(\tau))^2 = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau;$$

$$(iii) \int_0^t \alpha(\tau) d\tau dw^i(\tau) = 0;$$

$$(iv) \int_0^t \alpha(\tau) (dw^i(\tau))^3 = 0;$$

(v) все интегралы более высоких порядков от $\alpha(t)$ по $d\tau, dw^i(\tau)$ существуют и равны нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. По теореме 8.11 производная $\dot{w}(t)$ винеровского процесса в обычном смысле не существует, однако ее удается корректно определить в смысле обобщенных функций. Полученный обобщенный процесс называется *белым шумом*.

Имеются другие конструкции стохастических интегралов, отличающиеся выбором точки промежутка $[t_i, t_{i+1}]$, в которой берется значение функции $A(t)$ в слагаемых интегральных сумм (напомним, что в интеграле Ито значение функции $A(t)$ берется в левом конце промежутка $[t_i, t_{i+1}]$).

Процессом Ито называется процесс $\xi(t)$ вида

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t A(s) dw(s), \quad (8.8)$$

где $a(t)$ — процесс, у которого выборочные траектории п. н. имеют ограниченную вариацию.

Пусть $f(t, x)$ — непрерывно дифференцируемое отображение из $R \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Разложим его в ряд Тейлора в окрестности точки t_0, x_0 :

$$f(t, x) = f(t_0, x_0) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + f' \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} f''(\Delta x, \Delta x) + \dots,$$

где штрихами обозначены производные f по x в точке x_0 (напомним, что f' — линейный, а f'' — билинейный операторы). Подставим

в него приращение процесса Ито $\Delta\xi(s) = a(s)\Delta s + A(s)\Delta w(s)$. Получим

$$\begin{aligned}
 f(s, \xi(s)) &= f(t_0, x_0) + \frac{\partial f}{\partial s} \Delta s + \\
 &+ f'(a(s)\Delta s + A(s)\Delta w(s)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} (\Delta s)^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} f''(a(s)\Delta s + A(s)\Delta w(s), a(s)\Delta s + A(s)\Delta w(s)) + \dots = \\
 &= f(t_0, x_0) + \frac{\partial f}{\partial s} \Delta s + f' a(s) \Delta s + f' A(s) \Delta w(s) + \\
 &+ \frac{1}{2} (f''(a(s), a(s)) (\Delta s)^2) + f''(a(s) \Delta s, A(s) \Delta w(s)) + \\
 &+ f''(A(s) \Delta w(s), a(s) \Delta s) + f''(A(s) \Delta w(s), A(s) \Delta w(s)) + \dots
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

При интегрировании формулы (8.9) получим, что если $f(t, x)$ — непрерывно дифференцируемое (один раз по t и дважды по x) отображение, то для процесса $f(\xi(t))$ имеет место *классическая формула Ито* (см. [10, 12, 43] и др.):

$$\begin{aligned}
 f(\xi(t)) &= f(\xi_0) + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t} + f'(a(s)) + \frac{1}{2} \text{tr} f''(A(s), A(s)) \right] ds + \\
 &+ \int_0^t f'(A(s)) dw(s),
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

где

$$\text{tr} f''(A(s), A(s)) = \sum_{i=1}^n f''(A(s)e_i, A(s)e_i), \tag{8.11}$$

$e_1, \dots, e_k$ — произвольный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^k$. Действительно, по формулам (i) и (ii) из теоремы 8.13 ровно один интеграл второго порядка

$$\frac{1}{2} \int_0^t f''(A(s) dw(s), A(s) dw(s)) = \int_0^t \frac{1}{2} \text{tr} f''(A(s), A(s)) ds$$

не равен нулю, что и приводит к (8.10) (для обычного интеграла Римана по неслучайному интегратору все интегралы второго и более

высоких порядков равны нулю, и поэтому слагаемые с производными f выше первой при интегрировании исчезают).

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Из линейной алгебры известно, что след, введенный формулой (8.11), не зависит от выбора ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^n$.

Обратная формула Ито имеет вид

$$f(\xi(t)) = f(\xi_0) + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t} + f'(a(s)) - \frac{1}{2} \operatorname{tr} f''(A(s), A(s)) \right] ds + \int_0^t f'(A(s)) d_* w(s), \quad (8.12)$$

где последний интеграл определяется интегральными суммами со значением интегранда в правом конце промежутков. Она получается из тейлоровского разложения по правой точке промежутка (напомним, что в этом случае слагаемые с четными производными меняют знак). Формула (8.12) доказывается по той же схеме рассуждений, что и (8.10).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.13. Процесс Ито $\xi(t)$ называется *процессом диффузионного типа*, если $a(t)$ и $A(t)$ не упреждают относительно $\mathcal{P}_t^\xi$ и винеровский процесс $w(t)$ подчинен $\mathcal{P}_t^\xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.14. Процесс $\xi(t)$ диффузионного типа называется *диффузионным процессом*, если $\beta(t) = a(t, \xi(t))$ и $A(t) = A(t, \xi(t))$, где $a(t, x)$ и $A(t, x)$ — измеримые по Борелю отображения $R \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и в пространство линейных операторов соответственно.

8.3.7. Стохастические дифференциальные уравнения.

Пусть на пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы неавтономное векторное поле $a(t, x)$ и неавтономное поле линейных операторов $A(t, x)$ (т. е. при $t \in R$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t, x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор). *Стохастическим дифференциальным уравнением в форме Ито* называется интегральное уравнение

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(\tau, \xi(\tau)) d\tau + \int_0^t A(\tau, \xi(\tau)) dw(\tau) \quad (8.13)$$

(первое слагаемое в правой части — интеграл Лебега; здесь мы не останавливаемся на условиях, при которых корректно определены все участвующие в этом выражении интегралы).

Уравнение (8.13) принято формально записывать в дифференциальной форме:

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t)) dt + A(t, \xi(t)) dw(t). \quad (8.14)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.15. В стохастическом дифференциальном уравнении $a(t, x)$ называется *сносом*, а оператор $A^*(t, x) \circ A(t, x)$ — *коэффициентом диффузии*.

Опишем более общий класс С.Д.У. — уравнения диффузионного типа, в которых коэффициенты $a(t)$ и $A(t)$ зависят не от t , а от траектории $x(\cdot)$ на отрезке $[0, t]$, т. е. представляет собой уравнение с запаздыванием. Зафиксируем отрезок $[0, T] \subset [0, \infty)$ и рассмотрим отображения $a : [0, T] \times C^0([0, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $A : [0, T] \times C^0([0, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, где $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ — пространство линейных операторов из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$. Всегда будем предполагать, что $a(t, x(\cdot))$ и $A(t, x(\cdot))$ обладают следующим свойством.

Условие 8.1. Отображения $a(t, x(\cdot))$ и $A(t, x(\cdot))$ измеримы по совокупности переменных и для всех $t \in [0, T]$ отображения $a(t, \cdot) : C^0([0, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $A(t, \cdot) : C^0([0, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ измеримы относительно σ -алгебры, порожденной цилиндрическими множествами с основаниями над $[0, t]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.16. Уравнение типа Ито

$$d\xi(t) = a(t, \xi(\cdot)) dt + A(t, \xi(\cdot)) dw(t) \quad (8.15)$$

называется *стохастическим дифференциальным уравнением диффузионного типа*.

Отметим, что решением уравнения диффузионного типа является *процесс диффузионного типа*.

Уравнение (8.15) является сокращенной записью интегрального выражения

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(\cdot)) ds + \int_0^t A(s, \xi(\cdot)) dw(s). \quad (8.16)$$

Понятно, что уравнение (8.14) является частным случаем (8.15).

Часто для коэффициентов уравнения (8.15) дополнительно будет требоваться следующее.

Условие 8.2. Отображения $a(t, x(\cdot))$ и $A(t, x(\cdot))$ непрерывны по совокупности переменных.

Также рассматривают уравнения, коэффициенты которых являются случайными (явно зависят от $\omega \in \Omega$).

В теории стохастических дифференциальных уравнений рассматриваются два типа решений: сильные и слабые.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.17. Говорят, что уравнение в (8.14) (или (8.15) соответственно) имеет *сильное решение* $\xi(t)$, если для любого винеровского процесса $w(t)$ существует случайный процесс $\xi(t)$, заданный на том же вероятностном пространстве, что и $w(t)$, и неупреждающий относительно $\mathcal{P}_t^w$, такой, что для $\xi(t)$ и $w(t)$ п. н. при каждом t из некоторого промежутка выполняется (8.13) (или (8.16) соответственно).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.18. Говорят, что уравнение (8.14) (или (8.15) соответственно) имеет *слабое решение* $\xi(t)$, если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, неубывающее семейство $\mathcal{B}_t$ σ -подалгебр σ -алгебры $\mathcal{F}$, процесс $\xi(t)$, не упреждающий относительно $\mathcal{B}_t$, и винеровский процесс $w(t)$ в $\mathbb{R}^k$, подчиненный $\mathcal{B}_t$, такие, что для $\xi(t)$ и $w(t)$ п. н. при каждом t из некоторого промежутка выполняется (8.13) (или (8.16) соответственно).

Подчеркнем, что сильное решение определено на любом вероятностном пространстве, на котором существует винеровский процесс, и оно не упреждает относительно винеровского процесса. Слабое решение можно определить хотя бы на одном вероятностном пространстве, и свойством неупреждаемости по отношению к винеровскому процессу оно может не обладать. Отметим, что обычно для сильных решений оказывается, что $\mathcal{P}_t^w = \mathcal{P}_t^\xi$, а для слабых — что $\mathcal{B}_t = \mathcal{P}_t^\xi$, т. е. и в случае сильных, и в случае слабых решений можно считать, что $w(t)$ подчинен $\mathcal{P}_t^\xi$.

Для сильных решений вводится понятие *сильной единственности*, как совпадение любых двух решений п. н. Решение называется *слабо единственным*, если для любых двух решений совпадают порожденные ими меры на пространстве траекторий (см. конструкцию стандартного винеровского процесса в § 8.3.5).

Из определений 8.14, 8.17 и 8.18 следует, что решения уравнения (8.14) являются диффузионными процессами. Доказывается также, что сильные решения (8.14) являются марковскими процессами. Решения уравнений (8.15) очевидным образом являются процес-

сами диффузионного типа (см. определение 8.13) и, вообще говоря, не являются марковскими процессами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.19. Будем говорить, что коэффициенты уравнения Ито (8.14) удовлетворяют *условию Ито* (имеют линейный рост), если существует константа $K > 0$ такая, что при всех $t \in R$, $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\|a(t, x)\| + \|A(t, x)\| < K(1 + \|x\|), \quad (8.17)$$

где $\|A\|$ — норма оператора A .

Теоремы существования сильных решений в основном доказываются с помощью принципа сжимающих отображений, например, при выполнении (8.17) и какого-нибудь варианта условия Липшица для коэффициентов (в этом случае решение определено при $t \in [0, \infty)$). Теоремы этого сорта охватывают широкий класс уравнений со случайными коэффициентами. Обычно условия типа Ито используются, чтобы гарантировать существование глобальных по времени решений. Известны теоремы существования сильного решения, использующие другие методы, и теоремы, выводящие существование сильного решения из существования слабых решений. Известны примеры уравнений, имеющих слабые, но не имеющих сильных решений.

Понятие слабого решения принадлежит А. В. Скороходу. Им же доказана классическая теорема существования слабого решения для уравнения (8.15) в $\mathbb{R}^n$ с n -мерным винеровским процессом при выполнении условий 8.1 и 8.2 и условия типа Ито. Теорема Н. В. Крылова (см., например, [20]) утверждает существование слабого решения в случае измеримых коэффициентов уравнения (8.14) при дополнительном условии невырожденности линейного оператора $A(t, x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (т. е. при положительной определенности коэффициента диффузии уравнения) при всех $t \in R$, $x \in \mathbb{R}^n$.

8.4. Расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.20. Говорят, что задано *расслоение* (или расслоенное пространство, или косое произведение), если заданы следующие объекты:

- многообразие M , называемое *базой расслоения*;
- многообразие E , называемое *пространством расслоения*;
- многообразие F , называемое *стандартным слоем расслоения*;

- группа Ли G , называемая *структурной группой расслоения*;
- гладкая проекция $\pi : E \rightarrow M$, называемая *проекцией расслоения*;

и выполняются следующие соотношения между указанными объектами:

- группа G действует слева на F ;
- для любого $m \in M$ множество $E_m = \pi^{-1}m$, называемое *слоем* в точке m , гомеоморфно F ;
- для любой карты $\mathcal{U}_\alpha$ на M множество $\pi^{-1}\mathcal{U}_\alpha$ гомеоморфно $\mathcal{U}_\alpha \times F$ посредством некоторого гомеоморфизма $\mathfrak{F}_\alpha$;
- для $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$ замена координат из $\mathcal{U}_\alpha \times F$ в $\mathcal{U}_\beta \times F$ имеет вид пары $(\varphi_{\beta\alpha}, g_{\beta\alpha}(m))$, где $\varphi_{\beta\alpha} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow \mathcal{U}_{\alpha\beta}$ — замена координат на M , а $g_{\beta\alpha}(m) : F \rightarrow F$ — гладко зависящий от $m \in \mathcal{U}_{\alpha\beta}$ элемент группы G , являющийся диффеоморфизмом F на себя в соответствии с определением действия слева группы G на F .

Отметим, что $\mathcal{U}_\alpha \times F$ и $\mathcal{U}_\beta \times F$ содержат карты многообразия E вида $\mathcal{U}_\alpha \times V_\kappa$ и $\mathcal{U}_\beta \times V_\lambda$, где V_κ и V_λ — карты на F , и $(\varphi_{\beta\alpha}, g_{\beta\alpha})$ являются заменами координат именно в указанных картах.

Часто расслоение обозначается тем же символом, что и его пространство расслоения. Более подробно говорят, что задано расслоение E над M со слоем F и структурной группой G или, что $\pi : E \rightarrow M$ — расслоение. Также иногда обозначают расслоение со слоем F символом $\underline{F}$. Каждое из этих обозначений удобно в соответствующих задачах в зависимости от основного объекта исследований.

Простейший пример расслоения — прямое произведение $E = M \times F$, которое называется *тривиальным расслоением*. В этом случае все $g_{\beta\alpha}$ равны единичному элементу e группы G (и, таким образом, структурная группа может быть сведена к своей подгруппе e). Элементы тривиального расслоения называются *скалярами*.

Отметим, что согласно определению 8.20 любое расслоение над каждой картой $\mathcal{U}_\alpha$ преобразуется соответствующим гомеоморфизмом $\mathfrak{F}_\alpha$ в тривиальное. Поэтому $\mathfrak{F}_\alpha$ называется *тривиализацией* (часто говорят, что расслоения над каждой картой тривиальны или, по-другому, расслоения в смысле определения 8.20 локально тривиальны).

Для дальнейшего важно понять, что могут существовать много различных тривиализаций расслоения над некоторой картой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.21. *Векторное расслоение* — это расслоение, у которого $F = \mathbb{R}^k$ при некотором $k \geq 0$, G — группа $GL(k, \mathbb{R})$ невырожденных линейных преобразований $\mathbb{R}^k$ и элементы группы G действуют на $\mathbb{R}^k$ как линейные автоморфизмы. Определение комплексного векторного расслоения аналогично с заменой $\mathbb{R}^k$ на $\mathbb{C}^k$ и $GL(k, \mathbb{R})$ на $GL(k, \mathbb{C})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.22. *Главное расслоение* — это расслоение, у которого $F = G$.

Заметим, что на главном расслоении E определено и левое, и правое действие структурной группы G на стандартном слое, поскольку слой изоморфен самой группе G . В частности, выбрав $g \in G$, можно рассмотреть правый сдвиг $\eta \circ g$ любой точки $\eta \in E$ и таким образом построить правое действие G на E .

Каждое главное расслоение порождает так называемые ассоциированные с ним расслоения следующим образом. Пусть E — главное расслоение со структурной группой G и пусть F — многообразие, на котором задано некоторое действие G слева. Рассмотрим прямое произведение $E \times F$ и определим на нем действие G справа по формуле

$$(\eta, f)g = (\eta \circ g, g^{-1}f)$$

(это действие справа, поскольку $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$). Над каждой картой $\mathcal{U}_\alpha$ на M сужение $E \times F$ имеет вид $\mathcal{U}_\alpha \times G \times F$. Построим факторпространство $E \times F$ по указанному действию группы G . Его точками объявляются множества $(m, hg, g^{-1}f)$ для всех $g \in G$, называемые *орбитами точек* $(m, h, f) \in \mathcal{U}_\alpha \times G \times F$. Каждой орбите взаимно однозначно соответствует точка $(m, hf) \in \mathcal{U}_\alpha \times F$. Действительно, так как любая точка орбиты имеет вид $(m, hg, g^{-1}f)$ при некотором фиксированном $g \in G$, то получаем

$$(m, (hg)(g^{-1}f)) = (m, hf).$$

Таким образом, над $\mathcal{U}_\alpha$ указанное фактор-пространство представимо в виде $\mathcal{U}_\alpha \times F$, т. е. само фактор-пространство является расслоением над M со слоем F и структурной группой G , для которого $g_{\alpha\beta}(m)$ — те же самые, что и для E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.23. Построенное фактор-пространство называется расслоением со слоем F , *ассоциированным* с главным расслоением E .

Следует отметить, что любое неглавное расслоение является ассоциированным с некоторым главным.

Обозначим через λ отображение $E \times F$ на пространство ассоциированного расслоения, состоящее в факторизации по указанному выше соотношению эквивалентности.

8.5. Некоторые понятия из теории связностей

Пусть M — гладкое многообразие, TM — его касательное расслоение, $\pi : TM \rightarrow M$ — естественная проекция. Обозначим через $T_m M$ — касательное пространство к M в $m \in M$, через $T_{(m,X)} TM$ — касательное пространство к TM в точке $(m, X) \in TM$, где $X \in T_m M$ — касательный вектор к M в m .

Напомним, что на многообразии M задана связность, если в каждом касательном пространстве $T_{(m,X)} TM$ задано подпространство $\mathcal{H}_{(m,X)}$, дополнительное к вертикальному подпространству $\mathcal{V}_{(m,X)}$ — касательному пространству к слою $T_m M$ расслоения TM , и при этом набор подпространств $\mathcal{H}$ является гладким по (m, X) и (при любом $a \in R$) инвариантным относительно отображения Ta — касательного к отображению $a : M \rightarrow M$, умножению всех векторов на число a . Отображением связности называется послойный линейный оператор $K : TTM \rightarrow TM$, который на каждом $\mathcal{V}_{(m,X)}$ является линейным изоморфизмом на $T_m M$ и ядром которого является $\mathcal{H}_{(m,X)}$.

Для гладких векторных полей X, Y на M ковариантная производная $\nabla_X Y$ по X — это векторное поле $\nabla_X Y = K \circ TY(X)$, где Y рассматривается как отображение $Y : M \rightarrow TM$ и TY — его касательное отображение. Отметим, что $TY(X) \in TTM$ является естественной инвариантной (т. е. корректно определенной без выбора карт) производной Y по X .

Пусть $X(t)$ — векторное поле вдоль гладкой кривой $m(t)$. Ковариантная производная от $X(t)$ по времени вдоль $m(t)$ определяется формулой $\frac{D}{dt} X(t) = K \circ \frac{d}{dt} X(t)$. Как и выше, $\frac{d}{dt} X(t) \in TTM$ является естественной инвариантной производной $X(t)$ по t вдоль $m(t)$.

Векторное поле $X(t)$ называется *параллельным* вдоль $m(t)$, если $\frac{D}{dt} X(t) = 0$. Кривая $m(t)$ называется *геодезической*, если $\frac{D}{dt} \dot{m}(t) = 0$. Из последнего равенства следует, что

$$\frac{d}{dt} \dot{m}(t) = Z(m(t), \dot{m}(t)) \in T_{(m(t), \dot{m}(t))} TM, \quad (8.18)$$

где Z — векторное поле на TM , вектор которого в $(m, X) \in TM$ лежит в $\mathcal{H}_{(m, X)}$ и выражается по формуле

$$Z(m, X) = T\pi^{-1}X \in \mathcal{H}_{(m, X)}.$$

Поле Z называется *геодезической струей связности* $\mathcal{H}$.

Можно показать, что в каждой карте на M разность между $\nabla_X Y$ и обычной производной векторного поля Y по направлению векторного поля X в точке m (в этой карте, подчеркнем, что «обычная» производная зависит от выбора карты, т. е. не является инвариантной) равна $\Gamma_m(X, Y)$, где $\Gamma_m(\cdot, \cdot)$ — билинейное отображение $\Gamma_m : T_m M \times T_m M \rightarrow T_m M$, называемое *локальным коэффициентом связности*. Его компоненты называются *символами Кристоффеля второго рода* и обозначаются Γ_{ij}^k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.24. Будем говорить, что на векторном расслоении Q задана *связность* $\mathcal{H}$, если в каждом касательном пространстве $T_{(m, V)}Q$ задано подпространство $\mathcal{H}_{(m, V)}$, дополнительное до $\mathcal{V}_{(m, V)}$ (т. е. $T_{(m, V)}Q = \mathcal{H}_{(m, V)} \oplus \mathcal{V}_{(m, V)}$ в каждой точке $(m, V) \in Q$), и при этом набор подпространств $\mathcal{H}$ удовлетворяет следующим двум условиям:

- (i) пространство $\mathcal{H}_{(m, V)}$ гладко зависит от $(m, V) \in Q$;
- (ii) набор подпространств $\mathcal{H}$ инвариантен относительно действия вещественной прямой на Q , т. е. для всех $(m, V) \in Q$ выполняется равенство $Ta\mathcal{H}_{(m, V)} = \mathcal{H}_{(m, aV)}$ при любом $a \in \mathbb{R}$.

Понятия отображения связности $K : T_{(m, V)}Q \rightarrow Q_m$, локального коэффициента связности и ковариантной производной вводятся аналогично случаю связности на многообразии (см. выше).

Если связность $\mathcal{H}$ зафиксирована, подпространства $\mathcal{H}_{(m, V)}$ называются *горизонтальными* так же, как и векторы из $\mathcal{H}_{(m, V)}$.

На главном расслоении E в касательном пространстве $T_{(m, \epsilon)}E$, $\epsilon \in E_m$, также имеется вертикальное подпространство $\mathcal{V}_{(m, \epsilon)}$, состоящее из векторов, касательных к слою E_m . Напомним, что слой изоморфен группе G . Показано, что $\mathcal{V}_{(m, \epsilon)}$ изоморфно алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G .

В этом случае связности вводятся аналогично определению 8.24, только вместо инвариантности относительно действия вещественной оси требуется инвариантность относительно правого действия группы G .

Аналогом отображения связности является семейство проекторов касательных пространств $T_{(m, \epsilon)}E$ на вертикальные подпространства

ва $\mathcal{V}_{(m,\epsilon)}$, ядрами которых являются (горизонтальные) пространства связности. Однако, учитывая, что расслоение вертикальных векторов над E представимо в виде $E \times \mathfrak{g}$, то его рассматривают как семейство линейных отображений $\theta : T_{(m,\epsilon)}E \rightarrow \mathfrak{g}$ и называют *формой связности*, которая принимает значения в $\mathfrak{g}$.

Примерами главных расслоений являются расслоения базисов BM в касательных пространствах к M и (в случае римановых многообразий) его подрасслоение ортонормированных базисов OM .

Расслоения $\mathcal{V}$ и $\mathcal{H}$ над BM и OM тривиальны (представимы в виде прямого произведения базы на слой): $\mathcal{V}$ тривиализуются так называемыми фундаментальными векторными полями, а $\mathcal{H}$ — так называемыми базисными векторными полями $E(x)$, где вектор $E_b(x) \in \mathcal{H}_b$ для $b \in OM$ и $x \in \mathbb{R}^n$ задается равенством

$$E_b(x) = T\pi^{-1}(bx)|_{\mathcal{H}_b}$$

(базис b рассматривается как линейный оператор $b : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\pi b}M$; см., например, [5, 43]). Таким образом, касательные расслоения $TBM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ и $TOM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ также тривиальны.

И на векторном, и на главном расслоении касательное отображение $T\pi$ к проекции π взаимно однозначно переводит пространство связности $\mathcal{H}_{(m,X)}$ в любой точке (m, X) расслоения на касательное пространство T_mM . Рассмотрим вектор $Y \in T_mM$. Через Y^T обозначается вектор $T\pi^{-1}Y \in \mathcal{H}_{(m,X)}$, который называется *горизонтальным подъемом* Y в точку (m, X) . Пусть $m(t)$ — гладкая кривая на M , ее векторное поле производной вдоль нее самой обозначим через $\dot{m}(t)$. Сузим расслоение на эту кривую и рассмотрим на этом сужении векторное поле $\dot{m}^T$. Дифференциальное уравнение $\frac{d}{dt}X(t) = \dot{m}^T$ при любом начальном данном $X(0)$ имеет единственное решение $m^T(t)$, которое называется *горизонтальным подъемом кривой* $m(t)$. Для случая векторных расслоений $m^T(t)$ является параллельным переносом вектора X_0 вдоль $m(t)$ в смысле приведенного выше определения в терминах ковариантной производной. На главных расслоениях $m^T(t)$ называется *параллельным переносом* X_0 вдоль $m(t)$.

Напомним (см. выше) понятие геодезической.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.25. Кривая $m(t)$ такая, что ее векторное поле скорости $\dot{m}(t)$ параллельно вдоль этой кривой, называется *геодезической*.

На многообразии M со связностью геодезические являются аналогами прямых линий в векторном пространстве. Действительно, так как параллельное вдоль кривой векторное поле является аналогом постоянного векторного поля в линейном пространстве, то свойство кривой иметь параллельное вдоль нее самой векторное поле скорости аналогично свойству кривой в линейном пространстве иметь постоянную скорость. В линейном пространстве прямые с естественной параметризацией и только они обладают последним свойством.

Исходя из определения 8.25 и определения параллельного векторного поля вдоль кривой, получим, что кривая $m(t)$ является геодезической тогда и только тогда, когда в любой ее точке выполняется равенство

$$\frac{D}{dt} \dot{m}(t) = 0. \quad (8.19)$$

Теорема 8.14. Для любой точки $m \in M$ и любого вектора $X \in T_m M$ существует и единственна геодезическая $m(t)$ с начальными условиями $m(0) = m$, $\dot{m}(0) = X$, которая определена при $t \in [0, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.26. Если любая геодезическая связности $\mathcal{H}$ существует при $t \in [0, \infty)$, то связность $\mathcal{H}$ на M называется *полной*.

Пусть $X \in T_m M$ — касательный вектор в точке m . Обозначим через $m_X(t)$ геодезическую с начальными условиями $m(0) = m$, $\dot{m}(0) = X$, которая существует при $t \in [0, \varepsilon)$ по теореме 8.14. Зафиксируем положительное число $\lambda < 1$. Нетрудно видеть, что $m(\lambda t)$ — геодезическая с начальным вектором производной λX , которая существует при $t \in [0, \frac{1}{\lambda} \varepsilon)$. Поэтому, если X достаточно близок к нулю, то геодезическая $m_X(t)$ существует при $t = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.27. Отображение $\exp : \mathcal{O} \rightarrow M$, где $\mathcal{O}$ — некоторая окрестность нуля в $T_m M$, заданное формулой $\exp(X) = m_X(1)$, называется *экспоненциальным отображением связности $\mathcal{H}$* .

Понятно, что если $\mathcal{H}$ — полная связность, то экспоненциальное отображение определено на всем $T_m M$.

Теорема 8.15. Существует окрестность O нуля в $T_m M$ такая, что $\exp$ является диффеоморфизмом O на $\exp O$, гладко зависящим от точки m .

Отметим, что пара $(\mathcal{O}, \exp)$ удовлетворяет определению карты. Эта карта называется *нормальной картой* (или нормальной окрест-

ностью) связности $\mathcal{H}$ в точке m . В нормальной карте точки m в самой точке m $\mathbf{p}\Gamma_m(\cdot, \cdot) = 0$, т. е. все символы Кристоффеля второго рода $\Gamma_{ij}^k(m)$ связности $\mathcal{H}$ в точке m равны нулю.

Пусть M — риманово многообразие с римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В этом случае на M вводится специальный класс связностей, называемых римановыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.28. Связность на римановом многообразии M называется *римановой*, если для любых трех гладких векторных полей X , Y и Z выполняется равенство

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

(аналог правила Лейбница), где $X\langle Y, Z \rangle$ обозначает производную функции $\langle Y, Z \rangle$ на M по направлению векторного поля X .

Важную роль в геометрии многообразий играют так называемые тензоры кривизны и кручения. Тензор кривизны нам не понадобится. А тензор кручения мы определим как тензор, чьи компоненты T_{ij}^k выражаются через символы Кристоффеля второго рода формулой $T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$.

Отметим, что равенство нулю тензора кручения означает, что символы Кристоффеля второго рода симметричны по нижним индексам.

Теорема 8.16 (основная лемма римановой геометрии). *На любом римановом многообразии существует и единственна риманова связность, у которой тензор кручения везде равен нулю.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.29. Связность, существование и единственность которой доказывается в теореме 8.16, называется *связностью Леви-Чивита*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.30. Если связность Леви-Чивита на римановом многообразии M полна, то M называется *полным римановым многообразием*.

8.6. Уравнения Ито на многообразиях

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.31 [15]. Пара $(a(t, m), A(t, m))$, где $a(t, m)$ — векторное поле на многообразии M , а $A(t, m)$ — поле линейных операторов $A(t, m) : \mathbb{R}^k \rightarrow T_m M$, переводящее некоторое евклидово пространство $\mathbb{R}^k$ в касательные пространства к M , называется *векторным полем Ито*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.32 [15]. Стохастический дифференциал

$$(a(t, m)dt + A(t, m)dw(t))$$

в точке $m \in M$, заданный векторным полем Ито (a, A) — это класс стохастических процессов в касательном пространстве $T_m M$, который состоит из решений всех стохастических дифференциальных уравнений вида

$$X(t+s) = \int_t^{t+s} \tilde{a}(\tau, X(\tau)) d\tau + \int_t^{t+s} \tilde{A}(\tau, X(\tau)) dw(\tau),$$

где $\tilde{a}(\tau, X)$ — векторное поле на $T_m M$; $\tilde{A}(\tau, X) : \mathbb{R}^k \rightarrow T_m M$ — линейный оператор, зависящий от параметров $\tau \in R$ и $X \in T_m M$; и выполняются следующие условия: $\tilde{a}(\tau, X)$ и $\tilde{A}(\tau, X)$ удовлетворяют условию Липшица, равны нулю вне некоторой окрестности нуля в $T_m M$ и такие, что при $\tau \geq t$ выполняются равенства $\tilde{a}(\tau, 0) = a(t, m)$ и $\tilde{A}(\tau, 0) = A(t, m)$.

Зафиксируем некоторую связность $\mathcal{H}$ на M и обозначим через $\exp^H$ ее экспоненциальное отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.33 [15, 43]. Будем говорить, что процесс $\xi(t)$ удовлетворяет *уравнению Ито в форме Белопольской — Далецкого* относительно $\mathcal{H}$

$$d\xi(t) = \exp_{\xi(t)}^H(a(t, \xi(t)) dt + A(t, \xi(t)) dw(t)), \quad (8.20)$$

если в каждой точке $\xi(t)$ имеется ее окрестность в M такая, что до выхода $\xi(t+s)$, $s \geq 0$, из этой окрестности $\xi(t+s)$ п. н. совпадает с некоторым процессом из класса $\exp_{\xi(t)}^H(a(t, \xi(t)) dt + A(t, \xi(t)) dw(t))$.

В локальной карте уравнение (8.20) имеет вид

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t)) dt - \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{\Gamma}_{\xi(t)}^H(A(t, \xi(t)), A(t, \xi(t))) dt + A(t, \xi(t)) dw(t), \quad (8.21)$$

где $\mathbf{\Gamma}^H$ — локальный коэффициент связности $\mathcal{H}$ в этой карте. Уравнение (8.21) называется *уравнением Ито в форме Баксендейла*. Показано, что при заменах координат (8.21) преобразуется по формуле Ито.

Выберем точку $m \in M$ и рассмотрим нормальную карту U_m в этой точке относительно экспоненциального отображения связности $\mathcal{H}$. Построим в U_m следующие регрессии:

$$Y^{U_m}(t, m') = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \middle| \xi(t) = m' \right), \quad (8.22)$$

$$Y_*^{U_m}(t, m') = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E_t^\xi \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \middle| \xi(t) = m' \right). \quad (8.23)$$

Введем $X^0(t, m) = Y^{U_m}(t, m)$ и $X_*^0(t, m) = Y_*^{U_m}(t, m)$. Отметим, что $X^0(t, m)$ и $X_*^0(t, m)$ являются векторными полями на M , т. е. при заменах координат они преобразуются как сечения касательного расслоения TM .

Производные в среднем справа и слева процесса $\xi(t)$ определяются соответственно формулами

$$D\xi(t) = X^0(t, \xi(t)), \quad D_*\xi(t) = X_*^0(t, \xi(t)). \quad (8.24)$$

Лемма 8.1 [12, 43]. Пусть $\xi(t)$ — решение уравнения (8.20). Тогда:

(i) $D\xi(t) = a(t, \xi(t))$, где производная в среднем справа $D\xi(t)$ вычислена относительно $\mathcal{H}$ — той же связности, которая задействована в (8.20);

(ii) $D_2\xi(t) = (AA^*)(t, \xi(t))$ и не зависит от выбора связности.

Отметим, что симметрическая производная (текущая скорость) также не зависит от выбора связности, как и квадратичная производная, и является вектором в касательном пространстве (при заменах координат преобразуется как вектор).

На M мы обычно будем использовать связность Леви-Чивита как в уравнениях типа (8.20), так и при вычислении производных в среднем. На некоторых других многообразиях (например, на расслоении ортонормированных базисов OM) связности будут вводиться особо.

Пусть $\pi : OM \rightarrow M$ — расслоение ортонормированных базисов над M . Отметим, что стандартный слой в OM является ортогональной группой $O(n)$, где $n = \dim M$, которая компактна. Если M компактно, пространство расслоения OM также компактно.

Пусть $\mathcal{H}$ — связность Леви-Чивита на OM , $\mathcal{V}$ — вертикальное распределение на OM . Напомним (см. § 8.5), что расслоения $\mathcal{V}$ и $\mathcal{H}$ над OM тривиальны (представимы в виде прямого произведения

базы $ОМ$ на слой): $\mathcal{V}$ тривиализуются так называемыми фундаментальными векторными полями, а $\mathcal{H}$ — так называемыми базисными векторными полями $E(x)$, где вектор $E_b(x) \in \mathcal{H}_b$ для $b \in ОМ$ и $x \in \mathbb{R}^n$ задается равенством $E_b(x) = T\pi^{-1}(bx)|_{\mathcal{H}_b}$ (базис b рассматривается как линейный оператор $b : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\pi b}M$; см., например, [5, 43]). Таким образом, касательное расслоение $ТОМ = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ также тривиально.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.34 [12, 43]. Риманова метрика на $ОМ$, порожденная указанной выше тривиализацией касательного расслоения $ТОМ$ называется *индуцированной*.

Обозначим через e экспоненциальное отображение связности Леви-Чивита некоторой индуцированной метрики на $ОМ$.

Лемма 8.2 [43]. (i) Для всех индуцированных метрик сужения $e|_{\mathcal{H}}$ на связность $\mathcal{H}$ совпадают.

(ii) Для любого $Y \in \mathcal{H}$ выполняется равенство $\pi e(Y) = \exp(T\pi Y)$, где $\exp$ — экспоненциальное отображение связности Леви-Чивита на M .

(iii) Для всех индуцированных метрик в любой (зафиксированной) карте на $ОМ$ сужения локальных коэффициентов связностей $\Gamma^e(X, X)$ на $\mathcal{H}$ совпадают как операторы на векторах $X \in \mathcal{H}$.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ заданы процессы $\alpha(t)$ и $A(t)$, подчиненные некоторой фильтрации, которой также подчинен винеровский процесс $w(t)$. От $A(t)$ потребуем, чтобы для $t \in [0, T]$ был корректно определен интеграл Ито $\int_0^t A(\tau) dw(\tau)$. Построим на расслоении базисов $ВМ$ или на главном расслоении, у которого структурной группой является подгруппа группы невырожденных матриц (например, на расслоении $ОМ$ ортонормированных базисов на римановом многообразии), базисное векторное поле Ито со случайными коэффициентами, которое в $b \in ВМ$ имеет вид $(E_b(b_0^{-1}\alpha(t)), E_b(b_0^{-1}A(t)))$. Рассмотрим на $ОМ$ следующее уравнение в форме Белопольской — Далецкого:

$$d\xi(t) = e_{\xi(t)} (E_b(b_0^{-1}\alpha(t)) dt + E_b(b_0^{-1}A(t) dw(t))). \quad (8.25)$$

Из гладкости E_b по b следует, что существует сильно единственное сильное решение $\xi_{0,b_0}(t)$ уравнения (8.25) с начальным условием $\xi_{0,b_0}(0) = b_0$, которое существует на некотором случайном отрезке времени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.35. Рассмотрим в $T_{\pi b_0} M$ процесс Ито

$$y(t) = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau + \int_0^t A(\tau) dw(\tau).$$

Процесс $\pi\xi_{0,b_0}(t)$ на M , где $\xi_{0,b_0}(t)$ — решение уравнения (8.25), построенного по $y(t)$, называется *разверткой Ито* процесса $y(t)$ в $T_{\pi b_0} M$ и обозначается $R_I y(t)$. Решение $\xi_{0,b_0}(t)$ уравнения (8.25) называется *горизонтальным подъемом процесса $R_I y(t)$ на OM* с начальным значением b_0 .

Отметим, что горизонтальный подъем процесса $R_I y(t)$ на OM с начальным значением b_0 является параллельным переносом вектора b_0 вдоль $R_I y(t)$.

Важным примером развертки Ито является развертка винеровского процесса, которая (обычно в случае расслоения OM) называется *винеровским процессом на многообразии*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.36. Если развертка Ито винеровского процесса относительно связности $\mathcal{H}$ существует при $t \in [0, +\infty)$, то связность $\mathcal{H}$ называется *стохастически полной*.

Для сравнения с понятием полной связности (см. определение 8.26) отметим, что полная связность не обязательно стохастически полна и стохастически полная связность не обязательно полна. Однако, если связность полна, то имеются достаточные условия ее стохастической полноты.

Если стохастически полна связность Леви-Чивита на римановом многообразии, то это многообразие называется *стохастически полным*.

ГЛАВА 9

ENGLISH SUMMARY

The notion of mean derivatives was introduced by E. Nelson in 60-th years of XX century for the needs of the so-called Stochastic mechanics (a version of Quantum mechanics) created by him (see [62–64]) After that it turned out that equations with mean derivatives naturally arose in many other branches of mathematical physics, economy etc.

In paper [32] (see also [43]) on the basis of a small modification of some Nelson’s idea, we introduced an additional mean derivative called quadratic one, that made in principle possible to recover a stochastic process from its mean derivatives (in Nelson’s works the quadratic mean derivative was always equal to unit operator maybe multiplied by a constant number and so there were no need to introduce it). In particular, the solvability of various equations with mean derivatives arisen in Mathematical Physics, was proved (see examples in [43]).

Our team has investigated the mean derivatives and equations and inclusions with them as well as their applications for more than ten years. The results, obtained before 2011, are published in monograph [43]. However, for the years passed since 2011, we have obtained a lot of new results, in particular, published in [2, 13, 17, 35, 45–48, 51–55], that we have decided to present in this monograph. I am indebted to Professor A. G. Kusraev for his kind invitation to publish this book as an intermediate finish in our research.

The results included into this book, use some special, not belonging to common knowledge, branches of many mathematical subjects. Some principal notions and facts from those parts of mathematics are located in Chapter 8. Here we should mention the elements of the Theory of set-valued mappings and differential inclusions, some fact of the Theory of Matrices and some notions from Probability Theory and Stochastic Analysis (in particular, from the Theory of Stochastic Differential Equations). The problems of manifolds and fiber bundles, in which the Theory of Connections is involved, play an important role in this book.

Introduction into this theory is also contained in Chapter 8. In addition, at the beginning of Chapter 5, in which we consider Newton–Nelson equations (first equations with mean derivatives arisen in literature) on manifolds, connected with gauge fields, we give a survey of notions necessary for understanding this material. Besides, in Chapter 8 there is some material on the theory of Ito stochastic differential equations on manifolds (the so called Ito equations in the form by Belopolskaya and Daletsky). We send the reader for a detailed description of this theory as well as the theory of connections and geometry of manifolds in the form, convenient for our aims, to [12, 43].

Chapter 1 is an introduction into the Theory of mean derivatives. We give the necessary definitions and describe the most important facts from this theory necessary for farther presentation.

Chapter 2 is devoted to differential equations and inclusions with mean derivatives, among which the most complicated and unusual are those with current velocities (symmetric mean derivatities). Note that the inclusions with mean derivatives naturally arise completely in the same way as ordinary differential inclusions arise in the theory of ordinary differential equations. Here we should point out two cases. First, in equations with mean derivatives with control and feedback, at every point (t, x) of extended phase space one should consider all possible values of the right-hand side for possible values of controlling parameter. Thus, the right-hand side becomes set-valued and the equation turns into the inclusion. In the next Chapter 3 we deal with the inclusions obtained in this way, and consider the optimal control problem.

The second case arise if the right-hand side of equation is “very bad” — neither continuous nor measurable — that often arise in description of motion in a very complicated medium. In this case the equation has no classical solution but there is a trick suggested probably by A. F. Filippov, that transforms the equation into inclusion with upper semi-continuous right hand side with convex images. Thus, the investigation of differential inclusions with mean derivatives is important for applications and it is a natural extension of the domain of applications for this theory.

In Chapter 3 we introduce the notion of a perfect solution of the inclusion with mean derivatives (by analogy with the notion of a perfect set) and show that among perfect solutions there is a solution that minimizes (or maximizes) a cost criterion of the type of the mathematical expectation of the values of a continuous function

on the stochastic process. A special section is devoted to the so-called inclusions of geometric Brownian motion type that describe the processes whose coordinates are positive. Such processes naturally arise in many applications, say, in economical models. Then we show how equations with mean derivatives with control and feedback are reduced to inclusions and prove an analog of well-known Filippov's lemma that for any solution of the inclusion there exists a control that realizes this solution as the one of the equation. In particular, this is true for optimal solutions obtained for inclusions as above.

Chapter 4 is devoted to Leontieff type equations with stochastic perturbations. This is a special type of differential-algebraic equations, in which in the left-hand side there is a degenerate matrix at the derivative while in the right-hand side there is a non-degenerate matrix at the unknown function. Besides, in the right-hand side there is a "constant" term depending only on time t . In papers by A. L. Shestakov and G. A. Sviridyuk by means of such equations a model of dynamically disturbing signals in radio devices was elaborated and investigated. In this model the "constant" term is interpreted as the incoming signal. In papers by L. A. Vlasenko, A. G. Rutkas, M. S. Filipkovskaya and others such systems arise in mathematical modeling of oscillations and electric nets.

In all problems mentioned above, one should take the noise into account (usually white noise). But the Leontieff type equations have a special feature that in the way of finding and investigating a solution one have to use the derivatives of "constant" term of high enough order. In the case with noise this includes the derivatives of white noise or of Wiener process that take values in distribution. The main idea of our approach is to replace the white noise by the current velocity of Wiener process (symmetric mean derivative that has the physical meaning of a natural analog of ordinary velocity of deterministic processes). An alternative approach, based on the use of current velocities as well, is elaborated by A. L. Shestakov and G. A. Sviridyuk [66].

In Chapter 5 we deal with the so-called Newton–Nelson equation, the first equation with mean derivative in the world literature, that was constructed by Nelson in the framework of his Stochastic Mechanics (a version of Quantum Mechanics). Up to the moment the Stochastic Mechanics (both ordinary and relativistic) is created and investigated rather deep. Note that for relativistic case the notion of mean derivatives was modified in order to get notion covariant with respect to the Lorentz group.

On the other hand, there was no interconnection between the Stochastic Mechanics and the Theory of Gauge Fields (recall that the mathematical meaning of the gauge field is a connection on a Principal Bundle). In this chapter we describe such interconnection: we investigate the Newton–Nelson equation on real bundles over Riemannian manifolds and on complex bundles over space-times of General Relativity (the most interesting case from physical point of view). In the latter case for the structure group $U(1)$ we establish interconnection with the Klein–Gordon equation.

In Chapter 6 we investigate problems of viscous hydrodynamics on the base of the so-called Arnolǵ–Ebin–Marsden approach, i. e. by investigation of equations on the infinite-dimensional manifolds of Sobolev diffeomorphisms. We consider fluids moving on a flat n -dimensional torus. For this case, earlier, say, in [12, 42, 43] we have shown that after replacing equations of the Second Newton law type on the diffeomorphisms group, investigated by Ebin and Marsden in [39], by a special second order equation with backward mean derivatives, under some additional effort we can obtain the description of viscous fluid. In [42] a special approach is elaborated that allows one to get to the equations of hydrodynamics from the above mentioned equation on the diffeomorphisms group by the use time-reversing in stochastic processes. Here we deal with a generalization of this approach onto a class of anisotropic viscous fluids, in Euler description of which the Laplacian is replaced by a more general second order differential operator depending on time (an example is the Laplacian with viscosity depending on time). Descriptions of analns of Burgers, Reynolds and Navier–Stokes equation are obtained.

Chapter 7 is devoted to functional-differential equation with mean derivatives on smooth manifolds whose delayed term in the right-hand side is described by means of Riemannian parallel translation. The investigation of such systems is motivated by the mechanical meaning of parallel translation found by Radon (see [58]). Radon showed that the Riemannian parallel translation along a curve on the manifold was a natural replacement of the global parallelism (say in systems, connected with gyroscopes) on the flat configuration spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азарина С. В., Гликлих Ю. Е. Включения с производными в среднем для процессов типа геометрического броуновского движения // Семинар по глобальному и стохастическому анализу.—2009.—№ 4.—Р. 3–8.
2. Азарина С. В., Гликлих Ю. Е. О разрешимости неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с текущими скоростями.—(в печати).
3. Асеев С. М. Существование дифференцируемой однозначной ветви у многозначного отображения // Некоторые вопросы прикладной математики и программного обеспечения ЭВМ.—1982.—С. 36–39.
4. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер.—М.: Наука, 1977.—351 с.
5. Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Дж. Геометрия многообразий.—М.: Мир, 1967.—336 с.
6. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкин А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений.—М.: КомКнига, 2005.—216 с.
7. Борисович Ю. Г., Гликлих Ю. Е. О числе Лефшеца для одного класса многозначных отображений // Седьмая летняя мат. шк.—1970.—С. 283–294.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.—М.: Наука, 1967.—573 с.
9. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 1.—М.: Наука, 1971.—664 с.
10. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 3.—М.: Наука, 1975.—496 с.
11. Гликлих Ю. Е. Неподвижные точки многозначных отображений с невыпуклыми образами и вращение многозначных векторных полей // Сб. тр. аспирантов мат. факультета.—Воронеж: Изд-во ВГУ, 1972.—С. 30–38.
12. Гликлих Ю. Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики.—М.: КомКнига, 2005.—416 с.
13. Гликлих Ю. Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование.—2012.—Вып. 13.—С. 24–34.
14. Гликлих Ю. Е., Макарова А. В. Теорема существования решений для стохастических дифференциальных включений с текущими скоростями // Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Математика. Физика.—2012.—Вып. 28, № 17 (136).—С. 5–15.
15. Далецкий Ю. Л., Белополюская Я. И. Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия.—Киев: Выща Школа, 1989.—296 с.
16. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления.—М.: Наука, 1970.—554 с.
17. Желтикова О. О. Аналог леммы Филиппова для стохастических дифференциальных включений с производными в среднем // Вестн. факультета прикладной математики, информатики и механики.—Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2013.—Вып. 9, ч. 1.—С. 121–128.

18. Иосида К. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1967.—624 с.
19. Келли Дж. Л. Общая топология.—М.: Наука, 1968.—432 с.
20. Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа.—М.: Наука, 1977.—400 с.
21. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов.—М.: Наука, 1974.—696 с.
22. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов.—М.: Наука, 1986.—512 с.
23. Макарова А. В. О разрешимости дифференциальных включений с текущими скоростями // Spectral and Evolution Problems.—2012.—Vol. 22.—P. 125–128.
24. Мышкис А. Д. Обобщение теоремы о стационарной точке динамической системы внутри замкнутой траектории // Мат. сб.—1954.—Т. 34, №3.—С. 525–540.
25. Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры.—М.: Мир, 1988.—343 с.
26. Фарбер М. Ш. О гладких сечениях пересечения многозначных отображений // Изв. акад. наук Азербайджанской ССР.—1979.—№ 6.—С. 23–28.
27. Фрейдлин М. И. О факторизации неотрицательно определенных матриц // Теория вероятностей и ее применения.—1968.—Т. 13, № 2.—С. 375–378.
28. Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем.—Новосибирск: Наука, 2003.—317 с.
29. Шестаков А. Л., Свиридюк Г. А. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование.—2010.—№ 16 (192), вып. 5.—С. 116–120.
30. Ширяев А. Н. Вероятность.—М.: Наука, 1989.—640 с.
31. Arnol'd V. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits // Ann. Inst. Fourier.—1966.—Vol 16, № 1.—P. 319–361.
32. Azarina S. V., Gliklikh Yu. E. Differential inclusions with mean derivatives // Dynamic Systems and Appl.—2007.—Vol. 16, № 1.—P. 49–72.
33. Azarina S. V., Gliklikh Yu. E. On differential equations and inclusions with mean derivatives on a compact manifold // Discussiones Mathematicae. DICO.—2007.—Vol. 27, № 2.—P. 385–397.
34. Azarina S. V., Gliklikh Yu. E., Obukhovskii A. V. Solvability of Langevin differential inclusions with set-valued diffusion terms on Riemannian manifolds // Applicable Analysis.—2007.—Vol. 86, № 9.—P. 1105–1116.
35. Azarina S. V., Gliklikh Yu. E. On existence of solutions to stochastic differential equations with current velocities // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование.—2015.—Т. 8, № 4.—С. 100–106.
36. Cresson J., Darses S. Stochastic embedding of dynamical systems // J. of Math. Physics.—2007.—Vol. 48.—P. 072703-1–072703-54.
37. DeWitt-Morette C., Elworthy K. D. A stepping stone to stochastic analysis // New Stochastic Methods in Physics. Physics Reports.—1981.—Vol. 77, № 3.—P. 121–382.
38. Dohrn D., Guerra F., Ruggiero P. Spinning particles and relativistic particles in framework of Nelson's stochastic mechanics // Lecture Notes in Physics.—1979.—Vol. 106.—P. 165–181.
39. Ebin D. G., Marsden J. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid // Annals of Math.—1970.—Vol. 92, № 1.—P. 102–163.

40. Elworthy K. D. Stochastic differential equations on manifolds.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982.—326 p.
41. Elworthy K. D., Le Jan Y., Li X.-M. The Geometry of Filtering.—Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2010.—180 p.
42. Gliklikh Yu. E. Solutions of Burgers, Reynolds and Navier–Stokes equations via stochastic perturbations of inviscid flows // J. of Nonlinear Math. Physics.—2010.—Vol. 17, Suppl. 1.—P. 15–29.
43. Gliklikh Yu. E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics.—London: Springer–Verlag, 2011.—460 p.
44. Gliklikh Yu. E., Makarova A. V. On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities // Applicable Analysis.—2012.—Vol. 91, Issue 9.—P. 1731–1739.
45. Gliklikh Yu. E., Mashkov E. Yu. Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование.—2013.—Т. 6, № 2.—С. 25–39.
46. Gliklikh Yu. E., Mashkov E. Yu. Stochastic Leontieff type equations with non-constant coefficients // Applicable Analysis.—2015.—Vol. 94, № 8.—P. 1614–1623.
47. Gliklikh Yu. E., Mohammed S.-E. A. Stochastic delay equations and inclusions with mean derivatives on Riemannian manifolds // Global and Stochastic Analysis.—2011.—Vol. 1, № 1.—P. 47–54.
48. Gliklikh Yu. E., Mohammed S.-E. A. Stochastic delay equations and inclusions with mean derivatives on Riemannian manifolds II // Global and Stochastic Analysis.—2012.—Vol. 2, № 1.—P. 17–27.
49. Gliklikh Yu. E., Obukhovskii A. V. Stochastic differential inclusions of Langevin type on Riemannian manifolds // Discussiones Mathematicae. DICO.—2001.—Vol. 21.—P. 173–190.
50. Gliklikh Yu. E., Ratiner P. S. On a certain type of second order differential equations on total spaces of fiber bundles with connections // Nonlinear Analysis in Geometry and Topolny.—Palm Harbor, Fl.: Hadronic Press, 2000.—P. 99–106.
51. Gliklikh Yu. E., Vinokurova N. V. On the motion of a quantum particle in the classical gauge field in the language of stochastic mechanics // Communications in Statistics — Theory and Methods.—2011.—Vol. 40, № 19–20.—P. 3630–3640.
52. Gliklikh Yu. E., Vinokurova N. V. On the Newton–Nelson type equations on vector bundles with connections // Rendiconti del Seminario Matematico.—2013.—Vol. 71, № 2.—P. 219–226.
53. Gliklikh Yu. E., Zalygaeva M. E. Non-Newtonian fluids and stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms // Applicable Analysis.—2015.—Vol. 94, № 6.—P. 1116–1127.
54. Gliklikh Yu. E., Zheltikova O. O. On existence of optimal solutions for stochastic differential inclusions with mean derivatives // Applicable Analysis.—2014.—Vol. 93, № 1.—P. 35–46.
55. Gliklikh Yu. E., Zheltikova O. O. Stochastic equations and inclusions with mean derivatives and some applications. Optimal solutions for inclusions of geometric Brownian motion type // Methodolny and Computing in Applied Probability.—2015.—Vol. 17, № 1.—P. 91–105.
56. Guerra F., Ruggiero P. A note on relativistic Markov processes // Lettere al Nuovo Cimento.—1978.—Vol. 23, № 16.—P. 529–534.
57. Jeulin T., Yor M. Filtration des ponts Browniens et equations différentielles stochastiques lineaires // Seminaire de Probabilités XXIV. Lecture Notes in Math.—1990.—Vol. 1426.—P. 227–265.

-
58. *Klein F.* Vorlesungen Über Höhere Geometrie (dritte Auflage bearbeitet und herausgegeben von W. Blaschke).—Berlin: Julius Springer, 1926.—412 p.
 59. *Kryszewski W.* Homotopy Properties of Set-valued Mappings.—Torun: Torun Univ., 1997.—243 p.
 60. *Leandre R., Mohammed S.-E. A.* Stochastic functional differential equations on manifolds // Probab. Theory Related Fields.—2001.—Vol. 121, № 1.—P. 117–135.
 61. *Makarova A. V.* On solvability of stochastic differential inclusions with current velocities. II // Global and Stochastic Analysis.—2012.—Vol. 2, № 1.—P. 101–112.
 62. *Nelson E.* Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics // Phys. Reviews.—1966.—Vol. 150, № 4.—P. 1079–1085.
 63. *Nelson E.* Dynamical Theory of Brownian Motion.—Princeton: Princeton Univ. Press.—1967.—114 p.
 64. *Nelson E.* Quantum Fluctuations.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1985.—146 p.
 65. *Shestakov A. L., Sviridyuk G. A.* Optimal measurement of dynamically distorted signals // Vestnik of South Ural State Univ.—2011.—Issue 17 (234).—P. 70–75.
 66. *Shestakov A. L., Sviridyuk G. A.* On the measurement of the “white noise” // Vestnik of South Ural State Univ.—2012.—Issue 27 (286).—P. 99–108.
 67. *Zastawniak T.* A relativistic version of Nelson’s stochastic mechanics // Europhys. Lett.—1990.—Vol. 13.—P. 13–17.
 68. *Zastawniak T.* Markov diffusion in relativistic stochastic mechanics // Proceedings of Swansea Conference on Stochastic Mechanics.—Singapore: World Scientific, 1992.—P. 280–297.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, 7

$S(n)$, 7

$S_+(n)$, 8

$\bar{S}_+(n)$, 8

ε -аппроксимация, 152

σ -алгебра

— борелевская, 159

— будущее, 157

— настоящее, 157

— прошлое, 157

База расслоения, 169

Белый шум, 164

Броуновское движение, 161

Геодезическая, 174

Горизонтальное пространство,
173

Горизонтальный

— вектор, 173

— подъем, 174

Дифференциальное включение,
154

Диффузионный процесс, 166

Единственность

— сильная, 168

— слабая, 168

S_{LC} , 46

I_d , 154

e , 179

$\Gamma^e(\cdot, \cdot)$, 179

Интеграл Ито, 162

Координатный процесс, 157, 161

Коэффициент диффузии, 167

Мартингал, 159

— локальный, 159

— обратный, 159

Мера

— вероятностная, 160

— Винера, 161

Многозначное отображение, 151

— полунепрерывное сверху, 151

— полунепрерывное снизу, 151

— непрерывное по Хаусдорфу, 151

Неупреждаемость, 163

Норма множества, 8

Полное риманово многообразие,
176

Процесс

— винеровский, 160

— винеровский стандартный, 161

— диффузионного типа, 166, 167

— Ито, 164

- Проекция расслоения, 170
 Производная в среднем
 — антисимметрическая, 14
 — квадратичная, 13, 14
 — симметрическая, 14
 — слева, 9, 178
 — справа, 9, 178
 — на многообразиях, 178
 Пространство расслоения, 169
 Развертка Ито 180
 Расслоение, 169
 — ассоциированное, 171
 — векторное, 171
 — главное, 171
 — тривиальное, 170
 Регрессия, 158
 Решение
 — сильное, 168
 — слабое, 168
 Связность
 — Леви-Чивита, 176
 — на расслоении, 173
 — полная, 175
 — риманова, 176
 — стохастически полная, 180
 Селектор многозначного отображения, 152
 Семимартингал, 159
 Скорость
 — осмотическая, 15
 — текущая, 15
 Слабая
 — компактность мер, 160
 — сходимост мер, 160
 Снос, 167
 Соглашение Эйнштейна о суммировании, 8
 Стандартный слой расслоения, 169
 Структурная группа расслоения, 170
 Теорема Прохорова, 160
 Уравнение
 — диффузионного типа, 167
 — Ито в форме Белопольской — Далецкого, 177
 — первого порядка с текущими скоростями, 42
 — стохастическое дифференциальное в форме Ито, 166
 Условие
 — Ито, 160
 — ранг-степень, 155
 Условное математическое ожидание, 158
 Формула Ито, 172
 — обратная, 166
 — прямая, 165
 Экспоненциальное отображение, 175

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Производные в среднем	9
1.1. Общие определения и результаты	9
1.2. Формулы для текущей и осмотической скоростей	16
1.3. Вычисление производных в среднем для винеровского процесса	24
1.4. Вычисление производных в среднем для процессов диффузионного типа	27
Глава 2. Уравнения и включения с производными в среднем	35
2.1. Дифференциальные уравнения с производными в среднем справа	35
2.2. Дифференциальные включения с производными в среднем справа	38
2.3. Дифференциальные включения с производными в среднем слева	40
2.4. Уравнения с текущими скоростями	42
2.5. Включения с текущими скоростями	45
Глава 3. Оптимальное управление	57
3.1. Оптимальные решения для включений с производными в среднем	57
3.2. Случай включений типа геометрического броуновского движения	67
3.3. Аналог леммы Филиппова	72

Глава 4. Уравнения леонтьевского типа со случайными возмущениями	77
4.1. Постановка задачи	77
4.2. Стохастические уравнения леонтьевского типа и их канонический вид	78
4.3. Решения стохастических уравнений леонтьевского типа	81
4.4. Случай с непостоянными коэффициентами	87
4.5. Уравнения леонтьевского типа в терминах текущих скоростей решения	93
Глава 5. Стохастическая механика и калибровочные поля	97
5.1. Дополнительные факты из геометрии многообразий	98
5.2. Случай вещественных расслоений над римановыми многообразиями	103
5.3. Случай комплексных расслоений над лоренцевыми многообразиями	110
Глава 6. Группы диффеоморфизмов и вязкая гидродинамика	121
6.1. Основная идея использования производных в среднем в вязкой гидродинамике	121
6.2. Группы диффеоморфизмов	123
6.3. Вязкая гидродинамика	128
Глава 7. Уравнения и включения с производными в среднем с запаздыванием на римановых многообразиях	139
7.1. Простейший случай на стохастически полном многообразии	140
7.2. Постановка общей задачи	143

7.3. Существование решений в общем случае на компактном многообразии	144
7.4. Обобщение на включения и непрерывные уравнения	148
Глава 8. Дополнения	151
8.1. Многозначные отображения	151
8.2. Некоторые факты из теории матриц	154
8.3. Теория вероятностей и случайные процессы	156
8.4. Расслоения	169
8.5. Некоторые понятия из теории связностей	172
8.6. Уравнения Ито на многообразиях	176
Глава 9. English Summary	181
Литература	185
Предметный указатель	189

Научное издание

Серия

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

Выпуск 10

Гликлик Юрий Евгеньевич

**ПРОИЗВОДНЫЕ В СРЕДНЕМ
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ**

Ответственный редактор: *С. Б. Климентов*

Рецензенты: *Б. Д. Гельман, И. В. Павлов*

Редакторы серии: *Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев*

*Утверждено к печати Ученым советом
Южного математического института
Владикавказского научного центра
Российской академии наук*

Компьютерная верстка *И. С. Гаприндашвили*

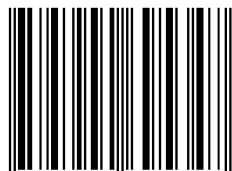
Зав. редакцией *В. В. Кибизова*

Подписано в печать 20.12.2015.
Формат бумаги $60 \times 84^{1/16}$. Усл. п. л. 11,33.
Тираж 150 экз.

Южный математический институт ВНЦ РАН
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

ISBN 978-5-904695-34-7



9 785904 695347