

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

И Т О Г И Н А У К И • Ю Г Р О С С И И

С Е Р И Я
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

В ы п у с к 11

В. Б. Коротков
ЛИНЕЙНЫЕ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ 1-ГО, 2-ГО И 3-ГО РОДОВ

Москва
2017

ББК 22.16
УДК 517.983+517.968.25
К68

Ответственный редактор:

д. ф.-м. н., профессор В. Д. СТЕПАНОВ

Рецензенты:

д. ф.-м. н., профессор М. Л. ГОЛЬДМАН,

к. ф.-м. н., доцент И. М. НОВИЦКИЙ

Редакторы серии:

д. ф.-м. н., профессор Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК,

д. ф.-м. н., профессор А. Г. КУСРАЕВ

Исследование проведено при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00402-а.

Издается в соответствии с распоряжением президиума Российской академии наук от 24 октября 2017 г. № 10106-765 по представлению Отделения математических наук РАН и распространяется бесплатно.

Коротков В. Б.

Линейные функциональные и интегральные уравнения 1-го, 2-го и 3-го родов / Отв. ред. В. Д. Степанов; ЮМИ ВНИЦ РАН. — Москва: РАН, 2017. — 106 с. — (Итоги науки. Юг России. Математическая монография. Вып. 11).

Книга состоит из двух частей. В первой части исследуются свойства операторов, порождаемых интегральными и функциональными уравнениями 1-го, 2-го и 3-го родов. Во второй части разрабатываются редукционные методы решения общих интегральных и функциональных уравнений 1-го, 2-го и 3-го родов.

Книга рассчитана на математиков и физиков, интересующихся теорией интегральных операторов и теорией интегральных уравнений.

Korotkov V. B.

Linear Functional and Integral Equations of the 1-st, 2-nd, and 3-rd Kinds / Ed. V. D. Stepanov; SMI VSC RAS. — Moscow: RAS, 2017. — 106 p.

Book consists of two parts. In part 1 we investigate the properties of operators, generated by integral and functional equations of the 1-st, 2-nd, and 3-rd kinds. In part 2 we develop reduction methods for solving general integral and functional equations of the 1-st, 2-nd, and 3-rd kinds.

Book is intended for mathematicians, which are interested in theory of integral operators and theory of integral equations.

ISBN 978-5-906906-51-9

© Южный математический институт —
филиал ВНИЦ РАН, 2017

© В. Б. Коротков, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
-------------------	---

Часть I. Операторы

Глава 1. Интегральные и родственные им операторы в L_p	7
--	---

§ 1.1. Компактные по мере, почти компактные и интегральные операторы в L_p	7
--	---

§ 1.2. Компактные по мере, почти компактные и интегральные операторы 1-го, 2-го и 3-го родов в L_p ...	17
--	----

§ 1.3. О подобии линейных операторов в L_p интегральным операторам 1-го или 2-го рода	26
---	----

Глава 2. Интегральные операторы в L_p	33
---	----

§ 2.1. Алгебраические, спектральные и характеристические свойства интегральных операторов в L_p	33
---	----

§ 2.2. Необходимые и достаточные условия унитарной эквивалентности линейных операторов интегральным операторам	42
--	----

Часть II. Уравнения

Глава 3. Функциональные уравнения и системы 1-го рода в L_2	53
---	----

§ 3.1. Теорема Пикара. Почти компактные операторы. Метод компактной факторизации	53
--	----

§ 3.2. C_1 -ядра. Сведение функциональных уравнений 1-го рода к эквивалентным интегральным уравнениям 1-го рода с C_1 -ядрами	56
---	----

§ 3.3. Системы функциональных уравнений 1-го рода	59
---	----

Глава 4. Функциональные уравнения и системы	
2-го рода в L_2	63
§ 4.1. Сведение уравнений 2-го рода к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами. Уравнения в гильбертовом пространстве	63
§ 4.2. Сведение систем 2-го рода к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами. Разрешающие ядра	65
Глава 5. Функциональные уравнения и системы	
3-го рода в L_2	73
§ 5.1. Сведение функциональных уравнений 3-го рода к эквивалентным интегральным уравнениям 1-го или 2-го рода	73
§ 5.2. Сведение систем функциональных уравнений 3-го рода к эквивалентным интегральным уравнениям 1-го или 2-го рода	78
§ 5.3. Функциональные уравнения 1-го, 2-го и 3-го родов с неограниченными операторами	86
Глава 6. Функциональные уравнения	
1-го и 2-го родов в L_2	93
§ 6.1. Уравнения 1-го рода в L_p с почти компактными операторами	93
§ 6.2. Сведение уравнений 2-го рода в L_p с почти компактными операторами к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами	93
§ 6.3. Приближенные методы решения интегральных уравнений 2-го рода в L_p с квазивырожденными карлемановскими ядрами	97
Литература	101
Предметный указатель	104
Именной указатель	105

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге предлагаются методы решения функциональных уравнений

$$Tx(s) = f(s), \quad (\text{I})$$

$$x(s) - \lambda Tx(s) = f(s), \quad (\text{II})$$

$$a(s)x(s) - \lambda Tx(s) = f(s), \quad (\text{III})$$

где правая часть f — известная функция из пространства $L_2(\mu)$ μ -измеримых функций с суммируемым квадратом, решение x ищется в $L_2(\mu)$, коэффициент $a(s)$ — известная μ -измеримая ограниченная функция, T — линейный непрерывный оператор в $L_2(\mu)$, λ — числовой параметр. Если T — интегральный оператор, то функциональные уравнения (I), (II), (III) становятся интегральными уравнениями 1-го, 2-го и 3-го родов. По аналогии с интегральными уравнениями уравнение (I) называется уравнением 1-го рода, уравнение (II) — уравнением 2-го рода, уравнение (III) — уравнением 3-го рода.

Относительно оператора T в (I), (II), (III), кроме его линейности и непрерывности, мы предполагаем, что нуль является точкой Вейля сопряженного к T оператора T^* , т. е. существует ортонормированная последовательность, которую T^* отображает в сходящуюся к 0 последовательность. Пусть B_0 — класс всех таких операторов. К классу B_0 при широких предположениях относительно меры μ принадлежат все действующие в $L_2(\mu)$ интегральные операторы, компактные, почти компактные, компактные по мере операторы и многие другие операторы.

Предложенные в книге методы решения уравнений (I), (II), (III) с операторами из класса B_0 заключаются в редукции этих уравнений с помощью явных обратимых линейных непрерывных преобразований к эквивалентным линейным интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода с компактными или ядерными операторами либо к эквивалентным линейным интегральным уравнениям 2-го рода с ядрами простого вида, которые мы называем квазивыврожденными карлемановскими ядрами. К получающимся после этой редукции интегральным уравнениям применимы точные и приближенные методы решения, в частности приближенные методы, разработанные в § 6.3.

Книга состоит из двух частей: часть I — Операторы — и часть II — Уравнения. В части I (главы 1, 2) исследуются свойства операторов, порождаемых уравнениями (I), (II), (III). Полученные здесь результаты применяются в части II при построении методов решения уравнений (I), (II), (III).

В главе 1 изучаются метрические и алгебраические свойства компактных по мере, почти компактных и интегральных операторов 1-го, 2-го и 3-го родов в L_p .

В главе 2 устанавливаются алгебраические, спектральные и характеристические свойства компактных по мере, почти компактных и интегральных операторов 1-го, 2-го и 3-го родов в L_2 . Доказываются теоремы о необходимых и достаточных условиях приводимости унитарным преобразованием линейных операторов и семейств линейных операторов в L_2 к интегральному виду. На этих теоремах основаны представленные в части II (главы 3–6) методы линейной редукции уравнений (I), (II), (III) и систем уравнений (I), (II), (III) к известным интегральным уравнениям 1-го или 2-го рода.

В главе 3 рассматриваются уравнения (I) с операторами из введенного выше класса B_0 , системы аналогичных уравнений, общие интегральные уравнения и системы 1-го рода в L_2 . Даются методы сведения этих уравнений и систем к эквивалентным уравнениям Фредгольма 1-го рода с компактными или ядерными операторами.

Глава 4 посвящена линейным функциональным и интегральным уравнениям 2-го рода в L_2 , а также системам таких уравнений. При условии, что операторы в них принадлежат классу B_0 , указанные уравнения и системы редуцируются к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами. Для решения этих уравнений в § 6.3 разработаны приближенные методы.

В главе 5 изучаются линейные функциональные и интегральные уравнения 3-го рода в L_2 и системы таких уравнений. При широких предположениях относительно коэффициентов и операторов эти уравнения и системы приводятся либо к эквивалентным уравнениям Фредгольма 1-го рода в L_2 с ядерными операторами, либо к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода в L_2 с квазивырожденными карлемановскими ядрами. К последним уравнениям применимы приближенные методы из § 6.3. Третий параграф главы 5 посвящен функциональным и интегральным уравнениям 1-го, 2-го и 3-го родов в L_2 с неограниченными операторами.

В главе 6 рассматриваются линейные функциональные уравнения 1-го и 2-го родов в L_p с почти компактными операторами. Совокупность этих уравнений охватывает все интегральные уравнения 1-го и 2-го родов с произвольными интегральными операторами в L_p . Уравнения 1-го рода сводятся к эквивалентным уравнениям Фредгольма 1-го рода с компактными операторами, а уравнения 2-го рода — к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами, для которых в заключительном третьем параграфе предложены приближенные методы решения.

Книга написана на основе результатов работ автора [12–31].

Все операторы, уравнения и системы в книге рассматриваются в комплексных пространствах L_p и L_2 (в вещественном случае построения полностью аналогичны).

Автор глубоко благодарен доценту И. М. Новицкому и профессору В. Д. Степанову за сделанные ими ценные замечания, а также сотрудникам Вычислительного центра ДВО РАН М. Г. Насыровой, Д. В. Прохорову, И. В. Седовой и Е. П. Ушаковой за подготовку рукописи к печати.

Часть I. Операторы

Глава 1. Интегральные и родственные им операторы в L_p

§ 1.1. Компактные по мере, почти компактные и интегральные операторы в L_p

Приведем определения основных понятий, которые используются в главе 1.

Пусть X — непустое множество. Множество Σ подмножеств X , содержащее пустое множество $\emptyset$, дополнение относительно X каждого множества из Σ и объединение любого счетного множества множеств из Σ , называется σ -алгеброй подмножеств множества X . Отображение $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ называется *положительной мерой*, если $\mu(\emptyset) = 0$ и для любой последовательности $\{e_n\}$ попарно не пересекающихся множеств из Σ имеет место равенство

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu e_n.$$

Множества из Σ называются измеримыми.

Пространством с мерой называется множество X с σ -алгеброй Σ его подмножеств и мерой $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$. Пространство с мерой будем обозначать (X, Σ, μ) или короче (X, μ) .

Мера $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ называется *конечной*, если $\mu X < \infty$, и σ -*конечной*, если существует последовательность множеств $X_n \in \Sigma$ такая, что

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \quad \text{и} \quad \mu X_n < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

Мера μ называется *полной*, если из $e \in \Sigma$, $e_1 \subset e$ и $\mu e = 0$ следует, что $e_1 \in \Sigma$. Всюду далее будем рассматривать пространства с полными конечными или σ -конечными мерами.

Атомом меры μ называется множество $e \in \Sigma$ такое, что $\mu e > 0$ и, если $e_1 \in \Sigma$ и $e_1 \subset e$, то либо $\mu e_1 = 0$, либо $\mu e_1 = \mu e$. Если мера μ не

имеет атомов, то она называется *неатомической*. Примером неатомической меры может служить мера Лебега измеримых по Лебегу множеств евклидова пространства. Будем говорить, что мера μ не является *чисто атомической*, если существует множество $e \in \Sigma$ такое, что $0 < \mu e < \infty$ и e не содержит атомов меры μ .

На каждом множестве e , не содержащем атомов меры μ , эта мера непрерывна, т. е. для любого измеримого множества $e_1 \subseteq e$ существует измеримое подмножество $e_2 \subseteq e_1$ такое, что $\mu e_2 = \frac{1}{2} \mu e_1$. Это обстоятельство позволяет построить для каждого измеримого множества, не содержащего атомов меры, обобщенные функции Радемахера [44], которые будут существенно использованы далее.

Пусть измеримое множество e ($0 < \mu e < \infty$) не содержит атомов. Разобьем множество e на два непересекающихся множества $e_i^{(1)}$ ($i = 1, 2$), каждое из которых имеет меру $\frac{1}{2} \mu e$, и положим

$$r_{1,e}(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu e}}, & \text{если } s \in e_1^{(1)}, \\ -\frac{1}{\sqrt{\mu e}}, & \text{если } s \in e_2^{(1)}, \\ 0, & \text{если } s \in X \setminus e. \end{cases}$$

Разобьем каждое из множеств $e_i^{(1)}$ ($i = 1, 2$) на два непересекающихся множества $e_{k,i}^{(2)}$ ($k = 1, 2$), каждое из которых имеет меру $\frac{1}{4} \mu e$, положим

$$r_{2,e}(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu e}}, & \text{если } s \in e_{1,i}^{(2)}, i = 1, 2, \\ -\frac{1}{\sqrt{\mu e}}, & \text{если } s \in e_{2,i}^{(2)}, i = 1, 2, \\ 0, & \text{если } s \in X \setminus e. \end{cases}$$

Продолжая этот процесс, получим равномерно ограниченную ортонормированную в $L_2(X, \mu)$ последовательность обобщенных функций Радемахера $\{r_{n,e}\}$ с носителями в e . Отметим, что $|r_{n,e}(s)| = \frac{1}{\sqrt{\mu e}} \chi_e(s)$ для всех $n = 1, 2, \dots$ и всех $s \in X$ (здесь χ_e — характеристическая функция множества e : $\chi_e(s) = 1$, если $s \in e$, и $\chi_e(s) = 0$, если $s \in X \setminus e$).

Пусть (X, Σ, μ) или короче (X, μ) — пространство с мерой. Через $L_0(X, \mu)$ обозначим совокупность всех μ -измеримых μ -почти всюду конечных функций на X (с обычным отождествлением функций, отличающихся одна от другой лишь на множестве меры 0).

Через $L_p(X, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$) обозначим пространство всех элементов $f \in L_0(X, \mu)$ с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Интеграл здесь и всюду далее понимается в смысле Лебега.

Назовем меру μ *сепарабельной*, если все пространства $L_p(X, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, сепарабельны.

Через $L_\infty(X, \mu)$ обозначим пространство всех элементов $g \in L_0(X, \mu)$ с конечной нормой

$$\|g\|_\infty = \inf_N \sup_{t \in X \setminus N} |g(t)|,$$

где N пробегает совокупность всех множеств меры 0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.1. *Множество* в $L_0(X, \mu)$ называется *компактным по мере*, если из любой последовательности его элементов можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся по мере на каждом множестве конечной меры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.2 [33]. *Линейный оператор* $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_0(X, \mu)$ называется *компактным по мере*, если он каждое ограниченное множество из $L_p(Y, \nu)$ отображает в множество, компактное по мере.

Напомним, что линейный оператор $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_{p_1}(X, \mu)$ ($1 \leq p, p_1 \leq \infty$) называется компактным, если T отображает каждое ограниченное множество из $L_p(Y, \nu)$ в относительно компактное множество в $L_{p_1}(X, \mu)$. При $1 < p < \infty$ линейный оператор $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_{p_1}(X, \mu)$ компактен тогда и только тогда, когда он отображает каждую слабо сходящуюся последовательность из $L_p(Y, \nu)$ в сходящуюся по норме $L_{p_1}(X, \mu)$ последовательность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.3. *Линейный оператор* $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_0(X, \mu)$ называется *почти компактным*, если найдется разбиение множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества X_n , $n = 1, 2, \dots$, такое, что все операторы $P_n T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_p(X, \mu)$ компактны; здесь $P_n f = \chi_{X_n} f$, $f \in L_p(X, \mu)$, χ_E — характеристическая функция множества E .

Теорема 1.1.1. Пусть $1 < p < \infty$, $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_0(X, \mu)$ — почти компактный оператор, последовательность $\{f_m\} \subset L_p(Y, \nu)$ слабо сходится к $f \in L_p(Y, \nu)$. Тогда $\{Tf_m\}$ сходится к Tf по мере на каждом множестве конечной меры.

< Пусть b_n — норма компактного оператора $P_n T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_p(X, \mu)$. Оператор

$$\tilde{T} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(b_n + 1)} P_n T$$

действует из $L_p(Y, \nu)$ в $L_p(X, \mu)$ и компактен. Следовательно, $\tilde{T}f_m$ сходится к $\tilde{T}f$ по норме $L_p(X, \mu)$, и поэтому $\tilde{T}f_m$ сходится к $\tilde{T}f$ по мере на

любом множестве конечной меры. Рассмотрим функцию

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(b_n + 1)\chi_{X_n}.$$

Тогда последовательность $Tf_m = b\tilde{T}f_m$ сходится к $b\tilde{T}f = Tf$ по мере на каждом множестве конечной меры. $\triangleright$

Следствие 1.1.1. При $1 < p < \infty$ каждый почти компактный линейный оператор $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_0(X, \mu)$ компактен по мере.

$\triangleleft$ Справедливость следствия непосредственно вытекает из теоремы 1.1.1 и слабой компактности любого ограниченного множества в $L_p(Y, \nu)$ при $1 < p < \infty$. $\triangleright$

Теорема 1.1.2. Пусть $1 < p < \infty$. Для того чтобы линейный оператор $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_1(X, \mu)$ был компактным, необходимо и достаточно, чтобы T был ограниченным и компактным по мере.

$\triangleleft$ Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть $\{g_n\} \subset L_p(Y, \nu)$ слабо сходится к $g \in L_p(Y, \nu)$. Тогда Tg_n слабо сходится в $L_1(X, \mu)$ к Tg . Выберем из компактного по мере множества $\{Tg_n\}$ подпоследовательность Tg_{n_k} , сходящуюся по мере на каждом множестве конечной меры к некоторой функции $f \in L_0(X, \mu)$. Пусть G — произвольное множество конечной меры, для которого $\chi_G f \in L_1(X, \mu)$. Так как $\chi_G Tg_{n_k} \rightarrow \chi_G Tg$ слабо в $L_1(G, \mu)$, то в силу следствий IV.8.10, IV.8.11 из [7]

$$\lim_{\mu E \rightarrow 0} \sup_k \int_E |\chi_G Tg_{n_k}| d\mu = 0.$$

Отсюда и из сходимости $\chi_G Tg_{n_k}$ к $\chi_G f \in L_1(X, \mu)$ по мере на G получим

$$\|\chi_G Tg_{n_k} - \chi_G f\|_1 \rightarrow 0,$$

здесь $\|\cdot\|_1$ — норма в $L_1(X, \mu)$. Так как $\chi_G Tg_{n_k} \rightarrow \chi_G Tg$ слабо в $L_1(X, \mu)$, то $\chi_G Tg = \chi_G f$. Следовательно, $f = Tg$. Таким образом, $Tg_{n_k} \rightarrow Tg$ слабо в $L_1(X, \mu)$ и $Tg_{n_k} \rightarrow Tg$ по мере на любом множестве конечной меры. Тогда по теореме IV.8.12 из [7] $\|Tg_{n_k} - Tg\|_1 \rightarrow 0$. $\triangleright$

Следствие 1.1.2. Пусть $1 < p < \infty$, $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_1(X, \mu)$ — почти компактный оператор. Тогда T — компактный оператор.

$\triangleleft$ Пусть $h_m \rightarrow h$ по норме $L_p(Y, \nu)$ и $Th_m \rightarrow g$ по норме $L_1(X, \mu)$. Так как по теореме 1.1.1 Th_m сходится к Th по мере на каждом множестве конечной меры, то $g = Th$ и по теореме о замкнутом графике оператор $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_1(X, \mu)$ ограничен. Отсюда в силу теоремы 1.1.2 и следствия 1.1.1 теоремы 1.1.1 оператор T компактен. $\triangleright$

Итак, при $1 < p < \infty$ каждый почти компактный оператор $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_0(X, \mu)$ компактен по мере. Обратное утверждение верно не всегда, как показывает следующий пример 1.1.1. В этом примере через $\|\cdot\|_p$ обозначена норма в $L_p(0, 1)$.

ПРИМЕР 1.1.1. Пусть $2 < p < \infty$, $X = (0, 1)$, μ — мера Лебега, $\{r_n\}$ — ортонормированная система Радемахера, $\{\chi_n\}$ — ортонормированная система Хаара. Определим оператор $T_0 : L_p \rightarrow L_2$ равенством

$$T_0 f = \sum_{n=1}^{\infty} \|\chi_n\|_p^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 f r_n dt \right) \chi_n.$$

Тогда T_0 — компактный по мере оператор, но для любого множества $e \subset (0, 1)$ положительной меры найдется последовательность $n_j \rightarrow \infty$ такая, что $\lim_{n_j \rightarrow \infty} \|P_e T_0 r_{n_j}\|_p = \infty$, поэтому $P_e T_0$ не компактен как оператор из L_p в L_p .

△ Так как $\|\chi_n\|_p^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то T_0 компактен как оператор, действующий из L_2 в L_2 , и, следовательно, компактен по мере как оператор из L_p в L_0 .

Покажем справедливость второго утверждения. Пусть $e \subset (0, 1)$ — произвольное замкнутое множество положительной меры. Рассмотрим его дополнение $Se = (0, 1) \setminus e$. Множество Se открыто и поэтому является объединением конечного или счетного семейства $\{\sigma_j\}$ попарно не пересекающихся интервалов. Обозначим через Δ_n^+ (Δ_n^-) максимальный интервал, на котором функция Хаара χ_n положительна (отрицательна). Положим $\Delta_n = \Delta_n^+ \cup \Delta_n^- \cup \{t_n\}$, где t_n — правый конец интервала Δ_n^+ . Тогда Δ_n — интервал, называемый двоичным. Если Se есть объединение конечного числа попарно не пересекающихся интервалов, то в e содержится некоторый интервал Δ , поэтому существует возрастающая к ∞ последовательность индексов $\{n, 1\}$ такая, что двоичные интервалы $\Delta_{n,1}$ содержатся в Δ . Имеем при $n, 1 \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|P_e T_0 r_{n,1}\|_p &= \|\chi_{n,1}\|_p^{-\frac{1}{2}} \|P_e \chi_{n,1}\|_p \geq \\ &\geq \|\chi_{n,1}\|_p^{-\frac{1}{2}} \|P_{\Delta_{n,1}} \chi_{n,1}\|_p = \|\chi_{n,1}\|_p^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Пусть Se — объединение счетного множества попарно не пересекающихся интервалов σ_j , $j = 1, 2, \dots$. Выберем номер M так, чтобы

$$\sum_{j=M+1}^{\infty} \mu \sigma_j < \frac{1}{2} \mu e,$$

и рассмотрим последовательность $\{\Delta_{n,2}\}$ всех двоичных интервалов, не содержащихся в $\bigcup_{j=1}^M \sigma_j$. Покажем, что из $\{\Delta_{n,2}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\Delta_{n_m}\}$ так, чтобы $n_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$ и для всех $m = 1, 2, \dots$

$$\mu(Ce \cap \Delta_{n_m}) = \mu\left(\left(\bigcup_{j=M+1}^{\infty} \sigma_j\right) \cap \Delta_{n_m}\right) \leq \mu(e \cap \Delta_{n_m}). \quad (1.1.1)$$

Предположим противное. Тогда для двоичных интервалов $\Delta_{n,2}$, за исключением конечного числа двоичных интервалов, выполняется противоположное неравенство

$$\mu(Ce \cap \Delta_{n,2}) = \mu\left(\left(\bigcup_{j=M+1}^{\infty} \sigma_j\right) \cap \Delta_{n,2}\right) > \mu(e \cap \Delta_{n,2}). \quad (1.1.2)$$

Пусть $k = 0, 1, 2, \dots$. Двоичные интервалы $\Delta_k^i = (\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k})$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, называются интервалами k -й пачки. Интервалы каждой k -й пачки попарно не пересекаются, и их объединение вместе с внутренними концевыми точками совпадает с $(0, 1)$. Пусть $\Delta_{k_1}^{i_1}, \dots, \Delta_{k_m}^{i_m}$ — все интервалы, для которых не выполняется неравенство (1.1.2), и пусть $l = \max(k_1, \dots, k_m)$. Тогда для всех интервалов Δ_ν^i , $\nu = l+1, l+2, \dots$, не принадлежащих $\tilde{\sigma} = \bigcup_{j=1}^M \sigma_j$, выполняется неравенство (1.1.2). Выберем достаточно большой номер $s > l$ так, чтобы

$$\sum_i' \mu(e \cap \Delta_s^i) > \frac{2}{3} \mu e,$$

где сумма $\sum_i'$ берется по всем индексам i , для которых интервал Δ_s^i не принадлежит $\tilde{\sigma}$. Пусть $\sigma = \bigcup_{j=M+1}^{\infty} \sigma_j$. Тогда в силу выбора M и неравенства (1.1.2)

$$\frac{1}{2} \mu e > \mu \sigma \geq \sum_i' \mu(\sigma \cap \Delta_s^i) > \sum_i' \mu(e \cap \Delta_s^i) > \frac{2}{3} \mu e.$$

Полученное противоречие показывает, что существует последовательность двоичных интервалов $\{\Delta_{n_m}\}$ такая, что для всех $m = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство (1.1.1), при этом $n_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$.

Положим $h_m = \|\chi_{n_m}\|_p^{-\frac{1}{2}} \chi_{n_m}$. Так как функция $|h_m|$ эквивалентна постоянной на Δ_{n_m} , то в силу (1.1.1) для всех $m = 1, 2, \dots$

$$\|\chi_{n_m}\|_p^{\frac{p}{2}} = \int_{\Delta_{n_m}} |h_m|^p dt = \int_{e \cap \Delta_{n_m}} |h_m|^p dt + \int_{Ce \cap \Delta_{n_m}} |h_m|^p dt \leq 2 \int_{e \cap \Delta_{n_m}} |h_m|^p dt.$$

Следовательно, для всех $m = 1, 2, \dots$

$$\int_{e \cap \Delta_{n_m}} |h_m|^p dt \geq \frac{1}{2} \|\chi_{n_m}\|_p^{\frac{p}{2}},$$

поэтому при $m \rightarrow \infty$

$$\|P_e T_0 r_{n_m}\|_p^p = \|P_e \chi_{n_m} \|\chi_{n_m}\|_p^{-\frac{1}{2}}\|_p^p = \int_{e \cap \Delta_{n_m}} |h_m|^p dt \geq \frac{1}{2} \|\chi_{n_m}\|_p^{\frac{p}{2}} \rightarrow \infty,$$

и справедливость доказываемого утверждения вытекает из того, что любое множество положительной меры из $(0, 1)$ содержит замкнутое множество положительной меры. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.4. *Линейный оператор $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_0(X, \mu)$ называется интегральным, если существует определенная на $X \times Y$ ($\mu \times \nu$)-измеримая ($\mu \times \nu$)-почти всюду конечная функция $K(s, t)$ такая, что для всех $f \in L_p(Y, \nu)$*

$$Tf(s) = \int_Y K(s, t) f(t) d\nu(t) \quad (1.1.3)$$

для μ -почти всех $s \in X$. Функция $K(s, t)$ называется *ядром интегрального оператора*. Будем говорить, что ядро $K(s, t)$ порождает интегральный оператор по формуле (1.1.3). *Интегральный оператор $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_p(X, \mu)$ называется регулярным, если интегральный оператор*

$$|T|f(s) = \int_Y |K(s, t)| f(t) d\nu(t)$$

определен на всем $L_p(Y, \nu)$ и действует в $L_p(X, \mu)$.

Имеет место следующая теорема о компактной регулярной факторизации произвольных интегральных операторов, действующих из $L_p(Y, \nu)$ в $L_0(X, \mu)$.

Теорема 1.1.3. *Пусть $1 < p \leq \infty$, $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_0(X, \mu)$ — интегральный оператор. Тогда T можно представить в виде $T = AB$, где $B : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_p(X, \mu)$ — регулярный компактный интегральный оператор, A — оператор умножения на функцию $a(s) \geq 1$: $Ah(s) = a(s)h(s)$, $h \in L_p(X, \mu)$,*

$$a(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi_{X_n}(s), \quad \lambda_n \geq 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$\{X_n\}$ — разбиение X на попарно не пересекающиеся измеримые множества с конечными мерами.

Эта теорема при $p = 2$ сформулирована и по существу доказана в совместной работе автора и В. Д. Степанова [32, с. 66]. Для $1 < p \leq \infty$ теорема 1.1.3 доказана автором [18, 19]. Для $1 < p < \infty$ близкое к теореме 1.1.3 утверждение доказано другим методом В. Шахермайером и Л. Вайсом [52].

Следствие 1.1.3. При $1 < p \leq \infty$ каждый интегральный оператор $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_0(X, \mu)$ почти компактен.

Следствие 1.1.4. При $1 < p < \infty$ каждый интегральный оператор $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_0(X, \mu)$ отображает слабо сходящиеся в $L_p(Y, \nu)$ последовательности в последовательности, сходящиеся по мере на любом множестве конечной меры.

Следствие 1.1.5. При $1 < p < \infty$ каждый интегральный оператор $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_0(X, \mu)$ компактен по мере.

Следствие 1.1.6. Пусть $1 < p < \infty$, $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_1(X, \mu)$ — интегральный оператор. Тогда T компактен.

Справедливость следствия вытекает из следствия 1.1.3 и следствия 1.1.2 теоремы 1.1.2.

Таким образом, при $1 < p \leq \infty$ любой интегральный оператор $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_0(X, \mu)$ почти компактен. Следующий пример 1.1.2 показывает, что обратное утверждение неверно.

ПРИМЕР 1.1.2. Пусть $\{r_n\}$ — ортонормированная система Радемахера. Для любого $1 < p < \infty$ оператор

$$T_1 f = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(f, r_n) r_n, \quad f \in L_p(0, 1), \quad (1.1.4)$$

где все μ_n вещественны, $\mu_n \rightarrow 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 = \infty, \quad (f, r_n) = \int_0^1 f r_n dt,$$

компактен как оператор, действующий из $L_p(0, 1)$ в $L_p(0, 1)$, но для любого множества $e \subset [0, 1]$ положительной лебеговой меры оператор $P_e T_1$ не является интегральным. Здесь $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_p(0, 1)$.

◁ Пусть $2 \leq p < \infty$. Так как для любой функции $f \in L_p(0, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, r_n)|^2 < \infty,$$

то в силу неравенства Хинчина ряд (1.1.4) сходится по норме $L_p(0, 1)$, при этом для любого $m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \left\| T_1 f - \sum_{n=1}^m \mu_n(f, r_n) r_n \right\|_p &= \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \mu_n(f, r_n) r_n \right\|_p \leq C_p \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \mu_n(f, r_n) r_n \right\|_2 = \\ &= C_p \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |\mu_n|^2 |(f, r_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_p \sup_{n>m} |\mu_n| \|f\|_2 \leq C_p \sup_{n>m} |\mu_n| \|f\|_p. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|T_1 - S_m\| \leq C_p \sup_{n>m} |\mu_n| \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$; здесь

$$S_m f = \sum_{n=1}^m \mu_n(f, r_n) r_n$$

— конечномерный оператор в $L_p(0, 1)$. Следовательно, оператор $T_1 : L_p(0, 1) \rightarrow L_p(0, 1)$ компактен при $2 \leq p < \infty$.

Пусть теперь $1 < p < 2$ и $q = \frac{p}{p-1}$. Тогда $2 < q < \infty$. Рассмотрим в $L_q(0, 1)$ оператор

$$\hat{T}_1 f = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(f, r_n) r_n.$$

По доказанному $\hat{T}_1$ — компактный оператор в $L_q(0, 1)$. Так как T_1 — сопряженный к $\hat{T}_1$ оператор, то T_1 — компактный оператор в $L_p(0, 1)$.

Докажем, что $P_e T_1$ — неинтегральный оператор. Предположим противное: пусть $P_e T_1$ — интегральный оператор и $K_e(s, t)$ — его ядро. Имеем

$$\int_0^1 |K_e(s, t)| dt < \infty$$

для почти всех $s \in (0, 1)$. Для почти всех $s \in (0, 1)$ и всех $n, m = 1, 2, \dots$

$$\int_0^1 K_e(s, t) r_n(t) dt = P_e T_1 r_n(s) = \mu_n \chi_e(s) r_n(s),$$

$$\int_0^1 K_e(s, t) r_m^\perp(t) dt = P_e T_1 r_m^\perp(s) = 0,$$

где $\{r_m^\perp\}$ — любой ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке последовательности $\{r_m\}$, состоящий из

ограниченных функций. Отсюда в силу [11, с. 154] при подходящем $s \in e$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \chi_e(s) |r_n(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 8 \int_0^1 |K_e(s, t)| dt < \infty,$$

что противоречит условию $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 = \infty$. $\triangleright$

Из приведенного доказательства следует, что даже сужения операторов $P_e T_1$ на $L_{\infty}(0, 1)$ не являются интегральными операторами, т. е. операторы $P_e T_1$ — не частично интегральные операторы в смысле определения 1.3.1 из [19].

В заключение докажем теорему, из которой вытекает, что все линейные непрерывные в L_2 компактные по мере и, следовательно, все почти компактные операторы в L_2 и все интегральные операторы в L_2 принадлежат классу B_0 , введенному в предисловии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.5. Число 0 называется *точкой Вейля* линейного оператора $Q : L_r(X, \mu) \rightarrow L_r(Y, \nu)$ ($1 \leq r \leq \infty$), если найдется слабо сходящаяся к 0 последовательность $\{\varphi_n\} \subset L_r(X, \mu)$, $\|\varphi_n\|_r = 1$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что $\|Q\varphi_n\|_r \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; здесь $\|\cdot\|_r$ — норма в $L_r(Y, \nu)$. При $L_r(Y, \nu) = L_r(X, \mu)$ точка Вейля 0 называется *точкой предельного спектра* $\sigma_c(Q)$ оператора Q .

Теорема 1.1.4. Пусть $1 < p < \infty$, мера μ не является чисто атомической, $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_p(X, \mu)$ — линейный непрерывный компактный по мере оператор. Тогда 0 является точкой Вейля сопряженного оператора T^* .

$\triangleleft$ Пусть e , $0 < \mu e < \infty$, не содержит атомов меры μ . Рассмотрим оператор $P_e T$, где $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_p(X, \mu)$. По теореме 1.1.2 оператор $P_e T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_1(X, \mu)$ компактен. Следовательно, сопряженный оператор $T^* P_e : L_{\infty}(X, \mu) \rightarrow L_q(Y, \nu)$ компактен (здесь $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Возьмем равномерно ограниченную ортонормированную последовательность функций $\{g_n\} \subset L_q(X, \mu)$ с носителями в e . По теореме Римана — Лебега

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n f d\mu = 0$$

для любой функции $f \in L_1(X, \mu)$. Таким образом, $\{g_n\}$ сходится к 0 в $\sigma(L_{\infty}, L_1)$ -топологии и сходится слабо к 0 в $L_q(X, \mu)$. Следовательно, $\|T^* g_n\|_q = \|T^* P_e g_n\|_q \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда и из $\|g_n\|_q > a > 0$, $n = 1, 2, \dots$, вытекает, что 0 — точка Вейля оператора T^* . $\triangleright$

Следствие 1.1.7. Пусть $1 < p < \infty$, $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_p(X, \mu)$ — линейный непрерывный оператор, множество e , $0 < \mu e < \infty$, не содержит атомов меры μ . Если $P_e T$ компактен по мере, либо почти компактен, либо является интегральным оператором, то 0 — точка Вейля оператора T^* .

**§ 1.2. Компактные по мере, почти компактные
и интегральные операторы 1-го, 2-го и 3-го родов в L_p**

В этом параграфе мы рассмотрим классы операторов, тесно связанных с функциональными и интегральными уравнениями 1-го, 2-го и 3-го родов в L_p . Всюду в параграфе (X, μ) — пространство с положительной σ -конечной мерой μ , $L_p(\mu) := L_p(X, \mu)$, $\|\cdot\|_p$ — норма в $L_p(\mu)$, $B(L_p(\mu))$ — пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из $L_p(\mu)$ в $L_p(\mu)$, с операторной нормой $\|\cdot\|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1. Оператор $Tf(s) = a(s)f(s) + Df(s)$, $f \in L_p(\mu)$, где $a(s) \in L_\infty(\mu)$, $D \in B(L_p(\mu))$ — интегральный оператор, называется *интегральным оператором 3-го рода* [42, с. 5]. Если $a(s) = \alpha \neq 0$ для почти всех $s \in X$, то T называется *интегральным оператором 2-го рода*; если $a(s) = 0$ для почти всех $s \in X$, то T называется *интегральным оператором 1-го рода*. Совокупность всех интегральных операторов 3-го рода (2-го рода, 1-го рода) обозначим через $I_{p,3}$ (соответственно через $I_{p,2}$, $I_{p,1}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.2. Пусть $B_{p,1}$ — множество всех компактных по мере операторов из $B(L_p(\mu))$. Множество операторов вида $Tf(s) = a(s)f(s) + Lf(s)$, $f \in L_p(\mu)$, где a — произвольная функция из $L_\infty(\mu)$, L — произвольный оператор из $B_{p,1}$, обозначим через $B_{p,3}$. Совокупность операторов вида $\alpha \mathbf{1} + L$, где α — произвольное число, $\mathbf{1}$ — тождественный оператор, L — произвольный оператор из $B_{p,1}$, обозначим через $B_{p,2}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.3. Пусть $C_{p,1}$ — множество всех почти компактных операторов из $B(L_p(\mu))$, $C_{p,2}$ — совокупность операторов вида $\alpha \mathbf{1} + K$, где α — произвольное число, K — любой оператор из $C_{p,1}$. Через $C_{p,3}$ обозначим множество операторов вида $a(s)f(s) + Kf(s)$, $f \in L_p(\mu)$, где a — произвольная функция из $L_\infty(\mu)$, K — произвольный оператор из $C_{p,1}$.

Отметим, что в определении множеств $B_{p,2}$, $C_{p,2}$ число α может равняться 0, так что $B_{p,2}$ является объединением всех компактных по мере операторов 2-го и 1-го родов из $B(L_p(\mu))$, а $C_{p,2}$ является объединением всех почти компактных операторов 2-го и 1-го родов из $B(L_p(\mu))$.

Из определений 1.2.2, 1.2.3 следует, что при $1 \leq p \leq \infty$ множества $B_{p,1}$, $B_{p,2}$, $B_{p,3}$, $C_{p,1}$, $C_{p,2}$, $C_{p,3}$ являются алгебрами и $B_{p,1} \subset B_{p,2} \subset B_{p,3} \subset B(L_p(\mu))$, $C_{p,1} \subset C_{p,2} \subset C_{p,3}$, $C_{p,1} \subset B_{p,1}$, $C_{p,2} \subset B_{p,2}$, $C_{p,3} \subset B_{p,3}$. Кроме того, $B_{p,1}$ и $C_{p,1}$ являются правыми идеалами алгебры $B(L_p(\mu))$.

Теорема 1.2.1. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда $B_{p,1}$ — замкнутый правый идеал алгебры $B(L_p(\mu))$.

◁ Пусть $Q_n \in B_{p,1}$, $Q \in B(L_p(\mu))$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q_n - Q\| = 0$. Покажем, что $Q \in B_{p,1}$. Для любого e , $0 < \mu e < \infty$, при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{\|f\|_p \leq 1} \|P_e Q - P_e Q_n\|_1 \leq (\mu e)^{\frac{1}{p}} \|Q - Q_n\| \rightarrow 0,$$

где $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_p(\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. В силу теоремы 1.1.2 операторы $P_e Q_n : L_p(\mu) \rightarrow L_1(\mu)$ компактны. Следовательно, $P_e Q : L_p(\mu) \rightarrow L_1(\mu)$ компактен. Значит, $Q \in B_{p,1}$. $\triangleright$

Теорема 1.2.2. Пусть $1 < p < \infty$ и мера μ не имеет атомов. Тогда $B_{p,3}$ — банахова алгебра с единицей, не совпадающая с алгеброй $B(L_p(\mu))$.

$\triangleleft$ Покажем замкнутость алгебры $B_{p,3}$. Будем предполагать, что $L_p(\mu)$ — комплексное пространство (случай вещественного $L_p(\mu)$ рассматривается аналогично). Пусть $\tau \in B_{p,3}$. Тогда $\tau = A + Q$, где $Af = af$, $f \in L_p(\mu)$, $a \in L_\infty(\mu)$, $Q \in B_{p,1}$. Пусть α — какое-нибудь существенное значение функции $a(s)$, т. е.

$$\mu\{s \mid s \in X, |a(s) - \alpha| < \varepsilon\} > 0 \quad \text{для каждого } \varepsilon > 0.$$

Покажем, что для любой сходящейся к 0 последовательности $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел найдется последовательность функций f_n с попарно не пересекающимися носителями такая, что

$$\|f_n\|_q = 1, \quad \|(\overline{a(s)} - \overline{\alpha})f_n\|_q \leq \varepsilon_n, \quad \|Q^* f_n\|_q \leq \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.2.1)$$

где Q^* — сопряженный к Q оператор, $\|\cdot\|_q$ — норма в $L_q(\mu)$. Выберем последовательность попарно не пересекающихся множеств $\{e_n\}$ с конечными положительными мерами так, чтобы $|a(s) - \alpha| \leq \varepsilon_n$ для всех $s \in e_n$, $n = 1, 2, \dots$. Зафиксируем индекс n и рассмотрим ортонормированную последовательность $\{r_{m,e_n}\}_{m=1}^\infty$ обобщенных функций Радемахера с носителями, совпадающими с e_n (определение этих функций см. в начале § 1.1). Мы имеем

$$|r_{m,e_n}| = \frac{1}{\sqrt{\mu e_n}} \chi_{e_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Положим

$$g_{n,m} = (\mu e_n)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} r_{m,e_n}.$$

Тогда $\|g_{n,m}\|_q = 1$, $m = 1, 2, \dots$. Так как в силу теоремы 1.1.2 $P_{e_n} Q : L_p(\mu) \rightarrow L_1(\mu)$ — компактный оператор, то $Q^* P_{e_n}$ компактен как оператор, действующий из $L_\infty(\mu)$ в $L_q(\mu)$, поэтому последовательность $\{Q^* g_{n,m}\}_{m=1}^\infty = \{Q^* P_{e_n} g_{n,m}\}_{m=1}^\infty$ компактна в $L_q(\mu)$. Кроме того, для любой функции $h \in L_p(\mu)$ по теореме Римана — Лебега

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_X h \overline{Q^* g_{n,m}} d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{e_n} Q h g_{n,m} d\mu = 0.$$

Следовательно, $\lim_{m \rightarrow \infty} \|Q^* g_{n,m}\|_q = 0$. Выберем номер m_n так, чтобы $\|Q^* g_{n,m_n}\|_q \leq \varepsilon_n$. Тогда последовательность $f_n = g_{n,m_n}$, $n = 1, 2, \dots$, искомая. При этом носитель каждой функции f_n совпадает с e_n . Из (1.2.1)

получим

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \|\alpha f_n\|_q \leq \|(\tau^* - \overline{\alpha}1)f_n\|_q + \|\tau^* f_n\|_q \leq \\ &\leq \|(\overline{a(s)} - \overline{\alpha})f_n\|_q + \|Q^* f_n\|_q + \|\tau^*\| \leq 2\varepsilon_n + \|\tau^*\|. \end{aligned}$$

Отсюда $|\alpha| \leq \|\tau^*\|$ для любого существенного значения α функции $a(s)$. Значит, $\|a\|_\infty \leq \|\tau^*\|$ и

$$\|a\|_\infty \leq \|\tau\|. \quad (1.2.2)$$

Пусть $T_n = A_n + Q_n$, где $A_n f = a_n f$, $f \in L_p(\mu)$, $a_n \in L_\infty(\mu)$, Q_n — компактный по мере оператор в $L_p(\mu)$, $n = 1, 2, \dots$, и пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$. Покажем, что $T \in B_{p,3}$. В силу (1.2.2) имеем $\|a_n - a_m\|_\infty \leq \|T_n - T_m\|$. Поэтому найдется функция $a \in L_\infty(\mu)$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - a\|_\infty = 0$. Так как $\|Q_n - Q_m\| \leq \|a_n - a_m\|_\infty + \|T_n - T_m\|$, то существует оператор Q в $L_p(\mu)$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q - Q_n\| = 0$. Тогда $T = A + Q$, где A — оператор умножения на a , при этом по теореме 1.2.1 $Q \in B_{p,1}$. Следовательно, $T \in B_{p,3}$. Таким образом, $B_{p,3}$ — банахова алгебра.

Докажем, что $B_{p,3}$ не совпадает с $B(L_p)$. Так как мера μ по условию теоремы не имеет атомов, то можно считать, не ограничивая общности, что $L_p = L_p(0, 1)$, μ — мера Лебега. Рассмотрим при $p \geq 2$ оператор

$$Pf = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f r_n dt \right) r_n, \quad f \in L_p,$$

где $\{r_n\}$ — ортонормированная система Радемахера. В силу неравенства Хинчина $P \in B(L_p)$. Кроме того, $P = P^2$. Покажем, что $P \notin B_{p,3}$. Предположим противное, тогда $P = A + C$, где $Af = af$, $f \in L_p$, $a \in L_\infty$, $C \in B_{p,1}$. Следовательно, $Pf = P^2f = a^2f + C_1f$, $f \in L_p$, где $C_1 \in B_{p,1}$. Отсюда $A + C = A^2 + C_1$, $A - A^2 + C - C_1 = 0$, и в силу (1.2.2) получим $\|a^2 - a\|_\infty \leq \|0\| = 0$ и $a(a - 1) = 0$. Но тогда $a = 0 \cdot \chi_{e_0} + \chi_{e_1}$, где e_0 — множество, на котором функция a обращается в 0, e_1 — множество, на котором a равна 1. По теореме 1.1.2 имеем $\|Cr_n\|_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда

$$\chi_{e_0} r_n = \chi_{e_0} P r_n = \chi_{e_0} a r_n + \chi_{e_0} C r_n = \chi_{e_0} C r_n \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ по норме L_1 . Значит,

$$\mu e_0 = \|\chi_{e_0} r_n\|_1 = \|\chi_{e_0} C r_n\|_1 \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, здесь $\|\cdot\|_1$ — норма в L_1 . Таким образом, $\mu e_0 = 0$. Поэтому $a(s) = 1$ почти всюду, и $P = 1 + C$. Пусть $\{v_n\} = \{w_n\} \setminus \{r_n\}$, где $\{w_n\}$ — ортонормированная система Уолша. Тогда $0 = P v_n = v_n + C v_n$ для всех n . Следовательно, $1 = \|v_n\|_1 = \|C v_n\|_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Полученное противоречие показывает, что $P \notin B_{p,3}$ при $p \geq 2$.

Пусть теперь $1 < q < 2$. Рассмотрим операторы $P \in B(L_p)$ и $P^* \in B(L_q)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Так как $P = P^2$, то $P^* = (P^*)^2$. Предположив, что $P^* \in B_{q,3}$, будем иметь, подобно предыдущему, $P^* = \mathbf{1} + D$, где $D \in B_{q,1}$. Для любой функции $h \in L_p$ и всех $n = 1, 2, \dots$

$$\int_0^1 h \overline{P^* v_n} dt = \int_0^1 P h v_n dt = 0,$$

поэтому $P^* v_n = 0$ для всех n . Отсюда $1 = \|v_n\|_1 = \|D v_n\|_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, $P^* \notin B_{q,3}$ при $1 < q < 2$. $\triangleright$

Следствие 1.2.1. Пусть $1 < p < \infty$, мера μ не имеет атомов и пусть $\tau = A + Q$, где $Af = af$, $f \in L_p$, $a \in L_\infty$, Q — компактный по мере оператор из $B(L_p(\mu))$. Тогда каждое существенное значение функции $a(s)$ (или функции $a(s)$, если $L_p(\mu)$ — вещественное пространство) является точкой предельного спектра оператора τ^* .

$\triangleleft$ Так как построенная в ходе доказательства теоремы 1.2.2 последовательность $f_n = g_{n,m_n}$ слабо сходится к 0 в $L_q(\mu)$, $\|f_n\|_q = 1$, $n = 1, 2, \dots$, некомпактна и в силу (1.2.1) имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\tau^* - \overline{a} \mathbf{1}) f_n\|_q = 0,$$

то $\overline{a}$ принадлежит предельному спектру оператора τ^* . $\triangleright$

Следствие 1.2.2. Для оператора τ из следствия 1.2.1 выполняется неравенство

$$\|a\|_\infty \leq \|\tau\|. \quad (1.2.3)$$

$\triangleleft$ Это неравенство получено при доказательстве теоремы 1.2.2 (см. неравенство (1.2.2)). $\triangleright$

Следствие 1.2.3. Представление оператора $T \in B_{p,3}$ в виде $Tf = af + Lf$, где $a \in L_\infty$, $L \in B_{p,1}$, является единственным.

$\triangleleft$ Действительно, если $Tf = a_1 f + L_1 f$, где $a_1 \in L_\infty$, $L_1 \in B_{p,1}$, то $(a_1 - a)f + (L_1 - L)f = 0$ для всех $f \in L_p$. Но $0 \in B_{p,3}$, откуда и из (1.2.3) получим $\|a_1 - a\|_\infty \leq 0$. Значит, $a_1 - a = 0$, $a_1 = a$ и, следовательно, $L_1 = L$. $\triangleright$

Теорема 1.2.3. Пусть $1 < p < \infty$ и мера μ не имеет атомов. Тогда $B_{p,2}$ — банахова алгебра с единицей, не совпадающая ни с $B_{p,1}$, ни с $B_{p,3}$.

$\triangleleft$ Замкнутость алгебры $B_{p,2}$ следует из включения $B_{p,2} \subset B_{p,3}$ и доказательства теоремы 1.2.2. Из $\mathbf{1} \in B_{p,2} \setminus B_{p,1}$ следует $B_{p,2} \neq B_{p,1}$. Покажем, что $B_{p,2} \neq B_{p,3}$. Возьмем множество e положительной меры с дополнением se положительной меры и рассмотрим оператор $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_p(\mu)$. Имеем $P_e \in B_{p,3}$. Докажем, что $P_e \notin B_{p,2}$. Предположим противное. Тогда

$P_e = \alpha \mathbf{1} + K$, где $K \in B_{p,1}$. Если $\alpha = 0$, то $K = P_e$, что в силу неатомичности меры μ невозможно. Если $\alpha = 1$, то $K = -P_{ce}$, что также невозможно. Пусть $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$. Спектр оператора P_e есть множество $\{0; 1\}$. Следовательно, $K = P_e - \alpha \mathbf{1}$ имеет обратный $K^{-1} \in B(L_p(\mu))$. Но тогда $\mathbf{1} = KK^{-1}$ компактен по мере, что также невозможно. $\triangleright$

Теорема 1.2.4 [54]. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда $C_{p,1}$ — замкнутый правый идеал алгебры $B(L_p(\mu))$.

$\triangleleft$ Приведем доказательство этого результата, следуя [54]. Пусть сначала $\mu X < \infty$. В этом случае $T \in C_{p,1}$, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $X_\varepsilon \subset X$ такое, что $\mu(X \setminus X_\varepsilon) \leq \varepsilon$ и оператор $P_\varepsilon T : L_p(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$ компактен (здесь $P_\varepsilon f = \chi_{X_\varepsilon} f$, $f \in L_p(\mu)$). Пусть $T_n \in C_{p,1}$ и $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. Выберем X_n так, чтобы $\mu(X \setminus X_n) \leq \varepsilon/2^n$ и операторы $P_n T$ были компактными ($P_n f = \chi_{X_n} f$, $f \in L_p(\mu)$). Положим $X_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^\infty X_n$. Тогда $\mu(X \setminus X_\varepsilon) \leq \varepsilon$ и операторы $P_\varepsilon T_n$, $n = 1, 2, \dots$, компактны. Следовательно, $P_\varepsilon T$ компактен.

Случай $\mu X = \infty$ сводится к рассмотренному, если ввести изометрию $\rho : L_p(X, \mu) \rightarrow L_p(X, g d\mu)$, где $\rho(f) = g^{-\frac{1}{p}} f$, g — строго положительная функция из $L_1(X, \mu)$, удовлетворяющая условию

$$\int_X g d\mu = 1.$$

Тогда оператор T принадлежит $C_{p,1}$, если и только если оператор $\rho T \rho^{-1} : L_p(X, g d\mu) \rightarrow L_p(X, g d\mu)$ почти компактен. $\triangleright$

Теорема 1.2.5. Пусть $1 < p < \infty$ и мера μ не имеет атомов. Тогда $C_{p,3}$ — банахова алгебра с единицей, не совпадающая с $B(L_p(\mu))$.

$\triangleleft C_{p,3} \subset B_{p,3} \neq B(L_p(\mu))$. Докажем замкнутость $C_{p,3}$. Пусть $T_n \in C_{p,3}$, $T \in B(L_p(\mu))$ и $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. Имеем $T_n = A_n + Q_n$, где $Q_n \in C_{p,1}$, $A_n f = a_n f$, $f \in L_p(\mu)$. Так как $T_n \in B_{p,3}$, то по теореме 1.2.2 найдутся $a_n \in L_\infty(\mu)$ и $Q \in B(L_p(\mu))$ такие, что $\|a_n - a\|_\infty \rightarrow 0$, $\|Q_n - Q\| \rightarrow 0$. В силу теоремы 1.2.4 $Q \in C_{p,1}$. Значит, $T \in C_{p,3}$. $\triangleright$

Теорема 1.2.6. Пусть $1 < p < \infty$ и мера μ не имеет атомов. Тогда $C_{p,2}$ — банахова алгебра с единицей, не совпадающая ни с $C_{p,1}$, ни с $C_{p,3}$.

$\triangleleft$ Из включения $C_{p,2} \subset C_{p,3}$ и доказательства предыдущей теоремы вытекает замкнутость $C_{p,2}$. Так как $\mathbf{1} \in C_{p,2}$ и по теореме 1.2.3 имеем $\mathbf{1} \notin B_{p,1} \supset C_{p,1}$, то $C_{p,2} \neq C_{p,1}$. Покажем, что $C_{p,2} \neq C_{p,3}$. Оператор P_e из доказательства теоремы 1.2.3 принадлежит $C_{p,3}$, но не принадлежит $B_{p,2} \supset C_{p,2}$. Следовательно, $C_{p,2} \neq C_{p,3}$. $\triangleright$

Теорема 1.2.7 [54]. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда $\overline{I_{p,1}} = C_{p,1}$ (здесь и далее черта означает замыкание по операторной норме).

Теорема 1.2.8. Пусть $1 < p < \infty$ и мера μ не имеет атомов. Тогда $\overline{I_{p,1} \cup I_{p,2}} = C_{p,2}$, $\overline{I_{p,3}} = C_{p,3}$.

◁ Имейм $I_{p,3} \subset C_{p,3}$. Значит, $\overline{I_{p,3}} \subset \overline{C_{p,3}} = C_{p,3}$. Пусть $T \in C_{p,3}$. Тогда $T = A + Q$, где $Af = af$, $f \in L_p(\mu)$, $a \in L_\infty(\mu)$, $Q \in C_{p,1}$. По предыдущей теореме найдутся $Q_n \in I_{p,1}$ такие, что $\|Q_n - Q\| \rightarrow 0$. Следовательно, $T_n = A + Q_n \in I_{p,3}$ и $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. Поэтому $T \in \overline{I_{p,3}}$ и $C_{p,3} \subset \overline{I_{p,3}}$. Равенство $\overline{I_{p,1} \cup I_{p,2}} = C_{p,2}$ доказывается аналогично. ▷

В заключение параграфа рассмотрим некоторые свойства интегральных операторов 1-го, 2-го и 3-го родов.

1) Пусть $1 < p < \infty$. Тогда $I_{p,1} \subset I_{p,1} \cup I_{p,2} \subset I_{p,3}$, и если мера μ не имеет атомов, то $I_{p,1} \neq I_{p,2}$, $I_{p,1} \neq I_{p,3} \neq I_{p,2}$.

Действительно, $1 \in I_{p,2} \setminus I_{p,1}$ и $P_e \in I_{p,3} \setminus (I_{p,1} \cup I_{p,2})$, где P_e — оператор из доказательства теоремы 1.2.3.

2) Множество $I_{p,1}$ в случае неатомичности меры μ не является алгеброй: в [38; 39, теорема I.4.18] В. Д. Степанов для любого $1 < p < \infty$ построил интегральный оператор свертки в $L_p(-\infty, \infty)$, квадрат которого не является интегральным оператором. В [17; 19, теорема I.8.2] построены два компактных интегральных оператора из $B(L_2(0, 1))$, произведение которых не является интегральным оператором. В теореме 2.1.3 главы 2 приведен компактный оператор $S \in B(L_2(0, 1))$ со свойствами: 1) S — интегральный оператор; 2) S^2 — неинтегральный оператор; 3) $S^3 = 0$. Приведенные результаты дают отрицательный ответ на вопрос, образуют ли интегральные операторы в L_2 алгебру, поставленный в монографии П. Халмоша и В. Сандера [42]. Множества $I_{p,1} \cup I_{p,2}$, $I_{p,3}$, по-видимому, также не являются алгебрами (для $p = 2$ это доказано в теореме 2.1.4 главы 2).

3) Задача об условиях интегральности произведений двух интегральных операторов и более общая задача об условиях интегральности операторных произведений, в которых один или несколько сомножителей — интегральные операторы, изучались в книге [23].

4) Необходимые и достаточные условия представимости линейных операторов в интегральной форме найдены в 1970-х годах А. В. Бухваловым [3], С. И. Ждановым [9], Л. Лесснером [47]. Характеристику интегральных операторов 3-го рода дает приведенная ниже теорема 1.2.9. Нам понадобятся следующие определение и лемма.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.4. Оператор $A \in B(L_p(\mu))$ называется *оператором умножения на функцию* $a \in L_\infty(\mu)$, если $(Af)(s) = a(s)f(s)$, $f \in L_p(\mu)$.

Лемма 1.2.1. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $\mu X < \infty$. Оператор $M \in B(L_p(\mu))$ является оператором умножения на функцию $a \in L_\infty(\mu)$ тогда и только тогда, когда для любого измеримого множества $e \subset X$ выполняется равенство $P_e M P_{X \setminus e} = 0$; здесь $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_p(\mu)$.

◁ *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Для любого $e \subset X$ получим $P_e M(1 - P_e) = 0$. Следовательно, $P_e M = P_e M P_e$. Пусть φ_0 — функция, тождественно равная 1, и пусть $a = M\varphi_0$. Имеем $\chi_e a = \chi_e M\chi_e$. Пусть $s \in e$, тогда $(M\chi_e)(s) = \chi_e(s)a(s)$. Так как $P_{X \setminus e} M P_e = 0$, то $M P_e = P_e M P_e$. Пусть $s \in X \setminus e$. Отсюда вытекает, что $(M\chi_e)(s) = 0$. Значит, $(M\chi_e)(s) = a(s)\chi_e(s)$ для всех $s \in X$.

Покажем, что $a \in L_\infty(\mu)$. Если $M = 0$, то $a = 0$. Пусть $M \neq 0$. Предположим противное: $a \notin L_\infty(\mu)$. Тогда найдется множество E , $\mu E > 0$, такое, что $|a(s)| \geq 2\|M\|$ для всех $s \in E$. Поэтому

$$\|M\| \geq \left\| M \frac{\chi_E}{(\mu E)^{\frac{1}{p}}} \right\| \geq 2\|M\| \left\| \frac{\chi_E}{(\mu E)^{\frac{1}{p}}} \right\| = 2\|M\|.$$

Значит, $\|M\| = 0$, что невозможно.

Пусть ω — ступенчатая функция:

$$\omega(t) = \sum_n \alpha_n \chi_{e_n}(t).$$

Так как $M\chi_e = a\chi_e$, то $M\omega = a\omega$. Для произвольной функции φ из $L_p(\mu)$ найдется последовательность ступенчатых функций $\{\omega_m\}$, сходящаяся к φ по норме $L_p(\mu)$. Имеем при $m \rightarrow \infty$

$$\|M\varphi - a\varphi\| \leq \|M\| \|\varphi - \omega_m\| + \|a\|_\infty \|\omega_m - \varphi\| \rightarrow 0.$$

Следовательно, $M\varphi = a\varphi$. ▷

Используемое в формулировке следующей теоремы понятие модуля оператора см. в [4, с. 46].

Теорема 1.2.9. Пусть мера μ конечна и не имеет атомов, $1 < p < \infty$. Оператор $T \in B(L_p(\mu))$ принадлежит $I_{p,3}$ тогда и только тогда, когда найдется интегральный оператор $Z: L_p(\mu) \rightarrow L_0(\mu)$ с неотрицательным ядром $Z(s, t)$ такой, что для любого множества e , $\mu e > 0$, оператор $P_e T P_{X \setminus e}$ регулярен как оператор из $L_p(\mu)$ в $L_0(\mu)$ и $|P_e T P_{X \setminus e}| \leq Z$.

◁ *Необходимость.* Пусть $Tf = Af + Kf$, $f \in L_p(\mu)$, где $Af = af$, $a \in L_\infty(\mu)$, $K: L_p(\mu) \rightarrow L_0(\mu)$ — интегральный оператор с ядром $K(s, t)$. В качестве Z можно выбрать интегральный оператор с ядром $|K(s, t)|$.

Достаточность. Рассмотрим квадрат $X \times X$. Разбив его основание X на два не пересекающихся множества Δ и δ с равными мерами, получим два диагональных квадрата $\Delta \times \Delta$ и $\delta \times \delta$ и два недиагональных квадрата $\Delta \times \delta$ и $\delta \times \Delta$. Разбивая аналогично основания Δ и δ диагональных квадратов $\Delta \times \Delta$ и $\delta \times \delta$, получим четыре диагональных квадрата

и четыре недиагональных квадрата. Продолжая неограниченно процедуру разбиения оснований всех диагональных квадратов, получим последовательность попарно непересекающихся недиагональных квадратов $e_i \times g_i$, $i = 1, 2, \dots$, со свойствами

$$(\mu \times \mu) \left\{ X \times X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (e_i \times g_i) \right\} = 0, \quad e_i \cap g_i = \emptyset, \quad i = 1, 2, \dots;$$

здесь $\emptyset$ — пустое множество.

Пусть $\tau_i : L_p(\mu) \rightarrow L_0(\mu)$, $i = 1, 2, \dots$, — линейные операторы. Будем говорить, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i$ σ -слабо сходится к оператору $\tau_0 : L_p(\mu) \rightarrow L_0(\mu)$, если найдется разбиение множества X на попарно непересекающиеся измеримые множества G_j , $j = 1, 2, \dots$, такое, что для всех $i, j = 1, 2, \dots$ отображения $P_{G_j} \tau_0 : L_p(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$, $P_{G_j} \tau_i : L_p(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$ суть линейные непрерывные операторы и для всех $j = 1, 2, \dots$ и всех $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_q(\mu)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(P_{G_j} \sum_{i=1}^m \tau_i f, g \right) = (P_{G_j} \tau_0 f, g),$$

здесь

$$(u, v) = \int_X u(t) \overline{v(t)} d\mu(t), \quad u \in L_p(\mu), \quad v \in L_q(\mu).$$

Так как $Z : L_p(\mu) \rightarrow L_0(\mu)$ — интегральный оператор, то в силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3 найдется разбиение множества X на попарно непересекающиеся измеримые множества G_j , $j = 1, 2, \dots$, такое, что $P_{G_j} Z : L_p(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$ — линейный непрерывный оператор для любого $j = 1, 2, \dots$. Так как при этом для $(\mu \times \mu)$ -почти всех (s, t)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{e_i}(s) \chi_{g_i}(t) = 1,$$

то по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла по $X \times X$ с мажорирующей функцией

$$\chi_{G_j}(s) Z(s, t) |f(t)| |g(s)|$$

следует, что для любого $j = 1, 2, \dots$ и любых $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_q(\mu)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(P_{G_j} \sum_{i=1}^m P_{e_i} Z P_{g_i} f, g \right) = (P_{G_j} Z f, g).$$

Таким образом, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i} Z P_{g_i}$ σ -слабо сходится к Z .

Поскольку $|P_{e_i}TP_{g_i}| \leq P_{e_i}ZP_{g_i}$, $i = 1, 2, \dots$, то по теореме 4.2.9 из [5] $P_{e_i}TP_{g_i}$, $i = 1, 2, \dots$, — интегральный оператор, причем его ядро обращается в 0 вне $e_i \times g_i$. Отсюда и из σ -слабой сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i}ZP_{g_i}$ следует, что ряды $\sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i}TP_{g_i}$, $\sum_{i=1}^{\infty} |P_{e_i}TP_{g_i}|$ σ -слабо сходятся, при этом

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i}TP_{g_i} \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |P_{e_i}TP_{g_i}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i}ZP_{g_i} = Z.$$

Отсюда и из [5, теорема 4.2.9] вытекает интегральность оператора

$$K = \sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i}TP_{g_i}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} P_e(T - K)P_{X \setminus e} &= P_eTP_{X \setminus e} - P_eKP_{X \setminus e} = P_eTP_{X \setminus e} - \\ &- P_e\left(\sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i}TP_{g_i}\right)P_{X \setminus e} = P_eTP_{X \setminus e} - \sum_{i=1}^{\infty} P_{e_i}P_eTP_{X \setminus e}P_{g_i}. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

По условию теоремы $|P_eTP_{X \setminus e}| \leq Z$. Следовательно, по теореме 4.2.9 из [5] оператор $P_eTP_{X \setminus e}$ интегральный. Пусть K_e — его ядро. Так как для $(\mu \times \mu)$ -почти всех (s, t)

$$K_e(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{e_i}(s) \chi_{g_i}(t) \chi_e(s) \chi_{X \setminus e}(t) K_e(s, t),$$

то из (1.2.4) следует, что для всех e , $\mu e > 0$, будет

$$P_e(T - K)P_{X \setminus e} = 0. \quad (1.2.5)$$

В силу того, что $K : L_p(\mu) \rightarrow L_0(\mu)$ — интегральный оператор, по теореме 1.1.3 существует разбиение $\{E_j\}$ множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества такое, что $P_{E_j}K : L_p(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$ — компактный интегральный оператор при каждом $j = 1, 2, \dots$. Покажем, что $T - K$ — оператор умножения на функцию из $L_{\infty}(\mu)$. В силу (1.2.5) имеем

$$P_e(P_{E_j}T - P_{E_j}K)P_{X \setminus e} = 0$$

для любого измеримого множества e . Отсюда и из того, что $P_{E_j}(T - K) \in B(L_p(\mu))$, получим по лемме, что $P_{E_j}(T - K)f = a_j f$, $f \in L_p(\mu)$ для всех $j = 1, 2, \dots$. Положим $a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_{E_j}$ и покажем, что $a \in L_{\infty}(\mu)$. Предположим противное. Тогда найдется множество E_0 , $\mu E_0 > 0$, такое, что $|a(s)| \geq 3\|T\|$ для всех $s \in E_0$. Пусть j_0 — индекс такой, что

$\mu(E_0 \cap E_{j_0}) > 0$. Положим $e_0 = E_0 \cap E_{j_0}$ и рассмотрим систему $\{r_{n,e_0}\}$ обобщенных функций Радемахера, носители которых совпадают с e_0 (определение этих функций см. в начале § 1.1). Положим $\varphi_n = (\mu e_0)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} r_{n,e_0}$. По теореме Римана — Лебега $\varphi_n \rightarrow 0$ слабо в $L_p(\mu)$. Поскольку $P_{e_0}K : L_p(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$ — компактный оператор, то $\|P_{e_0}K\varphi_n\| \rightarrow 0$. Следовательно, найдется номер n_0 такой, что $\|P_{e_0}K\varphi_n\| \leq \|T\|$ для всех $n \geq n_0$. Тогда для всех $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \|T\| &\geq \|T\varphi_n\| \geq \|P_{e_0}a\varphi_n + P_{e_0}K\varphi_n\| \geq \\ &\geq \|a\varphi_n\| - \|P_{e_0}K\varphi_n\| \geq 3\|T\| - \|T\| = 2\|T\|, \end{aligned}$$

что невозможно. Итак, $a \in L_\infty(\mu)$ и $Af = af$, $f \in L_p(\mu)$, — линейный непрерывный оператор в $L_p(\mu)$. Следовательно, $T = A + K$ — линейный непрерывный интегральный оператор 3-го рода в $L_p(\mu)$. $\triangleright$

§ 1.3. О подобии линейных операторов в L_p интегральным операторам 1-го или 2-го рода

Пусть (X, μ) — пространство с положительной σ -конечной мерой μ , $L_p := L_p(X, \mu)$, $\|\cdot\|$ — норма в L_p . Через $B(L_p)$ обозначим совокупность всех линейных непрерывных операторов, действующих из L_p в L_p , через $\mathbf{1}$ обозначим тождественный оператор в L_p .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.1. Интегральный оператор $T \in B(L_p)$ называется *карлемановским*, если его ядро $K(s, t)$ удовлетворяет условию

$$\int_X |K(s, t)|^q d\mu(t) < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

для почти всех $s \in X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.2. Оператор $W \in B(L_p)$ называется *изоморфизмом*, если существует обратный $W^{-1} \in B(L_p)$. Изоморфизм $U \in B(L_2)$ такой, что $U^{-1} = U^*$ называется *унитарным оператором*, здесь U^* — сопряженный к U оператор. Замкнутые подпространства G, F пространства L_p называются *изоморфными*, если найдется линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор, отображающий G на F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.3. Говорят, что 1) $T_1 \in B(L_p)$ *подобен* $T_2 \in B(L_p)$, если имеется изоморфизм $W \in B(L_p)$ такой, что $WT_1W^{-1} = T_2$; 2) $R_1 \in B(L_2)$ *унитарно эквивалентен* $R_2 \in B(L_2)$, если $UR_1U^{-1} = R_2$ для некоторого унитарного оператора $U \in B(L_2)$.

Напомним еще, что по определению 0 принадлежит предельному спектру $\sigma_c(Q)$ оператора $Q \in B(L_r)$, если в L_r существует слабо сходящаяся к 0 последовательность $\{\psi_n\}$, $\|\psi_n\|_r = 1$, $n = 1, 2, \dots$, которую Q отображает в последовательность, сходящуюся к 0 по норме L_r .

В [49] Дж. фон Нейман доказал, что самосопряженный оператор S в $L_2(a, b)$ унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору тогда и только тогда, когда $0 \in \sigma_c(S)$. В [14, теорема 1; 19, теорема IV.3.6; 53, теорема 7.3] показано, что если L_2 сепарабельно, мера μ не является чисто атомической (т. е. в X имеется множество положительной меры, не содержащее атомов меры μ), то $T \in B(L_2)$ унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору в том и только в том случае, когда $0 \in \sigma_c(T^*)$. Отсюда следует вывод [23, с. 61, теорема 11]: если L_2 — комплексное сепарабельное пространство, то любой оператор из $B(L_2)$ унитарно эквивалентен оператору вида $\lambda 1 + C$, где C — карлемановский интегральный оператор. Из [16, с. 754; 19, теорема 1.2.12] вытекает, что всякий интегральный оператор из $B(L_2)$ унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору. В [21, следствие 1; 22, с. 123, теорема 8] установлено, что каждый интегральный оператор 3-го рода $Mf(s) = a(s)f(s) + Df(s)$ из $B(L_2)$ унитарно эквивалентен оператору $\alpha 1 + L$, где L — карлемановский интегральный оператор, α — любое существенное значение функции $a(s)$.

Все эти результаты будут доказаны в главе 2, посвященной характеристическим и спектральным свойствам интегральных операторов в L_2 . В связи с приведенными выше результатами возникает вопрос: возможно ли построение аналогичной теории для линейных операторов в L_p при $p \neq 2$ с заменой унитарной эквивалентности операторов подобием операторов? В частности:

1) Будет ли каждый интегральный оператор 3-го рода из $B(L_p)$ при $p \neq 2$ подобен карлемановскому интегральному (или хотя бы интегральному) оператору 1-го или 2-го рода?

2) Можно ли всякое линейное интегральное уравнение 3-го рода в L_p ($p \neq 2$) привести линейной непрерывной обратимой заменой к эквивалентному линейному интегральному уравнению 1-го или 2-го рода в L_p ?

3) Возможна ли характеристика произвольных интегральных и карлемановских интегральных операторов из $B(L_p)$, $p \neq 2$, в терминах спектра и его компонент?

Следующие теоремы 1.3.1, 1.3.2 и их следствия дают отрицательные ответы на эти и другие вопросы.

Напомним, что оператор $K \in B(L_p)$ называется почти компактным, если существует разбиение множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества X_n , $n = 1, 2, \dots$, такое, что $P_n K : L_p \rightarrow L_p$, $n = 1, 2, \dots$, — компактные операторы; здесь $P_n f = \chi_{X_n} f$, $f \in L_p$, χ_E — характеристическая функция множества E .

Теорема 1.3.1. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, множество $e \subset X$, $0 < \mu e < \infty$, не содержит атомов меры μ и в $X \setminus e$ есть подмножество положительной меры без атомов меры μ . Пусть $Af = \chi_e f$, $f \in L_p$, $Z \in B(L_p)$ —

произвольный компактный оператор. Тогда оператор $\tau = A + Z$ не подобен никакому оператору вида $\alpha 1 + K$, где $K \in B(L_p)$ — почти компактный оператор, α — число.

◁ Предположим противное: найдется изоморфизм $V \in B(L_p)$ такой, что $V\tau V^{-1} = \alpha 1 + K$. Рассмотрим всевозможные случаи: (1) $\alpha = 0$; (2) $\alpha = 1$; (3) $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

(1) Пусть $\alpha = 0$. Тогда $VA = KV - VZ$. Положим $B = KV - VZ$. Имеем $BL_p(e) = VAL_p(e) = VL_p(e)$. Так как $V \in B(L_p)$ — изоморфизм, то $H := VL_p(e) = BL_p(e)$ — замкнутое подпространство L_p , изоморфное $L_p(e)$. Поскольку B — почти компактный оператор, найдется разбиение множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества $X_n, n = 1, 2, \dots$, такое, что $P_n B : L_p \rightarrow L_p$ — компактный оператор для любого n ; здесь $P_n f = \chi_{X_n} f, f \in L_p$. Из замкнутости $L_p(X_n) = P_n L_p$ и принципа открытости отображения [7, теорема II.2.1] следует, что $H_n := P_n H$ — замкнутые подпространства L_p . Далее, $H_n = P_n BL_p(e)$, так что компактные операторы $P_n B$ отображают замкнутое подпространство $L_p(e)$ на замкнутые подпространства H_n . Зафиксируем n . Пусть S_e — открытый шар в $L_p(e)$. В силу принципа открытости отображения $P_n B S_e$ содержит шар. Так как этот шар относительно компактен, по теореме Ф. Рисса H_n конечномерно. Имеем $H = l_p(H_n)$, где $l_p(H_n)$ — подпространство L_p , состоящее из всех $f \in L_p$, представимых в виде

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n, \quad f_n \in H_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Итак, $VL_p(e) = H = l_p(H_n), \dim H_n < \infty, n = 1, 2, \dots$, носители всех функций из H_n содержатся в $X_n, n = 1, 2, \dots$. Получим отсюда противоречие.

Рассмотрим сначала случай $p > 2$. Пользуясь тем, что в e нет атомов меры μ , выберем равномерно ограниченную ортонормированную последовательность функций $\{y_m\}$ с носителями в e (в качестве $\{y_m\}$ можно взять систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{m,e}\}$ с носителями в e (определение $\{r_{m,e}\}$ см. в начале § 1.1)). По теореме Римана — Лебега $\{y_m\} \rightarrow 0$ слабо в L_p . Положим $x_m = Vy_m, m = 1, 2, \dots$. Для любой подпоследовательности $\{y_{i_k}\}$ и всех n имеем

$$n^{\frac{1}{2}} = \left\| \sum_{k=1}^n y_{i_k} \right\|_2 \leq (\mu e)^{\gamma} \|V^{-1}\| \left\| \sum_{k=1}^n x_{i_k} \right\|, \quad (1.3.1)$$

где $\gamma = \frac{p-2}{2p}$, $\|\cdot\|_2$ — норма в L_2 . Так как для любого n оператор $P_n V : L_p(e) \rightarrow H_n$ конечномерный, то он представим в виде

$$P_n V f = \sum_{j=1}^{m_n} (f, v_{j,n}) w_{j,n}, \quad m_n < \infty,$$

где $v_{j,n} \in L_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $w_{j,n} \in L_p(X_n)$, $j = 1, \dots, m_n$. Покажем, что $\{x_m\}$ сходится к 0 почти всюду. Из слабой сходимости $\{y_m\}$ к 0 получим для любого $n = 1, 2, \dots$

$$P_n x_m(s) = P_n V y_m(s) = \sum_{j=1}^{m_n} (y_m, v_{j,n}) w_{j,n}(s) \longrightarrow 0$$

для почти всех $s \in X_n$.

Докажем, что из $\{x_m\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{i_k}\}$ так, чтобы

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_{i_k} \right\| \leq C^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3.2)$$

Поскольку $\{x_m\} \rightarrow 0$ почти всюду, по теореме Егорова найдется возрастающая к X последовательность множеств F_j , $j = 1, 2, \dots$, с конечными положительными мерами такая, что $\{x_m\} \rightarrow 0$ равномерно на каждом F_j . Построим подпоследовательность $\{x_{i_k}\}$, удовлетворяющую (1.3.2), по аналогии с построениями в доказательстве теоремы 3 главы XII в [45, с. 201]. Положим $x_{i_1} = x_1$, $s_1 = x_{i_1}$. Пусть номер j_1 такой, что

$$\int_{X \setminus F_{j_1}} |s_1|^p d\mu \leq 1.$$

Пользуясь равномерной сходимостью $\{x_m\}$ к 0 на F_{j_1} , выберем x_{i_2} так, чтобы

$$\int_{F_{j_1}} |s_1 + x_{i_2}|^p d\mu \leq \int_{F_{j_1}} |s_1|^p d\mu + 1.$$

Пусть $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}}$, $F_{j_1}, \dots, F_{j_{n-1}}$ найдены так, что

$$\int_{X \setminus F_{j_{m-1}}} |s_{m-1}|^p d\mu \leq 1, \quad m = 2, \dots, n, \quad (1.3.3)$$

$$\int_{F_{j_{m-2}}} |s_{m-2} + x_{i_{m-1}}|^p d\mu \leq \int_{F_{j_{m-2}}} |s_{m-2}|^p d\mu + 1, \quad m = 3, \dots, n,$$

где $s_m = \sum_{k=1}^m x_{i_k}$. Снова, пользуясь равномерной сходимостью $\{x_m\}$ к 0 на $F_{j_{n-1}}$, выберем x_{i_n} так, чтобы

$$\int_{F_{j_{n-1}}} |s_{n-1} + x_{i_n}|^p d\mu \leq \int_{F_{j_{n-1}}} |s_{n-1}|^p d\mu + 1. \quad (1.3.4)$$

В силу (1.3.4), неравенства Гёльдера и (1.3.3)

$$\begin{aligned} \|s_n\|^p &= \|s_{n-1} + x_{i_n}\|^p = \int_{F_{j_{n-1}}} |s_{n-1} + x_{i_n}|^p d\mu + \int_{X \setminus F_{j_{n-1}}} |s_{n-1} + x_{i_n}|^p d\mu \leq \\ &\leq \int_{F_{j_{n-1}}} |s_{n-1}|^p d\mu + 1 + \left[\left(\int_{X \setminus F_{j_{n-1}}} |s_{n-1}|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{X \setminus F_{j_{n-1}}} |x_{i_n}|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \leq \\ &\leq \|s_{n-1}\|^p + 1 + [1 + M]^p, \end{aligned}$$

где $M = \sup_{m=1,2,\dots} \|x_m\|$. Пусть $C = 1 + [1 + M]^p$, тогда $\|s_n\|^p \leq \|s_{n-1}\|^p + C$. Отсюда $\|s_n\|^p \leq Cn$, $n = 1, 2, \dots$, и неравенство (1.3.2) доказано. Так как неравенства (1.3.1) и (1.3.2) несовместимы при $p > 2$, получаем противоречие.

Пусть $1 < p < 2$. Как показано выше, $L_p(e)$ изоморфно $l_p(H_n)$, $\dim H_n < \infty$, $n = 1, 2, \dots$, и носители всех функций из H_n содержатся в X_n , $n = 1, 2, \dots$. В силу предложения С.4.2 из [37, с. 30] $(l_p(H_n))^* = l_q(H_n^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, при этом $\dim H_n^* = \dim H_n < \infty$, $n = 1, 2, \dots$, и носители всех функций из H_n^* содержатся в X_n , $n = 1, 2, \dots$ (здесь звездочка означает переход к сопряженному пространству). Следовательно, $L_q(e) = (L_p(e))^*$ изоморфно $l_q(H_n^*)$, $q > 2$, что по доказанному невозможно.

(2) Пусть $\alpha = 1$. Имеем $VA = V + B$ и $V(1 - A) = -B$. Положив $A_1 f = (1 - A)f = \chi_{X \setminus e} f$, $f \in L_p$, получим $VA_1 = -B$. Пусть $g \in X \setminus e$, $0 < \mu g < \infty$, и в g нет атомов меры μ . Тогда $VL_p(g) = VA_1 L_p(g) = -BL_p(g)$, и доказательство завершается повторением доказательства в случае (1.3.1).

(3) Имеем $V\tau = \alpha V + KV$. Отсюда $VA + VZ = \alpha V + KV$ и $V(A - \alpha 1) = KV - VZ = B$. Спектр $A = \{0; 1\}$ и $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, поэтому $A - \alpha 1$ изоморфизм, следовательно $V(A - \alpha 1) =$ изоморфизм. Значит, $B =$ изоморфизм. Поскольку $B =$ почти компактный оператор, все операторы $P_n B$ компактны. Выберем номер j и множество $E \subset X_j$ так, чтобы $0 < \mu E < \infty$ и E не содержало атомов меры μ . Рассмотрим равномерно ограниченную ортонормированную систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{m,E}\}$, носители которых совпадают с E . По теореме Римана — Лебега $\{r_{m,E}\} \rightarrow 0$ слабо в L_q . Так как $P_j B : L_p \rightarrow L_p =$ компактный оператор, то

$$\|B^* r_{m,E}\|_q = \|B^* P_j r_{m,E}\|_q \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$; здесь $\|\cdot\|_q$ — норма в L_q . Но $\|r_{m,E}\|_q = (\mu E)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}$, $m = 1, 2, \dots$, поэтому B^* и B не являются изоморфизмами. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\triangleright$

Теорема 1.3.2. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, множество e удовлетворяет условиям теоремы 1.3.1, $Af = \chi_e f$, $f \in L_p$, $Y \in B(L_p)$ — произвольный почти компактный оператор, $\tilde{\tau} = A + Y$. Тогда для любого изоморфизма $W \in B(L_p)$ оператор $\tilde{\tau}W$ не может быть представлен в виде $\alpha\mathbf{1} + K$, где K — почти компактный оператор.

◁ Допустим, что существует изоморфизм $W \in B(L_p)$ такой, что $\tilde{\tau}W = \alpha\mathbf{1} + K$. Тогда $AW = \alpha\mathbf{1} + K - YW$. Положим $V = W^{-1}$. Имеем $A = \alpha V + KV - Y$. Пусть $\tilde{B} = KV - Y$. Оператор $\tilde{B}$ почти компактен, следовательно, найдется разбиение $\{X_n\}$ множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества такое, что все операторы $P_n\tilde{B} : L_p \rightarrow L_p$ компактны; здесь $P_nf = \chi_{X_n}f$, $f \in L_p$. Рассмотрим случаи $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$. В первом случае $L_p(e) = AL_p(e) = \tilde{B}L_p(e)$. Выберем номер j так, чтобы $\mu(e \cap X_j) > 0$. Положим $E = e \cap X_j$ и рассмотрим систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{m,E}\}$, носители которых совпадают с E . Имеем $\|r_{m,E}\| = (\mu E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$, $m = 1, 2, \dots$. С другой стороны, $r_{m,E} = P_j r_{m,E} = P_j A r_{m,E} = P_j \tilde{B} r_{m,E} \rightarrow 0$ по норме L_p при $m \rightarrow \infty$, так как $P_j \tilde{B} : L_p \rightarrow L_p$ — компактный оператор и $\{r_{m,E}\} \rightarrow 0$ слабо в L_p по теореме Римана — Лебега. Перейдем ко второму случаю. Пусть $g \subset X \setminus e$, $0 < \mu g < \infty$ и в g нет атомов меры μ . Тогда $VL_p(g) = \frac{1}{\alpha}(A - \tilde{B})L_p(g) = -\frac{1}{\alpha}\tilde{B}L_p(g)$, что также невозможно (это следует из доказательств предыдущей теоремы, случай (2)).

Следствие 1.3.1. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Тогда для любого изоморфизма $W \in B(L_p)$ оператор $W\tau W^{-1}$ не представим в виде $\alpha\mathbf{1} + R$, где R — интегральный оператор.

Следствие 1.3.1 непосредственно вытекает из теоремы 1.3.1, так как любой интегральный оператор из $B(L_p)$ почти компактен в силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3.

Следствие 1.3.2. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Тогда для любого изоморфизма $W \in B(L_p)$ оператор $\tilde{\tau}W$ не представим в виде $\alpha\mathbf{1} + R$, где R — интегральный оператор.

◁ Следует из теоремы 1.3.2. ▷

Следствие 1.3.3. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ и $\tilde{\tau} = A + Q$, где $Q \in B(L_p)$ — интегральный оператор. Тогда интегральное уравнение 3-го рода $(A + Q)x = f \in L_p$ не может быть сведено заменой $y = Wx$, где $W \in B(L_p)$ — изоморфизм, к эквивалентному линейному интегральному уравнению в L_p 1-го или 2-го рода. Если Q — компактный интегральный оператор, аналогичное утверждение справедливо для замены $y = Wx$, $h = Wf$.

◁ Вытекает из следствий 1.3.1 и 1.3.2. ▷

Следствие 1.3.4. При $p \neq 2$ невозможна характеристика интегральных и карлемановских интегральных операторов из $B(L_p)$ в терминах спектра и его компонент.

В самом деле, положив в теореме 1.3.1 $Z = 0$, получим в силу следствия 1.3.1, что A не подобен никакому интегральному оператору, хотя

$$\text{Ker} A = L_p(X \setminus e, \mu), \quad \text{Ker} A^* = L_q(X \setminus e, \mu).$$

Замечание 1.3.1. Условие неатомичности меры μ существенно: в противном случае каждый оператор из $B(L_p(\mu))$ является карлемановским интегральным оператором.

Замечание 1.3.2. Если X не имеет атомов меры μ (например, X — измеримое по Лебегу множество евклидова пространства, μ — мера Лебега), в качестве e в теоремах 1.3.1, 1.3.2 и следствиях 1.3.1–1.3.4 можно выбрать любое множество ненулевой меры с дополнением ненулевой меры.

Глава 2. Интегральные операторы в L_p

§ 2.1. Алгебраические, спектральные и характеристические свойства интегральных операторов в L_p

В книге важную роль играют карлемановские интегральные операторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. Интегральный оператор $T : D_T \subset L_2(Y, \nu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ называется *карлемановским*, если его ядро $K(s, t)$ удовлетворяет условию Карлемана [46]

$$\int_Y |K(s, t)|^2 d\nu(t) < \infty$$

для почти всех $s \in X$. Имеет место следующий критерий.

Теорема 2.1.1 [12, 19]. Для того чтобы оператор $K : D_K \subset L_2(Y, \nu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ был карлемановским интегральным оператором, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\Lambda \in L_0(X, \mu)$ такая, что для всех $f \in D_K$

$$|Kf(s)| \leq \Lambda(s) \|f\|$$

для почти всех $s \in X$.

Лемма 2.1.1 (о правом умножении [48]). Пусть

$$T : D_T \subset L_2(\nu) := L_2(Y, \nu) \rightarrow L_2(X, \mu)$$

— карлемановский интегральный оператор и $A \in B(L_2(\nu))$. Тогда TA — карлемановский интегральный оператор.

◁ Для любого $f \in D_{TA}$ имеем при почти всех $s \in X$

$$|TAf(s)| \leq \Lambda(s) \|Af\| \leq \Lambda(s) \|A\| \|f\|. \triangleright$$

Эта лемма впервые была сформулирована и доказана (другим методом) в [48].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.2. Обозначим через K_1 совокупность всех карлемановских интегральных операторов из $B(L_2(\mu))$. Через K_2 обозначим множество операторов из $B(L_2(\mu))$, представимых в виде $\alpha 1 + L$, где L — произвольный оператор из K_1 , α — произвольное число. Через K_3 обозначим совокупность всех операторов из $B(L_2(\mu))$ вида $a(s)f(s) + Lf(s)$,

$f \in L_2(\mu)$, где a — произвольная функция из $L_\infty(\mu)$, L — произвольный оператор из K_1 .

Теорема 2.1.2. *Множества K_1, K_2, K_3 являются алгебрами.*

Справедливость утверждения теоремы непосредственно следует из леммы о правом умножении.

В отличие от алгебр K_1, K_2, K_3 множества $I_{2,1}, I_{2,2}, I_{2,3}$ интегральных операторов 1-го, 2-го и 3-го родов в $L_2(\mu)$, введенные в определении 1.2.1 из § 1.2, не являются алгебрами. Чтобы показать это, докажем следующую теорему.

Теорема 2.1.3. *Пусть мера μ не является чисто атомической. Тогда в $L_2(\mu)$ найдется компактный интегральный оператор S такой, что $S^3 = 0$, операторы $S^2, F_\lambda = S(S - \lambda \mathbf{1})^{-1}, F_\lambda^2$ неинтегральные для любого $\lambda \neq 0$.*

◁ Пусть E ($\mu E > 0$) — подмножество X , не содержащее атомов меры μ . Разобьем E на попарно не пересекающиеся множества e, e_1, e_2 с положительными мерами.

Напомним, что ортонормированная система $\{\psi_n\}$ называется системой абсолютной сходимости для l_2 [35], если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \psi_n(s)|$$

сходится почти всюду для любой последовательности $\{a_n\} \in l_2$, причем множество сходимости ряда зависит от $\{a_n\}$.

Пусть все функции ортонормированной последовательности $\{\varphi_n\}$ имеют носители в e_2 , сама последовательность $\{\varphi_n\}$ является системой абсолютной сходимости для l_2 и удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(s)|^2 = \infty$$

для всех $s \in E_0 \subset e_2, \mu E_0 > 0$. Тогда найдутся множество $E_1 \subset E_0, \mu E_1 > 0$, и стремящаяся к 0 последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \varphi_n(s)|^2 = \infty \quad (2.1.1)$$

для всех $s \in E_1$.

Рассмотрим компактный оператор S в $L_2(\mu)$, определяемый равенством

$$Sf = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}}(f, r_{n,e}) \frac{\chi_{g_n}}{\sqrt{\mu g_n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \left(f, \frac{\chi_{g_n}}{\sqrt{\mu g_n}} \right) \varphi_n;$$

здесь $\{r_{n,e}\}$ — ортонормированная система обобщенных функций Радемахера с носителями в e (определение этих функций см. в § 1.1), $\{g_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств $g_n \subset e_1$ ($n = 1, 2, \dots$) с положительными мерами. Так как множества g_n попарно не пересекаются и $\{\varphi_n\}$ — система абсолютной сходимости для l_2 , то для любой функции $f \in L_2(\mu)$ для почти всех $s \in X$

$$\begin{aligned} \int_X \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \frac{\chi_{g_n}(s)}{\sqrt{\mu g_n}} r_{n,e}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \varphi_n(s) \frac{\chi_{g_n}(t)}{\sqrt{\mu g_n}} \right| |f(t)| d\mu(t) &\leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \frac{\chi_{g_n}(s)}{\sqrt{\mu g_n}} \frac{1}{\sqrt{\mu e}} \int_e |f(t)| d\mu(t) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} |\varphi_n(s)| \int_X |f(t)| \frac{\chi_{g_n}(t)}{\sqrt{\mu g_n}} d\mu(t) < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, S — интегральный оператор.

Покажем, что S^2 — неинтегральный оператор. Мы имеем

$$S^2 f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(f, r_{n,e}) \varphi_n.$$

Если бы S^2 был интегральным оператором (с ядром $K_2(s, t)$), то для всех n и почти всех $s \in X$

$$\begin{aligned} \int_X K_2(s, t) r_{n,e}(t) d\mu(t) &= (S^2 r_{n,e})(s) = \lambda_n \varphi_n(s), \\ \int_X K_2(s, t) R_n(t) d\mu(t) &= (S^2 R_n)(s) = 0, \end{aligned}$$

где $\{R_n\}$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке последовательности $\{r_{n,e}\}$, состоящий из ограниченных функций. Отсюда и из [11, с. 154] следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \varphi_n(s)|^2 < \infty \quad \text{для почти всех } s \in X,$$

что противоречит (2.1.1). Итак, S^2 — неинтегральный оператор.

Имеем $S^3 = 0$, поэтому спектральный радиус $r_\sigma(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|S^n\|)^{\frac{1}{n}}$ равен 0. Следовательно, спектр S есть $\{0\}$. Из $S^3 = 0$ вытекает также, что для всех $\lambda \neq 0$

$$R_\lambda := (S - \lambda \mathbf{1})^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \left(\mathbf{1} + \frac{S}{\lambda} + \frac{S^2}{\lambda^2} \right),$$

$$F_\lambda = SR_\lambda = -\frac{1}{\lambda} \left(S + \frac{S^2}{\lambda} \right).$$

Если бы оператор F_λ (резольвента Фредгольма оператора S) был интегральным, то и оператор $-S^2/\lambda$ был бы интегральным, что невозможно. Так как $F_\lambda^2 = \frac{1}{\lambda^2} S^2$, то F_λ^2 — неинтегральный оператор. $\triangleright$

Итак, множество $I_{2,1}$ всех интегральных операторов в $L_2(\mu)$ не является алгеброй.

Теорема 2.1.4. Множества $I_{2,1} \cup I_{2,2}$ и $I_{2,3}$ не являются алгебрами.

$\triangleleft$ Покажем, что множество $I_{2,3}$ всех интегральных операторов 3-го рода в $L_2(\mu)$ — не алгебра. Предположим противное и возьмем оператор S из теоремы 2.1.3. Имеем $S \in I_{2,3}$ и $S^2 f(s) = a(s)f(s) + Lf(s)$ для всех $f \in L_2(\mu)$, где L — интегральный оператор, $a \in L_\infty(\mu)$. Из доказательства теоремы 2.1.3 следует, что спектр оператора S^2 есть $\{0\}$. Следовательно, спектр $(S^2)^*$ есть $\{0\}$. Отсюда в силу следствия 1.2.1 теоремы 1.2.2 получим $a(s) = 0$. Следовательно, $S^2 = L$. Но по теореме 2.1.3 оператор S^2 неинтегральный, что противоречит интегральности L .

Аналогично доказывается, что $I_{2,1} \cup I_{2,2}$ не является алгеброй. $\triangleright$

В алгебре $B(L_2(\mu))$ имеется естественная инволюция $J : T \rightarrow T^*$. Однако все ее подмножества $K_1, K_2, K_3, I_{2,1}, I_{2,2}, I_{2,3}$ и введенные в определениях 1.2.2, 1.2.3 из § 1.2 множества $C_{2,1}, C_{2,2}, C_{2,3}, B_{2,1}, B_{2,2}, B_{2,3}$ не инвариантны относительно этой инволюции, как показывает следующий пример.

Пример 2.1.1. Пусть $\{\omega_n\}$ — ортонормированный базис в $L_2(0,1)$, состоящий из функций Уолша, $\{e_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из $(0,1)$ с положительными мерами, μ — мера Лебега. Определим оператор $T_0 \in B(L_2(0,1))$ равенством

$$T_0 f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n) \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}.$$

Оператор T_0 принадлежит множеству K_1 — самому узкому из всех перечисленных выше подмножеств, в то время как T_0^* не принадлежит самому широкому — $B_{2,3}$.

$\triangleleft$ Так как e_n ($n = 1, 2, \dots$) попарно не пересекаются, то T_0 — карлемановский интегральный оператор, т. е. $T_0 \in K_1$.

Покажем, что $T_0^* \notin B_{2,3}$. Предположим противное. Тогда найдутся $a \in L_\infty(\mu)$ и компактный по мере оператор $M \in B(L_2(0,1))$ такие, что $T_0^* f = af + Mf$, $f \in L_2(0,1)$. Так как $\|T_0 f\| = \|f\|$ для всех $f \in L_2(0,1)$, то $0 \notin \sigma_c(T_0)$. Поэтому в силу следствия 1.2.1 теоремы 1.2.2 нуль не является существенным значением функции a . Значит, $\frac{1}{a} \in L_\infty(0,1)$ и $\frac{1}{a}M$ — компактный по мере оператор. Мы имеем

$$\frac{1}{a} T_0^* = 1 + \frac{1}{a} M,$$

$$\frac{1}{a} \omega_n = \frac{1}{a} T_0^* \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} + \frac{1}{a} M \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}.$$

По теореме 1.1.2

$$\left\| \frac{1}{a} M \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} \right\|_1 \rightarrow 0.$$

Кроме того, $\|\chi_{e_n}/\sqrt{\mu e_n}\|_1 \rightarrow 0$. С другой стороны, для всех n имеем $\|\frac{1}{a} \omega_n\|_1 = \|\frac{1}{a}\|_1 \neq 0$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\triangleright$

Перейдем к описанию унитарных моделей введенных выше множеств операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.3. Будем говорить, что λ принадлежит предельному спектру $\sigma_c(H)$ оператора H в $L_2(\mu)$, если в области определения оператора H найдется ортонормированная последовательность $\{h_n\}$ такая, что $\|(H - \lambda I)h_n\| \rightarrow 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.4. Операторы T_1 и T_2 в $L_2(\mu)$ называются унитарно эквивалентными, если существует унитарный оператор $U \in B(L_2(\mu))$ такой, что $UT_1U^{-1} = T_2$.

В 1935 году Дж. фон Нейман [49] установил следующий фундаментальный результат.

Теорема 2.1.5. Пусть T — самосопряженный оператор в $L_2(a, b)$ и $0 \in \sigma_c(T)$. Тогда T унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору.

На самосопряженный случай этот результат был обобщен автором [13, 14] и И. Вайдманом [53].

Теорема 2.1.6. Пусть T — плотно определенный в сепарабельном пространстве $L_2(\mu)$ замыкаемый линейный оператор и $0 \in \sigma_c(T^*)$. Тогда T унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору.

Эта теорема будет доказана в следующем параграфе (см. теоремы 2.2.2, 2.2.3).

Из теоремы 2.1.6 получаем три важных следствия.

Следствие 2.1.1. Пусть $L_2(\mu)$ — сепарабельное пространство, $T \in B(L_2(\mu))$ и $\lambda \in \sigma_c(T^*)$. Тогда T унитарно эквивалентен оператору $\bar{\lambda}I + L$, где L — карлемановский интегральный оператор.

Отметим, что утверждения теоремы 2.1.6 и ее следствия 2.1.1 справедливы и в случае, когда $L_2(\mu)$ — вещественное пространство.

Следствие 2.1.2. Пусть $L_2(\mu)$ — комплексное сепарабельное пространство, $T \in B(L_2(\mu))$. Тогда T унитарно эквивалентен оператору из K_2 .

Это следствие непосредственно вытекает из следствия 2.1.1, так как предельный спектр $\sigma_c(T^*)$ не пуст.

Следствие 2.1.3. Пусть H — сепарабельное комплексное гильбертово пространство, $T : H \rightarrow H$ — линейный непрерывный оператор. Тогда T унитарно эквивалентен оператору из K_2 .

Теорема 2.1.7. Пусть мера μ сепарабельна и не имеет атомов. Тогда каждый оператор из $B_{2,3}$ унитарно эквивалентен оператору из K_2 .

◁ Если $L_2(\mu)$ — комплексное пространство, справедливость теоремы вытекает из следствия 2.1.2 теоремы 2.1.6.

Пусть $L_2(\mu)$ — вещественное пространство, $T \in B_{2,3}$. Тогда $Tf = af + Lf$, $f \in L_2(\mu)$, где a — вещественная функция из $L_\infty(\mu)$, $L \in B_{2,1}$. Пусть λ — какое-нибудь существенное значение функции a . В силу следствия 1.2.1 теоремы 1.2.2 имеем $\lambda \in \sigma_c(T^*)$. Отсюда и из следствия 2.1.1 теоремы 2.1.6 вытекает справедливость теоремы 2.1.7. ▷

Теорема 2.1.8. Каждый оператор из $C_{2,3}$, $I_{2,3}$, $B_{2,2}$, $C_{2,2}$, $I_{2,2}$ унитарно эквивалентен оператору из K_2 .

Действительно, все перечисленные в этой теореме множества содержатся в $B_{2,3}$.

Теорема 2.1.9. Пусть мера μ сепарабельна и не является чисто атомической. Тогда каждый оператор из $B_{2,1}$, $C_{2,1}$, $I_{2,1}$ унитарно эквивалентен оператору из K_1 .

◁ Пусть $e \subset X$, $0 < \mu e < \infty$ и в e нет атомов меры μ . Возьмем произвольный оператор $T \in B_{2,1} \supset C_{2,1} \supset I_{2,1}$. В силу теоремы 1.1.2 оператор $P_e T : L_2(\mu) \rightarrow L_1(\mu)$ компактен. Следовательно, $T^* P_e : L_\infty(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ компактен. Рассмотрим ортонормированную систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{n,e}\}$, носители которых совпадают с e . Тогда $\|T^* r_{n,e}\| = \|T^* P_e r_{n,e}\| \rightarrow 0$. Значит, $0 \in \sigma_c(T^*)$ и по теореме 2.1.6 оператор T унитарно эквивалентен оператору из K_1 . ▷

Рассмотрим еще одну задачу о характеристических свойствах операторов, восходящую к работе Б. Мизры, Д. Шпайзера, Д. Таргонского [48]. В этой работе ими было введено понятие сильного карлемановского оператора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.5 [48]. Оператор $T \in B(L_2(\mu))$ называется *сильным карлемановским интегральным оператором*, если для любого унитарного оператора $U \in B(L_2(\mu))$ оператор UTU^{-1} также является карлемановским интегральным оператором.

Характеристическое свойство таких операторов устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.1.10 [48]. Пусть мера μ не является чисто атомической. Для того чтобы оператор $T \in B(L_2(\mu))$ был сильным карлемановским интегральным оператором, необходимо и достаточно, чтобы T был интегральным оператором Гильберта — Шмидта, т. е. его ядро $K(s, t)$ удовле-

творяло условию Гильберта — Шмидта

$$\int_X \int_X |K(s, t)|^2 d\mu(t) d\mu(s) < \infty.$$

Если обозначить через K_1^s совокупность всех сильных карлемановских интегральных операторов из $B(L_2(\mu))$, а через C_2 — множество всех интегральных операторов Гильберта — Шмидта из $B(L_2(\mu))$, то теорема 2.1.10 допускает краткую запись: $K_1^s = C_2$.

Введем по аналогии с определением 2.1.5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.6. Пусть $F \subset B(L_2(\mu))$. Оператор $T \in F$ назовем *сильным F -оператором*, если для любого унитарного оператора $U \in B(L_2(\mu))$ оператор UTU^{-1} принадлежит F . Совокупность всех сильных F -операторов обозначим через F^s .

Пусть C — множество всех компактных операторов из $B(L_2(\mu))$, $\tilde{C}$ — совокупность всех операторов вида $\alpha \mathbf{1} + L$, где α — произвольное число, L — произвольный оператор из C . Через C_2 обозначим совокупность всех интегральных операторов Гильберта — Шмидта из $B(L_2(\mu))$, через $\tilde{C}_2$ — множество всех операторов вида $\alpha \mathbf{1} + H$, где α — произвольное число, H — произвольный оператор из C_2 .

Теорема 2.1.11. Пусть мера μ конечна, сепарабельна и не имеет атомов. Тогда $B_{2,3}^s = B_{2,2}^s = C_{2,3}^s = C_{2,2}^s = \tilde{C}$.

Теорема 2.1.12. Пусть мера μ сепарабельна, σ -конечна и не является чисто атомической. Тогда $B_{2,1}^s = C_{2,1}^s = C$.

Теорема 2.1.13. Пусть мера μ сепарабельна, σ -конечна и не является чисто атомической. Тогда $I_{2,1}^s = K_1^s = C_2$.

Теорема 2.1.14. Пусть мера μ конечна, сепарабельна и не имеет атомов. Тогда $I_{2,3}^s = K_3^s = (I_{2,1} \cup I_{2,2})^s = K_2^s = \tilde{C}_2$.

Перейдем к доказательству этих теорем.

◁ **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1.11.** Достаточно показать, что $B_{2,3}^s = \tilde{C}$. Так как мера μ конечна, сепарабельна и не имеет атомов, то в силу теоремы 3 из [41, с. 170] об изоморфизме пространств с мерами можно считать, не ограничивая общности, что $L_2 = L_2(0, 1)$, μ — мера Лебега.

Пусть $T \in B_{2,3}^s$. Тогда $T = A + Q$, где $Af(s) = a(s)f(s)$, $f \in L_2$, $Q \in B_{2,1}$. В силу теоремы 1.1.2 Q компактен как оператор из L_2 в L_1 (такие операторы называются далее $\langle 2, 1 \rangle$ -компактными).

Выберем в доказательстве теоремы 1.2.2 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, и рассмотрим ортонормированную систему $\{f_n\}$ из этого доказательства. Мы имеем $\|(\overline{a(s)} - \overline{\alpha})f_n\| \leq \frac{1}{n}$, $\|Q^*f_n\| \leq \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Отсюда $\|(T^* - \overline{\alpha}\mathbf{1})f_n\| \leq \frac{2}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Положим $K = T - \alpha\mathbf{1}$. Тогда

$\sum_{n=1}^{\infty} \|K^* f_n\|^2 < \infty$. Введем оператор Гильберта — Шмидта

$$\Gamma f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, f_n) K^* f_n, \quad f \in L_2.$$

Так как $K^* f_n - \Gamma f_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, то $\text{im}(K - \Gamma^*) \equiv (K - \Gamma^*)L_2 \subseteq F^\perp$, где $F^\perp$ — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке последовательности $\{f_n\}$. Определим унитарный оператор W в L_2 равенствами

$$W f_n^\perp = r_n, \quad W f_n = u_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\{f_n^\perp\}$ — ортонормированный базис в $F^\perp$, $\{r_n\}$ — ортонормированная последовательность функции Радемахера, $\{u_n\} = \{w_n\} \setminus \{r_n\}$, $\{w_n\}$ — ортонормированный базис Уолша в $L_2(0, 1)$. Тогда

$$\text{im } W(K - \Gamma^*)W^{-1} \subseteq W F^\perp = R, \quad (2.1.2)$$

где R — замкнутая линейная оболочка последовательности $\{r_n\}$. По условию теоремы $WTW^{-1} = A_1 + Q_1$, где $A_1 f(s) = a_1(s)f(s)$, $f \in L_2$, $a_1 \in L_\infty$, Q_1 — $\langle 2, 1 \rangle$ -компактный оператор в L_2 . Тогда $WKW^{-1} = A_1 + Q_1 - \alpha 1$. Так как $W(K^* - \Gamma)W^{-1}u_n = W(K^* - \Gamma)f_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, то

$$WTW^{-1}u_n = WK^*W^{-1}u_n = \overline{a_1(s)}u_n - \bar{\alpha}u_n + Q_1^*u_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Но $\|WTW^{-1}u_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\|Q_1^*u_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так как $Q_1^*: L_\infty \rightarrow L_2$ — компактный оператор, $\{u_n\}$ — ортонормированная последовательность и $|u_n(s)| = 1$, $n = 1, 2, \dots$, для почти всех $s \in [0, 1]$. Следовательно, $\|\overline{a_1(s)} - \bar{\alpha}\|u_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что $a_1(s) = \alpha$ для почти всех $s \in [0, 1]$. Предположим противное. Тогда найдутся $\beta > 0$ и $e \subset [0, 1]$ такие, что $\mu e > 0$ и $|a_1(s) - \alpha| \geq \beta$ для всех $s \in e$. Имеем $\|\overline{a_1(s)} - \bar{\alpha}\|u_n\| \geq \beta\sqrt{\mu e}$, что противоречит $\|\overline{a_1(s)} - \bar{\alpha}\|u_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$WKW^{-1} = A_1 - \alpha 1 + Q_1 = Q_1.$$

В силу (2.1.2) $\text{im } W(K - \Gamma^*)W^{-1} \subseteq R$. Тогда $\text{im}(Q_1 - W\Gamma^*W^{-1}) \subseteq R$. Таким образом, оператор $Q_2 = Q_1 - W\Gamma^*W^{-1}$ $\langle 2, 1 \rangle$ -компактен и принимает значения в R . Покажем, что Q_2 — компактный оператор. Пусть $\{\psi_n\}$ — произвольная слабо сходящаяся к 0 последовательность. Тогда $\{Q_2\psi_n\}$ сходится к 0 по норме $L_1(0, 1)$. Так как $Q_2\psi_n \in R$, $n = 1, 2, \dots$, то по неравенству Хинчина [11, с. 154] $\|Q_2\psi_n\| \leq 8\|Q_2\psi_n\|_1$, где $\|\cdot\|_1$ — норма в $L_1(0, 1)$. Отсюда $\|Q_2\psi_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, Q_2 — компактный оператор. Тогда Q_1 — компактный оператор. Но $WTW^{-1} = \alpha 1 + Q_1$, поэтому $T = \alpha 1 + C$, где $C = W^{-1}Q_1W$ — компактный оператор. $\triangleright$

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1.12 содержится в первой части доказательства теоремы 1 из работы автора [15, с. 908–909], где использовалось лишь то, что T — сильный компактный по мере оператор.

Приведем короткое доказательство теоремы 2.1.12 в случае, когда мера μ конечна, сепарабельна и не имеет атомов. Пусть $T \in B_{2,1}^s \supset C_{2,1}^s$. По теореме 2.1.11 $T = \alpha \mathbf{1} + K$, где $K \in C$. Отсюда $\sigma_c(T^*) = \{\bar{\alpha}\}$. Кроме того, в силу следствия 1.2.1 теоремы 1.2.2 имеем $0 \in \sigma_c(T^*)$. Значит, $\alpha = 0$ и $T = K \in C$. ▷

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1.13. Равенство $I_{2,1}^s = C_2$ было установлено автором в [15, теорема 1]. Отсюда и из $K_1^s \subset I_{2,1}^s$ следует $K_1^s = C_2$. ▷

Другое доказательство утверждения $I_{2,1}^s = C_2$ приведено в книге П. Халмоша и В. Сандера [42].

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1.14. Достаточно показать, что $I_{2,3}^s = \tilde{C}_2$. Пусть $T \in I_{2,3}^s$. Из $I_{2,3}^s \subset B_{2,3}^s$ и теоремы 2.1.11 следует, что $T = \alpha \mathbf{1} + K$, где $K \in C$. Так как $T \in I_{2,3}$, то $Tf = af + Lf$, $f \in L_2$, где $a \in L_\infty$, $L \in I_{2,1}$. Из следствия 1.2.3 теоремы 1.2.2 получим $a(s) = \alpha$ для почти всех s и $L = K \in C$. Для любого унитарного оператора $U \in B(L_2)$ имеем $UTU^{-1} = \alpha \mathbf{1} + ULU^{-1}$. Так как $UTU^{-1} \in I_{2,3}$, то $UTU^{-1}f = bf + Mf$, $f \in L_2$, где $b \in L_\infty$, $M \in I_{2,1}$. Отсюда, из $ULU^{-1} \in C \subset B_{2,1}$ и следствия 1.2.3 теоремы 1.2.2 получаем $b(s) = \alpha$ для почти всех s и $ULU^{-1} = M \in I_{2,1}$. Таким образом, $L \in I_{2,1}^s$. По теореме 2.1.13 $L \in C_2$. Следовательно, $T = \alpha \mathbf{1} + L \in \tilde{C}_2$. ▷

Рассмотрим еще три важных класса операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.7. Интегральный оператор в $L_2(\mu)$ с ядром $K(s, t)$ назовем *ахиезеровским*, если ядро $K(s, t)$ удовлетворяет условию Н. И. Ахиезера [1]: существует положительная функция $\Lambda \in L_0(\mu)$ такая, что $|K(s, t)| \leq \Lambda(s)\Lambda(t)$ для $(\mu \times \mu)$ -почти всех $(s, t) \in X \times X$. Совокупность всех ахиезеровских интегральных операторов из $B(L_2(\mu))$ обозначим через A_1 . Через A_2 обозначим множество всех операторов вида $\alpha \mathbf{1} + M$, где α — произвольное число, M — произвольный оператор из A_1 . Через A_3 обозначим совокупность всех операторов, представимых в виде $a(s)f(s) + Gf(s)$, $f \in L_2(\mu)$, где a — произвольная функция из $L_\infty(\mu)$, операторы G пробегает все A_1 . Через A_1^s , A_2^s , A_3^s в соответствии с определением 2.1.6 обозначим классы сильных A_1 -, A_2 - и A_3 -операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.8. Оператор из $B(L_2(\mu))$ называется *ядерным*, если он является произведением двух интегральных операторов Гильберта — Шмидта из $B(L_2(\mu))$. Класс всех ядерных операторов обозначим через C_1 . Через $\tilde{C}_1$ обозначим множество всех операторов $\alpha \mathbf{1} + D$, где α — произвольное число, D — произвольный оператор из C_1 .

Из определения следует, что $C_1 \subset C_2$, т. е. каждый ядерный оператор является интегральным оператором Гильберта — Шмидта.

Теорема 2.1.15. Пусть мера μ сепарабельна, σ -конечна и не имеет атомов. Тогда $A_1^s = C_1$.

Эта теорема доказана в [15, теорема 2].

Теорема 2.1.16. Пусть мера μ конечна, сепарабельна и не имеет атомов. Тогда $A_3^s = A_2^s = C_1$.

Теорема 2.1.16 доказывается с помощью теоремы 2.1.15 так же, как теорема 2.1.14 с помощью теоремы 2.1.13.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.1. Условие неатомичности меры μ , фигурирующее в большинстве теорем этого параграфа, существенно: нетрудно проверить, что если мера μ чисто атомическая и сепарабельная, то класс A_1^s — самый узкий из всех рассмотренных в этом параграфе классов интегральных и родственных им операторов — совпадает с $B(L_2(\mu))$.

§ 2.2. Необходимые и достаточные условия унитарной эквивалентности линейных операторов интегральным операторам

В § 2.2 доказываются теоремы о приведении к интегральному виду операторов из класса B_0 , введенного в предисловии. Эти теоремы играют ключевую роль в построениях части II, посвященной методам решения линейных функциональных и интегральных уравнений 1-го, 2-го и 3-го родов в L_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.1. Пусть H_i , $i = 0, 1$, — гильбертовы пространства с нормами $\|\cdot\|_i$, и скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_i$. Линейный оператор $N : H_0 \rightarrow H_1$ называется *ядерным*, если существуют последовательности $\{g_n\} \subset H_0$, $\{h_n\} \subset H_1$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_0 \|h_n\|_1 < \infty \quad (2.2.1)$$

и для всех $g \in H_0$

$$Ng = \sum_{n=1}^{\infty} (g, g_n)_0 h_n. \quad (2.2.2)$$

Ядерной нормой $\|N\|_1$ называется $\inf \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_0 \|h_n\|_1$, где инфимум берется по всевозможным $\{g_n\}$, $\{h_n\}$, удовлетворяющим (2.2.1) и фигурирующим в представлении (2.2.2).

Из определения следует, что если $N : L_2(Y, \nu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ — ядерный оператор, то N является интегральным оператором, ядро $N(s, t)$ которого удовлетворяет условию Гильберта — Шмидта

$$\int_X \int_Y |N(s, t)|^2 d\nu(t) d\mu(s) < \infty$$

и, следовательно, условию Карлемана

$$\int_Y |N(s, t)|^2 d\nu(t) < \infty$$

для μ -почти всех $s \in X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.2. Пусть H_i — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_i$ ($i = 0, 1$). Оператор $U : H_0 \rightarrow H_1$ называется *унитарным*, если $UH_0 = H_1$ и $(Uf, Ug)_1 = (f, g)_0$ для любых $f, g \in H_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.3. Пусть H — гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_H$. Будем говорить, что число λ *принадлежит предельному спектру* $\sigma_c(L)$ оператора $L : D_L \subset H \rightarrow H$, если в D_L существует ортонормированная последовательность $\{h_n\}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(L - \lambda \mathbf{1})h_n\|_H = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.4. Оператор $F : D_F \subset H_0 \rightarrow H_1$ называется *замкнутым*, если из $\|x_n - x\|_{H_0} \rightarrow 0$, $\{x_n\} \subset D_F$ и $\|Fx_n - y\|_{H_1} \rightarrow 0$ следует $x \in D_F$ и $y = Fx$. Оператор $G : D_G \subset H_0 \rightarrow H_1$ называется *замыкаемым*, если существует замкнутый оператор $F : D_F \subset H_0 \rightarrow H_1$ такой, что $D_G \subset D_F$ и для всех $h \in D_G$ имеет место равенство $Gh = Fh$. Известно, что оператор, сопряженный к плотно определенному замыкаемому линейному оператору, замкнут и плотно определен.

Теорема 2.2.1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_H$, пространство $L_2(\mu) = L_2(X, \mu)$ сепарабельно и мера μ не является чисто атомической, $\{T_\delta : D_{T_\delta} \subset H \rightarrow H, \delta \in \Delta\}$ — семейство плотно определенных в H замыкаемых линейных операторов. Пусть

(i) в H существует ортонормированный базис $\{u_n\}$ такой, что

$$\{u_n\} \subset \bigcap_{\delta \in \Delta} D_{T_\delta^*}, \quad (2.2.3)$$

где $D_{T_\delta^*}$ — область определения сопряженного к T_δ оператора T_δ^* ;

(ii) существует подпоследовательность $\{v_n\} \subset \{u_n\}$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta \in \Delta} \|T_\delta^* v_n\|_H = 0. \quad (2.2.4)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить унитарный оператор $U : H \rightarrow L_2(\mu)$ такой, что для любого $\delta \in \Delta$ оператор $UT_\delta U^{-1}$ представим в виде $N_\delta + K_\delta$, где N_δ — ядерный оператор в $L_2(\mu)$ с ядерной нормой меньшей, чем ε , а оператор K_δ является интегральным оператором с квазивырожденным карлемановским ядром

$$K_\delta(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{P_{n,\delta}(t)},$$

здесь $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, $\{P_{n,\delta}\} \subset L_2(\mu)$. Кроме того, для любого $\delta \in \Delta$ $UT_\delta U^{-1} = A_\delta B_\delta$, где B_δ — ядерный оператор в $L_2(\mu)$, оператор A_δ является оператором умножения на счетнозначную измеримую функцию $a_\delta(s) \geq 1$.

◁ Пользуясь (2.2.4), выберем подпоследовательность $\{w_n\} \subset \{v_n\}$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\delta \in \Delta} \|T_\delta^* w_n\|_H < \varepsilon. \quad (2.2.5)$$

Обозначим через $[w_n]$ замкнутую линейную оболочку последовательности $\{w_n\}$ и через $[w_n]^\perp$ обозначим ортогональное дополнение к $[w_n]$. Будем считать без ограничения общности, что $\dim[w_n]^\perp = \infty$ (в противном случае достаточно перейти от $\{w_n\}$ к $\{w_{2n}\}$). Обозначим последовательность $\{u_n\} \setminus \{w_n\}$ через $\{z_n\}$. Мы имеем для любого $\delta \in \Delta$ и любых $f \in D_{T_\delta}$

$$\begin{aligned} T_\delta f &= \sum_{n=1}^{\infty} (T_\delta f, u_n)_H u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, T_\delta^* u_n)_H u_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (f, T_\delta^* z_n)_H z_n + \sum_{n=1}^{\infty} (f, T_\delta^* w_n)_H w_n. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Пусть $\{e_n\}$ — какая-нибудь последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, E — замкнутая линейная оболочка ортонормированной последовательности $\{\chi_{e_n}/\sqrt{\mu e_n}\}$ и $E^\perp$ — ортогональное дополнение к E . Имеем

$$\dim E = \dim E^\perp = \dim[w_n] = \dim[w_n]^\perp = \infty. \quad (2.2.7)$$

Положим $\chi_n = \chi_{e_n}/\sqrt{\mu e_n}$, $n = 1, 2, \dots$, и обозначим через $\{\chi_n^\perp\}$ ортонормированный базис $E^\perp$. Пользуясь (2.2.7), определим унитарный оператор $U : H \rightarrow L_2(\mu)$ равенствами

$$U z_n = \chi_n, \quad U w_n = \chi_n^\perp, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2.8)$$

Тогда в силу (2.2.6) и (2.2.8) для любого $\delta \in \Delta$ и любого $g \in UD_{T_\delta}$

$$UT_\delta U^{-1}g = \sum_{n=1}^{\infty} (g, UT_\delta^* z_n) \chi_n + \sum_{n=1}^{\infty} (g, UT_\delta^* w_n) \chi_n^\perp,$$

здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\mu)$. Введем операторы K_δ и N_δ :

$$K_\delta g = \sum_{n=1}^{\infty} (g, UT_\delta^* z_n) \chi_n, \quad g \in UD_{T_\delta},$$

$$N_\delta h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, UT_\delta^* w_n) \chi_n^\perp, \quad h \in L_2(\mu).$$

Тогда $UT_\delta U^{-1} = K_\delta + N_\delta$. Так как носители e_n функций χ_n попарно не пересекаются, то K_δ — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром

$$K_\delta(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{UT_\delta^* z_n(t)}.$$

В силу (2.2.5) оператор N_δ ядерный и его ядерная норма меньше, чем ε . Рассмотрим для каждого $\delta \in \Delta$ оператор умножения A_δ на функцию

$$a_\delta = \chi_{e_0} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (\|T_\delta^* z_n\|_H + 1) \chi_{e_n} \geq 1,$$

где $e_0 = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$. Тогда $UT_\delta U^{-1} = A_\delta A_\delta^{-1} UT_\delta U^{-1} = A_\delta B_\delta$, где $B_\delta = A_\delta^{-1}(N_\delta + K_\delta)$ — ядерный оператор. $\triangleright$

Следствие 2.2.1. Пусть в теореме 2.2.1 для любого $\delta \in \Delta$ оператор $T_\delta : H \rightarrow H$ линейен и непрерывен. Тогда утверждение теоремы 2.2.1 останется справедливым, если в этой теореме заменить условия (i), (ii) более слабым условием (iii): существует ортонормированная последовательность $\{v_n\}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta \in \Delta} \|T_\delta^* v_n\|_H = 0. \quad (2.2.9)$$

$\triangleleft$ Построим ортонормированную последовательность $\{v_n\}$ до ортонормированного базиса $\{u_n\}$ в H . Этот базис удовлетворяет условию (2.2.3), так как $\bigcap_{\delta \in \Delta} D_{T_\delta^*} = H$. Условие (2.2.4) выполняется в силу (2.2.9). $\triangleright$

Рассмотрим гильбертово пространство $L_{2,m}(\mu) := L_{2,m}(X, \mu)$ вектор-функций $h = \{h_1, \dots, h_m\}$ с конечной нормой

$$\|h\|_{m,\mu} = \left(\int_X \sum_{i=1}^m |h_i|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

и скалярным произведением

$$\langle h, g \rangle = \sum_{i=1}^m \int_X h_i \bar{g}_i d\mu.$$

Пусть $T_{ij} : L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$, $i, j = 1, \dots, m$, — линейные непрерывные операторы. Определим в $L_{2,m}(\mu)$ линейный непрерывный матричный оператор $\tilde{T}$ равенствами

$$((\tilde{T}h)(s))_i = \sum_{j=1}^m T_{ij} h_j(s), \quad i = 1, \dots, m,$$

здесь $((\tilde{T}h)(s))_i$ — i -я компонента вектор-функции $\tilde{T}h$.

Следствие 2.2.2. Пусть $0 \in \sigma_c(\tilde{T}^*)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить унитарный матричный оператор $\tilde{U} : L_{2,m}(\mu) \rightarrow L_{2,m}(\mu)$ такой, что $\tilde{U}\tilde{T}\tilde{U}^{-1} = \tilde{N} + \tilde{K}$, где $\tilde{N}$ — ядерный оператор в $L_{2,m}(\mu)$ с ядерной нормой меньшей, чем ε , $\tilde{K}$ — интегральный оператор в $L_{2,m}(\mu)$ с квазивырожденным карлемановским матричным ядром

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} K_n(t),$$

где для любого n первая строка $(m \times m)$ -матрицы $K_n(t)$ при почти всех $t \in X$ есть $\{(\tilde{U}\tilde{T}^*\tilde{z}_n(t))_1, \dots, (\tilde{U}\tilde{T}^*\tilde{z}_n(t))_m\}$, а остальные ее строки равны 0 для всех $t \in X$, $\{\tilde{z}_n\}$ — ортонормированная система в $L_{2,m}(\mu)$.

◁ В силу $0 \in \sigma_c(\tilde{T}^*)$ существует ортонормированная система $\{\tilde{f}_n\} \subset L_{2,m}(\mu)$ такая, что $\tilde{T}^*\tilde{f}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Выберем подпоследовательность $\{\tilde{\omega}_n\} \subset \{\tilde{f}_n\}$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{T}^*\tilde{\omega}_n\|_{m,\mu} < \varepsilon.$$

Искомый унитарный оператор $\tilde{U}$ определяется по аналогии с (2.2.8) равенствами

$$\tilde{U}\tilde{z}_n = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} h_0, \quad \tilde{U}\tilde{\omega}_n = \tilde{\chi}_n^\perp, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\{\tilde{z}_n\}$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке последовательности $\{\tilde{\omega}_n\}$, $\{\tilde{\chi}_n^\perp\}$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке ортонормированной последовательности $\tilde{\chi}_n = \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} h_0$, $n = 1, 2, \dots$,

здесь h_0 — вектор-столбец, первая компонента которого равна 1, а остальные компоненты равны нулю. Доказательство следствия 2.2.2 завершается повторением доказательства теоремы 2.2.1 в ситуации, когда $H = L_{2,m}(\mu)$, а операторное семейство состоит из одного оператора $\tilde{T}$. $\triangleright$

Теорема 2.2.2. Пусть $H, L_2(X, \mu)$ и μ удовлетворяют условиям теоремы 2.2.1, $T : D_T \subset H \rightarrow H$ — плотно определенный замыкаемый линейный оператор и $0 \in \sigma_c(T^*)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить унитарный оператор $U : H \rightarrow L_2(\mu)$ такой, что $UTU^{-1} = N + K$, где N — ядерный оператор в $L_2(\mu)$ с ядерной нормой меньше, чем ε , K — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром.

$\triangleleft$ Так как $0 \in \sigma_c(T^*)$, то найдется ортонормированная система $\{h_n\} \subset D_{T^*}$ такая, что $\|T^*h_n\|_H \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Выберем подпоследовательность $\{v_n\} \subset \{h_n\}$ так, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^*v_n\|_H < \varepsilon$, и рассмотрим ограниченный оператор

$$\Gamma h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, v_n)_H T^*v_n, \quad h \in H,$$

и замкнутый оператор $Q = T^* - \Gamma$ с областью определения $D_Q = D_{T^*}$. Тогда $Qv_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть $V^\perp$ — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке V последовательности $\{v_n\}$ и $P^\perp$ — ортопроектор на $V^\perp$. В силу замкнутости Q имеем $V \subset D_Q$, поэтому $P^\perp D_Q \subset D_Q$. Обозначив через $\overline{F}$ замыкание множества $F \subset H$ по норме, получим $V^\perp \supseteq \overline{V^\perp \cap D_Q} \supseteq \overline{P^\perp D_Q} = \overline{P^\perp D_{T^*}} = V^\perp$, так как $\overline{D_{T^*}} = H$. Таким образом, $\overline{V^\perp \cap D_Q} = V^\perp$, т. е. $V^\perp \cap D_Q$ плотно в $V^\perp$. Пусть $\{v_n^\perp\}$ — любой ортонормированный базис подпространства $V^\perp$, состоящий из элементов D_Q . Рассмотрим ортонормированный базис $\{u_n\}$ пространства H , являющийся объединением $\{v_n\}$ и $\{v_n^\perp\}$. Имеем $\{u_n\} \subset D_Q = D_{T^*}$ и $\|T^*v_n\|_H \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, для семейства, состоящего из одного оператора T , выполнены все условия теоремы 2.2.1. $\triangleright$

Следствие 2.2.3. Пусть $H, L_2(X, \mu)$ и мера μ удовлетворяют условиям теоремы 2.2.1, $T : D_T \subset H \rightarrow L_2(\mu)$ — плотно определенный замыкаемый линейный оператор и существует ортонормированная последовательность $\{\varphi_n\} \subset D_{T^*}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^*\varphi_n\|_H = 0.$$

Тогда найдется унитарный оператор $W : L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ такой, что $WT = AB$, где $B : H \rightarrow L_2(\mu)$ — ядерный оператор, A — оператор умножения на счетнозначную измеримую функцию $a(s) \geq 1$.

$\triangleleft$ Пусть $Z : L_2(\mu) \rightarrow H$ — произвольный унитарный оператор, $T_1 := TZ$. Имеем $\|T_1^*\varphi_n\| = \|Z^*T^*\varphi_n\| = \|T^*\varphi_n\|_H \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Следовательно, $0 \in \sigma_c(T_1^*)$. Отсюда в силу теоремы 2.2.2 и заключительной части доказательства теоремы 2.2.1 следует, что существует унитарный оператор $W : L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ такой, что $WT_1W^{-1} = AB_1$, где $B_1 : L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ — ядерный оператор, A — оператор умножения на счетнозначную функцию $a(s) \geq 1$. Тогда $AB_1 = WT_1W^{-1} = WTZW^{-1}$. Отсюда $WT = AB_1WZ^{-1} = AB$, где $B = B_1WZ^{-1}$ — ядерный оператор. $\triangleright$

Из теоремы 2.2.2 следует, что включение $0 \in \sigma_c(T^*)$ представляет собой достаточное условие унитарной эквивалентности оператора T карлемановскому интегральному оператору. Покажем, что это условие является и необходимым.

Теорема 2.2.3. Пусть $T : D_T \subset L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ — плотно определенный замыкаемый интегральный оператор с ядром $K(s, t)$.

1) Пусть в множестве E , $0 < \mu E < \infty$, нет атомов меры μ . Если

$$\int_X \left(\int_E |K(s, t)| d\mu(s) \right)^2 d\mu(t) < \infty, \quad (2.2.10)$$

то $0 \in \sigma_c(T^*)$.

2) Если ядро K удовлетворяет условию Карлемана

$$\Lambda(s) := \int_X |K(s, t)|^2 d\mu(t) < \infty \quad (2.2.11)$$

для почти всех $s \in X$, то $0 \in \sigma_c(T^*)$.

$\triangleleft$ 1) Покажем, что интегральный оператор T_E с ядром $\chi_E(s)K(s, t)$ определен на всем $L_2(X, \mu)$. Действительно, для любого $f \in L_2(\mu)$

$$\begin{aligned} \int_X \int_X \chi_E(s) |K(s, t)| |f(t)| d\mu(t) d\mu(s) &= \int_X |f(t)| \int_E |K(s, t)| d\mu(s) d\mu(t) \leq \\ &\leq \|f\| \left(\int_X \left(\int_E |K(s, t)| d\mu(s) \right)^2 d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, для почти всех $s \in X$

$$\int_X \chi_E(s) |K(s, t)| |f(t)| d\mu(t) < \infty.$$

Таким образом, $T_E : L_2(X, \mu) \rightarrow L_0(X, \mu)$ — интегральный оператор. В силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3 оператор T_E почти компактен. Значит, в E найдется множество e , $\mu e > 0$, такое, что оператор

$T_e = P_e T_E : L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ компактен; здесь $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_2(\mu)$. Будем говорить, что оператор $T_2 : D_{T_2} \subset L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ является расширением оператора $T_1 : D_{T_1} \subset L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$, если $D_1 \subseteq D_{T_2}$ и $T_1 h = T_2 h$ для любого $h \in D_{T_1}$. Условимся писать в этом случае $T_1 \subseteq T_2$. Мы имеем $P_e T \subseteq T_e$. Отсюда $T_e^* \subseteq (P_e T)^* = T^* P_e$. Но $T_e^* : L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ — компактный оператор. Следовательно, $T^* P_e = T_e^*$ и $T^* P_e$ определен на всем $L_2(\mu)$, действует в $L_2(\mu)$ и компактен. Поэтому для любой ортонормированной последовательности функций f_n , $n = 1, 2, \dots$, с носителями в e получим $\|T^* f_n\| = \|T^* P_e f_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Значит, $0 \in \sigma_c(T^*)$.

2) Из (2.2.11) следует, что существуют постоянная C и множество $e \subset E$, $\mu e > 0$, такие, что $\Lambda(s) \leq C$ для всех $s \in e$. Тогда

$$\int_e \int_X |K(s, t)|^2 d\mu(t) d\mu(s) = \int_e \Lambda(s) d\mu(s) \leq C\mu e.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_e |K(s, t)| d\mu(s) \right)^2 d\mu(t) &\leq \int_X \mu e \int_e |K(s, t)|^2 d\mu(s) d\mu(t) = \\ &= \mu e \int_e \int_X |K(s, t)|^2 d\mu(t) d\mu(s) \leq \mu e C\mu e = C(\mu e)^2 < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, ядро K удовлетворяет условию типа (2.2.10) и по уже доказанному $0 \in \sigma_c(T^*)$. $\triangleright$

Следствие 2.2.4. Пусть $T : D_T \subset L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ — плотно определенный замыкаемый линейный оператор. Если существует не содержащее атомов меры μ множество E , $0 < \mu E < \infty$, такое, что оператор $P_E T$ продолжается до определенного на всем $L_2(\mu)$ и действующего в $L_0(\mu)$ почти компактного оператора, то $0 \in \sigma_c(T^*)$. Здесь $P_E f = \chi_E f$, $f \in L_2(\mu)$.

Справедливость следствия вытекает из доказательства первого утверждения теоремы 2.2.3.

Для непрерывных операторов имеет место более сильное утверждение.

Теорема 2.2.4. Пусть мера μ не является чисто атомической, $T : L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ — линейный непрерывный оператор. Если для множества E , $0 < \mu E < \infty$, не содержащего атомов меры μ , оператор $P_E T$ компактен по мере, то $0 \in \sigma_c(T^*)$.

$\triangleleft$ По теореме 1.1.2 $P_E T : L_2(\mu) \rightarrow L_1(\mu)$ компактен. Следовательно, $T^* P_E : L_\infty(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ — компактный оператор. Возьмем равномерно ограниченную ортонормированную систему функций φ_n , $n = 1, 2, \dots$, с носителями в E . По теореме Римана — Лебега

$$\int_E \varphi_n f d\mu \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

для любой функции $f \in L_1(\mu)$. Отсюда и из компактности $T^*P_E : L_\infty(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ следует $\|T^*\varphi_n\| = \|T^*P_E\varphi_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, $0 \in \sigma_c(T^*)$. $\triangleright$

Теоремы 2.2.1, 2.2.2 показывают, что операторы из введенного в предисловии класса B_0 приводятся унитарными преобразованиями к интегральному виду с карлемановскими ядрами простой структуры. Из теорем 2.2.3, 2.2.4 следует, что класс B_0 очень широк. В частности, он включает в себя все компактные по мере, почти компактные и интегральные операторы в L_2 . Более того, классу B_0 принадлежат все операторы, отдельные левосторонние срезы которых являются перечисленными операторами.

В дополнение к теоремам 2.2.1, 2.2.2 и их следствиям отметим, что если мера μ сепарабельна, σ -конечна и чисто атомическая, то любой линейный непрерывный оператор $T : L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ является карлемановским интегральным оператором с квазивырожденным карлемановским ядром. Действительно, в этом случае $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, где X_n , $n = 1, 2, \dots$, — попарно не пересекающиеся множества с конечными положительными мерами. Положим $\delta_n = \chi_{X_n} / \sqrt{\mu X_n}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда $\{\delta_n\}$ — ортонормированный базис пространства $L_2(\mu)$. Следовательно, для любого $f \in L_2(\mu)$

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} (Tf, \delta_n) \delta_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, T^* \delta_n) \delta_n.$$

Так как X_n , $n = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются, то T — карлемановский интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(s) \overline{T^* \delta_n(t)}.$$

Рассмотрим теперь задачу об условиях унитарной эквивалентности линейных операторов интегральным операторам в несепарабельном случае.

Теорема 2.2.5. Пусть $L_2(\mu)$ — несепарабельное пространство, $T : L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ — линейный непрерывный оператор. Тогда

- 1) если T унитарно эквивалентен интегральному оператору $\tilde{T}$, то образ T сепарабелен;
- 2) если образ оператора T сепарабелен, то T унитарно эквивалентен карлемановскому оператору с квазивырожденным карлемановским ядром.

$\triangleleft$ 1) В силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3 интегральный оператор $\tilde{T}$ почти компактен. Следовательно, его образ сепарабелен. Значит, образ T сепарабелен.

2) Пусть $\{f_n\}$ — ортонормированный базис в образе оператора T , $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами. Возьмем

любой унитарный оператор $W : L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$, отображающий f_n в $\chi_n = \chi_{e_n}/\sqrt{\mu e_n}$, $n = 1, 2, \dots$. Для каждого $f \in L_2(\mu)$ получим

$$\begin{aligned} WTW^{-1}f &= \sum_{n=1}^{\infty} (WTW^{-1}f, \chi_n) \chi_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (f, WT^*W^{-1}\chi_n) \chi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, WT^*f_n) \chi_n. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что WTW^{-1} — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{WT^*f_n(t)}. \quad \triangleright$$

Теорема 2.2.6. Пусть $L_2(\mu)$ — несепарабельное пространство, мера μ σ -конечна, $T : D_L \subset L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ — замыкаемый плотно определенный линейный оператор.

1) Если T унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору L , то образ оператора T сепарабелен.

2) Если образ оператора T сепарабелен, то замыкание $\overline{T}$ оператора T унитарно эквивалентно карлемановскому интегральному оператору с квазивырожденным карлемановским ядром.

< 1) Имеем

$$Lf(s) = \int_X L(s, t)f(t) d\mu(t), \quad f \in D_L,$$

где

$$\Lambda(s) := \left(\int_X |L(s, t)|^2 d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (2.2.12)$$

для почти всех $s \in X$. В силу (2.2.12) найдутся разбиение $\{X_n\}$ множества X на попарно не пересекающиеся множества с конечными мерами и последовательность постоянных $\{K_n\}$ такие, что $\Lambda(s) \leq K_n$ для почти всех $s \in X_n$, $n = 1, 2, \dots$. Рассмотрим для каждого n оператор $P_n L$, где $P_n f = \chi_{X_n} f$, $f \in L_2(\mu)$. Пусть $\{z_m\}$ — произвольная слабо сходящаяся к 0 последовательность из D_L . Тогда для почти всех $s \in X$

$$|P_n L z_m(s)| \leq K_n \chi_{X_n}(s) \sup_{m=1,2,\dots} \|z_m\|.$$

Кроме того, в силу (2.2.12) последовательность $P_n L z_m(s)$ сходится к 0 при $m \rightarrow \infty$ для почти всех $s \in X$. Следовательно, $\|P_n L z_m\| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Отсюда вытекает, что $P_n L$ является сужением на D_L компактного оператора, действующего из $L_2(X, \mu)$ в $L_2(X, \mu)$. Значит, для каждого n образ оператора $P_n L$ сепарабелен. Но тогда образ оператора L сепарабелен. Следовательно, образ T сепарабелен.

2) С помощью полярного разложения [10, с. 421] представим замыкание $\bar{T}$ оператора T в виде $\bar{T} = SP$, где S — самосопряженный оператор в $L_2(\mu)$, оператор P частично изометрический. Тогда $S = \bar{T}P^*$. Следовательно, образ $\text{im } S$ оператора S сепарабелен. Не ограничивая общности, считаем $\dim \text{im } S = \infty$. Пользуясь самосопряженностью S и спектральной теоремой, выберем в $\text{im } S$ ортонормированный базис $\{h_n\}$, состоящий из элементов области определения D_S оператора S . Рассмотрим унитарный оператор $V : L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$, отображающий h_n в $\chi_n = \chi_{e_n} / \sqrt{\mu e_n}$, $n = 1, 2, \dots$, где $\{e_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств с конечными положительными мерами. Тогда для любого $f \in VD_S$

$$\begin{aligned} VSV^{-1}f &= \sum_{n=1}^{\infty} (VSV^{-1}f, \chi_n) \chi_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (SV^{-1}f, h_n) \chi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, VSh_n) \chi_n. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Поскольку $\bar{T} = SP$, то для всех $f \in VD_{\bar{T}}$ в силу (2.2.13) и равенства $T^* = \bar{T}^* = P^*S$ получим

$$\begin{aligned} V\bar{T}V^{-1}f &= VSV^{-1}VPV^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} (VPV^{-1}f, VSh_n) \chi_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (PV^{-1}f, Sh_n) \chi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, VP^*Sh_n) \chi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, VT^*h_n) \chi_n. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $V\bar{T}V^{-1}$ — карлемановский интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром

$$M(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{VT^*h_n(t)}. \quad \triangleright$$

В заключение отметим, что унитарные операторы в теоремах 2.2.1, 2.2.2, 2.2.5, 2.2.6, приводящие операторы и семейства операторов к интегральному виду, строятся явно и ядра получающихся интегральных операторов также имеют явный вид.

Часть II. Уравнения

В части II изучаются линейные функциональные уравнения и системы 1-го, 2-го и 3-го родов при широких предположениях относительно операторов в них. Эти уравнения и системы всюду далее рассматриваются в комплексных пространствах. Случай вещественных пространств рассматривается аналогично.

Глава 3. Функциональные уравнения и системы 1-го рода в L_2

§ 3.1. Теорема Пикара. Почти компактные операторы. Метод компактной факторизации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.1. Пусть H_0, H_1 — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_0, (\cdot, \cdot)_1$ и нормами $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_1$, F — конечное или счетное множество индексов, $\{g_n\}_{n \in F} \subset H_0, \{h_n\}_{n \in F} \subset H_1$ — ортонормированные множества, $\{\lambda_n\}_{n \in F}$ — ограниченное множество ненулевых чисел. Оператор

$$Tz = \sum_{n \in F} \lambda_n (z, g_n)_0 h_n, \quad z \in H_0, \quad (3.1.1)$$

называется *квазидиагональным*. В случае $H_0 = H_1, g_n = h_n$ для всех $n \in F$ оператор T называется *диагональным*.

Важным примером квазидиагонального оператора является произвольный компактный оператор $C : H_0 \rightarrow H_1$ [37]. Отметим, что $\{g_n\}, \{h_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ для любого компактного оператора могут быть найдены методом И. М. Новицкого [36].

Теорема 3.1.1 (Э. Пикар). Пусть $T : H_0 \rightarrow H_1$ — квазидиагональный оператор, определяемый равенством (3.1.1), T^* — сопряженный оператор.

Для того чтобы уравнение 1-го рода $Tz = h \in H_1$ имело решение, необходимо и достаточно, чтобы

- 1) $(h, u)_1 = 0$ для любого u , удовлетворяющего условию $T^*u = 0$;
- 2) $\sum_{n \in F} \frac{1}{|\lambda_n|^2} |(h, h_n)_1|^2 < \infty$.

При выполнении условий 1), 2) все решения уравнения $Tz = h$ имеют вид

$$z = z_0 + \sum_{n \in F} \frac{1}{\lambda_n} (h, h_n)_1 g_n,$$

где z_0 — произвольное решение однородного уравнения $T\xi = 0$.

◁ Всюду в доказательстве теоремы вместо $\sum_{n \in F} (\cdot)$ будем писать $\sum_n (\cdot)$.

Необходимость. Пусть $Tx = h$. Для любого u такого, что $T^*u = 0$, имеем $(h, u)_1 = (Tx, u)_1 = (x, T^*u)_0 = 0$. Докажем необходимость второго условия теоремы. Из $Tx = h$ следует

$$\sum_n \lambda_n (x, g_n)_0 h_n = h.$$

Тогда $(h, h_k)_1 = \lambda_k (x, g_k)_0$ и в силу неравенства Бесселя

$$\sum_n \frac{1}{|\lambda_n|^2} |(h, h_n)_1|^2 = \sum_n |(x, g_n)_0|^2 \leq \|x\|_0^2 < \infty.$$

Достаточность. Пусть h удовлетворяет условиям 1), 2). Рассмотрим элемент

$$g = \sum_n (h, h_n)_1 h_n.$$

Положим $f = h - g$ и покажем, что $T^*f = 0$. Так как для любого $v \in H_0$

$$Tv = \sum_n \lambda_n (v, g_n)_0 h_n,$$

то, пользуясь определением сопряженного оператора и ортогональностью множеств $\{g_n\}_{n \in F}$, $\{h_n\}_{n \in F}$, получим для любого $w \in H_1$

$$T^*w = \sum_n \overline{\lambda_n} (w, h_n)_1 g_n.$$

Тогда

$$T^*f = \sum_n \overline{\lambda_n} \left(h - \sum_k (h, h_k)_1 h_k, h_n \right)_1 g_n = \sum_n \overline{\lambda_n} [(h, h_n)_1 - (h, h_n)_1] g_n = 0.$$

Поэтому из условия 1) имеем $(h, f)_1 = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= (h, f)_1 = \left(\sum_n (h, h_n)_1 h_n + f, f \right)_1 = \\ &= \sum_n (h, h_n)_1 (h_n, f)_1 + \|f\|_1^2 = \sum_n (h, h_n)_1 \left(\frac{1}{\lambda_n} T g_n, f \right)_1 + \|f\|_1^2 = \\ &= \sum_n (h, h_n)_1 \left(\frac{1}{\lambda_n} g_n, T^* f \right)_0 + \|f\|_1^2 = \|f\|_1^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $f = 0$ и

$$h = \sum_n (h, h_n)_1 h_n.$$

Рассмотрим элемент

$$\tilde{z} = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} (h, h_k)_1 g_k.$$

В силу ортонормированности множества $\{g_n\}_{n \in F}$

$$T \tilde{z} = \sum_n \lambda_n \left(\sum_k \frac{1}{\lambda_k} (h, h_k)_1 g_k, g_n \right)_0 h_n = \sum_n \lambda_n \frac{1}{\lambda_n} (h, h_n)_1 h_n = h.$$

Следовательно, $\tilde{z}$ — частное решение уравнения $Tz = h$. Тогда все решения этого уравнения даются формулой

$$z = z_0 + \sum_n \frac{1}{\lambda_n} (h, h_n)_1 g_n,$$

где z_0 — произвольное решение однородного уравнения $T\xi = 0$. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.2. Линейный оператор $T : H_0 \rightarrow L_2(X, \mu)$ называется *почти компактным*, если существует разбиение $\{X_n\}$ множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества такое, что $P_n T : H_0 \rightarrow L_2(X, \mu)$ — компактный оператор для любого n ; здесь $P_n f = \chi_{X_n} f$, $f \in L_2(X, \mu)$, χ_e — характеристическая функция множества e .

Теорема 3.1.2. Пусть $T : H_0 \rightarrow L_2(X, \mu)$ — почти компактный оператор. Тогда уравнение $Tx = f \in L_2(X, \mu)$ может быть сведено к эквивалентному уравнению 1-го рода с компактным оператором.

$\triangleleft$ Из почти компактности оператора T следует, что он замкнут и по теореме о замкнутом графике ограничен. Умножив обе части уравнения $Tx = f$ на функцию $\sigma = \sum_n 2^{-n} \chi_{X_n}$, получим эквивалентное уравнение $T_\sigma x = \sigma f$ с компактным оператором $T_\sigma = \sum_n 2^{-n} P_n T$, так что к уравнению $T_\sigma x = \sigma f$ применима теорема Пикара. $\triangleright$

Теорема 3.1.3. Пусть $T : L_2(Y, \nu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ — интегральный оператор. Тогда существует разбиение $\{X_n\}$ множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества такое, что интегральное уравнение 1-го рода $Tx = f$ умножением обеих его частей на функцию $\sigma = \sum_n 2^{-n} \chi_{X_n}$ приводится к эквивалентному интегральному уравнению 1-го рода с компактным интегральным оператором.

◁ Справедливость утверждения теоремы непосредственно вытекает из предыдущей теоремы и следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3. ▷

Отметим, что в [22, с. 91–93] приведено явное построение разбиения $\{X_n\}$ для любого интегрального оператора, действующего из $L_2(Y, \nu)$ в $L_2(X, \mu)$.

§ 3.2. C_1 -ядра. Сведение функциональных уравнений 1-го рода к эквивалентным интегральным уравнениям 1-го рода с C_1 -ядрами

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.1. Пусть (Y, ν) , (X, μ) — пространства с σ -конечными положительными мерами, $\{e_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, $\{u_n\} \subset L_2(Y, \nu)$. Функция

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{u_n(t)}$$

называется *квазивырожденным карлемановским ядром*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.2. Ядро

$$L(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(s) \overline{q_n(t)},$$

удовлетворяющее условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|p_n\|_{L_2(\mu)} \|q_n\|_{L_2(\nu)} < \infty,$$

назовем C_1 -ядром.

Интегральный оператор с C_1 -ядром $L(s, t)$ называется ядерным и является компактным карлемановским оператором, действующим из $L_2(Y, \nu)$ в $L_2(X, \mu)$.

Теорема 3.2.1. Пусть $L_2(X, \mu)$ — несепарабельное пространство, образ $\text{im } T$ линейного непрерывного оператора $T : L_2(Y, \nu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ сепарабелен. Тогда уравнение 1-го рода $Tx = f \in L_2(X, \mu)$ эквивалентно интегральному уравнению 1-го рода с квазивырожденным карлемановским C_1 -ядром.

◁ Будем считать, без ограничения общности, что $\dim \text{im } T = \infty$. Пусть $\{f_n\}$ — ортонормированный базис в $\text{im } T$, $[f_n]$ — замкнутая линейная оболочка последовательности $\{f_n\}$, $[f_n]^\perp$ — ортогональное дополнение к $[f_n]$, $\{f_\xi^\perp, \xi \in \Xi\}$ — ортонормированный базис в $[f_n]^\perp$. Выберем произвольную последовательность попарно не пересекающихся множеств $e_n \subset X$, $n = 1, 2, \dots$, с конечными положительными мерами и рассмотрим унитарный оператор V в $L_2(X, \mu)$, определяемый равенствами

$$Vf_n = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad Vf_\xi^\perp = e_\xi^\perp, \quad \xi \in \Xi,$$

где $\{e_\xi^\perp, \xi \in \Xi\}$ — ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке E ортонормированной последовательности $\{\chi_{e_n}/\sqrt{\mu e_n}\}$. Тогда $VTx \in E$ для любого $h \in L_2(Y, \nu)$. Следовательно,

$$VTx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(VTx, \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} \right) \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (x, T^* f_n)_0 \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}} = Vf.$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_0$ — скалярное произведение в $L_2(Y, \nu)$, и $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(X, \mu)$. Это уравнение записывается в виде

$$\int_Y K(s, t)x(t) d\nu(t) = Vf(s), \quad (3.2.1)$$

где

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{T^* f_n(t)}. \quad (3.2.2)$$

Рассмотрим функцию

$$b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \chi_{e_n}(s) + \chi_{e_0}(s),$$

где $e_0 = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$. Умножив обе части уравнения (3.2.1) на функцию $b(s)$, получим эквивалентное интегральное уравнение 1-го рода

$$\int_Y C(s, t)x(t) d\nu(t) = b(s)Vf(s) \in L_2(X, \mu) \quad (3.2.3)$$

с квазивырожденным карлемановским C_1 -ядром

$$C(s, t) = b(s)K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} \overline{T^* f_n(t)}. \quad \triangleright$$

Отметим, что уравнения $Tx = f$ и (3.2.3) имеют одни и те же решения и для вычисления Vf и ядра $C(s, t)$ не требуется знания V на $f_{\xi}^{\perp}$, $\xi \in \Xi$. Кроме того, функция $b(s)$ не зависит от уравнения $Tx = f$.

Следствие 3.2.1. Утверждение теоремы 3.2.1 имеет место, если T — почти компактный оператор.

Это следствие непосредственно вытекает из того, что образ каждого почти компактного оператора сепарабелен.

Следствие 3.2.2. Утверждение теоремы 3.2.1 справедливо, если T — интегральный оператор.

Действительно, в силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3 каждый интегральный оператор почти компактен.

Теорема 3.2.2. Пусть $L_2(X, \mu)$, $L_2(Y, \nu)$ — сепарабельные пространства, мера μ не является чисто атомической, $T : L_2(Y, \nu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ — линейный непрерывный оператор и существует ортонормированная система $\{\varphi_n\} \subset L_2(X, \mu)$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^* \varphi_n\|_{L_2(\nu)} = 0$. Тогда уравнение $Tx = f \in L_2(X, \mu)$ эквивалентно интегральному уравнению 1-го рода с C_1 -ядром.

$\triangleleft$ В силу следствия теоремы 2.2.2 найдется унитарный оператор $W : L_2(X, \mu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ такой, что $WT = AB$, где $Af(s) = a(s)f(s)$, $f \in L_2(X, \mu)$, $a(s) \geq 1$, $B : L_2(Y, \nu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ — ядерный интегральный оператор с C_1 -ядром $H(s, t)$. Умножив обе части уравнения $WTx = Wf$ на функцию $\frac{1}{a(s)}$, получим эквивалентное интегральное уравнение 1-го рода с C_1 -ядром $H(s, t)$. $\triangleright$

Следствие 3.2.3. Утверждение теоремы 3.2.2 справедливо, если найдется множество $e \subset X$, $0 < \mu e < \infty$, такое, что

- (i) существует равномерно ограниченная ортонормированная система функций $\varphi_n \in L_2(X, \mu)$, $n = 1, 2, \dots$, с носителями в e ;
- (ii) множество $P_e T S_2$ компактно по мере (здесь S_2 — единичный шар в $L_2(Y, \nu)$, $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_2(X, \mu)$).

$\triangleleft$ Из условия (ii) и теоремы 1.1.2 следует, что оператор $P_e T : L_2(Y, \nu) \rightarrow L_1(X, \mu)$ компактен. Тогда $T^* P_e : L_{\infty}(X, \mu) \rightarrow L_2(Y, \nu)$ — компактный оператор. Поэтому $\|T^* \varphi_n\|_{L_2(\nu)} = \|T^* P_e \varphi_n\|_{L_2(\nu)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. $\triangleright$

Замечание 3.2.1. Условие (i) в следствии 3.2.3 выполняется, если в e нет атомов меры μ : в качестве $\{\varphi_n\}$ можно выбрать равномерно огра-

ниченную ортонормированную систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{n,e'}\}$ с носителями в $e' \subseteq e$ (определение этих функций см. в начале § 1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.2. Условие (ii) в следствии 3.2.3 выполняется, если $P_e T$ — интегральный оператор (см. следствие 1.1.5 теоремы 1.1.3). Таким образом, если мера μ не является чисто атомической, из теорем 3.2.1, 3.2.2 следует, что любое интегральное уравнение 1-го рода в L_2 эквивалентно интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода с C_1 -ядром. К такому уравнению применимы теорема Пикара и различные известные приближенные методы решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.3. Если $P_{e'} T S_2$ — относительно компактное множество в $L_2(X, \mu)$ для некоторого $e' \subseteq e$, то в качестве $\{\varphi_n\}$ можно выбрать любую ортонормированную систему функций с носителями в e' .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.4. Относительная компактность $P_{e'} T S_2$ в $L_2(X, \mu)$ будет иметь место для некоторого $e' \subseteq e$, если $T : L_2(Y, \nu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ — почти компактный оператор.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.5. В § 5.3 (теорема 5.3.1) предложен метод сведения к интегральному уравнению 1-го рода с C_1 -ядром уравнения $Tx = f$ с линейным неограниченным плотно определенным замыкаемым оператором T , удовлетворяющим условию $\|T^* \varphi_n\| \rightarrow 0$, где $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система из области определения оператора T^* .

§ 3.3. Системы функциональных уравнений 1-го рода

Пусть (X, μ) , (Y, ν) — пространства с σ -конечными положительными мерами, E_m — евклидово пространство размерности m , $L_{2,m}(X, \mu)$ — гильбертово пространство вектор-функций $f : X \rightarrow E_m$ с компонентами $f_i \in L_2(X, \mu)$, $i = 1, \dots, m$, нормой

$$\|f\|_{m,\mu} = \left(\int_X \sum_{i=1}^m |f_i|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.1)$$

и скалярным произведением

$$\langle f, h \rangle_{m,\mu} = \sum_{i=1}^m \int_X f_i \overline{h_i} d\mu, \quad (3.3.2)$$

$L_{2,k}(Y, \nu)$ — аналогичное пространство с нормой $\|\cdot\|_{k,\nu}$ и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,\nu}$.

Рассмотрим систему

$$T_i x = f_i \in L_2(X, \mu), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.3.3)$$

где решение x ищется в гильбертовом пространстве H_0 , $T_i : H_0 \rightarrow L_2(X, \mu)$, $i = 1, \dots, m$, — линейные непрерывные операторы.

Теорема 3.3.1. Система (3.3.3) с почти компактными операторами $T_i : H_0 \rightarrow L_2(X, \mu)$, $i = 1, \dots, m$, эквивалентна уравнению 1-го рода с компактным оператором.

◁ Так как T_i , $i = 1, \dots, m$, — почти компактные операторы, найдется общее разбиение множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества X_n , $n = 1, 2, \dots$, такое, что $P_{X_n} T_i : H_0 \rightarrow L_2(X, \mu)$ — компактные операторы для всех $i = 1, \dots, m$ и $n = 1, 2, \dots$ (здесь $P_{X_n} g = \chi_{X_n} g$, $g \in L_2(X, \mu)$). Умножив обе части уравнений системы (3.3.3) на функцию $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \chi_{X_n}$ и положив $f = \{f_1, \dots, f_m\}$, получим эквивалентное системе (3.3.3) уравнение 1-го рода $(\tau x)(s) = \sigma(s)f(s) \in L_{2,m}(X, \mu)$ с компактным оператором

$$(\tau h)(s) = \{\sigma(s)(T_1 h)(s), \dots, \sigma(s)(T_m h)(s)\}, \quad h \in H_0. \quad \triangleright$$

Теорема 3.3.2. Пусть $T_i : H_0 \rightarrow L_2(X, \mu)$, $i = 1, \dots, m$, — линейные непрерывные операторы. Определим оператор $Th = \{T_1 h, \dots, T_m h\}$, $h \in H_0$. Система (3.3.3) эквивалентна уравнению 1-го рода с ядерным оператором, если пространства H_0 , $L_2(X, \mu)$ сепарабельны, мера μ не является чисто атомической и существует ортонормированная система $\{\varphi_n\} \subset L_{2,m}(X, \mu)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^* \varphi_n\|_{H_0} = 0,$$

здесь $\|\cdot\|_{H_0}$ — норма в H_0 .

◁ Пространство вектор-функций $L_{2,m}(X, \mu)$ можно отождествить с пространством скалярных функций $L_2(\tilde{X}, \tilde{\mu})$, где $\tilde{X} = X \times \{1, \dots, m\}$, $\tilde{\mu} = \mu \times \mu_0$, где считающая мера μ_0 определена на всех подмножествах множества $\{1, \dots, m\}$ и на каждом непустом подмножестве E множества $\{1, \dots, m\}$ равна числу элементов E . Тогда $T : H_0 \rightarrow L_2(\tilde{X}, \tilde{\mu})$. Отсюда, пользуясь следствием теоремы 2.2.2 и повторяя доказательство теоремы 3.2.2 (с заменой $L_2(Y, \nu)$ на H_0), получим справедливость доказываемой теоремы. ◁

Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений

$$\int_Y H(s, t) y(t) d\nu(t) = f(s) \in L_{2,m}(X, \mu), \quad (3.3.4)$$

где неизвестная вектор-функция $y(t)$ ищется в $L_{2,k}(Y, \nu)$, ядро $H(s, t)$ — $(m \times k)$ -матрица с $(\mu \times \nu)$ -измеримыми элементами $h_{ij}(s, t)$, определенны-

ми на $X \times Y$. Будем предполагать, что интегральный оператор

$$H\varphi(s) = \int_Y H(s, t) \varphi(t) d\nu(t), \quad \varphi \in L_{2,k}(Y, \nu), \quad (3.3.5)$$

определен на всем $L_{2,k}(Y, \nu)$, действует в $L_{2,m}(X, \mu)$ и ограничен.

Теорема 3.3.3. *Существует счетнозначная измеримая функция $0 < \sigma(s) \leq 1$ такая, что система (3.3.4) эквивалентна системе*

$$\int_Y \sigma(s) H(s, t) y(t) d\nu(t) = \sigma(s) f(s) \in L_{2,m}(X, \mu)$$

с компактным оператором $H_\sigma \varphi(s) = \sigma(s) H\varphi(s)$, $\varphi \in L_{2,k}(Y, \nu)$, действующим из $L_{2,k}(Y, \nu)$ в $L_{2,m}(X, \mu)$.

◁ Так как интегральные операторы H_{ij} с ядрами $h_{ij}(s, t)$ действуют из $L_2(Y, \nu)$ в $L_2(X, \mu)$, то в силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3 они почти компактны. Следовательно, найдется общее разбиение множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества X_n , $n = 1, 2, \dots$, такое, что все операторы $P_{X_n} H_{ij} : L_2(Y, \nu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ компактны. Тогда $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \chi_{X_n}$ — искомая функция. ▷

Теорема 3.3.4. *Пусть $L_2(Y, \nu)$, $L_2(X, \mu)$ — сепарабельные пространства, мера μ не является чисто атомической. Тогда система (3.3.4) эквивалентна системе*

$$\int_Y \Gamma(s, t) y(t) d\nu(t) = g(s) \in L_{2,m}(X, \mu) \quad (3.3.6)$$

с $(m \times k)$ -матричным ядром $\Gamma(s, t)$, все элементы $\gamma_{ij}(s, t)$ которого являются C_1 -ядрами, а интегральный оператор с ядром $\Gamma(s, t)$ является ядерным оператором, действующим из $L_{2,k}(Y, \nu)$ в $L_{2,m}(X, \mu)$.

◁ Выберем множество e , $0 < \mu e < \infty$, не содержащее атомов меры μ . Пусть $\{\varphi_n\} \subset L_2(X, \mu)$ — какая-нибудь равномерно ограниченная ортонормированная система функций с носителями в e . Положим $\tilde{\varphi}_n = h_0 \varphi_n$, $n = 1, 2, \dots$, где столбец $h_0 = \{1, 0, \dots, 0\}$ принадлежит евклидову пространству E_m . Рассмотрим ограниченные интегральные операторы

$$H_{ij} h(s) = \int_Y h_{ij}(s, t) h(t) d\nu(t), \quad h \in L_2(Y, \nu), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, k,$$

действующие из $L_2(Y, \nu)$ в $L_2(X, \mu)$. Пользуясь (3.3.1), (3.3.2), получим

$$\begin{aligned} \|H^* \tilde{\varphi}_n\|_{k, \nu} &= \sup_{\|f\|_{k, \nu} \leq 1} |\langle f, H^* \tilde{\varphi}_n \rangle_{k, \nu}| = \sup_{\|f\|_{k, \nu} \leq 1} |\langle Hf, \tilde{\varphi}_n \rangle_{m, \mu}| = \\ &= \sup_{\|f\|_{k, \nu} \leq 1} \left| \sum_{j=1}^k \int_X \int_Y h_{1j}(s, t) f_j(t) d\nu(t) \overline{\varphi_n(s)} d\mu(s) \right| \leq \sum_{j=1}^k \|H_{1j}^* \varphi_n\|_{L_2(\nu)}. \end{aligned}$$

В силу следствия 1.1.5 теоремы 1.1.3 интегральные операторы H_{1j} , $j = 1, \dots, k$, компактны по мере. Отсюда и из доказательства следствия 3.2.1 теоремы 3.2.2 получим $H_{1j}^* \varphi_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $j = 1, \dots, k$. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|H^* \tilde{\varphi}_n\|_{k, \nu} = 0. \quad (3.3.7)$$

Представим $L_{2,m}(X, \mu)$ в виде $L_2(\tilde{X}, \tilde{\mu})$, где $\tilde{X} = X \times \{1, \dots, m\}$, $\tilde{\mu} = \mu \times \mu_0$, μ_0 — считающая мера на $\{1, \dots, m\}$. Пусть $L_2(\tilde{Y}, \tilde{\nu})$ — аналогичное пространство. Тогда интегральный оператор $H : L_{2,k}(Y, \nu) \rightarrow L_{2,m}(X, \mu)$ с матричным ядром $H(s, t)$ оказывается обычным интегральным оператором $\tilde{H}$, действующим из $L_2(\tilde{Y}, \tilde{\nu})$ в $L_2(\tilde{X}, \tilde{\mu})$. При этом в силу (3.3.7) $\tilde{H}^*$ отображает ортонормированную систему $\{\tilde{\varphi}_n\}$ в сходящуюся к 0 по норме последовательность. Отсюда получим по теореме 3.2.2, заменяя в ней T на $\tilde{H}$, $L_2(Y, \nu)$ на $L_2(\tilde{Y}, \tilde{\nu})$, $L_2(X, \mu)$ на $L_2(\tilde{X}, \tilde{\mu})$, что система (3.3.4) эквивалентна системе $\Gamma y = g$ с ядерным оператором $\Gamma : L_{2,k}(Y, \nu) \rightarrow L_{2,m}(X, \mu)$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, введем проекторы $Q_i : L_{2,m}(X, \mu) \rightarrow L_{2,m}(X, \mu)$, $i = 1, \dots, m$, и $R_j : L_{2,k}(Y, \nu) \rightarrow L_{2,k}(Y, \nu)$, $j = 1, \dots, k$. Проектор Q_i ставит в соответствие элементу $\{v_1(t), \dots, v_m(t)\} \in L_{2,m}(X, \mu)$ элемент из $L_{2,m}(X, \mu)$, i -я компонента которого равна $v_i(t)$, а остальные компоненты равны 0. Проектор R_j определяется аналогично. отождествим ядерные операторы $Q_i \Gamma R_j$ с действующими из $L_2(Y, \nu)$ в $L_2(X, \mu)$ ядерными операторами. Эти операторы являются интегральными операторами с C_1 -ядрами $\gamma_{ij}(s, t)$. Тогда ядерный оператор $\Gamma = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k Q_i \Gamma R_j$ представим в виде

$$\Gamma w = \int_Y \Gamma(s, t) w(t) d\nu(t), \quad w \in L_{2,k}(Y, \nu),$$

где $\Gamma(s, t)$ — $(m \times k)$ -матрица с элементами $\gamma_{ij}(s, t)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, k$. $\triangleright$

К уравнениям и системам 1-го рода с компактными или ядерными операторами, к которым сводятся рассмотренные в главе 3 функциональные и интегральные уравнения и системы 1-го рода, применимы как точные методы решения (например, теорема Пикара), так и различные приближенные регуляризационные методы решения. Отметим еще, что преобразования, приводящие исходные уравнения и системы к уравнениям и системам с компактными (ядерными) операторами, строятся в главе 3 в явном виде.

Глава 4. Функциональные уравнения и системы 2-го рода в L_2

Всюду в этой и следующих главах через $B(L_2(\mu))$ обозначается пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из $L_2(\mu)$ в $L_2(\mu)$, где $L_2(\mu) := L_2(X, \mu)$.

§ 4.1. Сведение уравнений 2-го рода к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами. Уравнения в гильбертовом пространстве

Теорема 4.1.1. Пусть пространство $L_2(\mu)$ несепарабельно, образ оператора $T \in B(L_2(\mu))$ сепарабелен. Тогда уравнение 2-го рода

$$\alpha x - \lambda T x = f \in L_2(\mu) \quad (4.1.1)$$

эквивалентно интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром.

◁ Применив к обеим частям уравнения (4.1.1) унитарный оператор V из доказательства теоремы 3.2.1, получим эквивалентное уравнение

$$\alpha V x(s) - \lambda V T x(s) = V f(s).$$

Как в доказательстве теоремы 3.2.1 это уравнение записывается в виде

$$\alpha V x(s) - \lambda \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} \overline{T^* f_n(t)} x(t) d\mu(t) = V f(s).$$

Сделав в последнем уравнении замену $y = V x$, придем к эквивалентному интегральному уравнению

$$\alpha y(s) - \lambda \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} \overline{V T^* f_n(t)} y(t) d\mu(t) = V f(s)$$

с квазивырожденным карлемановским ядром. ▷

Теорема 4.1.2. Пусть пространство $L_2(\mu)$ сепарабельно, мера μ σ -конечна и не является чисто атомической, $T \in B(L_2(\mu))$ и $0 \in \sigma_c(T^*)$. Тогда уравнение 2-го рода

$$\alpha x - \lambda T x = f \in L_2(\mu) \quad (4.1.2)$$

эквивалентно интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром.

◁ По теореме 2.2.2 для любого $\varepsilon > 0$ найдется унитарный оператор $U \in B(L_2(\mu))$ такой, что $UTU^{-1} = N + K$, где N — ядерный оператор с ядерной нормой $\|N\|_1$ меньшей, чем ε , $K \in B(L_2(\mu))$ — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} \overline{w_n(t)}, \quad \{w_n\} \subset L_2(\mu). \quad (4.1.3)$$

Применим к обеим частям уравнения (4.1.2) оператор U . Имеем $\alpha Ux - \lambda UTx = Uf$. Сделав в этом уравнении замену $y = Ux$, получим эквивалентное интегральное уравнение

$$\alpha y(s) - \lambda UTU^{-1}y(s) = Uf(s).$$

Пользуясь равенством $UTU^{-1} = N + K$ и (4.1.3), запишем это уравнение в виде

$$\alpha \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha} N\right) y(s) - \lambda \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} \overline{w_n(t)} y(t) d\mu(t) = Uf(s). \quad (4.1.4)$$

Выберем ε так, чтобы $\frac{|\lambda|}{|\alpha|} \|N\|_1 < 1$. Тогда оператор $F_\lambda := 1 - \frac{\lambda}{\alpha} N$ имеет обратный $F_\lambda^{-1} \in B(L_2(\mu))$. Сделав в уравнении (4.1.4) замену $z = F_\lambda y$, придем к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром

$$\alpha z(s) - \lambda \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} \overline{(F_\lambda^{-1})^* w_n(t)} z(t) d\mu(t) = Uf(s). \quad \triangleright$$

Следствие 4.1.1. Утверждения теорем 4.1.1, 4.1.2 справедливы, если T — почти компактный оператор.

В самом деле, образ почти компактного оператора сепарабелен и по теореме 2.2.4 $0 \in \sigma_c(T^*)$.

Следствие 4.1.2. Утверждения теорем 4.1.1, 4.1.2 справедливы, если T — интегральный оператор.

Действительно, в силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3 каждый интегральный оператор почти компактен.

Теорема 4.1.2 допускает следующее обобщение.

Теорема 4.1.3. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $L_2(\mu)$ — сепарабельное пространство, мера μ σ -конечна и не является чисто атомической, $T : D_T \subset H \rightarrow H$ — плотно определенный замыкаемый линейный оператор и $0 \in \sigma_c(T^*)$.

Тогда уравнение 2-го рода в H $\alpha x - \lambda T x = f \in H$ эквивалентно интегральному уравнению 2-го рода в $L_2(\mu)$ с квазивырожденным карлемановским ядром.

◁ По теореме 2.2.2 для любого $\varepsilon > 0$ найдется унитарный оператор $U : H \rightarrow L_2(\mu)$ такой, что $UTU^{-1} = N + K$, где N — ядерный оператор в $L_2(\mu)$ с ядерной нормой, меньшей, чем ε , K — карлемановский интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром. Дальнейшее доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 4.1.2. ▷

В связи с доказанными в этом параграфе теоремами заметим, что в § 6.3 предложены приближенные методы решения интегральных уравнений 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами.

§ 4.2. Сведение систем 2-го рода к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами. Разрешающие ядра

Всюду в этом параграфе предполагается, что $L_2(\mu) := L_2(X, \mu)$ — сепарабельное пространство, мера μ σ -конечна и не является чисто атомической. Рассмотрим пространство $L_{2,m}(\mu)$ вектор-функций $f(s) = \{f_1(s), \dots, f_m(s)\}$, $f_i \in L_2(\mu)$, $i = 1, \dots, m$, со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \int_X \sum_{j=1}^m f_j \overline{g_j} d\mu$$

и нормой

$$\|f\|_{m,\mu} = \left(\int_X \sum_{j=1}^m |f_j|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $B_{ij} \in B(L_2(\mu))$, $i, j = 1, \dots, m$. Определим в $L_{2,m}(\mu)$ оператор B равенствами

$$(Bf(s))_i = \sum_{j=1}^m B_{ij} f_j(s), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.2.1)$$

здесь $(Bf(s))_i$ — i -я компонента вектор-функции $Bf \in L_{2,m}(\mu)$.

Важным примером оператора B может служить карлемановский интегральный оператор $C : L_{2,m}(\mu) \rightarrow L_{2,m}(\mu)$:

$$(Cf(s))_i = \int_X \sum_{j=1}^m c_{ij}(s, t) f_j(t) d\mu(t), \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.2.2)$$

где ядра $c_{ij}(s, t)$ удовлетворяют условию Карлемана

$$\int_X |c_{ij}(s, t)|^2 d\mu(t) < \infty \quad \text{для почти всех } s \in X.$$

Теорема 4.2.1. Пусть $0 \in \sigma_c(B^*)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется унитарный оператор $\tilde{U}$ в $L_{2,m}(\mu)$ такой, что система 2-го рода в $L_{2,m}(\mu)$

$$\alpha x - \lambda Bx = f \quad (4.2.3)$$

заменой $g = \tilde{U}f$, $y = \tilde{U}x$ приводится к эквивалентной системе интегральных уравнений 2-го рода

$$\alpha y - \lambda(\tilde{N} + \tilde{K})y = g, \quad (4.2.4)$$

здесь $\tilde{N}$ — ядерный интегральный оператор в $L_{2,m}(\mu)$ с ядерной нормой меньшей, чем ε , $\tilde{K}$ — карлемановский интегральный оператор с квазивырожденным матричным карлемановским ядром

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} \overline{K_n(t)}, \quad (4.2.5)$$

где для каждого n и $t \in X$ первая строка $(m \times m)$ -матрицы $K_n(t)$ есть $\{v_{n,1}(t), \dots, v_{n,m}(t)\} := v_n(t) \in L_{2,m}(\mu)$, а остальные строки равны 0.

◁ Замена $y = \tilde{U}x$, $g = \tilde{U}f$, где $\tilde{U}$ — унитарный оператор из следствия 2.2.2 теоремы 2.2.1, приводит систему (4.2.3) к искомой системе (4.2.4). ▷

Следствие 4.2.1. Утверждение теоремы 4.2.1 справедливо, если все операторы B_{ij} компактны по мере.

Следствие 4.2.2. Утверждение теоремы 4.2.1 справедливо, если все операторы B_{ij} почти компактны.

Следствие 4.2.3. Утверждение теоремы 4.2.1 справедливо, если все операторы B_{ij} интегральные.

Следствия 4.2.1–4.2.3 вытекают из теоремы 2.2.4, так как все почти компактные и все интегральные операторы компактны по мере.

Теорема 4.2.2. Система (4.2.4) эквивалентна линейному интегральному уравнению в $L_2(\mu)$ с квазивырожденным карлемановским ядром

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} \overline{q_n(t)}, \quad \{q_n\} \subset L_2(\mu).$$

◁ Запишем систему (4.2.4) в виде

$$\alpha \left(\mathbf{1} - \frac{\lambda}{\alpha} \tilde{N} \right) y - \lambda \tilde{K} y = g \quad (4.2.6)$$

и выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\frac{|\lambda|}{|\alpha|} \|\tilde{N}\|_1 < 1$. Тогда оператор $F_\lambda = \mathbf{1} - \frac{\lambda}{\alpha} \tilde{N}$ имеет обратный оператор. Сделав в (4.2.6) замену $z = \left(\mathbf{1} - \frac{\lambda}{\alpha} \tilde{N} \right) y$, получим эквивалентную систему

$$\alpha z - \lambda \tilde{K} F_\lambda^{-1} z = g$$

с квазивырожденным карлемановским матричным ядром

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} \overline{M_n(t)},$$

где для каждого n и $t \in X$ первая строка $(m \times m)$ -матрицы $M_n(t)$ есть $\{w_{n,1}(t), \dots, w_{n,m}(t)\} = w_n(t)$; здесь $w_n(t) = (F_\lambda^{-1})^* v_n(t)$, вектор-функции $v_n(t)$ входят в определение ядра $K_n(t)$ в (4.2.5), остальные строки матрицы $M_n(t)$ равны 0. Мы имеем

$$\alpha z_1(s) - \lambda \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} \sum_{j=1}^m z_j(t) \overline{w_{n,j}(t)} d\mu(t) = g_1(s),$$

$\alpha z_2 = g_2, \dots, \alpha z_m = g_m$, где g_k — k -я компонента вектор-функции g , z_i — i -я компонента решения z . Отсюда

$$\alpha z_1(s) - \lambda \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} \left(z_1(t) \overline{w_{n,1}(t)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=2}^m g_j(t) \overline{w_{n,j}(t)} \right) d\mu(t) = g_1(s).$$

Положив $q_n = w_{n,1}$, будем иметь

$$\alpha z_1(s) - \lambda \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} z_1(t) \overline{q_n(t)} d\mu(t) = g_1(s) + g_0(s),$$

где

$$g_0(s) = \frac{\lambda}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} \langle \tilde{g}, w_n \rangle, \quad \tilde{g} = \{0, g_2, \dots, g_m\}.$$

Пусть $\beta_n := \langle \tilde{g}, w_n \rangle$. Тогда $\beta_n = \langle \tilde{g}, (F_\lambda^{-1})^* v_n \rangle = \langle F_\lambda^{-1} \tilde{g}, v_n \rangle$. В силу следствия 2.2.2 теоремы 2.2.1, из которого вытекает теорема 4.2.1, $v_n = \tilde{U} B^* \tilde{z}_n$, $n = 1, 2, \dots$, где $\{\tilde{z}_n\}$ — ортонормированная система, $\tilde{U}$ — унитарный оператор. Значит,

$$\beta_n = \langle F_\lambda^{-1} \tilde{g}, v_n \rangle = \langle F_\lambda^{-1} \tilde{g}, \tilde{U} B^* \tilde{z}_n \rangle = \langle B \tilde{U}^{-1} F_\lambda^{-1} \tilde{g}, \tilde{z}_n \rangle.$$

Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2 < \infty$. Поэтому $g_0 \in L_2(\mu)$ и $g_1 + g_0 \in L_2(\mu)$. $\triangleright$

В связи с доказанной теоремой см. также теорему 5.2.1 (случай $a(s) \equiv I$, где I — единичная матрица).

Заметим еще, что к интегральному уравнению 2-го рода для z_1 с квазивырожденным карлемановским ядром применимы приближенные методы решения из § 6.3.

Итак, по теореме 4.2.1 система (4.2.3) эквивалентна системе $\alpha y - \lambda C y = g$ с карлемановским интегральным оператором $C : L_{2,m}(\mu) \rightarrow L_{2,m}(\mu)$. Далее, без ограничения общности, будем считать, что $\alpha = 1$. Остальная часть этого параграфа посвящена системе

$$y - \lambda C y = g. \quad (4.2.7)$$

Теорема 4.2.3. Если $1/\lambda$ не принадлежит спектру определяемого равенством (4.2.2) карлемановского интегрального оператора $C : L_{2,m}(\mu) \rightarrow L_{2,m}(\mu)$, то для любой правой части $g \in L_{2,m}(\mu)$ система (4.2.7) имеет, и притом единственное, решение $y \in L_{2,m}(\mu)$. Это решение определяется равенством

$$y(s) = g(s) + \lambda \int_X \Gamma(s, t; \lambda) g(t) d\mu(t), \quad (4.2.8)$$

где элементы $\Gamma_{ij}(s, t; \lambda)$, $i, j = 1, \dots, m$, разрешающего матричного ядра $\Gamma(s, t; \lambda)$ удовлетворяют условию Карлемана

$$\int_X |\Gamma_{ij}(s, t; \lambda)|^2 d\mu(t) < \infty \quad \text{для почти всех } s \in X.$$

Если, кроме того, для всех $i, j = 1, \dots, m$,

$$\int_X |c_{ij}(s, t)|^2 d\mu(s) < \infty \quad \text{для почти всех } t \in X, \quad (4.2.9)$$

то разрешающее ядро удовлетворяет для почти всех $(s, t) \in X \times X$ двум равенствам

$$\Gamma(s, t; \lambda) - \lambda \int_X C(s, \tau) \Gamma(\tau, t; \lambda) d\mu(\tau) = C(s, t), \quad (4.2.10)$$

$$\Gamma(s, t; \lambda) - \lambda \int_X \Gamma(s, \sigma; \lambda) C(\sigma, t) d\mu(\sigma) = C(s, t). \quad (4.2.11)$$

Здесь $C(s, t)$ — матричное ядро карлемановского оператора C с элементами $c_{ij}(s, t)$, $i, j = 1, \dots, m$.

< Воспользуемся следующим аналогом леммы о правом умножении из § 2.1.

Лемма 4.2.1. Пусть $C : L_{2,m}(\mu) \rightarrow L_{2,m}(\mu)$ — карлемановский интегральный оператор, $B : L_{2,m}(\mu) \rightarrow L_{2,m}(\mu)$ — линейный ограниченный оператор. Тогда CB — карлемановский интегральный оператор.

Обозначим через $c_i(s, t)$ i -ю строку матрицы оператора C и через $(a)_i$ i -ю компоненту столбца a . Для любого $i = 1, \dots, m$ и $h \in L_{2,m}(\mu)$ имеем

$$(CBh)_i = \langle Bh, \bar{c}_i \rangle = \langle h, B^* \bar{c}_i \rangle,$$

где оператор B^* применяется к $\overline{c_i(s, t)}$ как к вектор-функции $\overline{c_i(s, t)}$ переменного $t \in X$, принадлежащей $L_{2,m}(\mu)$ при почти всех $s \in X$. Из полученного равенства следует, что CB — интегральный оператор с матричным ядром, i -я строка которого равна $\overline{B^* c_i}$, откуда вытекает, что CB — карлемановский интегральный оператор.

Продолжим доказательство теоремы 4.2.3. Пусть ξ — произвольная точка из резольвентного множества $\rho(C)$ оператора C , $R_\xi := (C - \xi \mathbf{1})^{-1}$ — резольвента оператора C , $\Gamma_\xi := -\xi C R_\xi$ — резольвента Фредгольма оператора C . По доказанной лемме $\Gamma_\xi : L_{2,m}(\mu) \rightarrow L_{2,m}(\mu)$ — карлемановский интегральный оператор. Так как $\frac{1}{\lambda} \in \rho(C)$, то отсюда следует, что для любой функции $e \in L_{2,m}(\mu)$

$$\Gamma_{1/\lambda} e(s) = \int_X \Gamma(s, t; \lambda) e(t) d\mu(t), \quad (4.2.12)$$

где все элементы $\Gamma_{ij}(s, t; \lambda)$ матричного ядра $\Gamma(s, t; \lambda)$, называемого разрешающим, удовлетворяют условию Карлемана

$$\int_X |\Gamma_{ij}(s, t; \lambda)|^2 d\mu(t) < \infty \quad \text{для почти всех } s \in X.$$

По условию $1/\lambda \in \rho(C)$, следовательно, оператор $(C - \frac{1}{\lambda} \mathbf{1})^{-1}$ определен на $L_{2,m}(\mu)$, действует в $L_{2,m}(\mu)$ и непрерывен. Запишем систему (4.2.7) в виде $(\mathbf{1} - \lambda C)y = g$. Тогда $y = -\frac{1}{\lambda} R_{1/\lambda} g$ является, и притом единственным, решением системы (4.2.7). Но $-\frac{1}{\lambda} R_{1/\lambda} = \mathbf{1} + \lambda \Gamma_{1/\lambda}$. Значит,

$$y(s) = (\mathbf{1} + \lambda \Gamma_{1/\lambda})g(s) = g(s) + \lambda \int_X \Gamma(s, t; \lambda) g(t) d\mu(t).$$

Докажем, что для $\Gamma(s, t; \lambda)$ выполнено равенство (4.2.10). Имеем $(1 - \lambda C)\Gamma_{1/\lambda} = C$. Поэтому для любой функции $h \in L_{2,m}(\mu)$

$$\begin{aligned} \int_X \Gamma(s, t; \lambda) \overline{h(t)} d\mu(t) - \lambda \int_X C(s, \tau) \int_X \Gamma(\tau, t; \lambda) \overline{h(t)} d\mu(t) d\mu(\tau) = \\ = \int_X C(s, t) \overline{h(t)} d\mu(t). \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Из (4.2.9) следует, что C^* — карлемановский интегральный оператор. Отсюда и из $1/\bar{\lambda} \in \rho(C^*)$ и $R_{1/\bar{\lambda}}(C^*) = (R_{1/\lambda})^*$ вытекает, что $\Gamma_{1/\bar{\lambda}}(C^*) = (\Gamma_{1/\lambda}(C))^*$. Тогда для почти всех $(s, t) \in X \times X$

$$\gamma(s, t; \bar{\lambda}) = \overline{\Gamma'(t, s; \lambda)}, \quad (4.2.14)$$

где $\gamma(s, t; \bar{\lambda})$ — разрешающее матричное ядро оператора C^* и A' — матрица, транспонированная к матрице A . Поэтому для почти всех $t \in X$

$$\begin{aligned} \Gamma(t, \lambda) &:= \left(\sum_{i,j=1}^m \int_X |\Gamma_{ij}(s, t; \lambda)|^2 d\mu(s) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^m \int_X |\gamma_{ij}(t, s; \bar{\lambda})|^2 d\mu(s) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

В силу σ -конечности меры μ найдется возрастающая к X последовательность измеримых множеств $\{X_k\}$ такая, что $\mu X_k < \infty$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть

$$G_k = \{t \mid t \in X_k, \Gamma(t, \lambda) \leq k\}.$$

Тогда $\mu(X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k) = 0$ и $\mu G_k < \infty$, $k = 1, 2, \dots$. Для $(m \times m)$ -матрицы D с элементами d_{ij} положим $\|D\| = \left(\sum_{i,j=1}^m |d_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ и обозначим через $\|\cdot\|_m$ норму в евклидовом пространстве E_m . Имеем для любого $h \in L_{2,m}(\mu)$

и $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 & \int_X \int_X \|C(s, \tau)\| \|\Gamma(\tau, t; \lambda)\| \chi_{G_k}(t) \|h(t)\|_m d\mu(\tau) d\mu(t) = \\
 & = \int_X \int_X \|C(s, \tau)\| \|\Gamma(\tau, t; \lambda)\| d\mu(\tau) \chi_{G_k}(t) \|h(t)\|_m d\mu(t) \leq \\
 & \leq \int_X \left(\int_X \|C(s, \tau)\|^2 d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X \|\Gamma(\tau, t; \lambda)\|^2 d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
 & \quad \times \chi_{G_k}(t) \|h(t)\|_m d\mu(t) = \\
 & = \left(\int_X \|C(s, \tau)\|^2 d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \int_X \Gamma(t, \lambda) \chi_{G_k}(t) \|h(t)\|_m d\mu(t) \leq \\
 & \leq k \left(\int_X \|C(s, \tau)\|^2 d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \int_{G_k} \|h(t)\|_m d\mu(t) < \infty.
 \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Обозначим через δ_r вектор-столбец из E_m , r -я компонента которого равна 1, а остальные компоненты равны 0. Пусть $\{e_j(t)\}$ — счетное всюду плотное в $L_2(\mu)$ множество. Тогда в силу (4.2.13) и счетности $\{e_j(t)\}$ найдется множество X_0 , $\mu(X \setminus X_0) = 0$, такое, что для всех $s \in X_0$, $k, j = 1, 2, \dots, r = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned}
 & \int_X \Gamma(s, t; \lambda) \chi_{G_k}(t) \delta_r \overline{e_j(t)} d\mu(t) - \\
 & - \lambda \int_X C(s, \tau) \int_X \Gamma(\tau, t; \lambda) \chi_{G_k}(t) \delta_r \overline{e_j(t)} d\mu(t) d\mu(\tau) = \\
 & = \int_X C(s, t) \chi_{G_k}(t) \delta_r \overline{e_j(t)} d\mu(t).
 \end{aligned}$$

Пользуясь (4.2.15) и теоремой Фубини, поменяем в этих равенствах порядок интегрирования. Мы получим для всех $s \in X_0$, $k, j = 1, 2, \dots, r = 1, \dots, m$

$$\int_X \left[\Gamma(s, t; \lambda) - \lambda \int_X C(s, \tau) \Gamma(\tau, t; \lambda) d\mu(\tau) - C(s, t) \right] \chi_{G_k}(t) \delta_r \overline{e_j(t)} d\mu(t) = 0.$$

Отсюда и из произвольности k, j, r следует, что выражение в квадратных скобках равно нулю для почти всех $t \in X$. Таким образом, равенство (4.2.10) имеет место для почти всех $(s, t) \in X \times X$.

Докажем равенство (4.2.11). Так как $(\bar{\lambda})^{-1} \in \rho(C^*)$, то, применив доказанное равенство (4.2.10) к сопряженной системе

$$u(s) - \bar{\lambda} \int_X \overline{C'(t, s)} u(t) d\mu(t) = f(s),$$

получим

$$\gamma(s, t; \bar{\lambda}) - \bar{\lambda} \int_X \overline{C'(\sigma, s)} \gamma(s, t; \bar{\lambda}) d\mu(\sigma) = \overline{C'(t, s)}.$$

Переходя к транспонированным матрицам и учитывая (4.2.14), будем иметь для п. в. $(s, t) \in X \times X$

$$\Gamma(t, s; \lambda) - \lambda \int_X \Gamma(t, \sigma; \lambda) C(\sigma, s) d\mu(\sigma) = C(t, s).$$

Поменяв местами t и s , получим (4.2.11). $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2.1. Задача о разработке методов отыскания разрешающих ядер интегральных уравнений 2-го рода с произвольными карлемановскими операторами была поставлена в [23, Дополнение, § 5, задача 4]. Существенное продвижение в решении этой задачи получено недавно в работе И. М. Новицкого [51].

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2.2. По лемме о правом умножении из § 2.1 для любой регулярной точки ξ карлемановского интегрального оператора C резольвента Фредгольма $\Gamma_\xi = -\xi C R_\xi = -\xi C(C - \xi \mathbf{1})^{-1}$ является интегральным оператором. Для произвольных интегральных операторов в $L_2(\mu)$ аналогичное утверждение неверно: в теореме 2.1.3 построен непрерывный линейный интегральный оператор в $L_2(\mu)$, резольвента Фредгольма которого не является интегральным оператором ни в одной его регулярной точке.

Глава 5. Функциональные уравнения и системы 3-го рода в L_2

§ 5.1. Сведение функциональных уравнений 3-го рода к эквивалентным интегральным уравнениям 1-го или 2-го рода

В рассмотрении этого параграфа нам потребуется следующая теорема.

Теорема 5.1.1. Пусть $L_2(\mu) := L_2(X, \mu)$ — сепарабельное пространство, мера μ не является чисто атомической, $N_i \in B(L_2(\mu))$, $i = 0, 1$, и существует ортонормированная система $\{\psi_n\} \subset L_2(\mu)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(N_i^* - \overline{\alpha_i} \mathbf{1})\psi_n\| = 0, \quad i = 0, 1. \quad (5.1.1)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить унитарный оператор $W \in B(L_2(\mu))$ такой, что

$$WN_iW^{-1} = \alpha_i \mathbf{1} + K_i + \Gamma_i, \quad i = 0, 1,$$

где Γ_i — ядерные операторы с ядерной нормой меньше, чем ε , K_i — интегральные операторы с квазивырожденными карлемановскими ядрами

$$K_i(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} \overline{p_{n,i}(t)}, \quad i = 0, 1. \quad (5.1.2)$$

Здесь $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, $\{p_{n,i}\}$ — ограниченные в $L_2(\mu)$ последовательности.

◁ Пользуясь (5.1.1), выберем для $\varepsilon > 0$ подпоследовательность $\{\varphi_n\} \subset \{\psi_{2n}\}$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|(N_i^* - \overline{\alpha_i} \mathbf{1})\varphi_n\| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \quad (5.1.3)$$

и рассмотрим ядерные операторы

$$D_i f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) (N_i^* - \overline{\alpha_i} \mathbf{1}) \varphi_n, \quad f \in L_2(\mu), \quad i = 0, 1.$$

Введем операторы $Q_i = N_i^* - \overline{\alpha_i} \mathbf{1} - D_i$. Так как $Q_i \varphi_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, $i = 0, 1$, то $\text{im } Q_i^* \subseteq [\varphi_n]^\perp$, где $[\varphi_n]^\perp$ — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке $[\varphi_n]$ последовательности $\{\varphi_n\}$. Пусть $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, E — замкнутая линейная оболочка ортонормированной последовательности $\{\chi_{e_n}/\sqrt{\mu e_n}\}$, $E^\perp$ — ортогональное дополнение к E . Мы имеем

$$\dim[\varphi_n] = \dim[\varphi_n]^\perp = \dim E = \dim E^\perp = \infty.$$

Пусть $\{\varphi_n^\perp\}$ — ортонормированный базис $[\varphi_n]^\perp$ и $\{e_n^\perp\}$ — ортонормированный базис $E^\perp$. Определим унитарный оператор $W \in B(L_2(\mu))$ равенствами

$$W\varphi_n^\perp = \chi_{e_n}/\sqrt{\mu e_n}, \quad W\varphi_n = e_n^\perp, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.1.4)$$

Тогда для любого $h \in L_2(\mu)$ имеем $Q_i^* h \in [\varphi_n]^\perp$, кроме того,

$$D_i^* h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, (N_i^* - \overline{\alpha_i} \mathbf{1}) \varphi_n) \varphi_n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W(N_i - \alpha_i \mathbf{1})W^{-1}h &= W(Q_i^* + D_i^*)W^{-1}h = \\ &= W \sum_{n=1}^{\infty} (Q_i^* W^{-1}h, \varphi_n^\perp) \varphi_n^\perp + W \sum_{n=1}^{\infty} (W^{-1}h, (N_i^* - \overline{\alpha_i} \mathbf{1}) \varphi_n) \varphi_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (h, WQ_i \varphi_n^\perp) \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} + \sum_{n=1}^{\infty} (h, W(N_i^* - \overline{\alpha_i} \mathbf{1}) \varphi_n) e_n^\perp. \end{aligned}$$

Положим $p_{n,i} = WQ_i \varphi_n^\perp = W(N_i^* - \overline{\alpha_i} \mathbf{1} - D_i) \varphi_n^\perp = W(N_i^* - \overline{\alpha_i} \mathbf{1}) \varphi_n^\perp$ и

$$K_i(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{p_{n,i}(t)}. \quad (5.1.5)$$

Тогда

$$WN_i W^{-1} = \alpha_i \mathbf{1} + W(N_i - \alpha_i \mathbf{1})W^{-1} = \alpha_i \mathbf{1} + K_i + \Gamma_i,$$

где K_i — карлемановские интегральные операторы с квазивырожденными карлемановскими ядрами (5.1.5), Γ_i — ядерные операторы с C_1 -ядрами (определение C_1 -ядра см. в § 3.2)

$$\Gamma_i(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^\perp(s) \overline{W(N_i^* - \overline{\alpha_i} \mathbf{1}) \varphi_n(t)}.$$

В силу (5.1.3) ядерные нормы операторов Γ_i меньше, чем ε . $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.1. Пусть $a(s)$ — определенная на X μ -измеримая μ -почти всюду конечная функция. Число α называется ее *существенным значением*, если $\mu\{s \in X : |a(s) - \alpha| < \varepsilon\} > 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

Отметим, что если X — замыкание открытого множества евклидова пространства, μ — мера Лебега и $a(s)$ — непрерывная функция на X , то любое конечное значение этой функции является ее существенным значением.

Теорема 5.1.2. Пусть функция $a(s)$ принадлежит $L_\infty(\mu)$, α — какое-нибудь ее существенное значение, $\{\varepsilon_n\}$ — сходящаяся к 0 последовательность положительных чисел, $\{E_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами такая, что $|a(s) - \alpha| < \varepsilon_n$ для почти всех $s \in E_n$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть $E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, мера μ не имеет атомов в E_0 , $T \in B(L_2(\mu))$ и множества $P_{E_n}TS_2$, $n = 1, 2, \dots$, компактны по мере, здесь S_2 — единичный шар в $L_2(\mu)$, $P_{E_n}h = \chi_{E_n}h$, $h \in L_2(\mu)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует унитарный оператор $W \in B(L_2(\mu))$ такой, что уравнение 3-го рода

$$a(s)x(s) - \lambda Tx(s) = f(s) \in L_2(\mu) \quad (5.1.6)$$

заменой $y = Wx$, $g = Wf$ приводится к эквивалентному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \alpha y(s) + \int_X [G(s, t) + R(s, t)] y(t) d\mu(t) - \\ - \lambda \int_X [H(s, t) + S(s, t)] y(t) d\mu(t) = g(s), \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

где

$$G(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{p_n(t)}, \quad (5.1.8)$$

$$H(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} q_n(t), \quad (5.1.9)$$

$\{p_n\}$, $\{q_n\}$ — ограниченные в $L_2(\mu)$ последовательности, $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с положительными мерами, C_1 -ядра $R(s, t)$, $S(s, t)$ порождают ядерные операторы R, S в $L_2(\mu)$ с ядерными нормами меньшими, чем ε .

◁ Зафиксируем индекс n . Пусть $\{\varphi_{n,k}\}$ — какая-нибудь равномерно ограниченная ортонормированная система функций с носителями в E_n . По теореме 1.1.2 оператор $P_{E_n}T : L_2(\mu) \rightarrow L_1(E_n, \mu)$ компактен. Тогда $T^*P_{E_n} : L_\infty(E_n, \mu) \rightarrow L_2(\mu)$ компактен. Поэтому

$$\|T^*\varphi_{n,k}\| = \|T^*P_{E_n}\varphi_{n,k}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Выберем k_n так, чтобы $\|T^* \varphi_{n,k_n}\| < \varepsilon_n$. Пусть $\psi_n := \varphi_{n,k_n}$. Носители функций ψ_n содержатся в E_n , и множества E_n , $n = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются. Значит, $\{\psi_n\}$ — ортонормированная система. При этом

$$\|T^* \psi_n\| < \varepsilon_n, \quad \|(A^* - \bar{\alpha} \mathbf{1})\psi_n\| < \varepsilon_n,$$

где $Ah(s) = a(s)h(s)$, $h \in L_2(\mu)$. Положим в теореме 5.1.1 $N_0 = A$, $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = 0$, $N_1 = T$. Так как $\varepsilon_n \rightarrow 0$, то выполняется условие (5.1.1), поэтому по теореме 5.1.1 существует не зависящий от λ и f унитарный оператор $W \in B(L_2(\mu))$ такой, что $WAW^{-1} = \alpha \mathbf{1} + G + R$, $WTW^{-1} = H + S$, где G , H — карлемановские интегральные операторы с квазивырожденными карлемановскими ядрами (5.1.8), (5.1.9), R , S — ядерные операторы с C_1 -ядрами $R(s, t)$, $S(s, t)$ и ядерной нормой меньшей, чем ε . Следовательно, замена $y = Wx$, $g = Wf$ приводит уравнение (5.1.6) к эквивалентному интегральному уравнению (5.1.7). $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1.1. Множества $P_{E_n}TS_2$ компактны по мере, если $P_{E_n}T$ — интегральные операторы.

Справедливость этого утверждения вытекает из следствия 1.1.5 теоремы 1.1.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1.2. Если в (5.1.6) $a(s) = \alpha$ почти всюду (т. е. если (5.1.6) является уравнением 1-го или 2-го рода), то $A - \alpha \mathbf{1} = 0$. Тогда $G + R = 0$, и первое интегральное слагаемое в (5.1.7) будет отсутствовать.

Проиллюстрируем теоремы 5.1.1, 5.1.2 и их доказательства на примере интегрального уравнения 3-го рода в $L_2([a, b], \mu)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, μ — мера Лебега:

$$a(s)x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)x(t) d\mu(t) = f(s), \quad (5.1.10)$$

в котором $(\mu \times \mu)$ -измеримое ядро $K(s, t)$ порождает интегральный оператор $T \in B(L_2([a, b]))$, функция $a(s)$ непрерывна и ограничена на $[a, b]$. Пусть α — произвольное ее значение. Для $\varepsilon > 0$ выберем попарно не пересекающиеся конечные интервалы $\Delta_n = (a_n, b_n)$ так, чтобы $|a(s) - \alpha| < \varepsilon/2^n$ при всех $s \in \Delta_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\|(a(s) - \alpha)\chi_{\Delta_n}(s)h(s)\| < \varepsilon/2^n,$$

если $\|h\| \leq 1$. Пусть $\{\varphi_{n,k}\}_{k=1}^\infty$ — любая из двух ортонормированных равномерно ограниченных систем, являющихся базисами в $L_2(\Delta_n)$:

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{|\Delta_n|}} \chi_{\Delta_n}(t) \sin \pi k \frac{t - a_n}{b_n - a_n} \right\}_{k=1}^\infty, \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{|\Delta_n|}} \chi_{\Delta_n}(t) \omega_k \left(\frac{t - a_n}{b_n - a_n} \right) \right\}_{k=1}^\infty,$$

где $|\Delta_n| = b_n - a_n$, $\{\omega_k\}$ — ортонормированная система Уолша. Так как T — интегральный оператор, то

$$\|T^* \varphi_{n,k}\| = \|T^* \chi_{\Delta_n} \varphi_{n,k}\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Выберем k_n так, чтобы $\|T^* \varphi_{n,k_n}\| < \varepsilon/2^n$, $n = 1, 2, \dots$. Положим $\varphi_n = \varphi_{n,k_n}$, $n = 1, 2, \dots$, $N_0 = A$, $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = 0$, $N_1 = T$. Тогда имеют место неравенства (5.1.3). Повторяя доказательства теорем 5.1.1, 5.1.2, получим эквивалентное интегральному уравнению (5.1.10) интегральное уравнение вида (5.1.7) с ядрами вида (5.1.8), (5.1.9) и C_1 -ядрами $R(s, t)$, $S(s, t)$, порождающими ядерные операторы в $L_2([a, b])$ с ядерными нормами, меньшими, чем ε . При этом в качестве $\{\varphi_m^\perp\}$ в (5.1.4) можно взять приведенное выше ортонормированное семейство $\{\varphi_{n,k}\}_{n,k=1}^\infty$, из которого удалена ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ и к которому добавлена ортонормированная система $z_j = \chi_\Delta u_j$, $j = 1, 2, \dots$, где $\{u_j\}$ — произвольный ортонормированный базис $L_2(\Delta)$, $\Delta = (a, b) \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \Delta_n$. В качестве $\{e_n\}$ удобно выбрать произвольные попарно не пересекающиеся конечные интервалы $\delta_n = (\alpha_n, \beta_n) \subset (a, b)$. Ортонормированную систему $\{e_m^\perp\}$ в (5.1.4) можно построить следующим образом. Возьмем ортонормированное семейство $h_{n,k} = \chi_{\delta_n} \eta_{n,k}$, $n, k = 1, 2, \dots$, где $\{\eta_{n,k}\}_{k=1}^\infty$ — произвольный ортонормированный базис $L_2(\delta_n)$ такой, что $\eta_{n,1} = \chi_{\delta_n} / \sqrt{|\delta_n|}$, $|\delta_n| = \beta_n - \alpha_n$. Тогда $\{e_m^\perp\}$ получается из $\{h_{n,k}\}$ удалением ортонормированной системы $\{\eta_{n,1}\}$ и добавлением ортонормированной системы $\xi_j = \chi_\delta v_j$, $j = 1, 2, \dots$, где $\{v_j\}$ — произвольный ортонормированный базис $L_2(\delta)$, $\delta = (a, b) \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \delta_n$. Если δ_n , $n = 1, 2, \dots$, выбраны так, что их объединение, дополненное внутренними концами, совпадает с (a, b) , то необходимость в $\{\xi_j\}$ отпадает.

Напомним, что оператор $Z \in B(L_2(\mu))$ называется изоморфизмом, если существует обратный $Z^{-1} \in B(L_2(\mu))$.

Теорема 5.1.3. Пусть в уравнении (5.1.7) $\alpha \neq 0$. Тогда для любого $\lambda \neq 0$ существует изоморфизм $F_\lambda = \mathbf{1} - D_\lambda$ с ядерным оператором D_λ такой, что замена $z = F_\lambda u$ приводит (5.1.7) к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода

$$\alpha z(s) + \int_X L_\lambda(s, t) z(t) d\mu(t) = g(s) \quad (5.1.11)$$

с квазивырожденным карлемановским ядром

$$L_\lambda(s, t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \left[\overline{c_{n,\lambda}(t)} - \lambda \overline{d_{n,\lambda}(t)} \right]. \quad (5.1.12)$$

◁ Пользуясь тем, что в уравнении (5.1.7) ядра $R(s, t)$, $S(s, t)$ порождают ядерные операторы R , S с ядерной нормой, меньшей, чем ε , выберем ε так, чтобы

$$\frac{1}{|\alpha|} \|R\|_1 + \frac{|\lambda|}{|\alpha|} \|S\|_1 < 1,$$

где $\|\cdot\|_1$ — ядерная норма. Положим $D_\lambda = \frac{\lambda}{\alpha} S - \frac{1}{\alpha} R$. Тогда $\|D_\lambda\| \leq \|D_\lambda\|_1 < 1$. Следовательно, оператор $F_\lambda = \mathbf{1} - D_\lambda$ имеет обратный

$$F_\lambda^{-1} = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} D_\lambda^n = \mathbf{1} + H_\lambda, \quad (5.1.13)$$

где ряд в (5.1.13) сходится абсолютно по операторной норме и $H_\lambda = D_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} D_\lambda^n$ — ядерный оператор. Запишем (5.1.7) в виде

$$\alpha F_\lambda y(s) + \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} \left(\overline{p_n(t)} - \lambda \overline{q_n(t)} \right) y(t) d\mu(t) = g(s).$$

Сделав в этом уравнении замену $z = F_\lambda y$, получим эквивалентное интегральное уравнение 2-го рода

$$\alpha z(s) + \int_X L_\lambda(s, t) z(t) d\mu(t) = g(s) \quad (5.1.14)$$

с квазивырожденным карлемановским ядром

$$L_\lambda(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu} e_n} \left[\overline{(\mathbf{1} + H_\lambda^*)(p_n(t) - \lambda q_n(t))} \right]. \quad \triangleright \quad (5.1.15)$$

К уравнению (5.1.14) с ядром (5.1.15) применимы приближенные методы решения, предложенные в § 6.3.

§ 5.2. Сведение систем функциональных уравнений 3-го рода к эквивалентным интегральным уравнениям 1-го или 2-го рода

Пусть E_m — евклидово пространство размерности m с нормой $\|\cdot\|_m$ и пусть $L_{2,m}(Y, \nu)$ — пространство всех вектор-функций $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ с компонентами $f_i \in L_2(Y, \nu)$, $i = 1, \dots, m$, и конечной нормой

$$\|f\|_{m,\nu} = \left(\int_Y \|f(s)\|_m^2 d\nu(s) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_Y \sum_{j=1}^m |f_j(s)|^2 d\nu(s) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем обозначать скалярное произведение в $L_{2,m}(Y, \nu)$.

Рассмотрим в $L_{2,m}(Y, \nu)$ общую систему линейных функциональных уравнений 3-го рода

$$a(s)x(s) - \lambda Dx(s) = f(s) \in L_{2,m}(Y, \nu), \quad (5.2.1)$$

где неизвестная вектор-функция $x(s)$ ищется в $L_{2,m}(Y, \nu)$, все элементы $(m \times m)$ -матрицы $a(s)$ определены на Y , почти всюду конечны и измеримы, $D = (D_{ij})$ — $(m \times m)$ -матричный оператор, все элементы D_{ij} которого являются линейными непрерывными операторами, действующими из $L_2(Y, \nu)$ в $L_2(Y, \nu)$. Систему (5.2.1) будем называть общей системой 2-го рода, если $a(s) = \alpha I$ при почти всех $s \in Y$ для некоторого $\alpha \neq 0$ (здесь I — единичная матрица), и общей системой 1-го рода, если $a(s) = 0$ для почти всех $s \in Y$.

Мы будем рассматривать систему (5.2.1) при следующих дополнительных условиях:

- (А) все элементы $a_{ij}(s)$ матрицы $a(s)$ принадлежат $L_\infty(Y, \nu)$;
- (В) все операторы D_{ij} компактны по мере.

Так как в силу следствия 1.1.5 теоремы 1.1.3 всякий интегральный оператор в $L_2(Y, \nu)$ компактен по мере, то общая система линейных интегральных уравнений 3-го рода в $L_2(Y, \nu)$ с ограниченными измеримыми элементами матричного коэффициента является системой (5.2.1), удовлетворяющей условиям (А), (В).

Целью настоящего параграфа является редукция системы (5.2.1) с помощью явной линейной непрерывной обратимой замены к эквивалентному линейному интегральному уравнению в L_2 либо 1-го, либо 2-го рода, к которому можно применить известные методы решения.

Напомним определения понятий, фигурирующих в формулировке основного результата параграфа — теоремы 5.2.1.

Будем называть число β существенным собственным значением матрицы $a(s)$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\nu \{s \in Y : |\det(a(s) - \beta I)| < \varepsilon\} > 0.$$

Отметим, что если Y — замыкание открытого множества евклидова пространства, ν — мера Лебега и все элементы матрицы $a(s)$ непрерывны на Y , то любое собственное значение этой матрицы является ее существенным собственным значением.

Пусть H, H_1 — гильбертовы пространства с нормами $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_{H_1}$. Линейный оператор $T : H \rightarrow H_1$ называется унитарным, если область значений T есть все H_1 и $\|Th\|_{H_1} = \|h\|_H$ для каждого $h \in H$.

Теорема 5.2.1. Пусть $L_2(X, \mu)$, $L_2(Y, \nu)$ — комплексные сепарабельные пространства, меры μ, ν σ -конечны, ν не имеет атомов, μ не является чисто атомической. Пусть α — какое-нибудь существенное собственное значение матрицы $a(s)$ в системе (5.2.1). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить не зависящий от λ и f унитарный оператор $V : L_{2,m}(Y, \nu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ такой, что замена $y = Vx$, $g = Vf$ приводит систему (5.2.1), удовлетворяющую условиям (A), (B), к эквивалентному интегральному уравнению в $L_2(X, \mu)$

$$\begin{aligned} & \alpha y(\eta) + \int_X [\Gamma_1(\eta, \xi) + K_1(\eta, \xi)] y(\xi) d\mu(\xi) - \\ & - \lambda \int_X [\Gamma_2(\eta, \xi) + K_2(\eta, \xi)] y(\xi) d\mu(\xi) = g(\eta), \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

где ядра Γ_i ($i = 1, 2$) порождают ядерные операторы в $L_2(X, \mu)$ с ядерной нормой меньшей, чем ε , ядра K_i ($i = 1, 2$) — квазивырожденные карлемановские ядра

$$K_i(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{p_{n,i}(\xi)}.$$

Здесь $\{p_{n,i}\}$ — ограниченные в $L_2(X, \mu)$ последовательности, $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами.

◁ Как известно [6, с. 239], каждая $(m \times m)$ -матрица представляется в виде произведения унитарной $(m \times m)$ -матрицы на верхнюю треугольную $(m \times m)$ -матрицу. Пользуясь этим, запишем для каждого $s \in Y$ матрицу $a^*(s) - \overline{\alpha}I$ в виде $u(s)b(s)$, где $a^*(s)$ — сопряженная к $a(s)$ матрица, $u(s)$ — унитарная матрица, $b(s)$ — верхняя треугольная матрица. Так как $|\det b(s)| = |\det(a^*(s) - \overline{\alpha}I)|$ и 0 является существенным значением $|\det(a^*(s) - \overline{\alpha}I)|$, то 0 будет существенным значением хотя бы одного диагонального элемента $b_{rr}(s)$ матрицы $b(s)$. Будем считать без ограничения общности, что $r = 1$. Тогда найдутся последовательность попарно не пересекающихся множеств Δ_j с конечными положительными мерами и монотонно убывающая к нулю последовательность чисел ε_j такие, что

$$|b_{11}(s)| < \varepsilon_j \quad \text{для почти всех } s \in \Delta_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.2.3)$$

Рассмотрим для каждого j равномерно ограниченную ортонормированную последовательность функций $\{g_{k,j}\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2(Y, \nu)$ с носителями в Δ_j . Существование такой последовательности вытекает из того, что в Y нет атомов меры ν . В качестве $\{g_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$ можно выбрать ортонормированную систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{k,\Delta_j}\}_{k=1}^{\infty}$, носители которых совпадают с Δ_j (определение этих функций см. в § 1.1). Пусть

h_0 — координатный столбец $(1, 0, \dots, 0) \in E_m$. Введем вектор-функции $\varphi_{k,j} = h_0 g_{k,j}$. Их носители лежат в Δ_j и $\{\varphi_{k,j}\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированная система в $L_{2,m}(Y, \nu)$. Пользуясь унитарностью матриц $u(s)$ и тем, что $b(s)$ — верхние треугольные матрицы, получим для почти всех $s \in Y$ в силу (5.2.3)

$$\begin{aligned} \|(a^*(s) - \bar{\alpha}I)\varphi_{k,j}(s)\|_m &= \|u(s)b(s)\varphi_{k,j}(s)\|_m = \\ &= \|b(s)\varphi_{k,j}(s)\|_m = |b_{11}(s)g_{k,j}(s)| < \varepsilon_j |g_{k,j}(s)|, \end{aligned}$$

здесь $\|\cdot\|_m$ — норма в E_m . Отсюда для любых k, j

$$\|(a^*(s) - \bar{\alpha}I)\varphi_{k,j}(s)\|_{m,\nu} < \varepsilon_j \left(\int_Y |g_{k,j}|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_j. \quad (5.2.4)$$

Зафиксируем j и покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|D^* \varphi_{k,j}\|_{m,\nu} = 0, \quad (5.2.5)$$

где D^* — сопряженный к D оператор. Имеем

$$\begin{aligned} \|D^* \varphi_{k,j}\|_{m,\nu}^2 &= \langle D^* \varphi_{k,j}, D^* \varphi_{k,j} \rangle = \langle DD^* \varphi_{k,j}, \varphi_{k,j} \rangle = \\ &= \langle \chi_{\Delta_j} DD^* \varphi_{k,j}, \chi_{\Delta_j} \varphi_{k,j} \rangle \leq \int_{\Delta_j} |h_k g_{k,j}| d\nu \leq C_j \int_{\Delta_j} |h_k| d\nu, \end{aligned}$$

где

$$C_j = \sup_{k=1,2,\dots} \|g_{k,j}\|_{L_\infty(\Delta_j, \nu)} < \infty,$$

h_k — первая компонента вектор-функции $\chi_{\Delta_j} DD^* \varphi_{k,j}$. Ортонормированная последовательность $\{\varphi_{k,j}\}_{k=1}^\infty$ слабо сходится к 0 в $L_{2,m}(Y, \nu)$. Значит, $\{\chi_{\Delta_j} DD^* \varphi_{k,j}\}_{k=1}^\infty$ слабо сходится к 0 в $L_{2,m}(Y, \nu)$. Но тогда $\{h_k\}$ слабо сходится к 0 в $L_2(\Delta_j, \nu)$ и, следовательно, в $L_1(\Delta_j, \nu)$. При этом для любого измеримого множества $e \subset \Delta_j$

$$\int_e |h_k| d\mu \leq K_j \sqrt{\nu e}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$K_j = \sup_{k=1,2,\dots} \left(\int_{\Delta_j} |h_k|^2 d\nu \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Кроме того, последовательность $\{h_k\}$ компактна по мере. Отсюда и из слабой сходимости $\{h_k\}$ к 0 в $L_1(\Delta_j, \nu)$ следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta_j} |h_k| d\nu = 0.$$

Таким образом, равенство (5.2.5) доказано.

Из (5.2.5) вытекает, что для каждого j найдется номер k_j такой, что

$$\|D^* \varphi_{k_j, j}\|_{m, \nu} < \varepsilon_j. \quad (5.2.6)$$

Положим $\psi_j = \varphi_{k_j, j}$. Так как $\|\psi_j\|_{m, \nu} = 1$, носитель функции ψ_j содержится в Δ_j и множества Δ_j попарно не пересекаются, то $\{\psi_j\}$ — ортонормированная система в $L_{2, m}(Y, \nu)$, для которой в силу (5.2.4), (5.2.6) выполняются неравенства

$$\|D^* \psi_j\|_{m, \nu} < \varepsilon_j, \quad \|(a^*(s) - \bar{\alpha}I)\psi_j\|_{m, \nu} < \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.2.7)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем, пользуясь (5.2.7), подпоследовательность $\{\varphi_n\} \subset \{\psi_{2n}\}$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|D^* \varphi_n\|_{m, \nu} < \varepsilon, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|(a^*(s) - \bar{\alpha}I)\varphi_n(s)\|_{m, \nu} < \varepsilon. \quad (5.2.8)$$

Введем оператор $Ah(s) = (a(s) - \alpha I)h(s)$, $h \in L_{2, m}(Y, \nu)$, и рассмотрим ядерные операторы в $L_{2, m}(Y, \nu)$

$$P_1 h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \varphi_n \rangle A^* \varphi_n, \quad P_2 h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \varphi_n \rangle D^* \varphi_n. \quad (5.2.9)$$

В силу (5.2.8) их ядерные нормы меньше, чем ε . Рассмотрим еще операторы $Q_1 = A^* - P_1$, $Q_2 = D^* - P_2$. Так как для всех n $Q_i \varphi_n = 0$ ($i = 1, 2$), то $\text{im } Q_i^* \subseteq [\varphi_n]^\perp$, где $[\varphi_n]^\perp$ — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке $[\varphi_n]$ ортонормированной последовательности $\{\varphi_n\}$. Пусть $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, E — замкнутая линейная оболочка ортонормированной системы $\{\chi_{e_n}/\sqrt{\mu e_n}\}$ и $E^\perp$ — ортогональное дополнение к E . Тогда $\dim E = \dim E^\perp = \dim[\varphi_n] = \dim[\varphi_n]^\perp = \infty$.

Пусть $\{\varphi_n^\perp\}$ — ортонормированный базис подпространства $[\varphi_n]^\perp$, а $\{e_n^\perp\}$ — ортонормированный базис подпространства $E^\perp$. Определим унитарный оператор $V : L_{2, m}(Y, \nu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ равенствами

$$V \varphi_n^\perp = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}, \quad V \varphi_n = e_n^\perp, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.10)$$

Для любого $h \in L_{2, m}(Y, \nu)$ имеем $Q_i^* h \in [\varphi_n]^\perp$ ($i = 1, 2$) и

$$P_1^* h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, A^* \varphi_n \rangle \varphi_n, \quad P_2^* h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, D^* \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Обозначив через $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в $L_2(X, \mu)$, получим для любого $z \in L_2(X, \mu)$

$$\begin{aligned} VAV^{-1}z &= V(Q_1^* + P_1^*)V^{-1}z = \\ &= V \sum_{n=1}^{\infty} \langle Q_1^* V^{-1}z, \varphi_n^\perp \rangle \varphi_n^\perp + V \sum_{n=1}^{\infty} \langle V^{-1}z, A^* \varphi_n \rangle \varphi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (z, VQ_1 \varphi_n^\perp) \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu} e_n} + \sum_{n=1}^{\infty} (z, VA^* \varphi_n) e_n^\perp. \end{aligned}$$

Аналогично

$$VDV^{-1}z = \sum_{n=1}^{\infty} (z, VQ_2 \varphi_n^\perp) \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu} e_n} + \sum_{n=1}^{\infty} (z, VD^* \varphi_n) e_n^\perp.$$

Положим

$$\begin{aligned} p_{n,1} &= VQ_1 \varphi_n^\perp = V(A^* - P_1) \varphi_n^\perp = VA^* \varphi_n^\perp, \\ p_{n,2} &= VQ_2 \varphi_n^\perp = V(D^* - P_2) \varphi_n^\perp = VD^* \varphi_n^\perp, \\ K_i(\eta, \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu} e_n} \overline{p_{n,i}(\xi)}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда $VAV^{-1} = K_1 + \Gamma_1$, где K_1 — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром $K_1(\eta, \xi)$, оператор Γ_1 — ядерный интегральный оператор с ядерной нормой меньшей, чем ε , и ядром

$$\Gamma_1(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^\perp(\eta) \overline{VA^* \varphi_n(\xi)}.$$

Аналогично $VDV^{-1} = K_2 + \Gamma_2$, где K_2 — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром $K_2(\eta, \xi)$ и Γ_2 — ядерный интегральный оператор с ядерной нормой меньшей, чем ε , и ядром

$$\Gamma_2(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^\perp(\eta) \overline{VD^* \varphi_n(\xi)}.$$

Записав систему (5.2.1) в виде $\alpha x + Ax - \lambda Dx = f$ и сделав замену $y = Vx$, получим

$$\alpha V^{-1}y + AV^{-1}y - \lambda DV^{-1}y = f.$$

Применив к обеим частям оператор V , придем к эквивалентному уравнению

$$\alpha y + VAV^{-1}y - \lambda VDV^{-1}y = Vf.$$

Учитывая, что $VAV^{-1} = K_1 + \Gamma_1$, $VDV^{-1} = K_2 + \Gamma_2$, получим уравнение (5.2.2). $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2.1. Если $a(s) = \alpha I$ для почти всех $s \in X$, то $A = 0$. Следовательно, $K_1 + \Gamma_1 = 0$, и первое интегральное слагаемое в (5.2.2) будет отсутствовать.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2.2. В случае $a(s) = \alpha I$ для почти всех $s \in Y$ утверждение теоремы 5.2.1 останется верным, если в ее формулировке заменить условие компактности по мере всех D_{ij} более широким условием: существует множество $e \subset Y$, $0 < \nu e < \infty$, такое, что все $P_e D_{ij}$ компактны по мере, здесь $P_e \varphi = \chi_e \varphi$, $\varphi \in L_2(Y, \nu)$.

Действительно, подобно (5.2.5),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|D^* h_0 g_k\|_{m, \mu} = 0,$$

где $\{g_k\}$ — равномерно ограниченная ортонормированная система функций из $L_2(Y, \nu)$ с носителями в e . Отсюда и из $A = 0$ получим справедливость утверждения теоремы 5.2.1, применяя доказательство теоремы 5.2.1 к последовательности $\{h_0 g_k\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2.3. Отметим три важных варианта условий теоремы 5.2.1: 1) $X = Y$, $\mu = \nu$; 2) X — измеримое по Лебегу множество евклидова пространства, μ — мера Лебега; 3) $X = (a, b)$, μ — мера Лебега. В последнем случае в качестве e_n , $n = 1, 2, \dots$, удобно выбрать конечные попарно не пересекающиеся интервалы (длины 1, если (a, b) — бесконечный интервал).

Следствие 5.2.1. При $\alpha = 0$ уравнение (5.2.2) умножением обеих его частей на не зависящую от системы (5.2.1) и унитарного оператора V функцию

$$\chi_{e_0} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \chi_{e_n},$$

где $e_0 = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$, сводится к эквивалентному линейному интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода с ядерным оператором.

Следствие 5.2.2. При $\alpha \neq 0$ уравнение 2-го рода (5.2.2) сводится к эквивалентному линейному интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром

$$K_{\lambda}(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{p_{n, \lambda}(\xi)},$$

где $\{p_{n, \lambda}\}$ — ограниченная последовательность в $L_2(X, \mu)$ и функции $p_{n, \lambda}$ выражаются через $p_{n, i}$ ($i = 1, 2$) в явном виде.

Следствие 5.2.2 непосредственно вытекает из теоремы 5.1.3.

Следствие 5.2.3. Утверждение теоремы 5.2.1 справедливо, если все операторы D_{ij} почти компактны.

Следствие 5.2.4. Утверждение теоремы 5.2.1 справедливо, если все операторы D_{ij} интегральные.

Действительно, все почти компактные в $L_2(Y, \nu)$ операторы и все интегральные в $L_2(Y, \nu)$ операторы компактны по мере.

Приведем приложение теоремы 5.2.1. Рассмотрим систему линейных уравнений в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H :

$$\sum_{j=1}^m B_{ij}x_j = g_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (5.2.11)$$

где $g_i \in H$ ($i = 1, \dots, m$), элементы x_j ($j = 1, \dots, m$) решения ищутся в H . Пусть линейные непрерывные операторы $B_{ij} : H \rightarrow H$ ($ij = 1, \dots, m$) удовлетворяют условию: существуют числа λ_{ij} ($i, j = 1, \dots, m$) и ортонормированная система $\{u_n\} \subset H$ такие, что для всех $i, j = 1, \dots, m$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(B_{ij}^* - \overline{\lambda_{ij}} \mathbf{1})u_n\|_H = 0. \quad (5.2.12)$$

Тогда в силу следствия 2.2.1 теоремы 2.2.1 можно построить в явном виде унитарный оператор $W : H \rightarrow L_2(X, \mu)$ такой, что операторы $K_{ij} = W(B_{ij} - \lambda_{ij}\mathbf{1})W^{-1}$ ($i, j = 1, \dots, m$) являются карлемановскими интегральными операторами в $L_2(X, \mu)$. Сделав в (5.2.11) замены $y_j = Wx_j$ ($j = 1, \dots, m$), $f_i = Wg_i$ ($i = 1, \dots, m$), получим эквивалентную систему линейных интегральных уравнений 3-го рода

$$\sum_{j=1}^m \lambda_{ij}y_j + \sum_{j=1}^m K_{ij}y_j = f_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

к которой применимы теорема 5.2.1 и ее следствия.

Отметим, что условие типа (5.2.12) выполняется для любого линейного непрерывного оператора $B : H \rightarrow H$, так как предельный спектр сопряженного оператора B^* не пуст. Таким образом, уравнение $Bx = h \in H$ может быть сведено к эквивалентному линейному интегральному уравнению в L_2 с карлемановским интегральным оператором.

Итак, удовлетворяющая условиям (А), (В) система 3-го рода (5.2.1), общая система линейных интегральных уравнений 3-го рода и система (5.2.11) с условием (5.2.12) могут быть редуцированы либо к эквивалентному линейному интегральному уравнению 1-го рода с компактным (и даже ядерным) оператором (к этому уравнению применима теорема Пикара из § 3.1), либо к эквивалентному линейному интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром (к такому уравнению применимы приближенные методы решения, предложенные в § 6.3).

Отметим еще, что определяемый равенствами (5.2.10) унитарный оператор V , приводящий систему (5.2.1) к эквивалентному интегральному уравнению (5.2.2), строится в явном виде и ядра $\Gamma_1, \Gamma_2, K_1, K_2$ в (5.2.2) также имеют явный вид.

В связи с теоремой 5.2.1 отметим очень интересную теорему И. М. Новицкого [50], в которой доказывается эквивалентность общего линейного интегрального уравнения 3-го рода в $L_2(Y, \nu)$ с биинтегральным оператором интегральному уравнению 1-го или 2-го рода в $L_2(-\infty, \infty)$ с бесконечно дифференцируемым ядром, исчезающим на бесконечности вместе со всеми производными и обладающим, кроме того, рядом других важных аналитических свойств.

В заключение заметим, что бесконечные системы линейных интегральных уравнений 3-го рода с диагональными матричными коэффициентами изучались в диссертации О. Д. Максимовой [34].

§ 5.3. Функциональные уравнения 1-го, 2-го и 3-го родов с неограниченными операторами

Теорема 5.3.1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_H$, $L_2(\mu) := L_2(X, \mu)$ — сепарабельное пространство, мера μ σ -конечна и не является частично атомической, $T : D_T \subset H \rightarrow L_2(\mu)$ — плотно определенный замыкаемый линейный оператор и в D_T^* существует ортонормированная последовательность $\{\varphi_n\}$ такая, что $\|T^*\varphi_n\|_H \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда уравнение 1-го рода $Tx = f \in L_2(\mu)$ эквивалентно уравнению 1-го рода с ядерным оператором.

< В силу следствия теоремы 2.2.2 найдется унитарный оператор $W : L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ такой, что $WT = AB$, где $Ah = (\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \chi_{X_n})h$, $h \in L_2(\mu)$, $\mu_n \geq 1$, $n = 1, 2, \dots$, множества $X_n \subset X$ попарно не пересекаются, $\mu X_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, и $B : H \rightarrow L_2(\mu)$ — ядерный оператор. Умножив обе части уравнения $WTx = ABx = Wf$ на функцию $b = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{-1} \chi_{X_n} + \chi_{X_0}$, где $X_0 = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, получим эквивалентное уравнение 1-го рода $Bx = bWf$ с ядерным оператором. >

Теорема 5.3.2. Пусть $H, L_2(\mu)$ сепарабельны, мера μ σ -конечна и не является чисто атомической, $T : D_T \subset H \rightarrow H$ — плотно определенный замыкаемый линейный оператор и $0 \in \sigma_c(T^*)$. Тогда уравнение 2-го рода $\alpha x - \lambda Tx = f \in H$, $\alpha \neq 0$, эквивалентно интегральному уравнению 2-го рода в $L_2(\mu)$ с квазивырожденным карлемановским ядром.

Теорема 5.3.2 доказана в § 4.1 (см. теорему 4.1.3) и приведена здесь для полноты изложения.

Рассмотрим функциональное уравнение 2-го рода

$$x - \lambda Sx = f \in L_2(\mu) \quad (5.3.1)$$

с самосопряженным оператором S , где λ^{-1} — точка спектра S .

Теорема 5.3.3. Пусть $S : D_S \subset L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu)$ — самосопряженный оператор, $L_2(\mu)$ сепарабельно и мера μ не является чисто атомической. Пусть $1/\lambda$ принадлежит спектру оператора S . Тогда

- 1) если $1/\lambda \in \sigma_c(S)$, то уравнение (5.3.1) эквивалентно интегральному уравнению 1-го рода с ядерным оператором,
- 2) если $1/\lambda \notin \sigma_c(S)$, то уравнение (5.3.1) эквивалентно интегральному уравнению 2-го рода с вырожденным эрмитовым ядром.

< 1) Имеем $0 \in \sigma_c(1 - \lambda S)$, и справедливость первого утверждения вытекает из теоремы 5.3.1.

2) В этом случае 0 является собственным значением оператора $1 - \lambda S$ конечной кратности m , изолированным от остального спектра оператора $1 - \lambda S$. В силу спектральной теоремы $1 - \lambda S = 0 \cdot D + C$, где D — ортопроектор на $\ker(1 - \lambda S)$ и C — самосопряженный обратимый оператор на ортогональном дополнении к $\ker(1 - \lambda S)$. Поэтому уравнение (5.3.1) эквивалентно уравнению 2-го рода

$$x - Dx = C^{-1}f, \quad (5.3.2)$$

где D — самосопряженный конечномерный интегральный оператор с вырожденным ядром

$$\sum_{k=1}^m a_k(s) \overline{a_k(t)}. \quad \triangleright$$

Замечание 5.3.1. Утверждения теоремы 5.3.3 справедливы и в случае, когда оператор S нормальный ($SS^* = S^*S$).

Замечание 5.3.2. Решение уравнения (5.3.2) с вырожденным ядром сводится к решению системы m линейных алгебраических уравнений с m неизвестными (см. [40, II.2.3]).

Перейдем к функциональным уравнениям 3-го рода с неограниченными операторами. Рассмотрим в $L_2(\nu) := L_2(Y, \nu)$ уравнение

$$a(s)x(s) - \lambda Tx(s) = f(s), \quad (5.3.3)$$

где $f \in L_2(\nu)$, линейный оператор T плотно определен в $L_2(\nu)$ и действует в $L_2(\nu)$, функция $a(s)$, называемая коэффициентом, принадлежит пространству $L_0(\nu) := L_0(Y, \nu)$ всех ν -измеримых ν -почти всюду конечных функций на Y , решение $x(s)$ ищется в пересечении области определения D_T оператора T и области определения D_A максимального оператора умножения на функцию $a := a(s)$:

$$Ah = ah, \quad h \in D_A := \{v \mid v \in L_2(\nu), av \in L_2(\nu)\}. \quad (5.3.4)$$

Теорема 5.3.4. Пусть меры μ, ν сепарабельны и не являются чисто атомическими, $T : D_T \subset L_2(\nu) \rightarrow L_2(\nu)$ — плотно определенный замыкаемый линейный оператор, продолжаемый до линейного почти компактного оператора $\tilde{T} : L_2(\nu) \rightarrow L_0(\nu)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить не зависящий от λ и f унитарный оператор $U : L_2(\nu) \rightarrow L_2(\mu)$ такой, что замена $y = Ux$, $g = Uf$ приводит уравнение (5.3.3) к эквивалентному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \alpha y(\eta) + \int_X \left[B(\eta, \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu} e_n} \overline{\varphi_n(\xi)} \right] y(\xi) d\mu(\xi) - \\ - \lambda \int_X \left[N(\eta, \xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu} e} \overline{\psi_n(t)} \right] y(\xi) d\mu(\xi) = g(\eta), \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

где α — не зависящее от ε существенное значение функции $a(s)$, ядра $B(\eta, \xi)$, $N(\eta, \xi)$ порождают ядерные интегральные операторы в $L_2(\mu)$ с ядерной нормой меньшей, чем ε , $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, $\{\varphi_n\} \subset L_2(\mu)$, $\{\psi_n\} \subset L_2(\mu)$.

◁ Так как $\tilde{T} : L_2(\nu) \rightarrow L_0(\nu)$ — почти компактный оператор, существует разбиение $\{Y_n\}$ множества Y на попарно не пересекающиеся множества с конечными положительными мерами такое, что $P_{Y_n} \tilde{T} : L_2(\nu) \rightarrow L_2(\nu)$ — компактные операторы для любого n ; здесь $P_{Y_n} h = \chi_{Y_n} h$, $h \in L_2(\nu)$. Обозначим через $\{Z_n\}$ разбиение множества Y на попарно не пересекающиеся множества с положительными мерами такое, что $\chi_{Z_n} a \in L_\infty(\nu)$ для любого n . Тогда найдется разбиение $\{F_n\}$ множества Y на попарно не пересекающиеся множества с положительными мерами такое, что $\chi_{F_n} a \in L_\infty(\nu)$ и $P_n \tilde{T} : L_2(\nu) \rightarrow L_2(\nu)$ — компактный оператор, $n = 1, 2, \dots$; здесь $P_n h = \chi_{F_n} h$, $h \in L_2(\nu)$. Кроме того, так как мера ν не является чисто атомической, можно считать без ограничения общности, что множество F_1 не содержит атомов меры ν .

Пусть α — какое-нибудь существенное значение сужения функции $a(s)$ на F_1 . Рассмотрим на F_1 функцию $a_0(s) = a(s) - \alpha$. Тогда 0 — существенное значение этой функции. Поэтому найдутся монотонно убывающая к 0 числовая последовательность $\{\varepsilon_n\}$ с $\varepsilon_1 > \|a_0\|_{L_\infty(F_1, \nu)}$ и разбиение $\{F_{1n}\}$ множества F_1 на попарно не пересекающиеся множества с положительными мерами такие, что $|a_0(s)| < \varepsilon_n$ для почти всех $s \in F_{1n}$, $n = 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$|a(s) - \alpha| = |a_0(s)| < \varepsilon_n \quad \text{для почти всех } s \in F_{1n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3.6)$$

Положим $Q_n = P_{F_{1n}}$, где $P_{F_{1n}}h = \chi_{F_{1n}}h$, $h \in L_2(\nu)$, и рассмотрим операторы $Q_n\tilde{T} : L_2(\nu) \rightarrow L_2(\nu)$. Так как $Q_n\tilde{T} = Q_nP_1\tilde{T}$, где $P_1h = \chi_{F_1}h$, $h \in L_2(\nu)$, и оператор $P_1\tilde{T}$ компактен, то все операторы $Q_n\tilde{T} : L_2(\nu) \rightarrow L_2(\nu)$ компактны. Следовательно, $(Q_n\tilde{T})^* : L_2(\nu) \rightarrow L_2(\nu)$ — компактные операторы. Пусть $\{\tilde{p}_{nk}\}_{k=1}^\infty$ — произвольный ортонормированный базис $L_2(F_{1n}, \nu)$. Введя функции $p_{nk} = \chi_{F_{1n}}\tilde{p}_{nk}$, получим ортонормированную последовательность $\{p_{nk}\}_{k=1}^\infty \subset L_2(\nu)$ функций с носителями в F_{1n} . Пусть T_1, T_2 — линейные операторы в $L_2(\nu)$ с областями определения D_{T_1}, D_{T_2} . Будем писать $T_1 \subseteq T_2$, если $D_{T_1} \subseteq D_{T_2}$ и для любого $h \in D_{T_1}$ имеет место равенство $T_1h = T_2h$. Так как $Q_nT \subseteq Q_n\tilde{T}$, то

$$(Q_n\tilde{T})^* \subseteq (Q_nT)^* = T^*Q_n.$$

Но $(Q_n\tilde{T})^* \in B(L_2(\nu))$. Следовательно, $T^*Q_n = (Q_n\tilde{T})^*$. Отсюда вытекает, что $p_{nk} \in D_{T^*}$ для всех k, n . Кроме того,

$$T^*p_{nk} = T^*Q_np_{nk} = (Q_n\tilde{T})^*p_{nk} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

поскольку $(Q_n\tilde{T})^*$ — компактный оператор. Выберем k_n так, чтобы

$$\|T^*p_{nk_n}\| < \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3.7)$$

При этом в силу (5.3.6)

$$\|(A^* - \bar{\alpha}\mathbf{1})p_{nk_n}\| < \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3.8)$$

Пусть $\{\tilde{q}_{mj}\}$ — произвольный ортонормированный базис $L_2(F_m, \nu)$, $m = 2, 3, \dots$. Введем функции $q_{mj} = \chi_{F_m}\tilde{q}_{mj}$. Покажем, что все функции q_{mj} принадлежат D_{T^*} . Действительно, подобно предыдущему,

$$T^*q_{mj} = T^*P_mq_{mj} = (P_m\tilde{T})^*q_{mj},$$

где $P_mh = \chi_{F_m}h$, $h \in L_2(\nu)$. Рассмотрим семейство

$$\left(\bigcup_{n=1}^\infty \{p_{nk}\}_{k=1}^\infty \right) \cup \left(\bigcup_{m=2}^\infty \{q_{mj}\} \right).$$

В силу того, что множества F_{1n}, F_m , $n = 1, 2, \dots$, $m = 2, 3, \dots$, попарно не пересекаются, это семейство ортонормированное. Записав его в виде последовательности $\{u_n\}$, получим ортонормированный базис $L_2(\nu)$, принадлежащий пересечению областей определения операторов $A^* - \bar{\alpha}\mathbf{1}$ и T^* . При этом базис $\{u_n\}$ содержит подпоследовательность $\{p_{nk_n}\}$, удовлетворяющую (5.3.7), (5.3.8). Отсюда по теореме 2.2.1, примененной к семейству

из двух операторов $A - \alpha \mathbf{1}$ и T , получим, что найдется не зависящий от λ и f унитарный оператор $U : L_2(\nu) \rightarrow L_2(\mu)$ такой, что

$$U(A - \alpha \mathbf{1})U^{-1} = B + C, \quad UTU^{-1} = N + D, \quad (5.3.9)$$

где B, N — ядерные интегральные операторы из $B(L_2(\mu))$ с ядрами $B(\eta, \xi)$ и $N(\eta, \xi)$ соответственно и ядерной нормой меньшей, чем ε ,

$$\begin{aligned} Ch(\eta) &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{\varphi_n(\xi)} h(\xi) d\mu(\xi), \\ Dh(\eta) &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{\psi_n(\xi)} h(\xi) d\mu(\xi), \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

$\{\varphi_n\}, \{\psi_n\} \subset L_2(\mu)$. Записав уравнение (5.3.3) в виде

$$\alpha x + (A - \alpha \mathbf{1})x - \lambda T x = f$$

и сделав замену $y = Ux$, получим уравнение

$$\alpha U^{-1}y + (A - \alpha \mathbf{1})U^{-1}y - \lambda T U^{-1}y = f.$$

Применив к обеим частям этого уравнения оператор U , приходим к уравнению

$$\alpha y + U(A - \alpha \mathbf{1})U^{-1}y - \lambda U T U^{-1}y = Uf.$$

Отсюда, пользуясь (5.3.9), (5.3.10), получим интегральное уравнение (5.3.5), эквивалентное уравнению (5.3.3). $\triangleright$

Замечание 5.3.3. Условие теоремы 5.3.4 выполняется, если T — интегральный оператор и для его ядра $K(s, t)$ найдется положительная функция $b \in L_0(\nu)$ такая, что

$$\int_Y |K(s, t)| b(s) d\nu(s) \in L_2(\nu).$$

Действительно, в силу следствия 6.9 теоремы I.6.2 из [19] ядро $K(s, t)$ порождает интегральный оператор, определенный на всем $L_2(\nu)$. Этот оператор является продолжением оператора T и по теореме 1.1.3 почти компактен.

Теорема 5.3.5. Пусть меры μ, ν сепарабельны и не являются чисто атомическими, коэффициент a в уравнении (5.3.3) принадлежит $L_\infty(\nu)$, линейный оператор T в (5.3.3) плотно определен и замыкаем и существует не содержащее атомов меры ν множеств E , $\nu E > 0$, такое, что оператор $P_E T$ продолжается до линейного почти компактного оператора $\tau : L_2(\nu) \rightarrow L_0(\nu)$. Тогда справедливо утверждение теоремы 5.3.4.

◁ Найдется множество $E_1 \subset E$, $\nu E_1 > 0$, такое, что $P_{E_1} \tau : L_2(\nu) \rightarrow L_2(\nu)$ — компактный оператор. Как в доказательстве теоремы 5.3.4, получим $T^* P_{E_1} = (P_{E_1} T)^* = (P_{E_1} \tau)^*$. Значит, $T^* P_{E_1} : L_2(\nu) \rightarrow L_2(\nu)$ — компактный оператор.

Пусть α — какое-нибудь существенное значение сужения функции $a(s)$ на E_1 . Выберем последовательность попарно не пересекающихся множеств $E_{1n} \subset E_1$ с положительными мерами такую, что

$$|a(s) - \alpha| < \varepsilon_n \quad \text{для почти всех } s \in E_{1n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.3.11)$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пользуясь компактностью оператора $T^* P_{E_1}$, найдем для каждого n функцию y_n , $\|y_n\| = 1$, с носителем в E_{1n} так, чтобы

$$\|T^* y_n\| = \|T^* P_{E_1} y_n\| < \varepsilon_n.$$

Отсюда и из (5.3.11) имеем

$$\|T^* y_n\| < \varepsilon_n, \quad \|(A^* - \bar{\alpha} \mathbf{1}) y_n\| < \varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3.12)$$

Выберем подпоследовательность $\{v_n\} \subset \{y_n\}$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T^* v_n\| < \infty,$$

и рассмотрим ограниченный оператор

$$\Gamma h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, v_n) T^* v_n, \quad h \in L_2(\nu),$$

и замкнутый оператор $Q = T^* - \Gamma$ с областью определения $D_Q = D_{T^*}$. Тогда $Q v_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть $V^\perp$ — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке V последовательности $\{v_n\}$ и P — ортопроектор на $V^\perp$. В силу замкнутости Q имеем $V \subset D_Q$, поэтому $P D_Q \subset D_Q$. Обозначив через $\overline{F}$ замыкание множества $F \subset L_2(\nu)$ по норме, получим

$$V^\perp \supseteq \overline{V^\perp \cap D_Q} \supseteq \overline{P D_Q} = \overline{P D_{T^*}} = V^\perp,$$

так как $\overline{D_{T^*}} = L_2(\nu)$. Таким образом, $\overline{V^\perp \cap D_Q} = V^\perp$. Следовательно, множество $V^\perp \cap D_Q$ плотно в $V^\perp$. Пусть $\{v_n^\perp\}$ — любой ортонормированный базис подпространства $V^\perp$, состоящий из элементов D_Q . Рассмотрим ортонормированный базис $\{u_n\}$ пространства $L_2(\nu)$, являющийся объединением $\{v_n\}$ и $\{v_n^\perp\}$. Имеем $\{u_n\} \subset D_Q = D_{T^*}$, и $\{u_n\}$ принадлежит области определения оператора $A^* - \bar{\alpha} \mathbf{1}$, совпадающей в силу $a \in L_\infty(\nu)$ с $L_2(\nu)$. Кроме того, из (5.3.12) следует, что $T^* v_n \rightarrow 0$, $(A^* - \bar{\alpha} \mathbf{1}) v_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда, как в доказательстве теоремы 5.3.4, получим по теореме 2.2.1 справедливость доказываемой теоремы. ▷

Теорема 5.3.6. 1) Если в уравнении (5.3.5) $\alpha = 0$, то это уравнение умножением обеих его частей на функцию

$$d = \chi_{e_0} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\|\varphi_n\| + \|\psi_n\| + 1)^{-1} \chi_{e_n},$$

где $e_0 = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$, приводится к эквивалентному интегральному уравнению 1-го рода с ядерным оператором.

2) Если в (5.3.5) $\alpha \neq 0$, то уравнение (5.3.5) заменой $z = G_\lambda y$, где G_λ — обратимый линейный непрерывный оператор в $L_2(\mu)$, приводится к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром

$$K_\lambda(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\mu} e_n} \overline{b_{n,\lambda}(\xi)}, \quad \{b_{n,\lambda}\} \subset L_2(\mu).$$

◁ Утверждение 1) очевидно. Утверждение 2) доказывается так же, как теорема 5.1.3. ▷

К получающемуся в случае 2) уравнению применимы приближенные методы решения из § 6.3.

Глава 6. Функциональные уравнения 1-го и 2-го родов в L_2

§ 6.1. Уравнения 1-го рода в L_p с почти компактными операторами

Теорема 6.1.1. Пусть $1 < p < \infty$, $T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_p(X, \mu)$ — почти компактный линейный оператор. Тогда уравнение 1-го рода $Tx = f \in L_p(X, \mu)$ эквивалентно уравнению 1-го рода с компактным оператором.

◁ Так как T — почти компактный оператор, существует разбиение $\{X_n\}$ множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества такое, что $P_n T : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_p(X, \mu)$ — компактный оператор для любого n ; здесь $P_n f = \chi_{X_n} f$, $f \in L_p(X, \mu)$. Умножив обе части уравнения $Tx = f$ на функцию $d = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \chi_{X_n}$, получим эквивалентное уравнение 1-го рода $T_d x(s) = d(s)f(s)$ с компактным оператором $T_d = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} P_n T$. ▷

Теорема 6.1.2. Пусть $1 < p < \infty$, $K : L_p(Y, \nu) \rightarrow L_p(X, \mu)$ — интегральный оператор. Тогда интегральное уравнение 1-го рода $Kx = f \in L_p(X, \mu)$ эквивалентно интегральному уравнению 1-го рода с компактным оператором.

◁ Справедливость этой теоремы непосредственно вытекает из предыдущей теоремы и следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3. ▷

В связи с теоремами 6.1.1, 6.1.2 отметим, что к уравнению 1-го рода в L_p с компактными операторами применима обобщенная теорема Пикара из работы Е. Н. Доманского и А. Н. Пличко [8].

§ 6.2. Сведение уравнений 2-го рода в L_p с почти компактными операторами к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2.1. Заданная на $X \times X$ $(\mu \times \mu)$ -измеримая $(\mu \times \mu)$ -почти всюду конечная функция $K(s, t)$ называется *карлемановским ядром*, если для почти всех $s \in X$

$$\int_X |K(s, t)|^q d\mu(t) < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ядро $K(s, t)$ назовем *квазивырожденным карлемановским ядром*, если найдутся последовательность $\{g_n\}$ попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами и последовательность $\{u_n\} \subset L_q(X, \mu)$ такие, что

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{g_n}(s)}{(\mu g_n)^{1/p}} \overline{u_n(t)}. \quad (6.2.1)$$

Лемма 6.2.1 [43]. Пусть (Z, ξ) — пространство с конечной положительной мерой ξ , B — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_B$, вектор-функция $x : Z \rightarrow B$ сильно измерима. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и ξ -почти всех $\sigma \in Z$ выполняется неравенство

$$\left\| x(\sigma) - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E_n}(\sigma) \right\|_B < \varepsilon,$$

где $\{x_n\}$ — плотная в множестве значений функции x последовательность, $E_n = \{\sigma : \|x(\sigma) - x_n\|_B < \varepsilon; \sigma \in S_0\}$, $S_0 = \{\sigma : \|x(\sigma)\|_B > 0\}$, $F_n = E_n \setminus \bigcup_{k < n} E_k$.

Лемма является фрагментом доказательства теоремы 3.5.3 из [43].

Обозначим через $B(L_p(\mu))$ совокупность всех линейных непрерывных операторов, действующих из $L_p(\mu) := L_p(X, \mu)$ в $L_p(\mu)$.

Теорема 6.2.1. Пусть $1 < p < \infty$, $T \in B(L_p(\mu))$ — почти компактный оператор. Тогда функциональное уравнение 2-го рода

$$y - \lambda T y = f \in L_p(\mu) \quad (6.2.2)$$

эквивалентно линейному интегральному уравнению в $L_p(\mu)$ 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром.

◁ Зафиксируем $\lambda \neq 0$. Так как T — почти компактный оператор, существует разбиение множества X на попарно не пересекающиеся множества X_m с конечными положительными мерами такое, что $P_m T : L_p(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$ — компактные операторы для любого m ; здесь $P_m f = \chi_{X_m} f$, $f \in L_p(\mu)$. Тогда для каждого m в силу [37, п. 10.2.3] найдется конечномерный линейный ограниченный оператор $T_m : L_p(\mu) \rightarrow L_p(X_m, \mu)$ такой, что

$$\|P_m T - P_m T_m\| < (2|\lambda|2^m)^{-1}. \quad (6.2.3)$$

Оператор $P_m T_m$ может быть представлен в виде

$$P_m T_m f = \sum_{n=1}^{M_m} (f, v_{m,n}) w_{m,n}, \quad f \in L_p(\mu), \quad M_m < \infty,$$

где

$$(f, v_{m,n}) = \int_X f(t) \overline{v_{m,n}(t)} d\mu(t), \quad v_{m,n} \in L_q(\mu), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad w_{m,n} \in L_p(\mu)$$

и носители функций $w_{m,n}$ содержатся в X_m , $m = 1, 2, \dots$, $n = 1, \dots, M_m$. Следовательно, $P_m T_m$ — карлемановский интегральный оператор с ядром

$$K_m(s, t) = \sum_{n=1}^{M_m} w_{m,n}(s) \overline{v_{m,n}(t)}.$$

Рассмотрим карлемановское ядро

$$C(s, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{X_m}(s) K_m(s, t), \quad (6.2.4)$$

векторную функцию $\varphi(s) = \overline{C(s, \cdot)}$ со значениями в $L_q(\mu)$ и интегральный оператор $C : L_p(\mu) \rightarrow L_0(\mu)$ с ядром $C(s, t)$. Покажем, что $C \in B(L_p(\mu))$. В силу (6.2.3) для всех h из единичной сферы $L_p(\mu)$ имеем, обозначив через $\|\cdot\|_p$ норму в $L_p(\mu)$,

$$\begin{aligned} \|(T - C)h\|_p &= \left\| \sum_{m=1}^{\infty} (P_m T - P_m C)h \right\|_p = \\ &= \left\| \sum_{m=1}^{\infty} (P_m T - P_m T_m)h \right\|_p \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|P_m T - P_m T_m\| < \frac{1}{2|\lambda|}. \end{aligned}$$

Стало быть, $C \in B(L_p(\mu))$ и $\|T - C\| < \frac{1}{2|\lambda|}$.

Зафиксируем m и рассмотрим определенную на X_m векторную функцию $\varphi_m(s) = K_m(s, \cdot)$. Эта функция принимает значения в конечномерном подпространстве пространства $L_q(\mu)$ и поэтому сильно измерима. Следовательно, и функция $\varphi(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{X_m}(s) \varphi_m(s)$ сильно измерима. По лемме 6.2.1 найдутся разбиение $\{g_{n,m}\}_{n=1}^{\infty}$ множества X_m на попарно не пересекающиеся множества с положительными мерами и последовательность $\{\psi_{n,m}\}_{n=1}^{\infty} \subset L_q(\mu)$ такие, что для всех n и почти всех $s \in g_{n,m}$

$$\|\varphi_m(s) - \psi_{n,m}\|_q < \left[2|\lambda|(\mu X_m)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{m}{p}} \right]^{-1}. \quad (6.2.5)$$

Рассмотрим карлемановское ядро

$$D(s, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{g_{n,m}}(s) \overline{\psi_{n,m}(t)}, \quad (6.2.6)$$

векторную функцию $\psi(s) = \overline{D(s, \cdot)}$ и интегральный оператор $D : L_p(\mu) \rightarrow L_0(\mu)$ с ядром $D(s, t)$. В силу (6.2.5) для всех h из единичной сферы $L_p(\mu)$ имеем

$$\begin{aligned} \|(C - D)h\|_p &= \left(\int_X |(h, \varphi(s) - \psi(s))|^p d\mu(s) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\int_X \|\varphi(s) - \psi(s)\|_q^p d\mu(s) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_{X_m} \|\varphi(s) - \psi(s)\|_q^p d\mu(s) \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2|\lambda|}. \end{aligned}$$

Следовательно, $D \in B(L_p(\mu))$ и $\|C - D\| < \frac{1}{2|\lambda|}$. Таким образом, $\|T - D\| < \frac{1}{|\lambda|}$ и $\|\lambda(T - D)\| < 1$. Поэтому оператор $F_\lambda = 1 - \lambda(T - D)$ имеет обратный $F_\lambda^{-1} \in B(L_p(\mu))$. Запишем уравнение (6.2.2) в виде $F_\lambda y - \lambda D y = f$. Положив $z = F_\lambda y$, получим эквивалентное интегральное уравнение 2-го рода $z - \lambda D F_\lambda^{-1} z = f$, где $D F_\lambda^{-1}$ — карлемановский интегральный оператор с ядром

$$K_\lambda(s, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{g_{n,m}}(s) \overline{\varphi_{n,m,\lambda}(t)}, \quad (6.2.7)$$

здесь $\varphi_{n,m,\lambda} = (F_\lambda^{-1})^* \psi_{n,m}$, $(F_\lambda^{-1})^*$ — сопряженный к F_λ^{-1} оператор. Так как множества $g_{n,m}$ попарно не пересекаются, двойные ряды (6.2.6), (6.2.7) можно записать в виде (6.2.1). Таким образом, ядра $D(s, t)$, $K_\lambda(s, t)$ являются квазивырожденными карлемановскими ядрами.

В случае $\mu X < \infty$ доказательство упрощается: в силу того, что функция $\varphi(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{X_m}(s) \varphi_m(s)$ сильно измерима и $\mu X < \infty$, по лемме 6.2.1 найдутся последовательность попарно не пересекающихся множеств $g_n \subset X$ с положительными мерами и последовательность $\{v_n\} \subset L_q(\mu)$ такие, что для почти всех $s \in X$

$$\left\| \varphi(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{g_n}(s) v_n \right\|_q < \left[2|\lambda|(\mu X)^{\frac{1}{p}} \right]^{-1}.$$

Положим $u_n = (\mu g_n)^{\frac{1}{p}} v_n$ и рассмотрим квазивырожденное карлемановское ядро

$$D_0(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{g_n}(s)}{(\mu g_n)^{\frac{1}{p}}} \overline{u_n(t)},$$

векторную функцию $\eta(s) = \overline{D_0(s, \cdot)}$ и интегральный оператор $D_0 : L_p(\mu) \rightarrow L_0(\mu)$ с ядром $D_0(s, t)$. Тогда для всех h из единичной

сферы $L_p(\mu)$

$$\begin{aligned} \|(C - D_0)h\|_p &= \left(\int_X |(h, \varphi(s) - \eta(s))|^p d\mu(s) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\int_X \|\varphi(s) - \eta(s)\|_q^p d\mu(s) \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2|\lambda|}. \end{aligned}$$

Таким образом, $D_0 \in B(L_p(\mu))$, $\|T - D_0\| < \frac{1}{|\lambda|}$, и доказательство завершается повторением предыдущего доказательства с заменой в нем D на D_0 . $\triangleright$

Следствие 6.2.1. *Общее линейное интегральное уравнение 2-го рода в $L_p(\mu)$, $1 < p < \infty$, эквивалентно линейному интегральному уравнению 2-го рода в $L_p(\mu)$ с квазивырожденным карлемановским ядром.*

Действительно, в силу следствия 1.1.3 теоремы 1.1.3 каждый интегральный оператор в $L_p(\mu)$ почти компактен.

Замечание 6.2.1. К интегральному уравнению 2-го рода в L_p с квазивырожденным карлемановским ядром применимы приближенные методы решения из § 6.3.

Замечание 6.2.2. Теорема 6.2.1 и ее следствие показывают, что любое линейное функциональное уравнение 2-го рода в L_p ($1 < p < \infty$) с почти компактным (и тем более с интегральным) оператором может быть приведено линейной непрерывной обратимой заменой к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода в L_p с карлемановским интегральным оператором. Возникает вопрос: справедливо ли аналогичное утверждение для линейного функционального уравнения 3-го рода в L_p ? В § 5.1 при $p = 2$ был дан положительный ответ на этот вопрос. К сожалению, для любого $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, ответ на поставленный вопрос, вообще говоря, отрицательный: в § 2.3 для любого $p \neq 2$ построен пример линейного интегрального уравнения 3-го рода в L_p , которое не может быть приведено никакой линейной обратимой непрерывной заменой к эквивалентному линейному интегральному уравнению 1-го или 2-го рода в L_p .

§ 6.3. Приближенные методы решения интегральных уравнений 2-го рода в L_p с квазивырожденными карлемановскими ядрами

В этом параграфе предлагаются два приближенных метода решения интегрального уравнения 2-го рода в $L_p(\mu)$ ($1 < p < \infty$) с квазивырожденным карлемановским ядром

$$z(s) - \lambda \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{(\mu e_n)^{1/p}} \overline{b_n(t)} z(t) d\mu(t) = g(s) \in L_p(\mu), \quad (6.3.1)$$

где $\{b_n\} \subset L_q(\mu)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, $\{e_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами. Решение этого уравнения будем искать в линейном многообразии

$$D_K := \left\{ h \mid h \in L_p(\mu), \sum_{n=1}^{\infty} |(h, b_n)|^p < \infty \right\}$$

— максимальной области определения интегрального оператора K , порожденного ядром уравнения (6.3.1).

Введем интегральные уравнения в $L_p(\mu)$ с вырожденными ядрами

$$z(s) - \lambda_m \int_X \sum_{n=1}^m \frac{\chi_{e_n}(s)}{(\mu e_n)^{1/p}} \overline{b_n(t)} z(t) d\mu(t) = g(s). \quad (6.3.2)$$

Как известно [40, II.2.3], решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. Выберем $\lambda_m \rightarrow \lambda$ так, чтобы уравнения (6.3.2) имели решения $z_m \in L_p(\mu)$. Тогда в силу (6.3.2) для всех m и почти всех $s \in X$

$$z_m(s) = \lambda_m \sum_{n=1}^m \frac{\chi_{e_n}(s)}{(\mu e_n)^{1/p}} (z_m, b_n) + g(s). \quad (6.3.3)$$

Будем считать, без ограничения общности, что эти равенства выполняются для всех $s \in X$. Пусть последовательность $\{z_m\}$ ограничена в $L_p(\mu)$, $\xi_i = z_{m_i}$, $i = 1, 2, \dots$, — любая слабо сходящаяся в $L_p(\mu)$ ее подпоследовательность. Обозначим через z предел подпоследовательности $\{\xi_i\}$. Функции $\xi_i(s)$ равны $g(s)$ для каждой точки $s \in e_0 := X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$ и для каждой точки $s \in e_n$ ($n = 1, 2, \dots$)

$$\xi_i(s) = \lambda_{m_i} \frac{\chi_{e_n}(s)}{(\mu e_n)^{1/p}} (\xi_i, b_n) + g(s).$$

Кроме того, при $i \rightarrow \infty$ имеем $(\xi_i, b_n) \rightarrow (z, b_n)$ для всех n . Таким образом, для любого $s \in X$ при $i \rightarrow \infty$

$$\xi_i(s) \rightarrow \xi(s) := \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{(\mu e_n)^{1/p}} (z, b_n) + g(s). \quad (6.3.4)$$

Так как $\{\chi_{e_n} \xi_i\}$ для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ сходится при $i \rightarrow \infty$ к $\chi_{e_n} \xi$ по норме $L_p(\mu)$, то $\{\chi_{e_n} \xi_i\}$ слабо сходится к $\chi_{e_n} \xi$ при $i \rightarrow \infty$. Но $\{\chi_{e_n} \xi_i\}$ слабо сходится к $\chi_{e_n} z$ при $i \rightarrow \infty$ для любого $n = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда $\chi_{e_n} z = \chi_{e_n} \xi$, и из произвольности $n = 0, 1, 2, \dots$ получаем $z(s) = \xi(s)$ для почти всех $s \in X$. Следовательно, $\xi \in L_p(\mu)$ и в силу (6.3.4) для всех $s \in X$

$$\xi(s) - \lambda \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{(\mu e_n)^{1/p}} \overline{b_n(t)} \xi(t) d\mu(t) = g(s).$$

Таким образом, ξ является решением уравнения (6.3.1). При этом

$$|\lambda|^p \sum_{n=1}^{\infty} |(\xi, b_n)|^p = \|\xi - g\|^p < \infty,$$

так что ξ и z принадлежат D_k . Отметим, что функции $z_{m_i}(s) = \xi_i(s)$ сходятся к решению $\xi(s)$ не только слабо в $L_p(\mu)$, но и в каждой точке $s \in X$, причем поточечная сходимость на любом множестве e_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) равномерна. Отметим еще, что аналогичные рассуждения можно провести и в случае, когда ограничена по норме не вся последовательность $\{z_m\}$, а лишь некоторая ее подпоследовательность.

Итак, если последовательность $\{z_m\}$ (или ее подпоследовательность) ограничена в $L_p(\mu)$, то любая слабо сходящаяся их подпоследовательность сходится слабо и поточечно к решению уравнения (6.3.1). Покажем, что ограниченность последовательности норм резольвент интегральных операторов, порожденных ядрами интегральных уравнений (6.3.2), обеспечивает сходимость всей последовательности $\{z_m\}$ по норме $L_p(\mu)$ и с регулятором к решению уравнения (6.3.1). Напомним, что последовательность функций $\{f_m(s)\}$ сходится на X к функции $f(s)$ с регулятором $r(s)$, если для всех m и всех $s \in X$ выполняется неравенство $|f_m(s) - f(s)| \leq r(s)\varepsilon_m$, где $\varepsilon_m \rightarrow 0$.

Пусть K — максимальный интегральный (не обязательно ограниченный) оператор в $L_p(\mu)$, порожденный ядром интегрального уравнения (6.3.1), K_m — интегральные операторы в $L_p(\mu)$, порожденные ядрами интегральных уравнений (6.3.2). Выберем $\lambda_m \rightarrow \lambda$ так, чтобы точка λ_m^{-1} не являлась точкой спектра конечномерного оператора K_m , $m = 1, 2, \dots$. Предположим, что

$$\|(1 - \lambda_m K_m)^{-1}\| \leq C, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.3.5)$$

Пусть $S := 1 - \lambda K$, $S_m := 1 - \lambda_m K_m$, $z_m = S_m^{-1}g$, $m = 1, 2, \dots$. Тогда $\|z_m\| \leq \|S_m^{-1}\| \|g\| \leq C \|g\|$ для всех m . Отсюда по доказанному выше следует, что уравнение (6.3.1) имеет решение $z \in L_p(\mu)$. Покажем, что $\|z - z_m\| \rightarrow 0$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \|z - z_m\| &= \|z - S_m^{-1}g\| = \|S_m^{-1}S_m z - S_m^{-1}g\| \leq \|S_m^{-1}\| \|S_m z - g\| \leq \\ &\leq C \|S_m z - g\| = C \|z - \lambda_m K_m z - g\| = C \|\lambda K z - \lambda_m K_m z\| \leq \\ &\leq C(|\lambda| \|(K - K_m)z\| + |\lambda - \lambda_m| \|K_m z\|) \leq \\ &\leq C(|\lambda| \|\chi_{E_m} K z\| + |\lambda - \lambda_m| \|K z\|), \end{aligned}$$

где $E_m = \bigcup_{n=m+1}^{\infty} e_n$. Из полученной оценки, $E_m \downarrow \emptyset$ и $|\lambda_m - \lambda| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ следует $\|z - z_m\| \rightarrow 0$.

Покажем, что при выполнении условия (6.3.5) последовательность $\{z_m(s)\}$ сходится с регулятором

$$r(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{(\mu e_n)^{1/p}}$$

к определяемому равенством (6.3.4) решению $\xi(s)$, отличающемуся от решения $z(s)$ лишь на множестве меры 0. При этом мы считаем, как раньше, что равенства (6.3.3) выполнены для всех m и $s \in X$. Для любого $s \in e_n$ ($n = 1, 2, \dots$)

$$|\xi(s) - z_m(s)| = \frac{1}{(\mu e_n)^{1/p}} \|\chi_{e_n}(z - z_m)\| \leq \frac{1}{(\mu e_n)^{1/p}} \|z - z_m\|.$$

Кроме того, $|\xi(s) - z_m(s)| = 0$ для всех $s \in X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$. Таким образом, для всех s $|\xi(s) - z_m(s)| \leq r(s) \|z - z_m\|$. Если $\mu X = \infty$ и $\mu e_n \geq \gamma > 0$, $n = 1, 2, \dots$, то сходимость $z_m(s)$ к $\xi(s)$ будет равномерной.

Условие (6.3.5) выполняется, если $K : L_p(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$ — компактный оператор и $1/\lambda$ не является точкой спектра оператора K . В этом случае

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(1 - \lambda K) - (1 - \lambda_m K_m)\| = 0.$$

Имеем

$$S_m^{-1} = [S - (S - S_m)]^{-1} = \{S [1 - S^{-1}(S - S_m)]\}^{-1}.$$

Выберем M так, чтобы для всех $m > M$

$$\|S^{-1}\| \|S - S_m\| < \beta < 1.$$

Тогда при $m > M$

$$\|S_m^{-1}\| \leq \|[1 - S^{-1}(S - S_m)]^{-1}\| \|S^{-1}\| \leq \frac{\|S^{-1}\|}{1 - \beta},$$

что доказывает (6.3.5).

Второй метод (с очевидными изменениями) применим, когда вместо условия (6.3.5) имеет место ограниченность какой-нибудь последовательности $\{\|(1 - \lambda_{m_k} K_{m_k})^{-1}\|\}$.

В заключение отметим, что при выполнении указанных выше условий оба метода работают для любого λ , в том числе когда λ^{-1} принадлежит спектру оператора K , при этом K может быть как ограниченным, так и неограниченным оператором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. Интегральные операторы с ядрами Карлемана // Успехи мат. наук. — 1947. — Т. 2, вып. 5. — С. 93–132.
2. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1966.
3. Бухвалов А. В. Об интегральном представлении линейных операторов // Исследование по линейным операторам и теории функций. V, Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — Л., 1974. — Т. 47. — С. 5–14.
4. Бухвалов А. В. Приложения методов теории порядково ограниченных операторов к теории операторов в пространствах L^p // Успехи мат. наук. — 1983. — Т. 38, вып. 6. — С. 37–83.
5. Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г. и др. Векторные решетки и интегральные операторы. — Новосибирск: Наука, 1992.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Изд. 3-е. — М.: Наука, 1967.
7. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.
8. Доманский Е. Н., Пличко А. Н. К обобщению теоремы Пикара о разрешимости интегрального уравнения Фредгольма первого рода // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 280, № 4. — С. 781–784.
9. Жданов С. И. О некоторых вопросах общей теории линейных систем // Оптимизация. — Новосибирск: Ин-т мат. СО АН СССР, 1973. — Вып. 12. — С. 52–76.
10. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
11. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. — М.: Физматгиз, 1958.
12. Коротков В. Б. Об интегральных операторах с ядрами Карлемана // Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 165, № 4. — С. 748–751.
13. Коротков В. Б. О характеристических свойствах интегральных операторов с ядрами карлемановского типа // Сиб. мат. журн. — 1970. — Т. 11, № 1. — С. 103–127.
14. Коротков В. Б. Классификация и характеристические свойства карлемановских операторов // Докл. АН СССР. — 1970. — Т. 190, № 6. — С. 1274–1277.
15. Коротков В. Б. О сильных интегральных операторах // Мат. заметки. — 1974. — Т. 16, № 6. — С. 907–912.
16. Коротков В. Б. О некоторых свойствах частично интегральных операторов // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 217, № 4. — С. 752–754.
17. Коротков В. Б. К задачам Халмоша — Сандера об интегральных операторах в L_2 // Сиб. мат. журн. — 1982. — Т. 23, № 3. — С. 214–216.
18. Коротков В. Б. О регулярной и компактной факторизации интегральных операторов в L_p // Мат. заметки. — 1982. — Т. 32, № 5. — С. 601–606.
19. Коротков В. Б. Интегральные операторы. — Новосибирск: Наука, 1983.

20. Коротков В. Б. О системах интегральных уравнений // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. 27, № 3. — С. 121–133.
21. Коротков В. Б. О приведении семейств операторов к интегральному виду // Сиб. мат. журн. — 1987. — Т. 28, № 3. — С. 149–151.
22. Коротков В. Б. Некоторые вопросы теории интегральных операторов. — Новосибирск: Ин-т мат. СО АН СССР, 1988.
23. Коротков В. Б. Введение в алгебраическую теорию интегральных операторов. — Владивосток: «Колорит», 2000.
24. Коротков В. Б. Об одной алгебре линейных непрерывных операторов // Сиб. мат. журн. — 2011. — Т. 52, № 2. — С. 310–314.
25. Коротков В. Б. Компактные по мере, почти компактные операторы и линейные функциональные уравнения в L_p // Сиб. мат. журн. — 2013. — Т. 54, № 3. — С. 610–619.
26. Коротков В. Б. О линейных функциональных уравнениях 1-го, 2-го и 3-го родов в L_2 // Сиб. мат. журн. — 2013. — Т. 54, № 6. — С. 1294–1303.
27. Коротков В. Б. О подобии линейных операторов в L_p интегральным операторам 1-го или 2-го рода // Сиб. мат. журн. — 2014. — Т. 55, № 1. — С. 124–130.
28. Коротков В. Б. О системах линейных функциональных уравнений третьего рода в L_2 // Сиб. мат. журн. — 2015. — Т. 56, № 3. — С. 549–556.
29. Коротков В. Б. Компактные по мере, почти компактные и интегральные операторы 1-го, 2-го и 3-го родов // Сиб. мат. журн. — 2016. — Т. 57, № 1. — С. 373–387.
30. Коротков В. Б. О частично компактных по мере неограниченных линейных операторах // Владикавк. мат. журн. — 2016. — Т. 18, вып. 1. — С. 36–41.
31. Коротков В. Б. Интегральные уравнения третьего рода с неограниченными операторами // Сиб. мат. журн. — 2017. — Т. 58, № 2. — С. 333–343.
32. Коротков В. Б., Степанов В. Д. О некоторых свойствах интегральных операторов свертки // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. — Новосибирск: Ин-т мат. СО АН СССР, 1979. — С. 64–68.
33. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
34. Максимова О. Д. Свойства интегральных операторов в идеальных пространствах и абсолютно интегральные операторы: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1987.
35. Никишин Е. М. Резонансные теоремы и надлинейные операторы // Успехи мат. наук. — 1970. — Т. 25, вып. 6. — С. 129–191.
36. Новицкий И. М. О минорах Фредгольма для вполне непрерывных операторов // Дальневост. мат. сб. — 1999. — Вып. 7. — С. 103–122.
37. Пич А. Операторные идеалы. — М.: Мир, 1982.
38. Степанов В. Д. Об одной проблеме Халмоша и Сандера // Докл. АН СССР. — 1984. Т. 278, № 2. — С. 296–298.
39. Степанов В. Д. Некоторые вопросы теории интегральных операторов свертки. — Владивосток: Дальнаука, 2000.
40. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960.
41. Халмош П. Теория меры. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958.
42. Халмош П., Сандер В. Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2 . — М.: Наука, 1985.

-
43. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.
 44. Aronszajn N., Szeptycki P. On general integral transformations // Math. Ann. — 1966. — Vol. 163, № 2. — P. 127–154.
 45. Banach S. Théorie des Opérations Linéaires. — N. Y.: Chelsea Publ. Company, 1955.
 46. Carleman T. Sur les Équations Intégrales Singulières à Noyau Réel et Symétrique. — Uppsala: A.-B. Lundequistska Bokhandeln, 1923.
 47. Lessner L. A lattice theoretic characterization of an integral operator // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 53, № 2. — P. 391–395.
 48. Misra B., Speiser D., Targonski G. Integral operators in the theory of scattering // Helv. Phys. Acta. — 1963. — Vol. 36, № 7. — P. 963–980.
 49. Neumann J. Charakterisierung des spektrums eines integraloperators // Actualités Sci. et Ind. Paris. — 1935. — № 229. — P. 38–55.
 50. Novitskii I. M. A Kernel smoothing method for general integral equations // Dal'nevost. Mat. Zh. — 2012. — Vol. 12, № 2. — P. 255–261.
 51. Novitskii I. M. Some properties of the resolvent kernels for integral equations with bi-Carleman kernels // Dal'nevost. Mat. Zh. — 2016. — Vol. 16, № 2. — P. 186–208.
 52. Schachermayer W., Weis L. Almost compactness and decomposability of integral operators // Proc. Amer. Math. Soc. — 1981. — Vol. 81, № 4. — P. 595–599.
 53. Weidmann J. Carlemanoperatoren // Manuscripta Math. — 1970. — Vol. 2, № 1. — P. 1–38.
 54. Weis L. Integral operators and changes of density // Indiana Univ. Math. J. — 1982. — Vol. 31, № 1. — P. 83–96.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Атомы меры 7

Вейля точка 16

Компактное по мере множество 9

Мера 7

— конечная 7

— не чисто атомическая 8

— сепарабельная 9

— σ -конечная 7

— орма ядерная 42

Оператор

— замкнутый 43

— замыкаемый 43

— интегральный 13

— — 1-го рода 17

— — 2-го рода 17

— — 3-го рода 17

— — Гильберта — Шмидта 38

— — карлемановский 26, 33

— — регулярный 13

— — ядерный 41

— компактный 9

— — по мере 9

— почти компактный 9

— унитарный 26, 43

— ядерный 42

Предельный спектр 37

адемахера обобщенная функция 8

ущественное значение функции 18, 75

Уравнение

— интегральное

— — 1-го рода 5

— — 2-го рода 5

— — 3-го рода 5

— функциональное

— — 1-го рода 5

— — 2-го рода 5

— — 3-го рода 5

словие

— Гильберта — Шмидта 39

— Карлемана 33

Характеристическая функция множества 8

дро

— карлемановское 93

— — квазивыврожденное 56, 94

— разрешающее 68

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Ахиезер Н. И.	41	фон Неймон Дж.	27, 37
Бухвалов А. В.	22	Новицкий И. М.	6, 53, 72, 86
Вайдман И.	37	Пличко А. Н.	93
Вайс Л.	14	Сандер В.	22, 41
Доманский Е. Н.	93	Степанов В. Д.	6, 14, 22
Жданов С. И.	22	Таргонский Д.	38
Максимова О. Д.	86	Халмош П.	22, 41
Мизра Б.	38	Шахермайер В.	14
Лесснер Л.	22	Шпайзер Д.	38

Серия
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИИ
Выпуск 11

Коротков Виталий Борисович

**ЛИНЕЙНЫЕ
УНКЦИОНАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ 1-го, 2-го И 3-го РОДОВ**

Научное издание

Ответственный редактор В. Д. Степанов

Редакторы серии:
Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев

Формат 60×84/16
Усл. печ. л. 6,16. Уч.-из. л. 5,18
Тираж 300 экз.
Заказ № 9979

Российская академия наук
119991, Москва, Ленинский проспект, 14
www.ras.ru

Верстка Южного математического
института — филиала ВНЦ РАН
362027, Владикавказ, ул. Маркуса, д. 22.
www.smath.ru

Корректурa ООО «Нюанс»
Москва, ул. Дмитрия Ульянова, д. 26 а, стр. 2

Отпечатано в цифровой типографии ООО «Буки Веди»
115093, Москва, Партийный пер., д. 1, корп. 58
www.bukivedi.com