

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР  
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

---

ИТОГИ НАУКИ • ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ОКРУГ

---

С Е Р И Я

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

**В. А. Койбаев**

ПОДГРУППЫ ГРУППЫ  $GL(2, k)$ ,  
СОДЕРЖАЩИЕ НЕРАСЩЕПИМЫЙ ТОР

Владикавказ  
2009

ББК 22.144  
УДК 512; 519.46  
К 59

Ответственный редактор  
член-корреспондент РАН *А. А. Махнев*

Рецензенты  
доктор физико-математических наук *Н. С. Романовский*,  
доктор физико-математических наук *Я. Н. Нуэжин*

Mathematics Subject Classification(2000): 20G15.

**Койбаев В. А.**

Математическая монография. Подгруппы группы  $GL(2, k)$ , содержащие нерасщепимый тор / В. А. Койбаев; [отв. ред. А. А. Махнев]; Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2009.—183 с.—(Итоги науки. ЮФО).—ISBN 978-5-93000-059-7.

В монографии излагаются вопросы расположения подгрупп в линейных группах, содержащих фиксированную подгруппу. Подробно исследуется структура подгрупп полной линейной группы степени 2 над полем, содержащих нерасщепимый тор. Особое внимание уделено изучению класса подколец основного поля, определяющих структуру промежуточных подгрупп.

Для специалистов в области алгебры, аспирантов и студентов старших курсов математических факультетов университетов.

ISBN 978-5-93000-059-7

© Южный математический институт  
ВНЦ РАН и РСО-А, 2009  
© Койбаев В. А., 2009

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                 |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Предисловие .....                                                                                               | 5         |
| Введение .....                                                                                                  | 7         |
| Краткое содержание книги .....                                                                                  | 13        |
| <b>Глава 1. Общие вопросы расположения подгрупп .</b>                                                           | <b>28</b> |
| § 1. Сети и сетевые группы .....                                                                                | 28        |
| § 2. Веерные подгруппы .....                                                                                    | 30        |
| § 3. Граф нормальности решетки промежуточных<br>подгрупп .....                                                  | 34        |
| <b>Глава 2. О подгруппах группы <math>GL(n, k)</math>, содер-<br/>жащих нерасщепимый максимальный тор .....</b> | <b>38</b> |
| § 1. Общая постановка задачи .....                                                                              | 39        |
| § 2. Факторизация .....                                                                                         | 40        |
| § 3. Нормализатор полной линейной группы,<br>связанной с промежуточным подполем .....                           | 42        |
| § 4. Реализация группы автоморфизмов,<br>возникающая при расширении полей .....                                 | 47        |
| § 5. Гирлянды, содержащие полную линейную<br>группу над промежуточным полем .....                               | 50        |
| § 6. Трансвекции .....                                                                                          | 56        |
| § 7. Существование подгрупп, принадлежащих<br>данному кольцу множителей .....                                   | 61        |
| § 8. Максимальные нетривиальные промежуточные<br>подгруппы группы $GL(n, \mathbb{Q})$ .....                     | 72        |
| <b>Глава 3. Подгруппы группы <math>GL(2, k)</math>, содержащие<br/>нерасщепимый максимальный тор .....</b>      | <b>80</b> |
| § 1. Кольца множителей, связанные<br>с промежуточными подгруппами .....                                         | 80        |

|                                                                                                                                                  |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 2. Допустимые кольца и модули ( $2 \in R_0^*$ ) .....                                                                                          | 83         |
| § 3. Включение в нормализатор .....                                                                                                              | 89         |
| § 4. Правило перемещения и вытекающие из него<br>следствия .....                                                                                 | 94         |
| § 5. Подрешетка $\text{Lat}(R, A)$ .....                                                                                                         | 99         |
| § 6. Наибольшая и наименьшая подгруппы<br>подрешетки $\text{Lat}(R, A)$ .....                                                                    | 101        |
| § 7. Подгруппы из $\text{Lat}(R, A)$ .....                                                                                                       | 105        |
| § 8. Спуск .....                                                                                                                                 | 114        |
| § 9. Подъем .....                                                                                                                                | 120        |
| <b>Глава 4. Подгруппы группы <math>GL(2, \mathbb{Q})</math>, содержащие<br/>      нерасщепимый максимальный тор .....</b>                        | <b>127</b> |
| § 1. Кольцо $R_0$ .....                                                                                                                          | 127        |
| § 2. Стабильный ранг подколец поля $\mathbb{Q}$ .....                                                                                            | 131        |
| § 3. Группы уровня идеала .....                                                                                                                  | 134        |
| § 4. Допустимые кольца и допустимые пары .....                                                                                                   | 140        |
| § 5. Максимальные промежуточные подгруппы .....                                                                                                  | 143        |
| § 6. Полные промежуточные подгруппы .....                                                                                                        | 150        |
| § 7. Самонормализуемые промежуточные подгруппы .....                                                                                             | 155        |
| § 8. Решетка $\text{Lat}(T, G)$ .....                                                                                                            | 159        |
| <b>Дополнение. Строение решетки промежуточных<br/>      подгрупп, содержащих квадратичный тор,<br/>      для поля рациональных функций .....</b> | <b>163</b> |
| <b>Литература .....</b>                                                                                                                          | <b>167</b> |
| <b>Предметный указатель .....</b>                                                                                                                | <b>179</b> |
| <b>Указатель обозначений .....</b>                                                                                                               | <b>181</b> |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

*Памяти Зенона Ивановича Боревича*

За последние десятилетия значительное развитие получило направление, связанное с описанием подгрупп линейных групп и групп Шевалле над полем и кольцом, содержащих фиксированную подгруппу. Выбор фиксированной подгруппы достаточно разнообразен. Это может быть подгруппа, связанная с подполем (подкольцом) основного поля (кольца) или с его расширением, диагональная подгруппа и т. д.

В этой книге излагается часть диссертации автора, результаты которой были получены в 1989–1994 годах. Мы предлагаем исследование структуры подгрупп полной линейной группы  $GL(2, k)$  степени 2 над произвольным полем  $k$  нечетной характеристики, содержащих нерасщепимый тор, связанный с квадратичным расширением поля  $k$ . Вероятно, будучи студентами и решая упражнение о представлении комплексных чисел вещественными матрицами второго порядка, возникал вопрос о том, какие подгруппы полной линейной группы  $GL(2, \mathbb{R})$  содержат мультипликативную группу поля комплексных чисел  $\mathbb{C}$ .

Мотивом написания книги послужило то, что, на наш взгляд, задача описания подгрупп линейных групп над произвольным полем, содержащих нерасщепимый тор, далека от окончательного решения. Методы, излагаемые в книге, могут послужить основой для дальнейшего решения указанной задачи. Основные утверждения необходимые для понимания идей настоящей работы мы снабдили подробными доказательствами. Доказательства результатов, полученных 20 лет назад не

подвергались редактированию (посчитав некоторую неотшлифованность рассуждений иногда полезной). Для ознакомления с книгой достаточно знание основ теории групп и колец.

Основным аппаратом является техническая работа с матрицами над полем и кольцом. Мы постарались вывести эту работу на определенный уровень, и считаем это основным достижением книги. Надеюсь, что читатель найдет для себя что-то интересное в технике извлечения трансвекций и других матриц специального вида.

С особой теплотой и благодарностью вспоминаю своего учителя и наставника Зенона Ивановича Боровича, блестящие лекции и семинары которого привели меня в алгебру. В 70–80-е годы прошлого столетия мне посчастливилось участвовать в работе семинара З. И. Боровича, на котором сформировалась замечательная группа алгебраистов (Р. А. Шмидт, Е. В. Дыбкова, Н. А. Вавилов, Л. Ю. Колотилина, С. Л. Крупецкий, Е. Б. Плоткин, А. А. Пацевский, В. И. Родионов, А. А. Семенов и др.), работы которых дали существенный импульс в развитие направлений определенных на семинаре. Слова искренней благодарности адресую Н. А. Вавилову за полезные обсуждения проблем, связанных с тематикой книги, ответственному редактору и рецензентам, сделавшим ряд ценных замечаний. Мой приятный долг — выразить признательность за финансовую поддержку Южному математическому институту Владикавказского научного центра РАН и РСО-А.

*Апрель, 2009*  
*Владикавказ*

*В. А. Койбаев*

## ВВЕДЕНИЕ

Теория линейных групп — один из центральных разделов современной алгебры. Она имеет многочисленные связи с такими областями, как теория алгебраических групп, теория колец, теория групп и алгебр Ли, геометрическая и линейная алгебра, алгебраическая  $K$ -теория, алгебраическая теория чисел.

Большое количество работ, связанных с теорией линейных групп, определяется широким интересом к этой теории. При этом линейные группы изучаются в самых различных аспектах: как абстрактные группы, как алгебраические группы, как группы матриц и т. д. Исследования посвящены таким вопросам, как задание образующими и соотношениями, группы, порожденные элементами специального вида, представление, изоморфизмы. Наша работа относится к изучению расположения подгрупп в линейных группах.

Конечно, недостижимым идеалом было бы явное описание вообще всех подгрупп в линейных группах. Однако до сих пор такое описание получено лишь в линейных группах небольших степеней над конечным полем. Поэтому обычно ограничиваются изучением подгрупп, выделяемых условиями различного характера: теоретико-группового, матричного и т. д. Перечислим несколько фундаментальных циклов исследований.

Отметим важное направление — изучение подгрупп, порожденных элементами специального вида. Классификация конечных линейных групп, порожденных отражениями над полем нулевой характеристики относится к числу классических результатов теории линейных групп (см., например, [38, 146]). Значительным достижением является выполненная Дж. Томпсоном [173] классификация неприводимых линейных групп над

конечным полем характеристики  $p > 3$ , содержащих матрицу, удовлетворяющую уравнению  $(x - 1)^2 = 0$ . Полная классификация конечных неприводимых линейных групп, порожденных трансвекциями над полями положительной характеристики получена в работах Дж. Маклафлина, А. Е. Залесского, В. Н. Серезкина, А. Вагнера, Х. Поллачек [86, 162, 163, 166]. В работах А. Е. Залесского и В. Н. Серезкина [87, 88] получена полная классификация конечных неприводимых линейных групп, порожденных отражениями над полем нечетной характеристики. Отметим также работу А. В. Корлюкова [114], в которой классифицированы конечные линейные группы, порожденные двумерными преобразованиями порядка  $r \geq 5$  над полями характеристики  $p > 7$ . В работе Е. Л. Башкирова [5] исследуются линейные группы, содержащие квадратичные унитарные элементы над произвольным телом.

Выделим цикл работ (Н. С. Романовский, З. И. Борович, Р. А. Шмидт, Я. Н. Нужин), посвященных описанию подгрупп, промежуточных между группой над кольцом и подкольцом (см. [17, 25, 128, 129, 130, 132, 141]). Отметим, что в работе Я. Н. Нужина [128] описаны промежуточные подгруппы всех групп лиева типа, когда основное поле является алгебраическим расширением меньшего. В серии работ [48, 131, 148, 157] изучались максимальные подгруппы в линейных группах и группах Шевалле.

Еще одно направление в изучении линейных групп — это описание надгрупп некоторой фиксированной подгруппы. Классическим результатом такого рода является описание параболических подгрупп, полученное Ж. Титсом [174]. Далее, в 1965 г. в классической работе Бореля — Титса [144] (см. также [36]) были изучены связные алгебраические подгруппы в редуктивной группе над алгебраически замкнутым полем  $k$ . В частности, из проведенных ими исследований вытекало описание алгебраических подгрупп полной линейной группы  $G = GL(n, k)$ , содержащих группу диагональных матриц  $D(n, k)$  (для алгебраически замкнутого поля  $k$ ). Этот результат Бо-

реля — Титса был значительно усилен З. И. Боровичем [15] в 1976 г. Как выяснилось, для любого поля  $k$  все промежуточные подгруппы  $H$ ,  $D(n, k) \leq H \leq GL(n, k)$ , являются алгебраическими, решетка  $\text{Lat}(T, G)$  промежуточных подгрупп конечна и не зависит от поля  $k$ , если только  $\text{card } k \geq 7$ . Случаи полей  $K = \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_5$  рассмотрены автором [90, 91, 94] и (совместно с З. И. Боровичем) [26]. Работа З. И. Боровича [15] дала мощный импульс в изучении подгрупп, содержащих группу диагональных матриц (расщепимый максимальный тор). Исследование развивалось в основном в двух направлениях. С одной стороны велась работа по перенесению результатов с полной линейной группы на классические линейные группы, а также группы Шевалле над полем. С другой стороны, многие результаты были перенесены на линейные группы над кольцами.

В серии работ З. И. Боровича и Н. А. Вавилова описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц, было перенесено на полулокальные кольца [19, 20, 39, 42]. Цикл работ Н. А. Вавилова, Е. В. Дыбковой, С. Л. Крупецкого посвящен описанию надгрупп расщепимого максимального тора в ортогональной, симплектической и унитарной группах [45, 50, 51, 58, 59, 115–123].

Отметим обобщающий результат Н. А. Вавилова [43], в котором дается описание подгрупп расширенных групп Шевалле, содержащих максимальный расщепимый тор над полем  $k$  с числом элементов не менее семи элементов.

Описанию подгрупп линейных групп, содержащих группу клеточно-диагональных матриц, посвящены работы З. И. Боровича, Н. А. Вавилова, Н. С. Романовского, С. Л. Крупецкого и автора [21–24, 46, 50, 51, 55, 58, 96, 99, 115, 133].

Первый шаг в решении проблемы описания надгрупп максимального тора в группах Шевалле сделал Г. Зейтц [167, 170], который это описание получил для групп Шевалле над конечным полем из  $q$  элементов,  $q > 11$  (при этом в случае максимального расщепимого тора предполагается, что  $q$  нечетно [167], а в случае произвольного тора — характеристика поля

$p \geq 5$  [170]). В серии работ Н. А. Вавилова [47] I–IV получено описание подгрупп специальной линейной группы  $SL(n, k)$ ,  $n \geq 3$ , содержащих группу диагональных матриц, над произвольным полем  $k$  с числом элементов не менее семи. Отметим также замечательную работу О. Кинга [158], который получил описание подгрупп специальной линейной группы  $SL(2, k)$  над произвольным полем  $k$ , содержащих группу диагональных матриц. Особо отметим, наконец, большой цикл работ Н. А. Вавилова (см., например, [47, 56, 57]), где задача описания надгрупп расщепимого максимального тора решается для групп Шевалле всех типов над полями, содержащими не менее семи элементов.

Значительно менее исследованным является вопрос описания подгрупп полной линейной группы над полем, содержащих нерасщепимый тор. В настоящей работе мы концентрируем внимание на исследовании промежуточных подгрупп полной линейной группы, содержащих нерасщепимый максимальный тор, связанный с расширением основного поля (минизотропный тор). В более общей постановке эта задача (связанная по классификации Ашбахера с надгруппами класса  $C_3$ ) может быть сформулирована следующим образом. Пусть  $K/k$  — конечное расширение полей степени  $m$ ,  $V$  — векторное пространство размерности  $n$  над полем  $K$  (и размерности  $mn$  над  $k$ ), тогда, очевидно ( $K$ -линейное отображение является  $k$ -линейным),  $GL_K(V) \leq GL_k(V)$ , или в матричной форме  $GL(n, K) \leq GL(mn, k)$ . Заметим, что при  $n = 1$  группа  $GL(1, K) = K^*$  является нерасщепимым максимальным тором. Сформулируем результат, принадлежащий Ли Шанчжи [159], который сводит рассматриваемую задачу к нерасщепимому тору. Пусть  $n \geq 3$ , тогда для всякой промежуточной подгруппы  $H$ ,  $SL(n, K) \leq H \leq GL(mn, k) = G$ , найдется единственное промежуточное подполе  $k \leq L \leq K$ ,  $[K : L] = d$  так, что подгруппа  $H$  заключена между группой  $SL(dn, L)$  и ее нормализатором в  $G$ . В случае  $n = 2$ ,  $k \neq \mathbb{F}_2$ , возникает еще одна серия промежуточных подгрупп, а именно,

группы  $Sp(2d, L)$ , для всех промежуточных полей  $k \leq L \leq K$ ,  $[K : L] = d$ .

Отметим, что для случая конечного поля Роджер Дай [149–151] описал надгруппы  $GL(n, K)$  в  $GL(nm, k)$  в предположении  $n \geq 1$ .

К настоящему времени полное описание надгрупп нерасщепимого тора получено лишь для некоторых специальных полей таких, как конечные или локальные. Для конечных полей это работы У. Кантора, Г. Зейтца и Р. Дая [149–151, 155, 167, 170], в которых получены окончательные результаты для полей (характеристики не равной 2 и 3), содержащих не менее 13 элементов. Отметим, что в работах Г. Зейтца получено описание подгрупп конечных групп Шевалле, содержащих произвольный максимальный тор. С. Л. Крупецкий [116, 118] рассмотрел надгруппы некоторых специальных торов (аналог декартова произведения окружностей) в унитарной группе, определенной над неразветвленным квадратичным расширением локального поля (вопросы классификации торов рассмотрены в [156]). Важные результаты о надгруппах нерасщепимого тора для локальных и глобальных полей получены В. П. Платоновым [165]. В случае поля вещественных чисел  $\mathbb{R}$  надгруппы максимального тора замкнуты в вещественной топологии и, в частности, имеется только конечное число промежуточных подгрупп [147, 165].

В отличие от конечных полей в случае бесконечных полей расположение надгрупп нерасщепимого тора определяется некоторым классом подколец основного поля. А именно, определяется некоторое наименьшее кольцо  $R_0$  основного поля  $k$  так, что расположение всякой подгруппы, содержащей нерасщепимый тор, фиксируется элементарной сетевой группой, построенной (сетью идеалов) над промежуточным кольцом  $R$ ,  $R_0 \leq R \leq k$ .

На примере работ [9, 10, 11, 12, 30, 75, 76, 107, 110] покажем как выглядит кольцо  $R_0$  в случае группы  $GL(2, k)$ . Если  $k$  — локальное числовое поле (конечное расширение поля  $p$ -

адических чисел,  $p \neq 2$ ), а тор определяется неразветвленным квадратичным расширением поля  $k$ , то кольцо  $R_0$  совпадает с кольцом целых элементов нормализованного нормирования поля  $k$  (в этом случае мы имеем счетное число промежуточных подгрупп). В случае глобальных полей картина сложнее. Если  $k = \mathbb{Q}$  — поле рациональных чисел (тор определяется квадратичным расширением  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ,  $d$  — целое рациональное, свободное от квадратов), то кольцо  $R_0$  состоит из всех рациональных чисел, в знаменатели которых (в несократимой записи) входят только те простые числа, по модулю которых  $d$  является квадратичным вычетом. Таким образом, в случае поля рациональных чисел в группе  $GL(2, \mathbb{Q})$  имеется континуум надгрупп нерасщепимого тора. Если же  $k = \mathbb{F}_q(t)$  — поле рациональных функций (с коэффициентами из конечного поля  $\mathbb{F}_q$  нечетной характеристики), а тор определяется квадратичным расширением  $k(\sqrt{\mu})$ , где  $\mu$  — неквадрат поля  $\mathbb{F}_q$ , то кольцо  $R_0$  совпадает с множеством всех (полуправильных) рациональных дробей  $\frac{f}{g}$ ,  $\deg(f) \leq \deg(g)$ , знаменатели которых являются произведением неприводимых многочленов над полем  $\mathbb{F}_q$  четной степени (континуум промежуточных подгрупп).

Приведенные здесь результаты говорят о том, что задачей ближайшего времени будет выработка языка (терминологии), на котором возможно вести описание надгрупп нерасщепимого тора. На наш взгляд частью этой терминологии должны быть сети, геометрия, а для конкретных полей — их арифметика.

Отметим, что для более подробного ознакомления с проблематикой мы рекомендуем обзоры А. Е. Залесского [84, 85], А. С. Кондратьева [113], Н. А. Вавилова, В. В. Нестерова, А. В. Степанова [55, 56, 60, 65, 179].

Настоящая книга посвящена исследованию подгрупп группы  $GL(2, k)$ , содержащих нерасщепимый максимальный тор, связанный с квадратичным расширением поля  $k$ . Вопросы и методы, возникающие в работе, оказываются естественно связанными с перечисленными циклами исследований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ КНИГИ

Первая глава носит предварительный характер и посвящена общим вопросам расположения промежуточных подгрупп. В этой главе (в хронологическом порядке) излагаются понятия и методы, необходимые нам для изложения результатов работы. В §1 напомним определение сети и сетевой группы. В §2 дается определение веерной подгруппы и полинормальной подгруппы. В §3 излагается общий подход, предложенный З. И. Боровичем, к исследованию решетки

$$\text{Lat}(T, G) = \{H : T \leq H \leq G\}$$

промежуточных подгрупп произвольной группы  $G$ , содержащих фиксированную подгруппу  $T$ . А именно, на решетке  $\text{Lat}(T, G)$  вводится структура графа (граф нормальности), принимая в качестве вершин графа все промежуточные подгруппы: вершина  $H_1$  соединяется направленным ребром с вершиной  $H_2$ , если  $H_1 \trianglelefteq H_2$ . Связные компоненты графа нормальности называются гирляндами решетки  $\text{Lat}(T, G)$ . Таким образом, решетка  $\text{Lat}(T, G)$  представляется в виде дизъюнктного объединения своих гирлянд. Следовательно, изучение решетки  $\text{Lat}(T, G)$  сводится к описанию множества всех гирлянд, а затем к описанию строения каждой гирлянды в отдельности. Среди множества всех гирлянд выделяются две: гирлянда  $\Gamma_*$ , содержащая подгруппу  $T$ , и гирлянда  $\Gamma^*$ , содержащая группу  $G$ . Они называются соответственно нижней и верхней гирляндами решетки  $\text{Lat}(T, G)$ . На решетке  $\text{Lat}(T, G)$  вводятся операции подъема  $H \longrightarrow H^{(1)} = N_G(H)$  и спуска  $H \longrightarrow H_{(1)} = T^H = \langle h^{-1}Th : h \in H \rangle$ . Очевидно, что каждая гирлянда  $\Gamma$  решетки  $\text{Lat}(T, G)$  инвариантна относительно этих

операций. Операции подъема и спуска допускают итерирование:  $H^{(n)} = (H^{(n-1)})^{(1)}$ ,  $H_{(n)} = (H_{(n-1)})_{(1)}$ . Таким образом, всякая промежуточная подгруппа  $H$  определяет две последовательности (два субнормальных ряда): возрастающую последовательность подъемов и убывающую последовательность спусков подгруппы  $H$ . Гирлянда  $\Gamma$  решетки  $\text{Lat}(T, G)$  называется ограниченной сверху (соответственно снизу), если для любой подгруппы  $H \in \Gamma$  последовательность подъемов (спусков) стабилизируется на конечном шаге. Гирлянда имеет конечный тип, если она ограничена сверху и снизу. В §3 формулируются утверждения об ограниченных сверху и снизу гирляндах. Оказывается, что гирлянда  $\Gamma$  решетки  $\text{Lat}(T, G)$  ограничена снизу тогда и только тогда, когда она содержит полную промежуточную подгруппу (т. е. подгруппу  $F \in \Gamma$  такую, что  $T^F = F$ ). Следовательно, все ограниченные снизу гирлянды решетки  $\text{Lat}(T, G)$  находятся во взаимно однозначном соответствии со всеми полными промежуточными подгруппами. Аналогичное утверждение справедливо для ограниченных сверху гирлянд (при условии, что операция подъема удовлетворяет условию монотонности на гирляндах: если  $A, B \in \Gamma$  и  $A \leq B$ , то  $A^{(1)} \leq B^{(1)}$ ); в этом случае роль полных промежуточных подгрупп играют самонормализуемые промежуточные подгруппы.

Во второй главе излагаются результаты, связанные с расположением подгрупп полной линейной группы  $G = GL(n, k)$  степени  $n$  над произвольным полем  $k$ , содержащих нерасщепимый максимальный тор  $T$ . В §1 дается общая постановка задачи. Пусть  $k$  — поле,  $K/k$  — конечное расширение степени  $n$  поля  $k$ . Имеет место регулярное вложение мультипликативной группы  $K^*$  поля  $K$  в группу  $G = GL_k(K) = \text{Aut}_k(K)$  всех  $k$ -линейных обратимых отображений поля  $K$ :

$$K^* \longrightarrow G,$$

при котором всякому элементу  $\alpha \in K^*$  ставится в соответствие отображение  $\hat{\alpha} : \hat{\alpha}(x) = \alpha x$ ,  $x \in K$ . Образ  $K^*$  при этом вло-

жении мы обозначаем через  $T = T(K)$  и называем нерасщепимым максимальным тором (минизотропный тор). Ясно, что  $T = T(K) = GL_K(K)$ . Очевидно, что если зафиксировать базис поля  $K$  над  $k$ , то группе  $GL_k(K)$  соответствует полная линейная группа  $G = GL(n, k)$ , а тору  $T = T(K)$  некоторая матричная группа, которую мы также обозначаем через  $T$ . Таким образом, мы получили задачу изучения решетки

$$\text{Lat}(T, G) = \{H : T \leq H \leq G\}$$

подгрупп  $H$  группы  $G = GL(n, k)$ , содержащих нерасщепимый максимальный тор  $T$ .

В качестве примера промежуточных подгрупп выделим полные линейные группы  $GL_L(K)$ , связанные с промежуточными подполями  $L$ ,  $k \subseteq L \subseteq K$ . А именно,  $GL_L(K)$  — это группа всех  $L$ -линейных обратимых отображений векторного пространства  $K$  над полем  $L$ . Ясно, что

$$T = T(K) = GL_K(K) \leq GL_L(K) \leq GL_k(K) = G.$$

В §3 мы вычисляем нормализатор подгруппы  $GL_L(K)$  в группе  $G = GL_k(K)$ : он совпадает (следствие 2.3.6) с полупрямым произведением нормального делителя  $GL_L(K)$  и группы, изоморфной группе  $\text{Aut}(L/k)$  всех автоморфизмов поля  $L$ , тождественных на  $k$ . На самом деле в §3 доказывается более общий результат, однако мы выделили тот случай, который касается непосредственно нашей работы. Для промежуточного подполя  $L$ ,  $k \subseteq L \subseteq K$ , через  $\Gamma_L$  обозначим гирлянду решетки  $\text{Lat}(T, G)$ , содержащую подгруппу  $GL_L(K)$ . §5 посвящен вычислению гирлянды  $\Gamma_L$ . Пусть  $H = GL_L(K)$ , тогда (теорема 2.5.8)

$$\Gamma_L = \text{Lat}(T^H, N_G(H)),$$

причем как показано в 2.5.1 (за исключением одного случая),

$$T^H = T \cdot SL_L(K),$$

где (2.5.3) группа  $T^H$  является полной промежуточной подгруппой в решетке  $\text{Lat}(T, G)$ . В частности, в заключение § 5 дается описание верхней и нижней гирлянды решетки  $\text{Lat}(T, G)$  соответственно  $\Gamma^* = \Gamma_k$  и  $\Gamma_* = \Gamma_K$ .

В § 7 (см. также гл. III, § 1) мы определяем модуль трансвекций и кольцо множителей, связанные с промежуточной подгруппой  $H$ , содержащей трансвекцию. Эти понятия играют существенную роль в дальнейшей работе. Итак, пусть  $H$  — промежуточная подгруппа,  $T \leq H \leq G = GL_k(K)$ , содержащая трансвекцию, т. е. отображение  $\tau(\alpha, \varphi) = 1 + \alpha\varphi$ , где  $\alpha \in K$ ,  $\varphi : K \rightarrow k$  — ненулевой функционал, причем  $\varphi(\alpha) = 0$ . Зафиксируем  $\varphi$  и рассмотрим множество (модуль трансвекций)

$$A_\varphi = \{\alpha \in K : \tau(\alpha, \varphi) \in H\},$$

которое является подгруппой аддитивной группы  $K^+$ , далее, рассмотрим кольцо множителей  $R$  модуля  $A_\varphi$ :

$$R = R(A_\varphi) = \{\lambda \in k : \lambda A_\varphi \subseteq A_\varphi\}.$$

Оказывается это кольцо множителей  $R$  не зависит от функционала  $\varphi$ , а зависит только от подгруппы  $H$ . Таким образом, всякой промежуточной подгруппе  $H$ , содержащей трансвекцию, мы ставим в соответствие некоторое подкольцо  $R = R(H)$  поля  $k$ , которое и называем *кольцом множителей* промежуточной подгруппы  $H$ . Подкольцо  $R$  поля  $k$  называется *допустимым*, если для некоторой промежуточной подгруппы  $H$ ,  $T \leq H \leq G$ , подкольцо  $R$  совпадает с кольцом множителей  $R(H) : R = R(H)$ . Исследование таких колец, реализуемых с помощью промежуточной подгруппы, позволяет нам извлекать информацию о строении решетки промежуточных подгрупп  $\text{Lat}(T, G)$ . В § 7 исследуются промежуточные подгруппы, содержащие элементарную трансвекцию. Сформулируем основной результат § 7.

Пусть  $K = k(\sqrt[n]{\mu})$  — радикальное расширение степени  $n$  поля  $k$ ,  $G = GL(n, k)$ ,  $T = T(\mu)$  — максимальный нерасщепимый

тор, связанный с радикальным расширением  $K/k$ . В естественном базисе поля  $K = k(\sqrt[n]{\mu})$  над  $k$  тор  $T = T(\mu)$  совпадает с множеством всех матриц  $c = c(\bar{x}) = (c_{ij})$ ,  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$ ,  $\bar{x} \neq \bar{0}$ , элементы которых определяются следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} x_{i+1-j}, & j \leq i; \\ \mu x_{n+i+1-j}, & j \geq i+1. \end{cases}$$

С каждой матрицей  $c = c(\bar{x}) \in T(\mu)$  связана обратная матрица  $c^{-1} = c(\bar{y}) = (c'_{ij}) \in T(\mu)$ ,  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in k^n$ , причем  $y_i = \frac{C_{1i}}{|c(\bar{x})|}$ , где  $C_{1i}$  — алгебраическое дополнение элемента  $c_{1i}$  матрицы  $c = c(\bar{x})$ . Введем в рассмотрение подкольцо  $R_0 = R(\mu)$  поля  $k$  следующего вида:

$$R_0 = R(\mu) = \text{ring} \langle x_i y_j, \mu x_r y_s : i + j \leq n + 1, \\ r + s > n + 1, \bar{x} \in k^n \setminus \bar{0} \rangle.$$

Теперь мы формулируем основной результат § 7. Пусть  $R$  — подкольцо поля  $k$ , содержащее кольцо  $R_0$ . Пусть, далее,  $A_1, \dots, A_n$  — идеалы кольца  $R$ , причем

$$A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n, \quad \mu A_n \subseteq A_1.$$

Рассмотрим сеть идеалов  $\sigma = (\sigma_{ij})$  определенную следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j \leq i; \\ \mu A_{n+i+1-j}, & j \geq i+1. \end{cases}$$

Тогда (теорема 2.7.7) тор  $T = T(\mu)$  нормализует сетевую группу  $G(\sigma)$ , а потому  $H = T \cdot G(\sigma)$  — промежуточная подгруппа, содержащая тор  $T$ , причем для всех  $i \neq j$  корневая подгруппа  $A_{ij} = \{\alpha \in k : t_{ij}(\alpha) \in H\}$  совпадает с  $\sigma_{ij}$ . Рассмотрим частный случай этой теоремы, взяв  $A_1 = \dots = A_n = R$ ,  $R \supseteq R_0$ ,  $\sigma_R = (\sigma_{ij})$  — сеть, для которой  $\sigma_{ij} = R$ , если  $i \geq j$  и  $\sigma_{ij} = \mu R$ , если  $i < j$ . Тогда  $H_R = T \cdot G(\sigma_R)$  — промежуточная подгруппа,

содержащая тор  $T$ , причем, как нетрудно видеть, кольцо множителей подгруппы  $H_R$  совпадает с кольцом  $R$ . Таким образом (следствие 2.7.8), подкольцо  $R$  поля  $k$ , содержащее кольцо  $R_0 = R(\mu)$ , является допустимым.

В § 8 мы применяем результаты исследований § 7 к случаю полной линейной группы  $G = GL(n, \mathbb{Q})$  степени  $n$  над полем рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ . А именно, мы строим примеры максимальных нетривиальных (не содержащих  $SL(n, \mathbb{Q})$ ) подгрупп группы  $G = GL(n, \mathbb{Q})$ , содержащих тор  $T$ . Пусть  $K = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{d})$  — радикальное расширение степени  $n$  поля рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ , где  $\mu = d$  — целое, свободное от квадратов,  $T = T(d)$  — максимальный нерасщепимый тор, связанный с этим расширением. Основным результатом § 8 является теорема 2.8.7. Пусть  $p$  — простой делитель числа  $d$ ,  $\mathbb{Z}_{(p)}$  — кольцо всех  $p$ -целых чисел. Тогда для сети  $\sigma_p$

$$\sigma_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & d\mathbb{Z}_{(p)} & \dots & d\mathbb{Z}_{(p)} \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)} & \dots & d\mathbb{Z}_{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)} & \dots & \mathbb{Z}_{(p)} \end{pmatrix}$$

группа  $H_p = T \cdot G(\sigma_p)$  является максимальной нетривиальной (не содержащей  $SL(n, \mathbb{Q})$ ) подгруппой полной линейной группы  $G = GL(n, \mathbb{Q})$ , содержащей тор  $T = T(d)$ . Отметим интересное следствие 2.8.8 из этой теоремы, взяв в качестве  $d$  произвольное простое число  $p$ : для всякого простого числа  $p$  группа  $T(p) \cdot G(\sigma_p)$  является максимальной нетривиальной подгруппой полной линейной группы  $GL(n, \mathbb{Q})$ .

В гл. III рассматривается случай квадратичного тора. Пусть  $k$  — произвольное поле характеристики не равной 2,  $K = k(\sqrt{\mu})$  — квадратичное расширение поля  $k$ . Пусть, далее,  $T = T(\mu)$  — максимальный нерасщепимый тор в полной линейной группе  $G = GL(2, k)$ , связанный с квадратичным расширением  $K/k$  (квадратичный тор). В третьей главе исследуется решетка промежуточных подгрупп  $\text{Lat}(T, G)$ . Как было

указано в гл. II, всякой промежуточной подгруппе  $H$ , содержащей трансвекцию, ставится в соответствие кольцо множителей  $R = R(H)$ . В § 1 доказывается следующий результат.

**Теорема 3.1.2.** Пусть  $R = R(H)$  — кольцо множителей промежуточной подгруппы  $H$ ,  $T \leq H \leq G$ ,  $T = T(\mu)$  — квадратичный тор. Тогда для всех  $z \in K^*$

$$2 \cdot \frac{\text{tr}(z^2)}{N(z)} \in R,$$

где  $\text{tr}(z)$  и  $N(z)$  — соответственно след и норма элемента  $z$  в расширении  $K/k$ .

Эта теорема служит основанием для рассмотрения подкольца  $R_0 = R(\mu)$  поля  $k$ , определенного квадратичным расширением  $K/k$ :

$$R_0 = R(\mu) = \text{ring}_{z \in K^*} \left\langle 1, 2 \cdot \frac{\text{tr}(z^2)}{N(z)} \right\rangle.$$

Таким образом, согласно теореме 3.1.2 кольцо множителей  $R = R(H)$  всякой промежуточной подгруппы  $H$  содержит подкольцо  $R_0$ .

Далее, для удобства мы переходим к матричному языку исследования. Выбирая естественный базис  $1, \sqrt{\mu}$  поля  $K = k(\sqrt{\mu})$  над  $k$ , мы исследуем промежуточные подгруппы  $H$ ,  $T = T(\mu) \leq H \leq GL(2, k) = G$ , где

$$T = T(\mu) = \left\{ \begin{pmatrix} x & \mu y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in k, (x, y) \neq (0, 0) \right\}.$$

Если промежуточная подгруппа  $H$  не содержит элементарной трансвекции, то как следует из § 4 (см. 3.4.7)  $H$  совпадает либо с тором  $T$ , либо с его нормализатором  $N_G(T)$  (который равен полупрямому произведению тора  $T$  на циклическую группу порядка 2, порожденную матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ). Поэтому мы

сосредоточим наши исследования на промежуточных подгруппах, содержащих элементарную трансвекцию. В этом случае модуль трансвекций  $A$  и кольцо множителей  $R = R(H)$  промежуточной подгруппы  $H$  определяются следующим образом

$$A = A(H) = \left\{ \alpha \in k : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in H \right\},$$

заметим, что  $A \neq (0)$ , так как  $H$  содержит трансвекцию,

$$R = R(H) = \{ \lambda \in k : \lambda A \subseteq A \}.$$

На протяжении всего дальнейшего изложения результатов этой главы мы считаем, что  $2$  является обратимым элементом кольца  $R_0$ ,  $2 \in R_0^*$ . Согласно теореме 3.1.2 кольцо множителей  $R$  содержит подкольцо  $R_0 = R(\mu)$ , которое (в базисе) имеет вид

$$R_0 = \text{ring}_{x \in k} \left\langle \frac{\mu}{x^2 - \mu} \right\rangle.$$

**Лемма 3.2.1.** Для любых  $x, y \in k$  элементы

$$\frac{\mu x}{x^2 - \mu}, \quad \frac{\mu x y}{(x^2 - \mu)(y^2 - \mu)}$$

содержатся в кольце  $R_0$ .

Так как  $R \supseteq R_0$ , то эта лемма позволяет нам определить идеал  $Q$  кольца множителей  $R$ . А именно, пусть  $Q$  — идеал кольца  $R$ , порожденный всеми элементами  $\frac{\mu x}{x^2 - \mu} \in R_0 \subseteq R$ ,  $x \in k$ :

$$Q = \text{ideal}_{x \in k} \left( \frac{\mu x}{x^2 - \mu} \right).$$

Нетрудно видеть, что справедливы включения

$$\mu R \subseteq Q \subseteq R, \quad Q^2 \subseteq \mu R.$$

Пусть теперь  $A$  произвольная аддитивная подгруппа поля  $k$ ,  $A \leq k^+$ ,  $A \neq (0)$ ,  $R = R(A)$  — кольцо множителей

модуля  $A$ . Предположим, что  $R \supseteq R_0$  и  $\mu A^2 \subseteq R$ . Рассмотрим таблицу

$$\sigma = \begin{pmatrix} QA & \mu A \\ A & QA \end{pmatrix},$$

которая (согласно лемме 3.2.3) является сетью.

**Теорема 3.2.5.** Пусть  $A \leq k^+$ ,  $R$  — кольцо множителей модуля  $A$ . Если  $R \supseteq R_0$  и  $\mu A^2 \subseteq R$ , то тор  $T$  нормализует сетевую группу  $G(\sigma)$ , а потому  $T \cdot G(\sigma)$  — промежуточная подгруппа, содержащая тор  $T$ .

Пусть  $A$  — подгруппа аддитивной группы поля  $k$ ,  $A \neq (0)$ ,  $A \leq k^+$ ,  $R = R(A)$  — кольцо множителей модуля  $A$ . Пара  $(R, A)$  называется допустимой, если для некоторой промежуточной подгруппы  $H$ ,  $T \leq H \leq G$ ,  $A$  совпадает с модулем трансвекций группы  $H$ , а  $R$  с его кольцом множителей:  $A = A(H)$ ,  $R = R(H)$ . Далее, подкольцо  $R$  поля  $k$  допустимо, если для некоторой промежуточной подгруппы  $H$  мы имеем  $R = R(H)$ .

**Теорема 3.2.6.** Для того чтобы пара  $(R, A)$  была допустимой необходимо и достаточно, чтобы  $R_0 \subseteq R$  и  $\mu A^2 \subseteq R$ .

Доказательство этой теоремы непосредственно использует теорему 3.2.5.

Как было уже сказано выше со всякой промежуточной подгруппой  $H$ , содержащей трансвекцию, связан модуль трансвекций  $A = A(H)$  и его кольцо множителей  $R = R(H)$ . Тогда, согласно теореме 3.2.6,  $R_0 \subseteq R$  и  $\mu A^2 \subseteq R$ . Следовательно, с подгруппой  $H$  связана сеть

$$\sigma = \begin{pmatrix} QA & \mu A \\ A & QA \end{pmatrix}.$$

Через  $E(\sigma)$  обозначим подгруппу, порожденную всеми (общими) трансвекциями из  $G(\sigma)$ . В § 3 доказывается следующая теорема, которая носит структурный характер.

**Теорема 3.3.1.** Для всякой промежуточной подгруппы, содержащей трансвекцию,  $T \cdot E(\sigma)$  является группой, причем

$$T \cdot E(\sigma) \leq H \leq N_G(E(\sigma)).$$

Далее, мы вычисляем нормализатор  $N_G(E(\sigma))$ . Согласно предложению 3.3.2 нормализатор  $N_G(E(\sigma))$  совпадает с группой  $T \cdot G(\omega)$ , где

$$\omega = \begin{pmatrix} R & Q \\ \frac{1}{\mu}Q & R \end{pmatrix}.$$

Пусть  $(R, A)$  — допустимая пара. Положим

$$\text{Lat}(R, A) = \{H \in \text{Lat}(T, G) : A(H) = A, R(H) = R\}.$$

Согласно теореме 3.5.1  $\text{Lat}(R, A)$  является подрешеткой решетки всех промежуточных подгрупп  $\text{Lat}(T, G)$ , причем очевидно, что для различных допустимых пар  $(R, A)$  подмножества  $\text{Lat}(R, A)$  не пересекаются. Следовательно, решетка промежуточных подгрупп  $\text{Lat}(T, G)$  представляется в виде дизъюнктного объединения

$$\text{Lat}(T, G) = \{T\} \cup \{N_G(T)\} \bigcup_{(R,A)} \text{Lat}(R, A),$$

где объединение берется по всем допустимым парам  $(R, A)$ . Так как (теорема 3.2.6) мы имеем описание допустимых пар, то изучение решетки промежуточных подгрупп сводится к изучению подрешетки  $\text{Lat}(R, A)$  для произвольной допустимой пары  $(R, A)$ .

В § 6 доказывается, что подрешетка  $\text{Lat}(R, A)$  обладает наибольшей и наименьшей подгруппами и дается их строение. Рассмотрим функцию

$$f(x, \alpha) = \frac{(\mu\alpha + x)^2 - \mu}{x^2 - \mu} = \left(1 + \frac{\mu x}{x^2 - \mu}\alpha\right)^2 - \mu \left(\frac{\mu}{x^2 - \mu}\alpha\right)^2,$$

определенную для всех  $\alpha \in A$ ,  $x \in k$ . Имеем

$$f(x, \alpha) \in (1 + QA)^* \leq R^*$$

для всех  $\alpha \in A$ ,  $x \in k$ . В группе  $(1 + QA)^*$  рассмотрим подгруппу

$$\Omega_0(A) = \langle f(x, \alpha) : \alpha \in A, x \in k \rangle.$$

Тогда (теорема 3.6.1) наименьшая подгруппа  $F_0 = F_0(A)$  решетки  $\text{Lat}(R, A)$  совпадает с произведением

$$F_0 = F_0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega_0(A) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим подмножество  $S$  из  $R$ :

$$S = \{s \in R: Qs \subseteq \mu A\},$$

которое является наибольшим идеалом кольца  $R$  с условием  $QS \subseteq \mu A$ . Далее, мы имеем  $QA \subseteq S \subseteq A$ . Положим

$$\Omega^0(A) = \{\theta \in R^*: \theta^2 - 1 \in S\}.$$

Тогда (теорема 3.6.3) наибольшая подгруппа  $F^0 = F^0(A)$  подрешетки  $\text{Lat}(R, A)$  совпадает с произведением

$$F^0 = F^0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix}.$$

Далее (см. § 7), мы даем описание подгрупп подрешетки  $\text{Lat}(R, A)$ . Рассмотрим функцию

$$g(x, \theta) = 1 + \frac{\mu}{x^2 - \mu} \frac{\theta^2 - 1}{\theta^2}, \quad x \in k, \theta \in k^*.$$

Оказывается, что если  $\Delta = \Omega_0(A)$  или  $\Delta = \Omega^0(A)$ , то  $g(x, \delta) \in \Delta$  для всех  $x \in k, \delta \in \Delta$ . Рассмотрим множество

$$[R, A] = \{\Delta \leq R^*: \Omega_0(A) \leq \Delta \leq \Omega^0(A), \\ g(x, \delta) \in \Delta, \quad x \in k, \delta \in \Delta\}.$$

Мы показываем (предложение 3.7.2), что для всякого  $\Delta \in [R, A]$  множество

$$H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}$$

является группой, а потому  $H \in \text{Lat}(R, A)$ .

**Теорема 3.7.3. Отображение**

$$[R, A] \longrightarrow \text{Lat}(R, A),$$

которое всякому  $\Delta \in [R, A]$  ставит в соответствие подгруппу  $H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}$ , является биективным.

Заметим, что указанное отображение является структурным изоморфизмом.

Согласно § 5 подрешетка  $\text{Lat}(R, A)$  инвариантна относительно операций спуска и подъема:  $H \longrightarrow H_{(1)}$  и  $H \longrightarrow H^{(1)}$ , причем операция подъема обладает свойством монотонности (предложение 3.5.4). В заключительных §§ 8, 9 гл. III исследуются операции спуска и подъема на подрешетке  $\text{Lat}(R, A)$ .

В гл. IV мы обращаемся к случаю поля  $k = \mathbb{Q}$  рациональных чисел и исследуем решетку подгрупп полной линейной группы  $G = GL(2, \mathbb{Q})$ , содержащих нерасщепимый максимальный тор  $T = T(d)$ , связанный с квадратичным расширением  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  поля рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ . В этой главе находят приложения результаты исследований гл. III. Мы предполагаем, что  $d$  — целое, свободное от квадратов. Заметим, что в §§ 1–5 мы не используем предположение  $2 \in R_0^*$ .

Пусть  $P$  — множество всех простых чисел. Рассмотрим подмножество  $P(d)$  множества  $P$ , определенное следующим образом:

$$P(d) = \begin{cases} p \in P, & p \neq 2 \text{ и } \left(\frac{d}{p}\right) = 1, & d \not\equiv 1 \pmod{8}; \\ p \in P, & p = 2 \text{ или } \left(\frac{d}{p}\right) = 1, & d \equiv 1 \pmod{8}, \end{cases}$$

где  $\left(\frac{d}{p}\right)$  — символ Лежандра. Рассмотрим кольцо частных  $S^{-1}\mathbb{Z}$ , где  $S$  — мультипликативная система, порожденная множеством  $P(d)$ . Обозначим это кольцо частных через  $R(d)$ .

**Теорема 4.1.4. Кольцо  $R_0$  совпадает с кольцом  $R(d)$ .**

Если  $H$  — промежуточная подгруппа,  $T = T(d) \leq H \leq GL(2, \mathbb{Q}) = G$ ,  $A = A(H) \neq (0)$ ,  $R = R(H)$ , то (предложение 4.4.1)  $A \subseteq R$ , т. е.  $A$  — целый идеал кольца  $R$ .

**Теорема 4.4.3.** Пусть  $R$  — подкольцо (унитальное) поля  $\mathbb{Q}$ ,  $A$  — идеал кольца  $R$ . Для того чтобы пара  $(R, A)$  была допустимой, необходимо и достаточно, чтобы  $R \supseteq R_0$  и в случае нечетного  $d$   $A \subseteq 2R$ .

Доказательство этой теоремы основано на результатах § 3, в котором для произвольного подкольца  $R$  поля  $\mathbb{Q}$ , содержащего кольцо  $R_0$ , и произвольного идеала  $A$  кольца  $R$  строится промежуточная подгруппа  $H$ , для которой  $A = A(H)$  и  $R = R(H)$ .

В § 5 мы даем полное описание максимальных нетривиальных (не содержащих  $SL(2, \mathbb{Q})$ ) подгрупп группы  $G = GL(2, \mathbb{Q})$ , содержащих тор  $T = T(d)$ . Отметим, что частично результаты этого параграфа могут быть получены из результатов § 8 гл. II.

**Теорема 4.5.8.** Пусть  $p$  — простой делитель числа  $d$ . Тогда группа

$$T \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & p\mathbb{Z}_{(p)} \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)} \end{pmatrix}^*$$

является максимальной нетривиальной подгруппой группы  $GL(2, \mathbb{Q})$ . В случае  $d \equiv 3 \pmod{4}$  кроме указанных подгрупп группа

$$T \begin{pmatrix} 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)} & 2\mathbb{Z}_{(2)} \\ 2\mathbb{Z}_{(2)} & 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)} \end{pmatrix}^*$$

также является максимальной нетривиальной подгруппой группы  $GL(2, \mathbb{Q})$ . Перечисленными подгруппами исчерпываются все максимальные нетривиальные промежуточные подгруппы группы  $GL(2, \mathbb{Q})$ .

Отметим одно интересное следствие из этой теоремы.

**Следствие 4.5.9.** Для всякого простого числа  $p$  группа

$$T(p) \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & p\mathbb{Z}_{(p)} \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)} \end{pmatrix}^*$$

является максимальной нетривиальной (не содержащей  $SL(n, \mathbb{Q})$ ) подгруппой группы  $GL(2, \mathbb{Q})$ .

В заключительных §§ 6–8 гл. IV исследуются полные и самонормализуемые подгруппы решетки  $\text{Lat}(R, A)$ . На протяжении этих трех параграфов мы предполагаем, что  $2 \in R^*$  и  $\text{sr } R = 1$  ( $\text{sr}$  — стабильный ранг). Положим  $n = 1 + \nu_2(\phi(d))$ , где  $\phi$  — теоретико-числовая функция Эйлера,  $\nu_2(l)$  — степень вхождения числа 2 в целое  $l$ .

Положим  $\Delta^0(A) = \Omega_0(A)(1 + A)^{*2^n}$  и, далее,

$$V^0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta^0(A) \end{pmatrix}.$$

Далее, положим (см. гл. III, § 6)

$$V_0(A) = F_0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega_0(A) \end{pmatrix}.$$

**Теорема 4.6.1.** *Множество всех полных подгрупп из  $\text{Lat}(R, A)$  совпадает с интервалом*

$$\text{Lat}(V_0(A), V^0(A)) = \{H : V_0(A) \leq H \leq V^0(A)\}.$$

*Промежуточная подгруппа  $H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix} \in \text{Lat}(R, A)$  является полной тогда и только тогда, когда индекс  $(\Delta : \Omega_0(A))$  является нечетным числом. Наконец, для всякой подгруппы  $H \in \text{Lat}(R, A)$  при  $m > n$  группа  $H_{(m)}$  является полной.*

Положим

$$\Delta_0(A) = \{\theta \in \Omega^0(A) : \theta^{2^n} \in (1 + dA)^*\},$$

пусть, далее,

$$N_0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_0(A) \end{pmatrix}.$$

Далее, положим (см. гл. III, § 6)

$$N^0(A) = F^0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix}.$$

**Теорема 4.7.1.** *Множество всех самонормализуемых подгрупп из  $\text{Lat}(R, A)$  совпадает с интервалом*

$$\text{Lat}(N_0(A), N^0(A)) = \{H : N_0(A) \leq H \leq N^0(A)\}.$$

*Промежуточная подгруппа  $H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix} \in \text{Lat}(R, A)$  является самонормализуемой тогда и только тогда, когда индекс  $(\Omega^0(A) : \Delta)$  нечетен. Наконец, для всякой промежуточной подгруппы  $H \in \text{Lat}(R, A)$  при  $m > n$  группа  $H^{(m)}$  самонормализуема.*

Пусть  $H \in \text{Lat}(T, G)$ . Через  $\Gamma_H$  обозначим гирлянду решетки  $\text{Lat}(T, G)$ , содержащую подгруппу  $H$ . Как уже было отмечено выше (см. 3.4.7), нижняя гирлянда  $\Gamma_* = \Gamma_T$  состоит из тора  $T$  и его нормализатора  $N_G(T)$ . Далее, согласно 3.8.1 и 3.9.1 всякая нетривиальная гирлянда целиком содержится в  $\text{Lat}(R, A)$  для некоторой допустимой пары  $(R, A)$ . В § 8 дается описание множества всех гирлянд из  $\text{Lat}(R, A)$  и каждой гирлянды в отдельности. В нашем случае ( $2 \in R^*$ ,  $\text{sr } R = 1$ ) каждая гирлянда из  $\text{Lat}(R, A)$  имеет конечный тип (см. § 3 гл. I), а потому множество всех гирлянд из  $\text{Lat}(R, A)$  находится во взаимно однозначном соответствии со всеми полными промежуточными группами из  $\text{Lat}(R, A)$ . Согласно теореме 4.6.1 множество всех полных подгрупп из  $\text{Lat}(R, A)$  совпадает с интервалом  $\text{Lat}(V_0(A), V^0(A))$ . Пусть теперь  $V$  — полная подгруппа из  $\text{Lat}(R, A)$ ,  $\Gamma_V$  — гирлянда, содержащая подгруппу  $V$ . Из теорем 4.6.1 и 4.7.1 следует, что

$$\Gamma_V = \text{Lat}(V, N) = \{H : V \leq H \leq N\},$$

где  $N$  — самонормализуемая подгруппа, причем

$$N = V^{(n+1)} \quad \text{и} \quad N_{(n+1)} = V,$$

где  $n = 1 + \nu_2(\phi(d))$ .

В заключение отметим, что в силу 4.2.2 и сказанного выше мы имеем полное описание графа нормальности решетки  $\text{Lat}(T, G)$  в случае  $d < 0$  и  $d \equiv 1 \pmod{8}$ .

# ГЛАВА 1

## ОБЩИЕ ВОПРОСЫ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПОДГРУПП

В этой главе мы приводим понятия и конструкции необходимые в дальнейшем для изложения результатов монографии. Для лучшего восприятия и естественности изложения мы приводим необходимые сведения в соответствии с хронологией их возникновения. За основу изложения мы брали работы [3, 15, 17, 18, 30, 32].

### § 1. Сети и сетевые группы

В настоящем параграфе мы напоминаем определение сети и сетевой группы, которые впервые были изложены в работах З. И. Боревица (см., например, [15, 17]) на пути описания подгрупп линейных групп, содержащих группу диагональных матриц. Отметим, что аналогичные понятия (ковер идеалов и кованная подгруппа) рассматривались в книге М. И. Каргаполова и Ю. И. Мерзлякова [89] (см. также [124, 125]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть  $\Lambda$  — произвольное ассоциативное кольцо с единицей и  $n$  — натуральное число. Система

$$\sigma = (\sigma_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

аддитивных подгрупп кольца  $\Lambda$  называется *сетью в кольце  $\Lambda$  порядка  $n$* , если

$$\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$$

при всех значениях индексов  $i, j, r$ .

Ясно, что все  $\sigma_{ii}$  — подкольца кольца  $\Lambda$  (возможно без единицы). Каждая группа  $\sigma_{ij}$  может рассматриваться как левый модуль над  $\sigma_{ii}$  и правый модуль над  $\sigma_{jj}$ . Если каждое  $\sigma_{ii}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) является унитарным подкольцом в  $\Lambda$  (т. е. единица кольца  $\Lambda$  содержится в  $\sigma_{ii}$ ), то  $\sigma$  будем называть *D-сетью*.

Для произвольной сети  $\sigma$  в  $\Lambda$  порядка  $n$  через  $M(\sigma)$  обозначим совокупность всех тех матриц  $a = (a_{ij})$  порядка  $n$  с элементами из  $\Lambda$ , для которых  $a_{ij} \in \sigma_{ij}$  при всех  $i$  и  $j$ . Ясно, что  $M(\sigma)$  — подкольцо в кольце  $M(n, \Lambda)$  всех матриц порядка  $n$  над  $\Lambda$ . Единичная матрица  $e$  содержится в  $M(\sigma)$  тогда и только тогда, когда  $\sigma$  является *D-сетью*. Подкольцо  $M(\sigma)$  кольца  $M(n, \Lambda)$  называется *сетевым подкольцом*, соответствующим сети  $\sigma$ .

Совокупность  $e + M(\sigma)$ , состоящая из всех матриц  $e + a$ ,  $a \in M(\sigma)$ , является, очевидно, мультипликативной системой.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Максимальная подгруппа в полной линейной группе  $G = GL(n, \Lambda)$ , содержащаяся в мультипликативной системе  $e + M(\sigma)$ , называется *сетевой подгруппой* в  $G$ , соответствующей сети  $\sigma$ , и обозначается через  $G(\sigma)$ . Если  $\sigma$  — *D-сеть*, то  $G(\sigma)$  называется также *D-сетевой подгруппой*.

Сейчас мы сформулируем теорему о строении сетевой группы для коммутативного кольца  $\Lambda$  с 1, хотя этот результат справедлив для более широкого класса колец (см., например, [15]).

**Теорема 1.1.1** ([15, теорема 1]). *Если кольцо  $\Lambda$  коммутативно, то для произвольной сети  $\sigma = (\sigma_{ij})$  идеалов  $\sigma_{ij}$  кольца  $\Lambda$  имеем*

$$G(\sigma) = G \cap (e + M(\sigma)).$$

Симметрическая группа  $n$ -ой степени  $S_n$  действует на множестве всех сетей в кольце  $\Lambda$  порядка  $n$  в качестве группы операторов. Действительно, пусть  $\pi \in S_n$ ,  $\sigma = (\sigma_{ij})$  — сеть в кольце  $\Lambda$  порядка  $n$ . Положим

$$\tau_{ij} = \sigma_{\pi(i), \pi(j)} \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Ясно, что система  $\tau = (\tau_{ij})$  также является сетью. Сеть  $\tau$  мы обозначаем через  $\sigma^\pi$ . Для  $\pi, \pi' \in S_n$  справедлива, очевидно, формула  $(\sigma^\pi)^{\pi'} = \sigma^{\pi\pi'}$ . Две сети  $\sigma$  и  $\tau$  называются *подобными*, если  $\tau = \sigma^\pi$  при некотором  $\pi \in S_n$ .

Для перестановки  $\pi \in S_n$  через  $(\pi)$  обозначим матрицу-перестановку, т. е. матрицу, элементы которой определяются следующим образом

$$(\pi)_{ij} = \delta_{i, \pi(j)},$$

где  $\delta$  — символ Кронекера (т. е.  $\delta_{rs} = 0$  при  $r \neq s$ ,  $\delta_{rr} = 1$ ).  
Отображение

$$\pi \longrightarrow (\pi)$$

является изоморфным представлением симметрической группы  $n$ -ой степени  $S_n$  матрицами из  $GL(n, \Lambda)$  (по этой причине мы иногда не различаем перестановку  $\pi$  и матрицу  $(\pi)$ ). Имеет место следующая легко проверяемая формула

$$G(\sigma^\pi) = (\pi)^{-1}G(\sigma)(\pi).$$

Таким образом, для подобных сетей  $\sigma$  и  $\sigma^\pi$  соответствующие им сетевые группы  $G(\sigma)$  и  $G(\sigma^\pi)$  сопряжены в полной линейной группе  $GL(n, \Lambda)$ . Более подробную информацию о сетях, сетевых группах и их нормализаторах можно извлечь из работ [15, 20].

## § 2. Всеерные подгруппы

Пусть  $G$  — группа и  $T$  — некоторая ее подгруппа,  $T \leq G$ . Подгруппу  $H$  мы называем *промежуточной подгруппой* в  $G$  относительно  $T$ , если

$$T \leq H \leq G.$$

Через  $\text{Lat}(T, G)$  мы обозначаем решетку всех промежуточных подгрупп:

$$\text{Lat}(T, G) = \{H: T \leq H \leq G\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система

$$\mathfrak{M} = \{G_\alpha, N_\alpha\}_{\alpha \in I},$$

где  $\alpha$  пробегает некоторое множество индексов  $I$ , состоящая из промежуточных подгрупп  $G_\alpha$  и их нормализаторов  $N_\alpha = N_G(G_\alpha)$ , называется *веером* подгруппы  $T$ , если для каждой промежуточной подгруппы  $H$ ,  $T \leq H \leq G$ , существует и притом единственный индекс  $\alpha \in I$  такой, что  $G_\alpha \leq H \leq N_\alpha$ . Подгруппы  $G_\alpha$  называются *базисными подгруппами веера*  $\mathfrak{M}$ , а фактор-группы  $N_\alpha/G_\alpha$  — его *секциями*. Если для  $T$  существует веер, то  $T$  называется *веерной подгруппой* группы  $G$ . Подрешетка  $\text{Lat}(G_\alpha, N_\alpha)$  называется *интервалом* веера  $\mathfrak{M}$ .

Ясно, что веер  $\mathfrak{M}$  вполне определен заданием своих базисных подгрупп  $G_\alpha$ , поскольку для каждой базисной подгруппы  $G_\alpha$  ее нормализатор  $N_\alpha$  в группе  $G$  определен однозначно.

Среди базисных подгрупп необходимо присутствует и исходная подгруппа  $T$ . Если  $N$  — ее нормализатор в  $G$ , то фактор-группа  $N/T$  является одной из секций веера. Она называется *главной секцией* веера  $\mathfrak{M}$ .

Всякая нормальная подгруппа  $T \trianglelefteq G$  веерна. В этом случае веер состоит из одной базисной подгруппы  $T$  и имеет, следовательно, единственную секцию  $G/T$ .

Диаметрально противоположный пример веерных подгрупп дает нам ситуация, когда все промежуточные подгруппы самонормализуемы, т. е. когда всякая промежуточная подгруппа  $H$  совпадает со своим нормализатором:  $H = N_G(H)$ . Здесь веером является совокупность всех промежуточных подгрупп и все его секции — единичные группы. Приведем пример Титса веерной подгруппы, который реализует описанную сейчас ситуацию. Пусть  $G = GL(n, K)$  — полная линейная группа над полем  $K$ ,  $T = T(n, K)$  — подгруппа верхних треугольных матриц. В этой ситуации все промежуточные подгруппы (а их  $2^{n-1}$  штук) самонормализуемы (более того подгруппа  $T(n, K)$  абнормальна в  $G$ ) и имеют клеточно-треугольный вид.

Если для  $T$  имеется веер

$$\mathfrak{M} = \{G_\alpha, N_\alpha\}_{\alpha \in I},$$

то согласно определению решетки  $\text{Lat}(T, G)$  представляется в виде дизъюнктного объединения интервалов

$$\text{Lat}(T, G) = \bigcup_{\alpha \in I} \text{Lat}(G_\alpha, N_\alpha).$$

**Пример веерной подгруппы.** Пусть  $G = GL(n, K)$  — полная линейная группа над полем  $K$  с числом элементов не менее четырех,  $\text{card } K \geq 4$ ;  $D = D(n, K)$  — подгруппа диагональных матриц в  $G$ ,  $n \geq 2$ . Тогда  $D$  веерная в группе  $G$  [15, 26, 91]. Если  $\text{card } K \geq 7$ , то (см. [15]) роль веерных подгрупп играют сетевые группы  $G(\sigma)$ , определенные над всеми  $D$ -сетями  $\sigma$  идеалов поля  $K$ . Если же  $\text{card } K = 4, 5$ , то роль веерных подгрупп играют просетевые подгруппы [26, 91].

**Пример невеерной подгруппы.** Пусть  $G = GL(n, \mathbb{F}_3)$  — полная линейная группа над полем  $\mathbb{F}_3$  из трех элементов,  $D = D(n, \mathbb{F}_3)$  — подгруппа диагональных матриц в  $G$ ,  $n \geq 2$ . Тогда  $D$  не является веерной в группе  $G$  [93].

Каждая веерная подгруппа обладает по крайней мере одним веером, однако веерная подгруппа может иметь бесконечное число вееров [3, пример § 1]. Поэтому в случае, когда веер не единственный, подходить к проблеме описания промежуточных подгрупп вряд ли целесообразно. Приобретает поэтому значение задача выделения веерных подгрупп с единственным веером. Так, например, [3, предложение § 1], если  $T$  — веерная подгруппа группы  $G$  и для решетки  $\text{Lat}(T, G)$  всех промежуточных подгрупп выполнено условие минимальности, то для  $T$  веер существует только один. В частности, в конечной группе для любой ее веерной подгруппы существует только один веер.

Приступая к изучению решетки  $\text{Lat}(T, G)$ , естественно начать с выявления таких промежуточных подгрупп, которые могли бы претендовать на роль базисных подгрупп.

Для  $x \in G$  положим

$$T^x = x^{-1}Tx.$$

Далее, для произвольного подмножества  $X$  группы  $G$  под  $T^X$  понимается подгруппа

$$T^X = \langle T^x : x \in X \rangle.$$

Если  $H$  — промежуточная подгруппа,  $T \leq H \leq G$ , то  $T^H$  — это наименьший нормальный делитель в  $H$ , содержащий группу  $T$  (нормальное замыкание подгруппы  $T$  в  $H$ ).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $G$  — группа,  $T$  — ее подгруппа. Промежуточная подгруппа  $F$ ,  $T \leq F \leq G$ , называется *полной* (относительно  $T$  или  $T$ -полной), если  $T^F = F$ , т. е. если нормальное замыкание  $T$  в  $F$  совпадает с  $F$ .

Множество полных промежуточных подгрупп не пусто. В нем, например, содержится группа  $T$ . Отметим некоторые факты, доказанные в [3, § 2]. Так, например, в случае если подгруппа  $T$  веерна в группе  $G$ , то всякая полная промежуточная подгруппа  $F$  является одной из базисных подгрупп произвольного веера для  $T$  в  $G$ . Далее, если все промежуточные подгруппы самоноормализуемы, то все они являются полными.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Подгруппа  $T$  группы  $G$  называется *полиномальной*, если она веерна и все полные промежуточные подгруппы образуют систему базисных подгрупп ее веера.

Очевидно, что  $T$  полиномальна в  $G$  тогда и только тогда, когда для всякой промежуточной подгруппы  $H$  подгруппа  $T^H$  является полной. Далее, для полиномальной подгруппы веер существует и только один. Так, например, подгруппа диагональных матриц  $D(n, K)$  является полиномальной (более того она является пронормальной) в полной линейной группе  $GL(n, K)$  при  $\text{card } K \geq 4$  [15, 26, 91].

### § 3. Граф нормальности решетки промежуточных подгрупп

Пусть  $G$  — группа,  $T$  — ее подгруппа. Нашей задачей является изучение решетки

$$\text{Lat}(T, G) = \{H : T \leq H \leq G\}$$

всех промежуточных подгрупп, которые содержат  $T$ . В общем случае эта решетка необозрима, поэтому хотелось бы иметь некоторое ее разбиение на попарно непересекающиеся части, которые допускали бы удовлетворительное описание. Такое естественное расчленение решетки  $\text{Lat}(T, G)$  предложено З. И. Боровичем и приводится в [30]. А именно, на  $\text{Lat}(T, G)$  введем структуру графа, приняв в качестве вершин все промежуточные подгруппы. Вершину  $H_1$  направленным ребром соединяем с вершиной  $H_2$ , если  $H_1 \leq H_2$ . Построенный таким образом граф называется *графом нормальности* решетки  $\text{Lat}(T, G)$  промежуточных подгрупп.

Граф называется связным, если любые две его вершины можно соединить путем, состоящим из конечной цепочки ребер, примыкающих друг к другу, и несвязанным в противном случае. Каждый несвязанный граф распадается в дизъюнктное объединение всех своих связных компонент. Связная компонента графа нормальности решетки  $\text{Lat}(T, G)$  называется *гирляндой* этой решетки.

Таким образом, решетка  $\text{Lat}(T, G)$  представляется в виде дизъюнктного объединения своих гирлянд. Следовательно, задача описания решетки  $\text{Lat}(T, G)$  сводится к описанию множества всех гирлянд, а затем к описанию каждой отдельно взятой гирлянды.

Ясно, что подгруппа  $T$  и сама группа  $G$  содержатся в некоторых гирляндах. Гирлянда  $\Gamma_*$ , содержащая подгруппу  $T$ , называется *нижней гирляндой* решетки  $\text{Lat}(T, G)$ , а гирлянда  $\Gamma^*$ , содержащая группу  $G$ , называется *верхней гирляндой* решетки.

ки  $\text{Lat}(T, G)$ . Можно показать (см. [9, гл. I]), что всякая гирлянда  $\Gamma$  замкнута относительно операции взятия пересечения, т. е. пересечение любых двух подгрупп из гирлянды  $\Gamma$  снова принадлежит  $\Gamma$ .

Для произвольной промежуточной подгруппы  $H \in \text{Lat}(T, G)$  положим

$$H^{(1)} = N_G(H), \quad H_{(1)} = T^H.$$

Ясно, что  $H^{(1)}$  и  $H_{(1)}$  также содержатся в  $\text{Lat}(T, G)$ . Тем самым на решетке  $\text{Lat}(T, G)$  определены две унарные операции

$$H \longrightarrow H^{(1)} \quad \text{и} \quad H \longrightarrow H_{(1)}.$$

Первая из них называется *подъемом*, а вторая — *спуском*. Очевидно, что всякая гирлянда  $\Gamma$  решетки  $\text{Lat}(T, G)$  инвариантна относительно этих операций: если  $H \in \Gamma$ , то  $H^{(1)} \in \Gamma$  и  $H_{(1)} \in \Gamma$ .

Операции подъема и спуска допускают итерирование:

$$H^{(n)} = (H^{(n-1)})^{(1)}, \quad H_{(n)} = (H_{(n-1)})_{(1)},$$

и, таким образом, по заданной промежуточной подгруппе  $H \in \text{Lat}(T, G)$  мы получаем возрастающую и убывающую последовательности:

$$H = H^{(0)} \leq H^{(1)} \leq H^{(2)} \leq \dots \leq H^{(n)} \leq \dots \quad (1)$$

$$H = H_{(0)} \geq H_{(1)} \geq H_{(2)} \geq \dots \geq H_{(n)} \geq \dots \quad (2)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Гирлянда  $\Gamma$  решетки  $\text{Lat}(T, G)$  называется *ограниченной сверху*, если для любой подгруппы  $H \in \Gamma$  цепочка подъемов (1) стабилизируется на конечном шаге, т. е. при некотором  $n \geq 0$   $H^{(n)} = H^{(n+1)}$ . В противном случае гирлянда  $\Gamma$  называется *неограниченной сверху*. Аналогично, гирлянда  $\Gamma$  решетки  $\text{Lat}(T, G)$  называется *ограниченной снизу*, если для любой подгруппы  $H \in \Gamma$  цепочка спусков (2) стабилизируется

на конечном шаге. В противном случае гирлянда  $\Gamma$  называется *неограниченной снизу*. Гирлянда  $\Gamma$  называется гирляндой *конечного типа*, если она ограничена снизу и сверху.

Известно, что для всякой алгебраической подгруппы  $H$  в полной линейной группе  $G = GL(n, K)$  над бесконечным полем  $K$  цепочка подъемов (1) стабилизируется на конечном шаге. В работе [33] построен пример бесконечной цепи подгрупп

$$\{G_m: -\infty < m < \infty\}, \quad G_{m+1} < G_m,$$

группы  $G = GL(n, K)$ ,  $\text{char } K = 0$ , такой что

$$N_G(G_{m+1}) = G_m; \quad (G_m: G_{m+1}) = 2.$$

Далее, в работе [30] приводится пример подгруппы  $H$  в группе  $GL(2, \mathbb{Q})$ , содержащей нерасщепимый максимальный тор (который берется в качестве подгруппы  $T$ ), для которой цепочка спусков (2) строго убывает.

Ясно, что если цепочка (1) стабилизируется на конечном шаге, то она стабилизируется на самонормализуемой подгруппе. Аналогично, при стабилизации цепочки (2) это происходит на полной ( $T$ -полной) подгруппе.

Гирлянды, ограниченные снизу или сверху, обладают следующими свойствами (доказательство которых мы опускаем).

**Теорема 1.3.1.** *Каждая гирлянда  $\Gamma$  решетки  $\text{Lat}(T, G)$  содержит не более одной полной промежуточной подгруппы. Гирлянда  $\Gamma$  ограничена снизу тогда и только тогда, когда она содержит полную подгруппу. Таким образом, все ограниченные снизу гирлянды находятся в биективном соответствии со всеми полными промежуточными подгруппами. Если гирлянда  $\Gamma$  неограничена снизу, то для любой подгруппы из  $\Gamma$  цепочка спусков (2) строго убывает до бесконечности.*

**Теорема 1.3.2.** *Предположим, что на решетке  $\text{Lat}(T, G)$  выполнено условие монотонности, т. е. для любых двух подгрупп  $A, B \in \text{Lat}(T, G)$  из  $A \leq B$  следует  $A^{(1)} \leq B^{(1)}$ . Тогда*

каждая гирлянда  $\Gamma$  решетки  $\text{Lat}(T, G)$  содержит не более одной самонормализуемой промежуточной подгруппы. Гирлянда  $\Gamma$  ограничена сверху тогда и только тогда, когда она содержит самонормализуемую подгруппу. Таким образом, все ограниченные сверху гирлянды находятся во взаимно однозначном соответствии со всеми самонормализуемыми промежуточными подгруппами. Если гирлянда  $\Gamma$  неограничена сверху, то для любой подгруппы из  $\Gamma$  цепочка подъемов (1) строго возрастает до бесконечности.

Отметим в заключение, что если подгруппа  $T$  полинормальна в группе  $G$ , то как следует из определения (см. § 2)

$$\text{Lat}(T, G) = \bigcup_F \text{Lat}(F, N_G(F)),$$

где объединение берется по всем полным промежуточным подгруппам  $F$ . В этом случае каждая гирлянда  $\Gamma$  имеет вид

$$\Gamma = \text{Lat}(F, N_G(F))$$

для некоторой полной промежуточной подгруппы  $F$ . В частности, все гирлянды в случае полинормальной подгруппы  $T$  группы  $G$  имеют конечный тип.

## ГЛАВА 2

### О ПОДГРУППАХ ГРУППЫ $GL(n, k)$ , СОДЕРЖАЩИХ НЕРАСЩЕПИМЫЙ МАКСИМАЛЬНЫЙ ТОР

В настоящей главе излагаются результаты, связанные с расположением подгрупп полной линейной группы  $G = GL(n, k)$ , содержащих нерасщепимый максимальный тор  $T = T(K)$ , связанный с расширением  $K$  поля  $k$  степени  $n$ . В § 1 дается общая постановка задачи. В § 2 рассматривается факторизация промежуточных подгрупп. В качестве частного случая результатов § 3 мы вычисляем нормализатор полной линейной группы, связанной с промежуточным подполем  $L$ ,  $k \subset L \subset K$ . В § 5 дается строение гирлянды, содержащей полную линейную группу, связанную с промежуточным подполем. В частности, мы вычисляем верхнюю и нижнюю гирлянды решетки  $\text{Lat}(T, G)$  всех промежуточных подгрупп. В § 6 показано, что если  $K = k(\sqrt[n]{d})$  — куммерово расширение (или радикальное расширение нечетной степени), то всякая промежуточная подгруппа, содержащая (общую) трансвекцию, обязательно содержит элементарную трансвекцию для каждой позиции  $(i, j)$ . В § 7 исследуются промежуточные подгруппы, содержащие элементарную трансвекцию. В качестве приложения результатов § 7 в § 8 получены максимальные промежуточные подгруппы в полной линейной группе  $GL(n, \mathbb{Q})$  степени  $n$  над полем рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ . В частности, для всякого простого числа  $p$  строится максимальная подгруппа в  $GL(n, \mathbb{Q})$ , не содержащая  $SL(n, \mathbb{Q})$ .

### § 1. Общая постановка задачи

Пусть  $k$  — поле,  $K/k$  — конечное расширение степени  $n$ . Имеет место регулярное вложение мультипликативной группы  $K^*$  поля  $K$  в группу  $GL_k(K) = \text{Aut}_k(K)$  всех  $k$ -линейных обратимых отображений поля  $K$

$$K^* \longrightarrow \text{Aut}_k(K), \quad \alpha \mapsto \hat{\alpha},$$

где  $\hat{\alpha}(x) = \alpha x$ ,  $x \in K$ . Образ  $K^*$  при этом вложении обозначается через  $T = T(K)$  и называется нерасщепимым максимальным тором, соответствующим расширению  $K/k$ . С точки зрения теории алгебраических групп эта группа является примером минизотропного тора. Ясно, что  $T(K)$  — максимальная абелева подгруппа в группе  $GL_k(K)$ . Очевидно, что если зафиксировать базис поля  $K$  над  $k$ , то группе  $GL_k(K) = \text{Aut}_k(K)$  соответствует полная линейная группа  $G = GL(n, k)$ , а тору  $T(K)$  некоторая матричная группа, которую мы также обозначаем через  $T$ . Таким образом, мы получили задачу изучения решетки подгрупп  $\text{Lat}(T, GL_k(K))$ , или в матричной форме  $\text{Lat}(T, G)$ . Эта задача в целом представляется чрезвычайно сложной. В данной главе излагаются результаты, посвященные этому общему случаю.

В заключение параграфа представим терминологию, связанную с торами, предложенную З. И. Боровичем, которая отличается от общепринятой в теории алгебраических групп. Тором в полной линейной группе  $GL(n, k)$  называется ее алгебраическая подгруппа, изоморфная группе диагональных матриц  $D(m, L)$  для некоторого конечного расширения  $L$  поля  $k$ . Тор называется расщепимым над  $k$ , если он изоморфен некоторой подгруппе клеточно-диагональных матриц в  $GL(n, k)$  (с числом клеток  $\geq 2$ ). В противном случае тор называется нерасщепимым. Тор называется вполне расщепимым, если он изоморфен группе диагональных матриц  $D(m, k)$  (в общепринятой терминологии — это расщепимый тор, а все остальные то-

ры принято называть нерасщепимыми). Тор называется максимальным, если он не является собственной подгруппой никакого другого тора в  $GL(n, k)$ . В смысле этой терминологии тор  $T = T(K)$ , определенный в начале параграфа, как легко видеть, является нерасщепимым максимальным тором.

## § 2. Факторизация

В этом параграфе дается факторизация промежуточной подгруппы.

Пусть  $w_1, \dots, w_n$  — базис поля  $K$  над  $k$ ,  $\alpha \in K^*$ . Рассмотрим отображение  $\hat{\alpha} \in GL_k(K) : \hat{\alpha}(x) = \alpha x, x \in K$ . В выбранном базисе матрицу, которая соответствует отображению  $\hat{\alpha}$ , мы обозначим через  $[\alpha]$ . Таким образом, в выбранном базисе тор  $T$  — это группа матриц

$$T = \{[\alpha] \in GL(n, k) : \alpha \in K^*\},$$

которая является образом мультипликативной группы  $K^*$  поля  $K$  при регулярном вложении

$$K^* \longrightarrow GL(n, k), \quad \alpha \mapsto [\alpha].$$

В группе  $G = GL(n, k)$  содержится в качестве подгруппы аффинная группа  $G_0 = Aff(n-1, k)$

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ k & & & \\ \vdots & GL(n-1, k) & & \\ k & & & \end{pmatrix}.$$

**Теорема 2.2.1.** Пусть  $K/k$  — произвольное расширение степени  $n$  поля  $k$ . Группа  $G = GL(n, k)$  допускает факторизацию  $G = T \cdot G_0$ , причем  $T \cap G_0 = \langle e \rangle$ , где  $e$  — единичная матрица.

Сделаем вначале следующее замечание. Пусть  $x_0 = w_1$ . Рассмотрим подгруппу  $G'_0$  группы  $GL_k(K)$

$$G'_0 = \{g \in GL_k(K) : g(x_0) = x_0\}.$$

Тогда  $GL_k(k) = T \cdot G'_0$ , где  $T = \{\hat{\alpha} : \alpha \in K^*\}$ . Действительно, пусть  $g \in GL_k(K)$ , тогда  $\hat{\alpha}g \in G'_0$ , где  $\alpha = x_0(g(x_0))^{-1}$ . Очевидно, что  $G'_0 \cap T = 1$ . В выбранном базисе группа  $G'_0$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & k & \dots & k \\ 0 & & & \\ \vdots & GL(n-1, k) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$G = GL(n, k) = T \begin{pmatrix} 1 & k & \dots & k \\ 0 & & & \\ \vdots & GL(n-1, k) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

◁ Так как через  $[w_i]$ ,  $1 \leq i \leq n$ , мы обозначаем матрицу, которая соответствует базисному элементу  $w_i$ , то всякому элементу  $\alpha \in K$ ,  $\alpha = x_1w_1 + \dots + x_nw_n$ ,  $x_i \in k$  соответствует матрица  $[\alpha] = x_1[w_1] + \dots + x_n[w_n]$ . Обозначим первую строку матрицы  $[w_i]$  через  $[w_i]_1$ . Тогда строчки  $[w_1]_1, \dots, [w_n]_1$  — линейно независимы. Действительно, пусть для некоторых  $\xi_1, \dots, \xi_n \in k$ ,  $\xi_1[w_1]_1 + \dots + \xi_n[w_n]_1 = 0$  (нулевая строчка). Тогда для элемента  $t = \xi_1w_1 + \dots + \xi_nw_n$  первая строчка матрицы  $[t]$  нулевая, следовательно,  $t = 0$  (иначе  $[t] \in GL(n, k)$ ), откуда  $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$ . Пусть  $g = (g_{ij}) \in GL(n, k)$ . Наша задача найти элемент  $\alpha \in K$ , для которого  $h = [\alpha]g \in G_0$ .

Пусть  $\alpha = x_1w_1 + \dots + x_nw_n$ ,  $x_i \in k$ . Подберем соответствующие элементы  $x_i \in k$  так, чтобы для элементов матрицы

$h = (h_{ij})$  мы имели:  $h_{11} = 1$ ,  $h_{1j} = 0$ ,  $2 \leq j \leq n$ . Имеем

$$h_{1j} = ([\alpha]g)_{1j} = \left( \sum_{i=1}^n x_i [w_i]g \right)_{1j} = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{r=1}^n [w_i]_{1r} g_{rj}.$$

Это система линейных уравнений относительно  $x_1, \dots, x_n$ , матрица которой есть произведение двух матриц  $([w_i]_{1j})$  и  $(g_{ij})$ . Согласно сказанному выше эти матрицы неособенны, а потому наша система имеет единственное решение для любых  $h_{1j}$ . Таким образом,  $G = T \cdot G_0$ , а в силу указанной единственности представления всякого элемента из  $G$  в виде произведения элементов из  $T$  и  $G_0$  следует, что  $T \cap G_0 = \langle e \rangle$ .  $\triangleright$

**Следствие 2.2.2.** Для каждой промежуточной группы  $H$ ,  $T \leq H \leq G = GL(n, k)$  имеет место факторизация  $H = T \cdot H_0$ , где  $H_0 = H \cap G_0$  и  $H_0 \cap T = \langle e \rangle$ .

В работе мы будем пользоваться факторизацией для случая квадратичного расширения  $K = k(\sqrt{\mu})$  поля  $k$ . В этом случае группа  $G_0$  имеет вид

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & k^* \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} : \beta \in k, \gamma \in k^* \right\}.$$

### § 3. Нормализатор полной линейной группы, связанной с промежуточным подполем

В данном параграфе вычисляется нормализатор полной линейной группы, связанный с промежуточным подполем. Отметим, что мы доказываем значительно более общий результат (2.3.1), который имеет самостоятельный интерес.

Пусть  $K/k$  — расширение степени  $n$  поля  $k$ ,  $L$  — промежуточное подполе,  $k \subseteq L \subseteq K$ . В качестве подгрупп группы  $G = GL_k(K)$  (см. §1), содержащих тор  $T = T(K)$ , выделим полную линейную группу  $GL_L(K)$ , связанную с промежуточным подполем  $L$ ,  $k \subseteq L \subseteq K$ . А именно,  $GL_L(K)$  — это

группа всех  $L$  — линейных обратимых отображений векторного пространства  $K$  над полем  $L$ , т. е. автоморфизмов пространства  $K_L$ . Ясно, что

$$T(K) \leq GL_L(K) \leq GL_k(K),$$

причем при  $L = k$ ,  $GL_L(K) = GL_k(K)$ , а при  $L = K$ ,  $GL_L(K) = GL_K(K) = T(K)$ . В этом параграфе мы вычисляем нормализатор подгруппы  $GL_L(K)$  в группе  $G = GL_k(K)$ . В частности, мы вычисляем нормализатор тора  $T = T(K)$  в группе  $G$ . Точнее, мы показываем, что нормализатор подгруппы  $GL_L(K)$  в группе  $G$  совпадает с полупрямым произведением нормального делителя  $GL_L(K)$  и подгруппы изоморфной группе  $\text{Aut}(L/k)$  всех автоморфизмов поля  $L$ , тождественных на  $k$ . В частности, нормализатор  $N_G(T)$  тора  $T$  в группе  $G$  совпадает с полупрямым произведением группы  $T$  и группы  $\text{Aut}(K/k)$ :  $N_G(T) = \text{Aut}(K/k) \ltimes T$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В этом параграфе доказывается значительно более общий результат, который имеет самостоятельный интерес, однако мы выделили тот случай, который непосредственно касается нашей работы.

Перейдем теперь к изложению результатов этого параграфа.

Пусть  $\Lambda$  — произвольное ассоциативное кольцо с единицей 1 и  $R$  его унитарное подкольцо, содержащееся в центре кольца  $\Lambda$ . Пусть, далее,  $M$  — левый свободный  $\Lambda$ -модуль, обладающий конечным базисом  $e_1, \dots, e_n$ ;  $M = \Lambda e_1 \oplus \dots \oplus \Lambda e_n$ . Ясно, что  $M$  является также и левым  $R$ -модулем, следовательно, кольцо эндоморфизмов  $\text{End}({}_\Lambda M)$  левого  $\Lambda$ -модуля  $M$  является подкольцом кольца эндоморфизмов  $\text{End}({}_R M)$  левого  $R$ -модуля  $M$ . Группы обратимых элементов в этих кольцах эндоморфизмов обозначим соответственно через  $\text{Aut}({}_\Lambda M)$  и  $\text{Aut}({}_R M)$ . Ясно, что  $\text{Aut}({}_\Lambda M) \leq \text{Aut}({}_R M)$ . Нашей целью является доказательство следующей теоремы.

**Теорема 2.3.1.** Пусть  $\Lambda$  — ассоциативное кольцо с единицей 1 и  $R$  его унитарное подкольцо, содержащееся в центре

кольца  $\Lambda$ . Предположим, что  $\Lambda$  аддитивно порождается своими обратимыми элементами. Пусть, далее,  $M$  — левый свободный  $\Lambda$ -модуль, обладающий конечным базисом. Тогда нормализатор подгруппы  $\text{Aut}(\Lambda M)$  в группе  $\text{Aut}({}_R M)$  совпадает с полупрямым произведением нормального делителя  $\text{Aut}(\Lambda M)$  и подгруппы  $\Omega$  изоморфной группе  $\text{Aut}(\Lambda/R)$  всех кольцевых автоморфизмов кольца  $\Lambda$ , тождественных на  $R$ :

$$N_{\text{Aut}({}_R M)}(\text{Aut}(\Lambda M)) = \Omega \ltimes \text{Aut}(\Lambda M).$$

Отметим, что если  $M = \Lambda$ , то мы получаем результат работы [1]. Однако более интересным является случай применения теоремы к ситуации расширения колец  $R \subset \Lambda \subset S$ ,  $M = S$ .

Для всякого элемента  $\lambda \in \Lambda$  рассмотрим отображение гомотетии  $\hat{\lambda}: M \rightarrow M$ ,  $\hat{\lambda}(x) = \lambda x$ ,  $x \in M$ . Ясно, что  $\hat{\lambda}$  является гомоморфизмом аддитивной группы  $M$ , однако  $\hat{\lambda}$  вообще говоря не является  $\Lambda$ -линейным. Но так как подкольцо  $R$  содержится в центре кольца  $\Lambda$ , то  $\hat{\lambda} \in \text{End}({}_R M)$ . Очевидно, что отображение

$$\Lambda \rightarrow \text{End}({}_R M), \quad \lambda \mapsto \hat{\lambda}$$

является гомоморфизмом колец; образ этого отображения мы обозначаем через  $\hat{\Lambda}$ :  $\hat{\Lambda} = \{\hat{\lambda}: \lambda \in \Lambda\}$ . Всякий эндоморфизм  $f \in \text{End}({}_R M)$  является  $\Lambda$ -линейным, т. е. принадлежит  $\text{End}({}_\Lambda M)$ , если  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  для любых  $\lambda \in \Lambda$ ,  $x \in M$ ; последнее эквивалентно тому, что  $f\hat{\lambda} = \hat{\lambda}f$  для всякого  $\hat{\lambda} \in \hat{\Lambda}$ , другими словами  $f$  принадлежит централизатору  $C(\hat{\Lambda})$  подкольца  $\hat{\Lambda}$  в кольце  $\text{End}({}_R M)$ , более того  $C(\hat{\Lambda}) = \text{End}({}_\Lambda M)$ .

**Лемма 2.3.2.** Аддитивная группа  $\langle \text{Aut}({}_\Lambda M) \rangle_{ad}$  порожденная группой  $\text{Aut}({}_\Lambda M)$  совпадает с  $\text{End}({}_\Lambda M)$ .

◁ При  $n > 1$  ( $n$  — число элементов свободного  $\Lambda$ -модуля  $M$ ), см., например, [136]. Если же  $n = 1$ , то справедливость леммы вытекает из того, что  $\langle \Lambda^* \rangle_{ad} = \Lambda$ . ▷

**Лемма 2.3.3.** Централизатор  $C(\text{End}({}_\Lambda M))$  подкольца  $\text{End}({}_\Lambda M)$  в кольце  $\text{End}({}_R M)$  совпадает с подкольцом  $\hat{\Lambda}$ . Другими словами эндоморфизм  $\psi \in \text{End}({}_R M)$  коммутирует со всеми

элементами подкольца  $\text{End}({}_\Lambda M)$  тогда и только тогда, когда  $\psi \in \widehat{\Lambda}$ .

◁ Включение  $\widehat{\Lambda} \leq C(\text{End}({}_\Lambda M))$  очевидно. Докажем обратное включение индукцией по числу  $n$  элементов базиса свободного  $\Lambda$ -модуля  $M$ . База индукции  $n = 1$ ,  $M = \Lambda e_1$ . Пусть  $\psi \in \text{End}({}_R M)$ , причем  $\psi\varphi = \varphi\psi$  для любого  $\varphi \in \text{End}({}_\Lambda M)$ . Пусть  $\psi(e_1) = \lambda_0 e_1$ . Для всякого  $\lambda \in \Lambda$  рассмотрим  $\Lambda$ -линейное отображение  $\varphi_\lambda$  так, что  $\varphi_\lambda(e_1) = \lambda e_1$ ,  $\varphi_\lambda(\xi e_1) = \xi\varphi(e_1) = \xi\lambda e_1$ ,  $\xi \in \Lambda$ . Тогда  $\varphi_\lambda\psi = \psi\varphi_\lambda$ . В частности,  $\psi\varphi_\lambda(e_1) = \psi(\lambda e_1)$ ,  $\varphi_\lambda\psi(e_1) = \varphi_\lambda(\lambda_0 e_1) = \lambda_0\varphi_\lambda(e_1) = \lambda_0\lambda e_1$ , следовательно,  $\psi(\lambda e_1) = \lambda_0\lambda e_1$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , откуда  $\psi = \widehat{\lambda}_0$ . Предположим теперь, что наше утверждение справедливо для всякого свободного модуля с числом элементов базиса  $\leq n - 1$ . Пусть  $M = \Lambda e_1 \oplus \dots \oplus \Lambda e_n$ . Рассмотрим  $\varphi_1 \in \text{End}({}_\Lambda M)$ , причем  $\varphi_1(e_1) = e_1$ ,  $\varphi_1(e_i) = 0$ ,  $i \geq 2$ . Так как для  $\psi \in \text{End}({}_R M)$   $\psi\varphi_1 = \varphi_1\psi$ , то  $\varphi_1(\psi(e_i)) = 0$ ,  $i \geq 2$ . Следовательно, для подмодуля  $M' = \Lambda e_2 \oplus \dots \oplus \Lambda e_n$  модуля  $M$  мы имеем  $\psi(M') \subseteq M'$ , следовательно  $\psi' = \psi|_{M'} \in \text{End}({}_R M')$ . Пусть  $\omega' \in \text{End}({}_\Lambda M')$  — произвольный эндоморфизм. Продолжим  $\omega'$  до эндоморфизма  $\omega \in \text{End}({}_\Lambda M)$ , положив  $\omega(e_1) = 0$ . Тогда  $\omega\psi = \psi\omega$ , откуда  $\omega'\psi' = \psi'\omega'$ . Поэтому по индукционному предположению  $\psi' = \psi|_{M'} = \widehat{\lambda}_1$  для некоторого  $\lambda_1 \in \Lambda$ . Рассмотрев аналогично  $\varphi_2 \in \text{End}({}_\Lambda M)$ :  $\varphi_2(e_2) = e_2$ ,  $\varphi_2(e_i) = 0$ ,  $i \neq 2$ , мы получим, что  $\psi'' = \psi|_{M''} = \widehat{\lambda}_2$ , где  $M'' = \Lambda e_1 \oplus \Lambda e_3 \oplus \dots \oplus \Lambda e_n$ . Итак, для  $i \geq 3$   $\psi(e_i) = \psi'(e_i) = \lambda_1 e_i$ ,  $\psi(e_i) = \psi''(e_i) = \lambda_2 e_i$ . Поэтому, если  $n \geq 3$ , то  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , а потому  $\psi = \widehat{\lambda}$ . Пусть  $n = 2$ . Тогда  $\psi(e_1) = \lambda_2 e_1$ ,  $\psi(e_2) = \lambda_1 e_2$ . Рассмотрим  $\varphi \in \text{End}({}_\Lambda M)$ ,  $\varphi(e_1) = e_1 + e_2$ ,  $\varphi(e_2) = 0$ . Тогда  $\psi\varphi(e_1) = \varphi\psi(e_1)$ , откуда  $\psi(e_1 + e_2) = \varphi(\lambda_2 e_1)$ ,  $\lambda_2 e_1 + \lambda_1 e_2 = \lambda_2(e_1 + e_2)$ . Следовательно,  $\lambda_1 e_2 = \lambda_2 e_2$  и  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , откуда  $\psi = \widehat{\lambda}$ . ▷

**Предложение 2.3.4.** Нормализатор подгруппы  $\text{Aut}({}_\Lambda M)$  в группе  $\text{Aut}({}_R M)$  совпадает с множеством  $\{\psi \in \text{Aut}({}_R M) : \psi\widehat{\Lambda} = \widehat{\Lambda}\psi\}$ .

◁ Пусть  $\psi \in \text{Aut}({}_R M)$ , причем  $\psi\widehat{\Lambda} = \widehat{\Lambda}\psi$ . Покажем,

что  $\psi$  из нормализатора. Для  $h \in \text{Aut}(\Lambda M)$  покажем, что  $\psi^{-1}h\psi \in \text{Aut}(\Lambda M)$ . Пусть  $\lambda \in \Lambda$  — произвольный элемент, тогда  $\psi\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_1\psi$  для  $\lambda_1 \in \Lambda$ . Имеем  $(\psi^{-1}h\psi)\hat{\lambda} = \psi^{-1}h\hat{\lambda}_1\psi = \psi^{-1}\hat{\lambda}_1h\psi = \hat{\lambda}(\psi^{-1}h\psi)$ . Следовательно,  $\psi^{-1}h\psi \in \text{Aut}(\Lambda M)$ . Обратно, пусть  $\psi \in N_{\text{Aut}(\Lambda M)}(\text{Aut}(\Lambda M))$ . Покажем, что  $\psi\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}\psi$ . Имеем  $\psi \text{Aut}(\Lambda M)\psi^{-1} \subseteq \text{Aut}(\Lambda M)$ . Тогда, в силу леммы 2.3.2  $\psi \text{End}(\Lambda M)\psi^{-1} \subseteq \text{End}(\Lambda M)$ . Пусть  $\varphi$  — произвольный элемент из  $\text{End}(\Lambda M)$ , тогда  $\psi\varphi\psi^{-1} \in \text{End}(\Lambda M)$ , откуда  $(\psi\varphi\psi^{-1})\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(\psi\varphi\psi^{-1})$  для любого  $\lambda \in \Lambda$ . Поэтому  $\varphi(\psi^{-1}\hat{\lambda}\psi) = (\psi^{-1}\hat{\lambda}\psi)\varphi$  для любого  $\varphi \in \text{End}(\Lambda M)$ . Тогда по лемме 2.3.3  $\psi^{-1}\hat{\lambda}\psi \in \hat{\Lambda}$  для всякого  $\lambda \in \Lambda$ , откуда  $\hat{\Lambda}\psi \subseteq \psi\hat{\Lambda}$ , аналогично  $\hat{\Lambda}\psi^{-1} \subseteq \psi^{-1}\hat{\Lambda}$ , следовательно  $\hat{\Lambda}\psi = \psi\hat{\Lambda}$ .  $\triangleright$

Через  $\text{Aut}(\Lambda/R)$  обозначим группу всех кольцевых автоморфизмов кольца  $\Lambda$ , тождественных на  $R$ . Для всякого автоморфизма  $\omega \in \text{Aut}(\Lambda/R)$  определим отображение  $\omega^0$  модуля  $M$ , положив для  $x \in M$ ,  $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ ,  $x_i \in \Lambda$ ,  $\omega^0(x) = \sum_1^n \omega(x_i)e_i$ .

Так как  $\omega|_R = 1$ , то  $\omega^0 \in \text{Aut}(\Lambda M)$ . Далее,  $\omega^0(\lambda x) = \omega(\lambda)\omega^0(x)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Положим

$$\Omega = \{\omega^0 : \omega \in \text{Aut}(\Lambda/R)\}.$$

Так как  $(\omega_1\omega_2)^0 = \omega_1^0\omega_2^0$ ,  $(\omega^0)^{-1} = (\omega^{-1})^0$ , то  $\Omega$  — подгруппа группы  $\text{Aut}(\Lambda M)$ , изоморфная группе  $\text{Aut}(\Lambda/R)$ . В силу равенства  $\omega^0(\lambda x) = \omega(\lambda)\omega^0(x)$ ,  $x \in M$ , мы имеем  $\omega^0\hat{\lambda} = \widehat{\omega(\lambda)}\omega^0$ , следовательно, согласно предложению 2.3.4  $\Omega \leq N_{\text{Aut}(\Lambda M)}(\text{Aut}(\Lambda M))$ . Далее  $\Omega \cap \text{Aut}(\Lambda M) = 1$ .

$\triangleleft$  ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3.1. В силу сказанного выше мы имеем  $\Omega \times \text{Aut}(\Lambda M) \subseteq N_{\text{Aut}(\Lambda M)}(\text{Aut}(\Lambda M))$ . Покажем обратное включение. Пусть  $\psi \in N_{\text{Aut}(\Lambda M)}(\text{Aut}(\Lambda M))$ . Согласно предложению 2.3.4 мы имеем  $\psi\hat{\Lambda}\psi^{-1} = \hat{\Lambda}$ . Определим отображение  $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ , положив  $\widehat{\omega(\lambda)} = \psi\hat{\lambda}\psi^{-1}$ . Тогда  $\omega \in \text{Aut}(\Lambda/R)$ . Итак,  $\psi\hat{\lambda}\psi^{-1} = \widehat{\omega(\lambda)}$ , откуда, так как  $\omega^0\hat{\lambda} = \widehat{\omega(\lambda)}\omega^0$ ,

мы имеем  $\psi \hat{\lambda} \psi^{-1} = \omega^0 \hat{\lambda} (\omega^0)^{-1}$ , а потому  $(\omega^0)^{-1} \psi \hat{\lambda} = \hat{\lambda} (\omega^0)^{-1} \psi$ , следовательно,  $(\omega^0)^{-1} \psi \in \text{Aut}({}_\Lambda M)$  и  $\psi \in \Omega \ltimes \text{Aut}({}_\Lambda M)$ .  $\triangleright$

Теперь мы сформулируем два следствия из теоремы 2.3.1 и предложения 2.3.4. Пусть  $k \subseteq L \subseteq K$  конечные расширения поля  $k$ ,  $G = GL_k(K)$  (см. начало этого параграфа).

**Следствие 2.3.5.** *Имеет место равенство*

$$N_G(GL_L(K)) = \{g \in G : g\hat{L} = \hat{L}g\},$$

где  $\hat{L} = \{\hat{\lambda} : \lambda \in L^*\}$ . Таким образом  $N_G(GL_L(K)) = N_G(\hat{L})$ .

**Следствие 2.3.6.** *Нормализатор группы  $GL_L(K)$  в  $G$  совпадает с полупрямым произведением нормального делителя  $GL_L(K)$  и группы  $\Omega$ , изоморфной группе  $\text{Aut}(L/k)$  всех автоморфизмов поля  $L$ , тождественных на  $k$ .*

Для доказательства следствий достаточно положить  $k = R$ ,  $\Lambda = L$ ,  $K = M$  и воспользоваться теоремой 2.3.1 и предложением 2.3.4.

#### § 4. Реализация группы автоморфизмов, возникающая при расширении полей

Пусть  $k \subseteq L \subseteq K$  — расширение полей, причем  $(K : L) = m < \infty$ . Рассмотрим кольцо

$$M(m, \text{End}_k(L)) = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{m1} & \cdots & \varphi_{mm} \end{pmatrix} : \varphi_{ij} \in \text{End}_k(L) \right\}$$

всех квадратных матриц порядка  $m$  с элементами из кольца эндоморфизмов  $\text{End}_k(L)$ .

**Предложение 2.4.1.** *Кольцо  $M(m, \text{End}_k(L))$  изоморфно кольцу эндоморфизмов  $\text{End}_k(K)$ .*

$\triangleleft$  Пусть  $e_1, \dots, e_m$  — базис поля  $K$  над  $L$ ,  $x \in K$ ,  $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m$  — произвольный элемент поля  $K$ . Пусть  $\varphi \in M(m, \text{End}_k(L))$ . Рассмотрим  $k$ -линейное отображение  $\bar{\varphi}$

поля  $K$ , которое определяется следующим образом  $\overline{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^m \xi_i e_i$ , где

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{m1} & \cdots & \varphi_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что  $\overline{\varphi} \in \text{End}_k(K)$ . Рассмотрим отображение

$$M(m, \text{End}_k(L)) \longrightarrow \text{End}_k(K),$$

$$\varphi \dashrightarrow \overline{\varphi}.$$

Нетрудно видеть, что это отображение является изоморфизмом колец. Действительно, покажем, как строится обратное к нему отображение. Пусть  $g = \text{End}_k(K)$ . Имеем

$$g(\lambda e_k) = g_{1k}(\lambda)e_1 + \cdots + g_{mk}(\lambda)e_m, \quad g_{ij}(\lambda) \in L.$$

При этом возникают  $k$ -линейные отображения  $g_{ij} : L \longrightarrow L$ ,  $g_{ij} \in \text{End}_k(L)$ . Положим

$$g^* = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix}.$$

Тогда отображение

$$\text{End}_k(K) \longrightarrow M(m, \text{End}_k(L)),$$

$$g \dashrightarrow g^*$$

и будет обратным к указанному отображению  $(\varphi \longrightarrow \overline{\varphi})$ .  $\triangleright$

Определим теперь группы  $G = GL_k(K) = \text{Aut}_k(K)$ ,  $H = GL_L(K)$ . В силу предложения 2.4.1 группа  $G = GL_k(K) =$

$(\text{End}_k(K))^*$  изоморфна группе всех обратимых матриц кольца  $M(m, \text{End}_k(L))$ . Ясно тогда, что подгруппа  $H = GL_L(K)$  группы  $GL_k(K)$  состоит из всех матриц из  $G$  вида

$$h = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{11} & \dots & \hat{\lambda}_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{\lambda}_{m1} & \dots & \hat{\lambda}_{mm} \end{pmatrix}, \quad \lambda_{ij} \in L,$$

где для  $\lambda \in L$  через  $\hat{\lambda}$  обозначается отображение  $\hat{\lambda} : L \rightarrow L$ ,  $\hat{\lambda}(x) = \lambda x$ ,  $x \in L$ . Это связано с таким очевидным фактом, что отображение  $\varphi_{ij} \in \text{End}_k(L)$  является  $L$ -линейным тогда и только тогда, когда  $\varphi_{ij} \in \hat{L} = \{\hat{\lambda} : \lambda \in L\}$ .

Покажем теперь, как устроен нормализатор  $N_G(H)$  подгруппы  $H$  в группе  $G$ . Пусть  $\omega \in \text{Aut}(L/k)$ ,

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} \omega & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega \end{pmatrix} \in G : \omega \in \text{Aut}(L/k) \right\}.$$

Тогда согласно следствию 2.3.6  $N_G(H) = \Omega \ltimes H$ , т. е.  $N_G = \Omega \cdot H$  и  $\Omega \cap H = 1$ .

Приведем теперь пример. Пусть  $k = \mathbb{Q}$ ,  $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ ,  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ,  $K = L(\sqrt{\mu})$ ,  $\mu = \sqrt{2} \in L$ . Тогда

$$\text{End}_k(K) \approx M(2, \text{End}_k(L)) = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : A_{ij} \in M(2, \mathbb{Q}) \right\}.$$

Далее,  $G = (M(2, \text{End}_k(L)))^*$ . Для всякого  $\lambda \in L$  в базисе 1,  $\sqrt{2}$  матрица эндоморфизма  $\hat{\lambda} \in \text{End}_k(L)$  имеет вид  $\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$ ,  $x, y \in \mathbb{Q} = k$ .

Тогда

$$H = GL_L(K) = \left\{ \left( \begin{pmatrix} x & 2x_1 \\ x_1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 2y_1 \\ y_1 & y \end{pmatrix} \right) \in G : \begin{matrix} x, x_1, y, y_1 \in \mathbb{Q} \\ z, z_1, t, t_1 \in \mathbb{Q} \end{matrix} \right\}.$$

При этом тор  $T$  имеет вид

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 2x_3 \\ x_3 & x_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2x_4 & 2x_2 \\ x_2 & 2x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_2 & 2x_4 \\ x_4 & x_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 & 2x_3 \\ x_3 & x_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in G : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Легко видеть, что

$$(23)H(23) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 2B \\ B & A \end{pmatrix} \in G : A, B \in M(2, \mathbb{Q}) \right\},$$

$$(23)T(23) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 2x_4 & 2x_3 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 & 2x_4 & 2x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & 2x_4 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} \in G : x_i \in \mathbb{Q} \right\}.$$

### § 5. Гирлянды, содержащие полную линейную группу над промежуточным полем

Пусть  $k \subseteq L \subseteq K$  — расширение полей,  $(K : L) = m < \infty$ ,  $G = GL_k(K)$ ,  $H = GL_L(K)$ ,  $T = GL_K(K)$ ; ясно, что  $H$  — промежуточная подгруппа,  $T \leq H \leq G$ . Рассмотрим решетку  $\text{Lat}(T, G)$  всех подгрупп группы  $G$ , содержащих тор  $T$ . Пусть  $\Gamma_L$  — гирлянда решетки  $\text{Lat}(T, G)$ , содержащая подгруппу  $H = GL_L(K)$ . В этом параграфе мы вычисляем гирлянду  $\Gamma_L$ , а именно, мы показываем, что  $\Gamma_L = \text{Lat}(T^H, N_G(H))$ . В частности, мы получаем вид верхней и нижней гирлянд ( $\Gamma^* = \Gamma_k$  и  $\Gamma_* = \Gamma_K$  соответственно) решетки  $\text{Lat}(T, G)$  всех промежуточных подгрупп.

В начале мы вычислим группу  $T^H = \langle hTh^{-1} : h \in H \rangle$ , где  $H = GL_L(K)$ .

**Теорема 2.5.1.** *Если  $L = \mathbb{F}_2$  и  $(K : L) = 2$ , то  $T^H = T$ . Во всех остальных случаях  $T^H = T \cdot SL_L(K)$ , где  $SL_L(K)$  — специальная линейная группа из  $GL_L(K)$ .*

◁ Если  $L = \mathbb{F}_2$  и  $(K : L) = 2$ , то нетрудно увидеть, что  $T$  — нормальная подгруппа группы  $H = GL_L(K)$ , поэтому  $T^H = T$ . Пусть  $L = \mathbb{F}_3$ ,  $(K : L) = 2$ . Так как  $T \leq T^H \leq H$ , то несложно увидеть, что группа  $T^H$  содержит трансвекцию, а потому и группу  $SL_L(K)$ , следовательно,  $T^H = T \cdot SL_L(K)$ . Рассмотрим теперь оставшиеся случаи. Включение  $T^H \leq T \cdot SL_L(K)$  — очевидно:  $t \in T$ ,  $h \in H$

$$hth^{-1} = tt^{-1}hth^{-1} = t \cdot [t^{-1}, h] \in T \cdot SL_L(K).$$

Покажем обратное включение. Очевидно, что группа  $T^H$  нормализуется группой  $SL_L(K)$  и не содержится в центре группы  $GL_L(K)$ . Поэтому выполнены условия теоремы 4.9, [2], согласно которой  $SL_L(K) \leq T^H$ . Следовательно,  $T \cdot SL_L(K) \leq T^H$ . ▷

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим группу  $D = \text{diag}(1, 1, \dots, N_{K/L}K^*)$  всех матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & \delta \end{pmatrix}$$

порядка  $m = (K : L)$ , где  $\delta = N_{K/L}(\alpha)$  — норма элемента  $\alpha \in K$  в расширении  $K/L$ ,  $\alpha \in K^*$ . Легко видеть, что группа  $T \cdot SL_L(K)$  в выбранном базисе поля  $K$  над  $L$  изоморфна произведению группы  $D$  и специальной линейной группы  $SL(m, L)$ .

**Следствие 2.5.2.** Если  $N_{K/L}K^* = L^*$ , то  $T^H = H$ , а потому  $H = GL_L(K)$  — полная промежуточная подгруппа в решетке  $\text{Lat}(T, G)$ .

**Следствие 2.5.3.** Группа  $T^H$  является полной промежуточной подгруппой в решетке  $\text{Lat}(T, G)$ .

◁ Пусть  $H_{(1)} = T^H$ . Если  $L = \mathbb{F}_2$ ,  $(K : L) = 2$ , то по теореме 2.5.1  $T^H = T$ , а потому  $T^{H_{(1)}} = H_{(1)}$ . В остальных случаях согласно теореме 2.5.1  $H_{(1)} = T^H = T \cdot SL_L(K)$ . Аналогично

доказательству теоремы 2.5.1  $T^{H(1)} \geq T \cdot SL_L(K)$ . Обратное включение очевидно. Поэтому  $T^{H(1)} = H_{(1)}$ .  $\triangleright$

Дадим теперь описание нормализатора  $N_G(H)$  подгруппы  $H = GL_L(K)$  в группе  $G = GL_k(K)$ , используя реализацию группы  $GL_k(K)$  и ее подгруппы  $GL_L(K)$ , данную в § 4. Напомним (см. § 4), что группа  $G = GL_k(K)$  реализуется в качестве всех обратимых матриц (кольца  $M(m, \text{End}_k(L))$ ) вида

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{m1} & \cdots & \varphi_{mm} \end{pmatrix}, \quad \varphi_{ij} \in \text{End}_k(L),$$

а подгруппа  $H = GL_L(K)$  реализуется в качестве всех матриц из  $G$  вида

$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{11} & \cdots & \hat{\lambda}_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\lambda}_{m1} & \cdots & \hat{\lambda}_{mm} \end{pmatrix}, \quad \lambda_{ij} \in L,$$

где для  $\lambda \in L$  через  $\hat{\lambda}$  обозначается отображение  $\hat{\lambda} : L \rightarrow L$ ,  $\hat{\lambda}(x) = \lambda x$ ,  $x \in L$ . Теперь мы укажем как устроен нормализатор  $N_G(H)$ . Пусть

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} \omega & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega \end{pmatrix} \in G : \omega \in \text{Aut}(L/K) \right\}.$$

Тогда, согласно следствию 2.3.6 (см. § 4)  $N_G(H) = \Omega \ltimes H$ .

**Лемма 2.5.4.** Пусть  $\omega \in \text{Aut}(L/K)$ ,  $\lambda \in L$ . Тогда

$$\omega \hat{\lambda} \omega^{-1} = \widehat{\omega(\lambda)}.$$

$\triangleleft$  Пусть  $x \in L$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\omega \hat{\lambda} \omega^{-1})(x) &= \omega(\lambda \omega^{-1}(x)) = \omega(\lambda) \omega(\omega^{-1}(x)) = \\ &= \omega(\lambda) x = \widehat{\omega(\lambda)}(x). \end{aligned} \quad \triangleright$$

**Лемма 2.5.5.** Пусть  $b \in GL_k(L)$  и  $b \hat{L} b^{-1} \subseteq \text{Aut}(L/k) \hat{L}$ , где  $\hat{L} = \{\hat{\lambda} : \lambda \in L^*\}$ . Тогда  $b \hat{L} b^{-1} \subseteq \hat{L}$ .

◁ Пусть  $A = b\widehat{L}b^{-1}$ . Напомним, что  $\text{Aut}(L/k) \cap \widehat{L} = 1$ , поэтому из того, что  $\omega_1\widehat{\lambda}_1 = \omega_2\widehat{\lambda}_2$  ( $\omega_i \in \text{Aut}(L/k)$ ,  $\lambda_i \in L^*$ ) следует, что  $\omega_1 = \omega_2$  и  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Пусть  $a_0 \in A$ ,  $a_0 = \omega_0\widehat{\lambda}_0$ , где  $\omega_0 \in \text{Aut}(L/k)$ ,  $\lambda_0 \in L^*$ . Покажем тогда, что для всякого  $a \in A$  имеет место  $a = \omega_0\widehat{\lambda}$  для некоторого  $\lambda \in L^*$ . Действительно, пусть  $a \in A$ ,  $a = \omega\widehat{\lambda}$ . Тогда  $a_0 + a \in A$ , а потому  $\omega_0\widehat{\lambda}_0 + \omega\widehat{\lambda} = \omega_1\widehat{\lambda}_1$ . Отсюда

$$\widehat{\lambda}_0 + \omega_0^{-1}\omega\widehat{\lambda} = \omega_0^{-1}\omega_1\widehat{\lambda}_1. \quad (*)$$

Сделаем теперь замечание. Если для произвольных автоморфизмов  $\omega, \omega_1 \in \text{Aut}(L/k)$  и  $\lambda_1, \lambda_2 \in L^*$  имеет место равенство  $\omega = \omega_1\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2$ , то  $\omega = \omega_1 = 1$ . Действительно, имеем  $\omega(1) = 1$ , откуда  $\omega_1(\lambda_1) = \lambda_2 + 1$ . Далее, так как для  $x \in L^*$ ,  $1 = \omega(x)\omega\left(\frac{1}{x}\right)$ , то

$$1 = (\omega_1(\lambda_1)\omega_1(x) - \lambda_2x) \left( \frac{\omega_1(\lambda_1)}{\omega_1(x)} - \frac{\lambda_2}{x} \right),$$

но так как  $\omega_1(\lambda_1) = \lambda_2 + 1$ , то

$$1 = ((1 + \lambda_2)\omega_1(x) - \lambda_2x) \left( \frac{1 + \lambda_2}{\omega_1(x)} - \frac{\lambda_2}{x} \right),$$

откуда  $\lambda_2(1 + \lambda_2)(x - \omega_1(x))^2 = 0$ . Но  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$  и  $\omega_1(\lambda_1) = 1 + \lambda_2 \neq 0$ . Следовательно,  $\omega_1(x) = x$ , для всех  $x \in L^*$ . Откуда  $\omega_1 = 1$ . Поэтому  $\omega = \widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2$ , а значит  $\omega = 1$ . Согласно этому замечанию из (\*) мы имеем  $\omega_0^{-1}\omega = \omega_0^{-1}\omega_1 = 1$ , откуда  $\omega = \omega_0$ . Итак, для всякого  $a \in A$  мы имеем  $a = \omega_0\widehat{\lambda}$ . Но  $a^2 \in A$ , где  $a^2 = \omega_0\widehat{\lambda} \cdot \omega_0\widehat{\lambda} = \omega_0^2 \cdot \widehat{\omega_0^{-1}(\lambda)} \cdot \widehat{\lambda}$ . С другой стороны согласно сказанному  $a^2 = \omega_0 \cdot \widehat{\mu}$ ,  $\mu \in L^*$ . Поэтому  $\omega_0^2 = \omega_0$ , откуда  $\omega_0 = 1$ . Следовательно,  $A \subseteq \widehat{L}$ . ▷

**Лемма 2.5.6.** Пусть  $g \in G = GL_k(K)$  и  $gSL_L(K)g^{-1} \subseteq \Omega \ltimes H$ , где  $H = GL_L(K)$ . Тогда  $gSL_L(K)g^{-1} \subseteq SL_L(K)$ .

◁ Мы пользуемся реализацией группы  $GL_k(K)$ , о которой мы говорили в § 4. Пусть  $t_{ij}(\widehat{\lambda}) = e + \widehat{\lambda}e_{ij}$  — произвольная элементарная трансвекция из  $H = GL_L(K)$ ,  $\lambda \in L$ ,  $i \neq j$ ,  $1 \leq i$ ,

$j \leq m$ , ( $e$  — единичная матрица порядка  $m = (K : L)$ ,  $e_{ij}$  — матрица, у которой на позиции  $(i, j)$  стоит 1, а на остальных местах нули). Покажем, что  $gt_{ij}(\hat{\lambda})g^{-1} \in GL_L(K)$ . Матрица  $gt_{ij}(\hat{\lambda})g^{-1}$  имеет вид

$$(\delta_{rs} + \alpha_r \hat{\lambda} \beta_s), \quad \delta — символ Кронекера,$$

где  $\alpha_r, \beta_s \in \text{End}_k(L)$ , причем  $\sum_{r=1}^m \alpha_r \beta_r = 0$ . Пусть  $\lambda = 1$ , тогда  $gt_{ij}(1)g^{-1} \neq e$ . Пусть, например,  $\alpha_2 \hat{1} \beta_1 = \alpha_2 \beta_1 \neq 0$ . Так как  $gt_{ij}(\hat{1})g^{-1} \in \Omega \times H$ , то  $\alpha_2 \beta_1 = \sigma_0 \hat{l}$ , где  $l \in L^*$ ,  $\sigma_0 \in \text{Aut}(L/K)$ . В частности,  $\alpha_2 \beta_1 \in GL_k(L)$ . Так как  $gt_{ij}(\hat{\lambda})g^{-1} \in \Omega \times H$ , то  $\alpha_2 \hat{\lambda} \beta_1 \in \text{Aut}(L/k) \cdot \hat{L}$ , а потому  $\alpha_2 \hat{L} \beta_1 \subseteq \text{Aut}(L/k) \cdot \hat{L}$ . Так как  $\alpha_2 \beta_1 = \sigma_0 \hat{l}$ , то  $\alpha_2 = \sigma_0 \hat{l} \beta_1^{-1}$  и  $\alpha_2 \hat{L} \beta_1 = \sigma_0 \hat{l} \beta_1^{-1} \hat{L} \beta_1 \subseteq \text{Aut}(L/K) \cdot \hat{L}$ . Отсюда  $\beta_1^{-1} \hat{L} \beta_1 \subseteq \text{Aut}(L/k) \cdot \hat{L}$ . Тогда по лемме 2.5.5  $\beta_1^{-1} \hat{L} \beta_1 \subseteq \hat{L}$ , а потому  $\alpha_2 \hat{L} \beta_1 = \sigma_0 \hat{l} \beta_1^{-1} \hat{L} \beta_1 \subseteq \sigma_0 \hat{L}$ . В частности, для  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 \in L^*$ ,

$$gt_{ij}(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2)g^{-1} = gt_{ij}(\hat{\lambda}_1)g^{-1} \cdot gt_{ij}(\hat{\lambda}_2)g^{-1},$$

поэтому для некоторых  $h_r, h' \in H$ ,  $r = 1, 2$ .

$$gt_{ij}(\hat{\lambda}_r)g^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_0 \end{pmatrix} h_r,$$

$$gt_{ij}(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2)g^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_0^2 \end{pmatrix} h'.$$

Следовательно,  $\alpha_2(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2)\beta_1 \in \sigma_0^2 \hat{L}$ , но  $\alpha_2 \hat{\lambda}_r \beta_1 \in \sigma_0 \hat{L}$ ,  $r = 1, 2$ . Отсюда  $\alpha_2(\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2)\beta_1 \in \sigma_0^2 \hat{L} \cap \sigma_0 \hat{L}$ , поэтому  $\sigma_0^2 = \sigma_0$  и  $\sigma_0 = 1$ . Следовательно,  $gt_{ij}(\hat{\lambda})g^{-1} \in H = GL_L(K)$ .  $\triangleright$

**Теорема 2.5.7.** Пусть  $H = GL_L(K)$ ,  $T = GL_K(K)$ ,  $G = GL_k(K)$ ,  $A \leq G$ , причем  $T^H \leq A \leq N_G(H)$ . Тогда  $N_G(A) \leq N_G(H)$ .

◁ Если  $k = L = \mathbb{F}_2$ ,  $K = \mathbb{F}_4$ , то  $G = H = GL_2(\mathbb{F}_2)$ ,  $T \approx \mathbb{F}_4^*$  и как мы показали в теореме 2.5.1  $T^H = T$ , следовательно, утверждение теоремы очевидно. В остальных случаях по теореме 2.5.1  $T^H \geq SL_L(K)$ . Пусть  $g \in N_G(A)$ , тогда  $gSL_L(K)g^{-1} \leq A$ . Тогда по следствию 2.3.6  $A \leq N_G(H) = \Omega \ltimes H$ . По лемме 2.5.6 тогда  $gSL_L(K)g^{-1} \leq SL_L(K)$ . Известно (см., например, [4], с. 73), что  $\langle SL_L(K) \rangle_{ad} = \text{End}_L(K)$ . Поэтому  $g\text{End}_L(K)g^{-1} \subseteq \text{End}_L(K)$ . Следовательно, для произвольных  $\varphi \in \text{End}_L(K)$ ,  $\lambda \in L$  имеем  $g\varphi g^{-1}\hat{\lambda} = \hat{\lambda}g\varphi g^{-1}$ , откуда  $\varphi(g^{-1}\hat{\lambda}g) = (g^{-1}\hat{\lambda}g)\varphi$ . Поэтому  $g^{-1}\hat{\lambda}g$  лежит в централизаторе подкольца  $\text{End}_L(K)$  в кольце  $\text{End}_k(K)$ . Тогда согласно лемме 2.3.3  $g^{-1}\hat{\lambda}g \in \hat{L}$ , а потому  $\hat{L}g \subseteq g\hat{L}$  и аналогично  $g\hat{L} \subseteq \hat{L}g$ , откуда  $\hat{L}g = g\hat{L}$ . Теперь по следствию 2.3.5  $g \in N_G(H)$ . ▷

**Теорема 2.5.8.** Для конечного расширения полей  $k \subseteq L \subseteq K$ ,  $G = GL_k(K)$ ,  $H = GL_L(K)$ ,  $T = GL_K(K)$  справедливо равенство

$$\Gamma_L = \text{Lat}(T^H, N_G(H)).$$

◁ Согласно 2.5.3 подгруппа  $T^H$  является полной промежуточной подгруппой, содержащейся, очевидно, в  $\Gamma_L$ . Для подгруппы  $H \in \text{Lat}(T, G)$  положим  $H_{(i)} = (H_{(i-1)})_{(1)}$ ,  $i \geq 1$ , где  $H_{(0)} = H$ ,  $H_{(1)} = T^H$  и назовем эту операцию «спуском». Говорят, что гирлянда «ограничена снизу», если в ней не существует бесконечных цепей спусков (для подгрупп из гирлянды). Пусть  $G$  — группа,  $T \leq G$ . Напомним результат 1.3.1. В каждой гирлянде  $\Gamma$  решетки  $\text{Lat}(T, G)$  содержится не более одной полной промежуточной подгруппы. Для того, чтобы гирлянда  $\Gamma$  была ограничена снизу необходимо и достаточно, чтобы в  $\Gamma$  содержалась полная промежуточная подгруппа. Вернемся к нашей ситуации. Так как гирлянда  $\Gamma_L$  содержит полную подгруппу  $T^H$ , то она ограничена снизу. Заметим также очевидный факт, что если  $A \in \text{Lat}(T^H, N_G(H))$ , то  $A_{(2)} = T^H$ . Для доказательства теоремы 2.5.8 достаточно показать, что если  $A \in \text{Lat}(T, G)$  и  $A_{(i)} = T^H$  для некоторо-

го  $i$ , то  $A \in \text{Lat}(T^H, N_G(H))$ . Проведем индукцию по  $i$ . Если  $i = 0$ , то  $A_{(0)} = A = T^H$  и утверждение очевидно. Пусть теперь утверждение справедливо для всех  $i \leq n$ , и пусть  $A_{(n+1)} = T^H$ . Имеем  $A_{(n+1)} = (A_{(1)})_{(n)}$  и по индукционному предположению  $A_{(1)} \in \text{Lat}(T^H, N_G(H))$ . Так как  $A_1 \leq A$ , то  $A \leq N_G(A_1)$ , но по теореме 2.5.7  $N_G(A_1) \leq N_G(H)$ . Следовательно,  $T^H \leq A \leq N_G(H)$ .  $\triangleright$

Рассмотрим два частных случая:  $L = k$  и  $L = K$ . Теорема 2.5.8 дает нам возможность вычисления верхней гирлянды  $\Gamma^* = \Gamma_k$  и нижней гирлянды  $\Gamma_* = \Gamma_K$  решетки промежуточных подгрупп  $\text{Lat}(T, G)$ . Пусть  $H = G = GL_k(K)$ , тогда согласно 2.5.1 (если только исключен случай  $k = \mathbb{F}_2$  и  $K = \mathbb{F}_4$ ) мы имеем

$$T^G = T \cdot SL_k(K)$$

или (см. замечание к 2.5.1) в матричной форме для  $G = GL(n, k)$

$$T^G = \text{diag}(1, \dots, N_{K/k}(K^*)) \cdot SL(n, 8k).$$

Следовательно, согласно 2.5.8 верхняя гирлянда имеет вид

$$\Gamma^* = \Gamma_k = \text{Lat}(T \cdot SL_k(K), G).$$

Далее, пусть  $H = T = GL_K(K)$ , тогда  $T^H = T$ . Следовательно, согласно 2.5.8 нижняя гирлянда имеет вид

$$\Gamma_* = \Gamma_K = \text{Lat}(T, N_G(T)),$$

причем группа  $N_G(T)$  согласно 2.3.6 совпадает с полупрямым произведением тора  $T$  и группы  $\text{Aut}(K/k)$  всех автоморфизмов поля  $K$  тождественных на  $k$ .

## § 6. Трансвекции

Этот параграф посвящен извлечению элементарных трансвекций в промежуточных подгруппах в случае куммерова расширения основного поля.

Пусть  $K/k$  — конечное расширение степени  $n$  поля  $k$ . Будем считать, что  $K = k(\sqrt[n]{d})$  — куммерово расширение ( $d \in k$ ) поля  $k$ . Напомним, что расширение  $K = k(\sqrt[n]{d})$  называется куммеровым, если  $(\text{char } k, n) = 1$  и поле  $k$  содержит все корни  $n$ -ой степени из 1. Мы при этом предполагаем, что уравнение  $x^n - d = 0$  неразложимо в поле  $k$ , так как  $(K : k) = n$  и группа Галуа  $G(K/k)$  — циклическая группа порядка  $n$ . Пусть  $\mu = \sqrt[n]{d}$ . Рассмотрим базис  $1, \mu, \dots, \mu^{n-1}$  поля  $K$  над  $k$ . Тогда тор  $T = \widehat{K^*} = \langle \hat{t} : t \in K^* \rangle$  в этом базисе имеет следующий вид. Пусть  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in k$  —  $n$ -мерный вектор,  $\bar{x} \in k^n$ . Пусть, далее,

$$C(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & dx_n & dx_{n-1} & \dots & dx_2 \\ x_2 & x_1 & dx_n & \dots & dx_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & \dots & dx_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$T = \{C(\bar{x}) : \bar{x} \in k^n \setminus \{\bar{0}\}\}.$$

Пусть  $H$  — промежуточная подгруппа,  $T \leq H \leq G = GL(n, k)$ . Напомним, что под элементарной трансвекцией в группе  $GL(n, k) = G$  подразумевается матрица  $t_{rs}(\alpha) = e + \alpha e_{rs}$ ,  $\alpha \in k$  ( $\alpha \neq 0$ ),  $r \neq s$ . Здесь  $e$  — единичная матрица, а  $e_{rs}$  — матрица, у которой на позиции  $(r, s)$  стоит 1, а на остальных местах нули.

**Лемма 2.6.1.** Если  $t_{rs}(\alpha) \in H$  для некоторых  $r \neq s$ ,  $\alpha \in k$ ,  $\alpha \neq 0$ , то для любых  $i \neq j$  найдется  $\xi \neq 0$ , что  $t_{ij}(\xi) \in H$ .

◁ Воспользуемся тем, что  $H \geq T$ . Пусть  $\bar{x} = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,

$$C = C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & d \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеет место формула

$$Ct_{kl}(\alpha)C^{-1} = \begin{cases} t_{k+1, l+1}(\xi), & l < n, \quad \xi \in k^*, \\ t_{k+1, 1}(\xi'), & l = n, \quad \xi' \in k^*. \end{cases}$$

Применяя эту формулу, и пользуясь формулой  $[t_{ir}(\alpha), t_{rj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta)$ , мы получаем доказательство леммы 2.6.1.  $\triangleright$

**Лемма 2.6.2.** Пусть  $e + \bar{\alpha}^T \bar{\beta} \in GL(n, k)$  — общая трансвекция  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = \langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle = 0$  ( $\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle$  — скалярное произведение),  $e + \bar{\alpha}^T \bar{\beta} = (\delta_{ij} + \alpha_i \beta_j)$ . Тогда найдется  $\bar{x} \in k^n$  так, что

$$C(\bar{x})(e + \bar{\alpha}^T \bar{\beta})C^{-1}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$  Имеем  $C(\bar{x})(e + \bar{\alpha}^T \bar{\beta})C^{-1}(\bar{x}) = e + C(\bar{x})\bar{\alpha}^T \bar{\beta} C^{-1}(\bar{x})$ . Так как  $K^*$  действует транзитивно на  $K^*$  и  $\bar{\alpha} \in k^n \setminus \{\bar{o}\}$ , то найдется  $\bar{x} \in k^n \setminus \{\bar{o}\}$  так, что

$$C(\bar{x})\bar{\alpha}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это и доказывает нашу лемму.  $\triangleright$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Лемма 2.6.2 справедлива для произвольного конечного расширения  $K/k$ .

Следующая теорема говорит о том, что если общая трансвекция содержится в промежуточной подгруппе  $H$ , то для каждой позиции элементарная трансвекция содержится в  $H$ .

**Теорема 2.6.3.** Пусть  $A = (\delta_{ij} + \alpha_i \beta_j) \in H$  — общая трансвекция. Тогда для любых  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , найдется  $\xi \in k^*$ , что  $t_{ij}(\xi) \in H$ .

◁ Согласно лемме 2.6.2. можно считать, что

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = e + \bar{a},$$

где

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

На продолжении доказательства теоремы в нужных местах для удобства мы не различаем матрицу  $\bar{a}$  и вектор  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_1 = 0$ . Пусть  $C(\bar{x})$  — произвольная матрица из тора  $T$ ,  $\bar{x} \in k^n \setminus \{\bar{o}\}$ ,  $C(\bar{x}) = (c_{ij})$ ;  $C^{-1}(x) = (c'_{ij})$ . Пусть  $\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i c'_{i1}$ ,

$$\bar{y} = (c'_{11} - \lambda, c'_{21}, \dots, c'_{n1}).$$

Тогда, очевидно, столбец  $\bar{y}^T$  будет первым столбцом матрицы  $(C(\bar{x})A)^{-1}$ . Теперь нетрудно проверить справедливость формулы

$$B = \left[ (C(\bar{x})AC(\bar{y}))^{-1}, A \right] = e + \bar{b},$$

где  $[s, t] = sts^{-1}t^{-1}$ ,  $\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i c'_{i1}$  и

$$\bar{b} = \langle \bar{a}, \bar{x} \rangle \bar{a} C^{-1}(\bar{x}) - \lambda \langle \bar{a}, \bar{x} \rangle \bar{a} - \lambda \bar{a} C(\bar{x}),$$

здесь через  $\langle \bar{a}, \bar{x} \rangle$  обозначается скалярное произведение векторов. Учитывая лемму 2.6.1 для доказательства теоремы достаточно доказать, что для некоторого  $k \geq 2$  и  $\xi \in k^*$   $t_{1k}(\xi) \in H$ . Рассмотрим два возможных случая:

1) Найдется  $k \geq 2$ , что  $\bar{a} C^{-1}(\bar{x}) = e_{1k}$ , причем  $\langle \bar{a}, \bar{x} \rangle \neq 0$ . Тогда  $\bar{a} = e_{1k} C(\bar{x})$ , а потому  $k$ -я строчка матрицы  $C(\bar{x})$  совпадает с вектором  $\bar{a}$ :  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{kn})$ . Тогда

$\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i c'_{i1} = \sum_{i=1}^n c_{ki} c'_{i1} = 0$ . Поэтому  $\bar{b} = \langle \bar{a}, \bar{x} \rangle e_{1k}$ . Положим  $\xi = \langle \bar{a}, \bar{x} \rangle \neq 0$ . Тогда  $B = e + \bar{b} = t_{1k}(\xi) \in H$ .

2) Для всякого  $k \geq 2$  если  $\bar{a} C^{-1}(x) = e_{1k}$ , то  $\langle \bar{a}, \bar{x} \rangle = 0$ .

Мы покажем, что это возможно только в том случае, когда матрица  $A$  сама является элементарной трансвекцией. Пусть  $\bar{a} C^{-1}(x) = e_{1k}$ , тогда  $\bar{a} = e_{1k} C(\bar{x})$ , откуда

$$\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{kn}).$$

Так как

$$C(\bar{x}) = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} x_1 & dx_n & \dots & dx_2 \\ x_2 & x_1 & \dots & dx_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_{n-1} & \dots & x_1 \end{pmatrix},$$

то для  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  мы вычислим первый столбец матрицы  $C(\bar{x})$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_k, & x_2 &= \alpha_{k-1}, & \dots, & x_k &= \alpha_1; \\ x_{k+1} &= \frac{\alpha_n}{d}, & x_{k+2} &= \frac{\alpha_{n-1}}{d}, & \dots, & x_n &= \frac{\alpha_{k+1}}{d}. \end{aligned}$$

По условию  $\langle \bar{a}, \bar{x} \rangle = 0$ , откуда

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 \alpha_k + \alpha_2 \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_k \alpha_1) + \\ &+ \frac{1}{d}(\alpha_{k+1} \alpha_n + \alpha_{k+2} \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_n \alpha_{k+1}) = 0 \end{aligned} \quad (*)$$

для любого  $k \geq 2$ . Рассмотрим регулярное представление поля  $K = k(\sqrt[n]{d})$  в базисе  $1, \mu, \mu^2, \dots, \mu^{n-1}$ , где  $\mu = \frac{1}{\sqrt[n]{d}}$ . Заметим, что  $K = k(\sqrt[n]{d}) = k\left(\frac{1}{\sqrt[n]{d}}\right)$ . Матрица элемента  $t = \alpha_1 + \alpha_2 \mu + \dots + \alpha_n \mu^{n-1}$  в этом представлении имеет вид

$$[t] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \frac{\alpha_n}{d} & \frac{\alpha_{n-1}}{d} & \dots & \frac{\alpha_2}{d} \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \frac{\alpha_n}{d} & \dots & \frac{\alpha_3}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

В силу формулы (\*) матрица  $[t]^2$  является скалярной, следовательно,  $t^2 \in k$  (заметим, что  $t \notin k$ ). Таким образом,  $k(t)$  — подполе поля  $K = k(\sqrt[n]{d})$ , причем  $(k(t): k) = 2$ . Так как расширение  $K = k(\sqrt[n]{d})$  — куммерово, то  $n = 2m$  четно и  $k(t) = k(\sqrt{d})$ . Следовательно,  $t = \alpha_1 + \alpha_2\mu + \dots + \alpha_n\mu^{k-1} \in k(\sqrt{d})$ , а потому  $t = l_1 + l_2\mu^m$ ,  $l_i \in k$  ( $\mu^m = \sqrt{d}$ ). Так как  $1, \mu, \dots, \mu^{n-1}$  — базис поля  $K$  над  $k$ , то  $l_1 = \alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_{m+1} = l_2$  и  $\alpha_i = 0$  для всех  $i \neq m+1$ . Итак,  $\alpha_i = 0$  для всех  $i \neq m+1$ , откуда  $A = t_{1,m+1}(\alpha_{m+1})$ .  $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6.4. Из доказательства видно, что теорема 2.6.3 справедлива для произвольного радикального расширения  $K = k(\sqrt[n]{d})$  поля  $k$  степени  $n$  при нечетном  $n$ .

### § 7. Существование подгрупп, принадлежащих данному кольцу множителей

Пусть  $K = k(\sqrt[n]{\mu})$  — радикальное расширение степени  $n$  поля  $k$ ,  $G = GL(n, k)$  — полная линейная группа порядка  $n$  над полем  $k$ . Пусть, далее,  $T = T(\mu)$  — максимальный нерасщепимый тор, связанный с радикальным расширением  $K/k$  (см., например, § 6). В этом параграфе мы исследуем промежуточные подгруппы  $H$ ,  $T \leq H \leq G$ , содержащие элементарную трансвекцию. Как известно (см. § 1, гл. III) с каждой такой подгруппой связан модуль трансвекций

$$A_\varphi = \{\alpha \in K: \tau(\alpha, \phi) \in H\}$$

и кольцо множителей

$$R = R(H) = \{\lambda \in k: \lambda A_\varphi \subseteq A_\varphi\},$$

причем кольцо множителей  $R = R(H)$  не зависит от функционала  $\varphi$ , а зависит только от подгруппы  $H$ . Подкольцо  $R$  поля  $k$  называется *допустимым* (см. § 2, гл. III), если для некоторой промежуточной подгруппы  $H$ ,  $T \leq H \leq G$ , подкольцо  $R$  совпадает с кольцом множителей  $R(H)$ :  $R = R(H)$ . Исследование

таких колец, реализуемых с помощью промежуточной подгруппы, позволяет нам извлекать информацию о строении решетки  $\text{Lat}(T, G)$ . Эта идеология и лежит в основе всех дальнейших исследований этой главы.

В этом параграфе мы вводим в рассмотрение подкольцо  $R_0$  поля  $k$  и показываем, что включение  $R \supset R_0$  является достаточным для допустимости кольца  $R$ . В частности, мы строим примеры подгрупп группы  $G = GL(n, k)$ , содержащих тор  $T$ . Как следствие отсюда мы можем строить подгруппы специальной линейной группы  $SL(n, k)$ , содержащие максимальный тор (в  $SL(n, k)$ ).

В естественном базисе поля  $K = k(\sqrt[n]{\mu})$  над  $k$  тор  $T = T(\mu)$  совпадает с множеством всех матриц  $c = c(\bar{x}) = (c_{ij})$ ,  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$ ,  $x_i \in k$ ,  $\bar{x} \neq \bar{0}$ , элементы которых определяются следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} x_{i+1-j}, & j \leq i; \\ \mu x_{n+i+1-j}, & j \geq i+1. \end{cases} \quad (1)$$

Таким образом, матрица  $c = c(\bar{x})$  имеет вид (см. § 6)

$$c = c(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & \mu x_n & \dots & \mu x_2 \\ x_2 & x_1 & \dots & \mu x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_{n-1} & \dots & x_1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Таким образом,

$$T = T(\mu) = \langle c(\bar{x}) : \bar{x} \in k^n, \bar{x} \neq \bar{0} \rangle.$$

В дальнейшем  $H$  — промежуточная подгруппа, содержащая элементарную трансвекцию  $t_{ij}(\alpha)$ ,  $i \neq j$ ,  $\alpha \in k$ ,  $\alpha \neq 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если в дальнейшем в качестве частного случая мы будем рассматривать случай поля рациональных чисел  $k = \mathbb{Q}$ ,  $K = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{d})$ , то мы считаем, что  $\mu = d$  — целое, свободное от  $n$ -х степеней.

С каждой промежуточной подгруппой  $H$ , содержащей элементарную трансвекцию, связаны модули

$$A_{ij} = A_{ij}(H) = \{\alpha \in k: t_{ij}(\alpha) \in H \text{ } i \neq j\},$$

и их кольца множителей.

$$R_{ij} = R_{ij}(H) = R_{ij}(A_{ij}) = \{\lambda \in k: \lambda A_{ij} \subseteq A_{ij}\}.$$

Очевидно, что  $A_{ij}$  являются подгруппами аддитивной группы  $k^+$  поля  $k$ .

**Лемма 2.7.1.** Пусть тор  $T$  нормализует подгруппу  $H$ . Положим  $A_i = A_{i1} = A_{i1}(H)$ ,  $i = 2, \dots, n$ . Тогда

$$A_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j < i; \\ \mu A_{n+i+1-j}, & j > i. \end{cases}$$

Далее,

$$A_2^2 \subseteq A_3, A_3^2 \subseteq A_4, \dots, A_{n-1}^2 \subseteq A_n, \mu A_n^2 \subseteq A_{n-1}.$$

◁ Пусть  $\bar{x} = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $c = c(\bar{x})$ . Тогда из соотношений

$$\begin{aligned} c t_{12}(\alpha) c^{-1} &= t_{23}(\alpha), \quad c t_{23}(\alpha) c^{-1} = t_{34}(\alpha), \quad \dots, \\ c t_{n-2, n-1}(\alpha) c^{-1} &= t_{n-1, n}(\alpha), \quad c t_{n1}(\beta) c^{-1} = t_{12}(\mu\beta), \end{aligned}$$

следует, что для  $A_n = A_{n1}$  мы имеем

$$A_{12} = \mu A_n = A_{23} = A_{34} = \dots = A_{n-1, n}.$$

Для остальных позиций доказательство аналогично. Далее, включения сформулированные в лемме легко вытекают из соотношения

$$[t_{ir}(\alpha), t_{rj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta), \quad i \neq j, \quad i \neq r, \quad r \neq j. \quad (3)$$

**Лемма 2.7.2.** Пусть выполнены условия леммы 2.7.1. Если  $\alpha \in A_{12}$ , то  $\frac{\alpha^n}{\mu} \in R_{12}$ .

◁ Пусть  $\alpha, \beta \in A_{12}$ . Согласно лемме 2.7.1

$$A_{12} = A_{23} = \dots = A_{n-1, n}.$$

Тогда из (3)  $A_{12} \cdot A_{23} \subseteq A_{13}$ , откуда  $\alpha\beta \in A_{13}$ . Далее,  $\alpha \in A_{34}$  и из (3)  $A_{13}A_{34} \subseteq A_{14}$ , откуда  $\alpha \cdot \alpha\beta = \alpha^2\beta \in A_{14}$ . Действуя аналогично, получим  $\alpha^{n-2} \cdot \beta \in A_{1n}$ . В частности,  $\alpha^{n-1} \in A_{1n}$ . Далее, согласно 2.7.1

$$A_{13} = \mu A_{n-1} = \mu A_{n-1, 1} = \mu A_{n2}.$$

Следовательно,  $\alpha\beta \in A_{13} = \mu A_{n2}$ . Далее, из (3)  $A_{1n} \cdot A_{n2} \subseteq A_{12}$ . Откуда

$$\alpha^{n-1} \cdot \frac{\alpha\beta}{\mu} \in A_{12}, \quad \frac{\alpha^n}{\mu} \cdot \beta \in A_{12}$$

для любых  $\alpha, \beta \in A_{12}$ . Откуда  $\frac{\alpha^n}{\mu} \in R_{12}$ . ▷

**Предложение 2.7.3.** Пусть выполнены условия 2.7.1, причем  $k = \mathbb{Q}$ . Тогда  $A_{ij}$  — целый идеал кольца  $R_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$ . Далее, все кольца  $R_{ij}$ ,  $i \neq j$ , совпадают между собой.

◁ Покажем, например, что  $A_{12}$  — целый идеал кольца  $R_{12}$ , т. е. что  $A_{12} \subseteq R_{12}$ . Пусть  $\alpha \in A_{12}$ . Согласно 2.7.2  $\alpha^n \in dR_{12}$ , где  $d = \mu$  — целое, свободное от  $n$ -х степеней, откуда  $\alpha \in R_{12}$ . Покажем теперь, что все кольца  $R_{ij}$  равны между собой. Пусть  $R = R_{21}$ ,  $A_2 = A_{21}$ . Согласно доказанному  $A_2 \subseteq R$ . Пусть  $A_2 = mR = mR_{21}$ . Аналогично, пусть  $A_3 = A_{31} = nR_{31}$ . Согласно 2.7.1  $A_2^2 \subseteq A_3$ , откуда  $R_{21} \subseteq R_{31}$ . Аналогично,  $R_{21} \subseteq R_{31} \subseteq \dots \subseteq R_{n1}$ .

Далее, из (3)  $A_{2n} \cdot A_{n1} \subseteq A_{n1}$ , откуда (см. 2.7.1)  $dA_3 \cdot A_n \subseteq A_2$ . Поэтому  $R_{n1} = R_{n1}(A_{n1}) = R_{n1}(A_n) \subseteq R_{21}$ . Итак,

$$R_{21} = R_{31} = \dots = R_{n1}. \quad \triangleright$$

Пусть  $\sigma = (\sigma_{ij})$  — сеть аддитивных подгрупп поля  $k$  (см. гл. I),  $\sigma_{ij} \leq k^+$ ,  $M(\sigma)$  — соответствующее сетевое кольцо:

$$M(\sigma) = \{a : a \in M(\sigma)\}.$$

Нас интересует вопрос поиска сетей  $\sigma$ , для которых соответствующее сетевое кольцо  $M(\sigma)$  нормализуется тором  $T = T(\mu)$ .

**Предложение 2.7.4.** Пусть  $\mu\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ , для всех  $i, j$ . Если тор  $T = T(\mu)$  нормализует сетевое кольцо  $M(\sigma)$ , то сеть  $\sigma$  имеет вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} A_1 & \mu A_n & \mu A_{n-1} & \dots & \mu A_2 \\ A_2 & A_1 & \mu A_n & \dots & \mu A_3 \\ A_3 & A_2 & A_1 & \dots & \mu A_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n & A_{n-1} & A_{n-2} & \dots & A_1 \end{pmatrix},$$

где  $A_i = \sigma_{i1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , причем  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n$ ,  $\mu A_n \subseteq A_1$ . В частности, если  $k = \mathbb{Q}$  и  $R_i = R(A_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то  $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$ , причем для любого  $i$   $A_i$  — целый идеал кольца  $R$ ,  $A_i \subseteq R$ .

◁ Для позиций, отличных от диагональных, доказательство предложения в точности повторяет доказательство леммы 2.7.1. Далее, равенство  $A_1 = \sigma_{11} = \dots = \sigma_{nn}$  достигается последовательным сопряжением матрицы  $\alpha e_{11}$  ( $\alpha \in A_1 = \sigma_{11}$ ) с помощью матрицы  $c(\bar{x})$  для  $\bar{x} = (0, 1, 0, \dots, 0)$ . Покажем теперь, что

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n, \quad \mu A_n \subseteq A_1.$$

Пусть  $\bar{x} = (1, 1, 0, \dots, 0)$ ,

$$c = c(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \mu \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$c^{-1} = c^{-1}(\bar{x}) = \frac{1}{1 + (-1)^{n+1}\mu} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix} * = \frac{1}{1 + (-1)^{n+1}\mu} c(\bar{y}),$$

где  $y = (1, -1, \dots, (-1)^{n+1})$ . Пусть  $\alpha \in A_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $\alpha e_{i1} \in M(\sigma)$ . Рассмотрим матрицу  $c\alpha e_{i1}c^{-1}$ . Имеем

$$[c\alpha e_{i1}c^{-1}]_{i+1,1} = \frac{\alpha}{1 + (-1)^{n+1}\mu},$$

а потому  $\frac{\alpha}{1 + (-1)^{n+1}\mu} \in A_{i+1}$ , откуда  $\alpha \in A_{i+1}$ , следовательно  $A_i \subseteq A_{i+1}$ . Далее, пусть  $\beta \in A_n$ ,  $\beta e_{n1} \in M(\sigma)$ . Тогда

$$[c\beta e_{n1}c^{-1}]_{11} = \frac{\mu\beta}{1 + (-1)^{n+1}\mu},$$

откуда  $\frac{\mu\beta}{1 + (-1)^{n+1}\mu} \in A_1$  и  $\mu\beta \in A_1$ , следовательно  $\mu A_n \subseteq A_1$ . Далее, оставшаяся часть предложения (касающаяся  $k = \mathbb{Q}$ ) следует из доказанного и 2.7.3.  $\triangleright$

Итак, мы определили вид сетей (см. 2.7.4)  $\sigma = (\sigma_{ij})$ ,  $\sigma_{ij} \leq k^+$ , для которых соответствующее сетевое кольцо нормализуется тором  $T = T(\mu)$ . Так как для этих сетей тор  $T$  нормализует и соответствующую сетевую группу  $G(\sigma) = (e + M(\sigma))^*$ , то по этой причине в дальнейшем мы рассматриваем сети вида

$$\sigma = \begin{pmatrix} A_1 & \mu A_n & \mu A_{n-1} & \dots & \mu A_2 \\ A_2 & A_1 & \mu A_n & \dots & \mu A_3 \\ A_3 & A_2 & A_1 & \dots & \mu A_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n & A_{n-1} & A_{n-2} & \dots & A_1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n, \quad \mu A_n \subseteq A_1,$$

причем  $A_1, \dots, A_n$  — идеалы некоторого кольца  $R$ .

Теперь мы получим достаточные условия нормализуемости сетевой группы  $G(\sigma)$  тором  $T$ .

**Лемма 2.7.5.** *Рассмотрим сеть  $\sigma = (\sigma_{ij})$  вида (4). Если  $k - s \leq i - r$ , то  $\sigma_{ks} \subseteq \sigma_{ir}$ .*

◁ Пусть  $k - s = m$ ,  $i - r = l$ ,  $m \leq l$ . Тогда

$$\sigma_{ks} = \sigma_{s+m,s}, \quad \sigma_{ir} = \sigma_{r+l,r}.$$

Если  $k \leq s$  и  $i \geq r$ , то лемма очевидна, так как в этом случае

$$(k < s) \quad \sigma_{ks} \subseteq \mu A_n \subseteq A_1 \subseteq \sigma_{ir};$$

$$(k = s) \quad \sigma_{ks} = A_1 \subset \sigma_{ir}.$$

Пусть  $k > s$ , или  $i < r$ . Тогда  $k - s = m > 0$ , или  $i - r = l < 0$ .

а)  $m > 0$ . Так как  $m \leq l$ , то  $l > 0$ , а потому  $k > s$  и  $i > r$ . Но тогда  $s + l < n$  или  $r + m < n$ . Если  $s + l < n$ , то  $\sigma_{s+l,s} = \sigma_{r+l,r} = \sigma_{ir}$ , но  $\sigma_{s+l,l} \supseteq \sigma_{s+m,s}$  (так как  $l \geq m$ ), а потому  $\sigma_{ir} \supseteq \sigma_{s+m,s} = \sigma_{ks}$ . Если же  $r + m < n$ , то  $\sigma_{r+m,r} = \sigma_{s+m,s} = \sigma_{ks}$ , но  $\sigma_{ks} = \sigma_{s+m,s} = \sigma_{r+m,r} \subseteq \sigma_{r+l,r} = \sigma_{ir}$  (так как  $l \geq m$ ).

б)  $l < 0$ . Тогда  $i < r$ , и так как  $l \geq m$ , то  $m < 0$ , а потому  $k < s$ . В этом случае  $r + m \geq 0$ , или  $s + l \geq 0$  (иначе  $r + m + s + l \leq 0$  и тогда  $k + i \leq 0$ ). Если  $r + m \geq 0$ , то  $(r + m < n)\sigma_{r+m,r} = \sigma_{s+m,s} = \sigma_{ks}$ , но при  $k \leq s$ ,  $i \leq r$

$$\sigma_{ks} = \sigma_{s+m,s} = \sigma_{r+m,r} \subseteq \sigma_{r+l,r} = \sigma_{ir} \quad (l \geq m).$$

Если же  $s + l \geq 0$ , то  $(s + l < n)\sigma_{s+l,s} = \sigma_{r+l,r} = \sigma_{ir}$ , но  $\sigma_{s+l,s} \supseteq \sigma_{s+m,s}$  ( $l \geq m$ ), откуда  $\sigma_{ir} \supseteq \sigma_{s+m,s} = \sigma_{ks}$ . ▷

С каждой матрицей  $c = c(\bar{x}) = (c_{ij}) \in T(\mu)$  связана обратная матрица

$$c^{-1} = c(\bar{y}) = (c'_{ij}) \in T(\mu), \quad \bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in k^n,$$

где  $y_i = \frac{C_{1i}}{|c(\bar{x})|}$ , причем  $C_{1i}$  — алгебраическое дополнение элемента  $c_{1i}$  матрицы  $c = c(\bar{x})$ . Для элементов матрицы  $c = c(\bar{x})$

мы имеем формулу (1). Аналогично,

$$c'_{sr} = \begin{cases} y_{s+1-r}, & r \leq s; \\ \mu y_{n+s+1-r}, & r \geq s+1. \end{cases} \quad (5)$$

Введем в рассмотрение подкольцо  $R_0 = R(\mu)$  поля  $k$  следующего вида

$$R_0 = R(\mu) = \text{ring} \langle x_i y_j, \mu x_r y_s : i+j \leq n+1, \\ r+s > n+1, \bar{x} \in k^n \setminus \bar{0} \rangle.$$

Прежде чем сформулировать основное утверждение приведем вспомогательную лемму.

**Лемма 2.7.6.** *Рассмотрим сеть  $\sigma$  вида (4). Пусть  $H = T \cdot G(\sigma)$  — группа. Если  $t_{ij}(\alpha) \in H$ ,  $i \neq j$ , то  $\alpha \in \sigma_{ij}$ .*

$\triangleleft$  Пусть, например,  $i = 2$ ,  $j = 1$ ,  $\beta \in \sigma_{21} = A_2$ ,  $t_{21}(\beta) = c(\bar{x}) \cdot a \in T \cdot G(\sigma)$ , где  $a = (a_{ij}) \in G(\sigma)$ ,

$$c(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & \mu x_n & \dots & \mu x_2 \\ x_2 & x_1 & \dots & \mu x_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_{n-1} & \dots & x_1 \end{pmatrix},$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 + a_1 & \mu a_n^{(1)} & \dots & \mu a_2^{(n-1)} \\ a_2 & 1 + a_1^{(1)} & \dots & \mu a_3^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n-1}^{(1)} & \dots & 1 + a_1^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

где  $a_i^{(k)} \in A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ ,  $a_i^{(0)} = a_i$ ,  $x_1, \dots, x_n \in k$ . Приравнивая первую строку матрицы  $t_{21}(\beta)$  к первой строке матрицы  $c(\bar{x})a$ , мы получим систему из  $n$  линейных уравнений относительно  $x_1, \mu x_n, \dots, \mu x_2$ . Из этой системы находим

$$x_1 = \frac{A_{11}}{\Delta}, \quad \mu x_n = \frac{A_{21}}{\Delta}, \quad \mu x_{n-1} = \frac{A_{31}}{\Delta}, \quad \dots, \quad \mu x_2 = \frac{A_{n1}}{\Delta},$$

где  $\Delta = \det a \in R^*$ ,  $A_{i1}$  — алгебраические дополнения элементов  $a_{i1}$  матрицы  $a = (a_{ij})$ . Далее,

$$\begin{aligned}\beta &= x_2(1 + a_1) + x_1a_2 + \mu x_na_3 + \cdots + \mu x_3a_n = \\ &= \frac{A_{n1}}{\mu\Delta}(1 + a_1) + \frac{A_{11}}{\Delta}a_2 + \frac{A_{21}}{\Delta}a_3 + \frac{A_{31}}{\Delta}a_4 + \cdots + \frac{A_{n-1,1}}{\Delta}a_n.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что всякий элемент из  $A_{n1}$  содержится в  $\mu A_2$ , либо в  $\mu^2 A_k \subseteq \mu^2 A_n \subseteq \mu A_1 \subseteq \mu A_2$ , следовательно,

$$\frac{A_{n1}}{\mu\Delta}(1 + a_1) \in A_2.$$

Очевидно, далее, что

$$\frac{A_{11}}{\Delta}a_2 \in A_2.$$

Далее, нетрудно видеть, что для  $i = 2, \dots, n$

$$A_{i1} \in \mu A_k \subseteq A_1 \subseteq A_2.$$

Отсюда  $\beta \in A_2$ .  $\triangleright$

**Теорема 2.7.7.** Пусть  $R$  — подкольцо поля  $k$ , содержащее кольцо  $R_0 = R(\mu)$ ,  $\mu \in R$ . Пусть, далее,  $A_1, \dots, A_n$  — идеалы кольца  $R$ , причем

$$A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n, \quad \mu A_n \subseteq A_1.$$

Тогда для сети  $\sigma$  вида (4) тор  $T = T(\mu)$  нормализует сетевую группу  $G(\sigma)$ , а потому  $H = T \cdot G(\sigma)$  — промежуточная подгруппа, содержащая тор  $T$ , причем  $A_{ij}(H) = \sigma_{ij}$  для всех  $i \neq j$ .

$\triangleleft$  Пусть  $g \in G(\sigma)$ ,  $g = e + a$ , где  $a = (a_{ij}) \in M(\sigma)$ . Пусть, далее,  $c = (c_{ij}) = c(\bar{x})$ ,  $c^{-1} = (c'_{ij}) = c(\bar{y})$ ,  $c \in T(\mu)$ . Покажем, что

$$b = (b_{ir}) = c(\bar{x})ac(\bar{y}) \in M(\sigma),$$

т. е., что  $b_{ir} \in \sigma_{ir}$  для всех  $1 \leq i, r \leq n$ . Имеем

$$b_{ir} = \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} a_{ks} c'_{sr}.$$

Последнюю сумму разобьем на четыре части

$$b_{ir} = \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{k=1}^i + \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{k=i+1}^n + \sum_{s=r}^n \sum_{k=1}^i + \sum_{s=r}^n \sum_{k=i+1}^n.$$

В силу (1) и (5) тогда мы имеем

$$\begin{aligned} b_{ir} &= \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{k=1}^i x_{i+1-k} a_{ks} \mu y_{n+s+1-r} + \\ &+ \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{k=i+1}^n \mu x_{n+i+1-k} \mu a_{ks} y_{n+s+1-r} + \\ &+ \sum_{s=r}^n \sum_{k=1}^i x_{i+1-k} a_{ks} y_{s+1-r} + \sum_{s=r}^n \sum_{k=i+1}^n \mu x_{n+i+1-k} a_{ks} y_{s+1-r}. \end{aligned}$$

Рассмотрим все четыре слагаемых в отдельности и покажем, что они содержатся в  $\sigma_{ir}$ .

а)  $I = \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{k=1}^i x_{i+1-k} a_{ks} \mu y_{n+s+1-r}$ . Пусть  $i' = i + 1 - k$ ,  $j' = n + s + 1 - r$ . Тогда  $i' + j' = n + (s - k) + (i - r) + 2$ . Если  $i' + j' \leq n + 1$ , то  $x_{i'} y_{j'} \in R_0 \subseteq R$ . Но в случае индексов  $s$  и  $k$  нашего суммирования  $\mu a_{ks} \in \sigma_{ir}$ , а потому для  $i' + j' \leq n + 1$   $x_{i'} y_{j'} \mu a_{ks} \in \sigma_{ir}$ . Пусть  $i' + j' > n + 1$ . Тогда  $n + (s - k) + (i - r) + 2 > n + 1$ , откуда  $s - k + i - r \geq 0$  или  $k - s \leq i - r$ . Но тогда согласно лемме 2.7.5  $\sigma_{ks} \subseteq \sigma_{ir}$ . Далее, по определению  $\mu x_{i'} y_{j'} \in R_0 \subseteq R$ , а потому  $x_{i'} y_{j'} \mu a_{ks} \in \sigma_{ir}$ . Итак,  $I \in \sigma_{ir}$ .

б)  $II = \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{k=i+1}^n \mu x_{n+i+1-k} \mu a_{ks} y_{n+s+1-r}$ . Пусть

$$i' = n + i + 1 - k, \quad j' = n + s + 1 - r, \quad i' + j' = 2n + (i - r) + (s - k) + 2.$$

Если  $i' + j' \leq n + 1$ , то  $x_{i'} y_{j'} \in R_0 \subseteq R$ , но  $\mu^2 a_{ks} \in \mu A_1 \subseteq \sigma_{ir}$ , поэтому в этом случае  $\mu^2 x_{i'} y_{j'} a_{ks} \in \sigma_{ir}$ . Пусть  $i' + j' > n + 1$ .

Тогда  $n+1+(i-r)+(s-k) > 0$ . Ясно, что  $i < r$  и  $k > s$  (иначе доказательство очевидно). В этом случае (так как  $n+1+(i-r)+(s-k) > 0$ )  $\mu\sigma_{ks} \subseteq \sigma_{ir}$ , а потому  $(\mu x_{i'}y_{j'} \in R_0) \mu^2 x_{i'}y_{j'}a_{ks} \in \sigma_{ir}$ . Следовательно,  $\Pi \in \sigma_{ir}$ .

в)  $\Pi = \sum_{s=r}^n \sum_{k=1}^i x_{i+1-k}a_{ks}y_{s+1-r}$ . Разберем в отдельности два случая.

в1) Пусть  $i \leq r$ . В этом случае так как  $s = \overline{r, n}$ ,  $k = \overline{1, i}$ , то для всех таких  $(k, s)$   $\sigma_{ks} \subseteq \sigma_{ir}$ . Пусть  $i' = i+1-k$ ,  $j' = s+1-r$ , тогда  $i' + j' = i-r+s-k+2$ . Но при указанных  $k$  и  $s$   $\max(i' + j') = i-r+n-1+2 = i-r+n+1$ . Так как  $i \leq r$ , то  $i' + j' \leq n+1$ , а потому  $x_{i'}y_{j'} \in R_0 \subseteq R$ . Далее, так как  $a_{ks} \in \sigma_{ir}$ , то  $x_{i'}y_{j'}a_{ks} \in \sigma_{ir}$ .

в2) Пусть теперь  $i > r$ . Пусть

$$i' = i+1-k, \quad j' = s+1-r, \quad i' + j' = i-r+s-k+2.$$

Если  $i' + j' > n+1$ , то  $i+r+s-k > n-1$ , поэтому  $i-r+s-k \geq n$ , откуда  $s-k \geq n+r-i$ . Для таких номеров  $k, s$  с условием  $1 \leq k \leq i$ ,  $r \leq s \leq n$ :  $\sigma_{ks} \subseteq \mu\sigma_{ir}$  (см. на рис.:  $\sigma_{ks}$  лежат в заштрихованном треугольнике). Поэтому

$$x_{i'}y_{j'}a_{ks} \in x_{i'}y_{j'}\mu\sigma_{ir} \subseteq \sigma_{ir}.$$

Пусть теперь  $i' + j' = i-r+s-k+2 \leq n+1$ , тогда  $i-r+s-k \leq n-1$  или  $s-k \leq n-1+r-i$ . Для таких номеров  $k, s$  с условием  $1 \leq k \leq i$ ,  $r \leq s \leq n$ :  $\sigma_{ks} \subseteq \sigma_{ir}$  (см. на рис.:  $\sigma_{ks}$  попадают в незаштрихованную часть прямоугольника). Но так как при  $i' + j' \leq n+1$   $x_{i'}y_{j'} \in R_0 \subseteq R$ , то  $x_{i'}y_{j'}a_{ks} \in \sigma_{ir}$ . Итак в случае в)  $\Pi \in \sigma_{ir}$ .

г)  $\text{IV} = \sum_{s=r}^n \sum_{k=i+1}^n \mu x_{n+i+1-k}a_{ks}y_{s+1-r}$ . Пусть

$$i' = n+i+1-k, \quad j' = s+1-r, \quad i' + j' = n+2+i-r+s-k.$$

Разберем в отдельности два случая.

г1) Пусть  $i \geq r$ . Пусть  $i' + j' \leq n+1$ , тогда  $1+(i-r)+(s-k) \leq 0$ . В нашем случае  $i \geq r$ , а потому для любых  $k, s$

$\mu a_{ks} \in \sigma_{ir}$ , далее,  $x_{i'}y_{j'} \in R_0 \subseteq R$ , поэтому  $x_{i'}y_{j'}\mu a_{ks} \in \sigma_{ir}$ . Пусть теперь  $i' + j' > n + 1$ . Тогда  $1 + (i - r) + (s - k) > 0$ , т. е.  $i - r \geq k - s$ , но тогда согласно лемме 2.7.5  $\sigma_{ks} \subseteq \sigma_{ir}$ . Следовательно, так как  $\mu x_{i'}y_{j'} \in R_0 \subseteq R$ , то  $\mu a_{ks}x_{i'}y_{j'} \in \sigma_{ir}$ .

г2) Пусть  $i < r$ . Если  $i' + j' > n + 1$ , то аналогично г1)  $i - r \geq k - s$ ,  $a_{ks} \in \sigma_{ks} \subseteq \sigma_{ir}$  и, следовательно,  $\mu x_{i'}y_{j'}a_{ks} \in \sigma_{ir}$ . Пусть  $i' + j' \leq n + 1$ . Откуда

$$1 + (i - r) + (s - k) \leq 0 \Rightarrow i - r \leq k - s - 1 \Rightarrow s - k < r - i.$$

Для таких номеров  $k, s$   $\mu\sigma_{ks} \subseteq \sigma_{ir}$ . Действительно, для таких номеров  $k, s$ ,  $i + 1 \leq k \leq n$ ,  $r \leq s \leq n$ ,  $s - k < r - i$ , мы имеем  $\sigma_{nr} \supseteq \sigma_{ks}$ . Но

$$\sigma_{nr=A_{n+1-r}}, \quad \sigma_{ir} = \mu A_{n+i+1-r},$$

а потому  $\mu\sigma_{ks} \subseteq \mu\sigma_{nr} = \mu A_{n+1-r} \subseteq \mu A_{n+1-r+i} = \sigma_{ir}$ . Итак,  $\mu\sigma_{ks} \subseteq \sigma_{ir}$  и  $x_{i'}y_{j'} \in R_0 \subseteq R$ . Следовательно,  $x_{i'}y_{j'}\mu a_{ks} \in \sigma_{ir}$  и  $IV \in \sigma_{ir}$ .  $\triangleright$

**Теорема 2.7.8.** Пусть  $R$  — подкольцо поля  $k$ , содержащее кольцо  $R_0 = R(\mu)$ ,  $\mu \in R$ . Тогда кольцо  $R$  является допустимым, другими словами существует промежуточная подгруппа  $H$ ,  $T \leq H \leq G$ , для которой  $R(H) = R$ .

$\triangleleft$  Положим

$$A_1 = \dots = A_n = R$$

и рассмотрим сеть  $\sigma$  вида (4). Тогда согласно теореме 2.7.7  $H = T \cdot G(\sigma)$  — группа, содержащая тор  $T$ , причем как нетрудно видеть  $R(H) = R$ .  $\triangleright$

## § 8. Максимальные нетривиальные промежуточные подгруппы группы $GL(n, \mathbb{Q})$

В этом параграфе мы построим примеры максимальных нетривиальных (не содержащих  $SL(n, \mathbb{Q})$ ) подгрупп группы

$G = GL(n, \mathbb{Q})$ , содержащих тор  $T = T(d)$ . На протяжении всего параграфа мы считаем, что  $\mu = d$  — целое, которое является произведением различных простых (т. е.  $d$  свободно от квадратов).

Пусть  $K = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{d})$  — радикальное расширение степени  $n$  поля рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ . Для всякого

$$z = x_1 + x_2\theta + \dots x_n\theta^{n-1} \in K, \quad \theta = \sqrt[n]{d}, \quad x_i \in \mathbb{Q},$$

положим

$$f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = N_{K/\mathbb{Q}}(z) = \det c(\bar{x}),$$

где

$$c(x) = \begin{pmatrix} x_1 & dx_n & \dots & dx_2 \\ x_2 & x_1 & \dots & dx_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_{n-1} & \dots & x_1 \end{pmatrix},$$

$N_{K/\mathbb{Q}}(z)$  — норма элемента  $z \in K$  в расширении  $K/\mathbb{Q}$ ,

$$T = T(d) = \{c(\bar{x}) : \bar{x} \neq \bar{0}\}.$$

Ясно, что  $f(\bar{x})$  — однородный многочлен степени  $n$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$  (неприводимая разложимая форма степени  $n$ , см., например, [35, с. 96]).

**Лемма 2.8.1.** Пусть  $p$  — простой делитель числа  $d$ ,  $p \mid d$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(\bar{x}) = \det c(\bar{x})$ . Если  $p^k \mid f(x_1, \dots, x_n)$ , то  $p \mid x_1, \dots, p \mid x_k$ .

◁ Доказательство проведем индукцией по  $k$ . При  $k = 1$  лемма очевидна, так как

$$f(x_1, \dots, x_n) = |c(\bar{x})| = x_1^n + d \cdot S,$$

где  $S$  — некоторый сомножитель. Предположим, что наша лемма справедлива для  $k - 1$ , т. е. если  $p^{k-1} \mid f(x_1, \dots, x_n)$ , то

$p \mid x_1, \dots, p \mid x_{k-1}$ . Из строения матрицы  $c(\bar{x})$  мы имеем (так как  $p \mid x_1, \dots, p \mid x_{k-1}$  и  $p \mid d$ )

$$|c(\bar{x})| = x_k^n d^{k-1} + p^k \cdot S, \quad S \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, если  $p^k \mid |c(\bar{x})|$ , то  $p \mid x_k$  ( $d$  свободно от квадратов).  $\triangleright$

**Лемма 2.8.2.** Пусть  $p$  — простой делитель числа  $d$ . Пусть  $p \mid x_1, \dots, p \mid x_k$  ( $x_i \in \mathbb{Z}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ),  $p \mid d$ .

(a) Если  $i \leq n - k$ , то  $p^k \mid C_{1i}$ .

(b) Если  $i > n - k$ , то  $p^{k-1} \mid C_{1i}$ , где  $C_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $c_{ij}$  матрицы  $c = (c_{ij}) = c(\bar{x})$ .

$\triangleleft$  (a) Не умаляя общности, положим  $i = 1$ ,  $k = n - 1$ ,  $C_{1i} = C_{11}$ . Тогда

$$C_{11} = \begin{vmatrix} x_1 & dx_n & \dots & dx_3 \\ x_2 & x_1 & \dots & dx_4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-2} & x_{n-3} & \dots & dx_n \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_1 \end{vmatrix}.$$

Далее, так как  $p \mid x_1, \dots, p \mid x_{n-1}$  и  $p \mid d$ , то

$$C_{11} = \pm d^{n-2} x_n^{n-2} x_{n-1} + p^{n-1} \cdot S$$

для некоторого  $S \in \mathbb{Z}$ . Но так как  $p \mid x_{n-1}$ , то  $p^{n-1} \mid C_{11}$ .

(б) Не умаляя общности, положим  $i = n$ ,  $k = n - 1$ ,  $C_{1i} = C_{1n}$ .

Тогда

$$C_{1n} = \pm \begin{vmatrix} x_2 & x_1 & dx_n & \dots & dx_4 \\ x_3 & x_2 & x_1 & \dots & dx_5 \\ x_4 & x_3 & x_2 & \dots & dx_6 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_2 \end{vmatrix}.$$

Далее, так как  $p \mid x_1, \dots, p \mid x_{n-1}$  и  $p \mid d$ , то

$$C_{1n} = \pm x_n^{n-2} x_{n-2} d^{n-3} + p^{n-2} \cdot S$$

для некоторого целого  $S$ . Но так как  $p \mid x_{n-2}$ ,  $p^{n-3} \mid d^{n-3}$ , то  $p^{n-2} \mid C_{1n}$ , откуда  $p^{k-1} \mid C_{1n}$ .  $\triangleright$

Пусть  $c = (c_{ij}) = c(\bar{x})$ ,  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \neq \bar{0}$ ,  $x_i \in \mathbb{Q}$ , пусть, далее,  $c^{-1} = c(\bar{y}) = (c'_{ij})$ ,  $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ . Тогда очевидно ( $\bar{x} \neq \bar{0}$ )

$$y_i = \frac{C_{1i}}{|c(\bar{x})|},$$

где  $C_{1i}$  — алгебраическое дополнение элемента  $c_{1i}$  матрицы  $c = (c_{ij}) = c(\bar{x})$ . Через  $\mathbb{Z}_{(p)}$  обозначим кольцо всех  $p$ -целых чисел, т. е. всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с  $p$ .

**Теорема 2.8.3.** Пусть  $p$  — простой делитель целого числа  $d$  ( $d$  свободно от квадратов). Если  $i + j \leq n + 1$ , то  $x_i y_j \in \mathbb{Z}_{(p)}$ . Если же  $i + j > n + 1$ , то  $dx_i y_j \in \mathbb{Z}_{(p)}$ , где  $1 \leq i, j \leq n$ .

$\triangleleft$  Рассмотрим  $x_i y_j = \frac{x_i C_{1j}}{|c(\bar{x})|}$ , где  $C_{1j}$  — алгебраическое дополнение элемента  $c_{1j}$  матрицы  $c = c(\bar{x}) = (c_{ij})$ . Ясно, что  $|c(\bar{x})|$  и  $x_i C_{1j}$  — однородные многочлены степени  $n$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Для однородного многочлена  $\varphi(\bar{x}) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$  имеет место формула

$$\varphi(tx_1, \dots, tx_n) = t^n \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

В следствие этой формулы при рассмотрении

$$\frac{x_i C_{1j}}{|c(\bar{x})|}, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Q},$$

можно считать, что  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ , причем  $(x_1, \dots, x_n) = 1$ . Итак, мы считаем, что  $x_i \in \mathbb{Z}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , причем  $(x_1, \dots, x_n) = 1$ . Пусть  $p^k \mid |c(\bar{x})|$  и  $p^{k+1} \nmid |c(\bar{x})|$ . Тогда в силу леммы 2.8.1  $p \mid x_1, \dots, p \mid x_k$ . Далее, так как  $(x_1, \dots, x_n) = 1$ , то  $k \leq n - 1$ . Рассмотрим

$$x_i y_j = \frac{x_i C_{1j}}{|c(\bar{x})|}.$$

Заметим сразу, что согласно 2.8.2  $p^{k-1} \mid C_{1j}$ , а потому  $p$  не входит в канонический знаменатель числа  $dx_i y_j = \frac{dx_i C_{1j}}{|c(\bar{x})|}$  ( $p \mid d$ ) и, следовательно,  $dx_i y_j \in \mathbb{Z}_{(p)}$ . Поэтому рассмотрим случай  $i + j \leq n + 1$ . Если  $j \leq n - k$ , то согласно лемме 2.8.2  $p^k \mid C_{1j}$ , а потому (после сокращений)  $p$  не входит в канонический знаменатель числа  $x_i y_j$ . Следовательно,  $x_i y_j \in \mathbb{Z}_{(p)}$ . Пусть  $j > n - k$ . Тогда согласно 2.8.2  $p^{k-1} \mid C_{1j}$ . Далее,  $j \leq n + 1 - i$  и  $n - k < j$ , откуда

$$n - k < n + 1 - i,$$

а тогда  $n - k \leq n - i$ , поэтому  $k \geq i$ . Но так как  $p \mid x_1, \dots, p \mid x_k$ , то  $p \mid x_i$ . Следовательно,  $p$  не входит (после сокращений на  $p^k$ ) в канонический знаменатель числа

$$x_i y_j = \frac{x_i C_{1j}}{|c(\bar{x})|},$$

а потому  $x_i y_j \in \mathbb{Z}_{(p)}$ .  $\triangleright$

**Следствие 2.8.4.** Кольцо  $R_0 = R(d)$

$$R_0 = \text{ring} \left\langle x_i y_j, dx_r y_s : i + j \leq n + 1, r + s > n + 1 \right. \\ \left. \begin{matrix} x_i \in \mathbb{Q} \\ \bar{x} \neq 0 \end{matrix} \right\rangle$$

содержится в кольце  $\mathbb{Z}_{(p)}$  для всякого простого  $p$  делителя числа  $d$ .

**Следствие 2.8.5.** Пусть  $p$  — простой делитель числа  $d$ . Тогда для сети

$$\sigma_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & d\mathbb{Z}_{(p)} & \dots & d\mathbb{Z}_{(p)} \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)} & \dots & d\mathbb{Z}_{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)} & \dots & \mathbb{Z}_{(p)} \end{pmatrix}$$

тор  $T = T(d)$  нормализует сетевую группу  $G(\sigma_p)$ , а потому  $H_p = T \cdot G(\sigma_p)$  является промежуточной подгруппой группы

$GL(n, \mathbb{Q})$ , не содержащей  $SL(n, \mathbb{Q})$ . Точнее,

$$A_{ij}(H_p) = \sigma_{ij} = \begin{cases} \mathbb{Z}_{(p)}, & i > j; \\ d\mathbb{Z}_{(p)}, & i < j. \end{cases}$$

Доказательство следует из 2.7.7 и 2.8.4.

**Лемма 2.8.6.** Пусть выполнены условия 2.8.5. Пусть, далее,  $H \supsetneq H_p$ ,  $H_p = T \cdot G(\sigma_p)$ . Тогда группа  $H$  содержит специальную линейную группу  $SL(n, \mathbb{Q})$ .

◁ Пусть  $A_i = A_{i1}(H)$ ,  $i = \overline{2, n}$ . В силу 2.7.3  $A_i$  — целый идеал кольца  $R = R(H) \supseteq R_0$ . Так как  $H \supseteq G(\sigma_p)$ , то  $A_i \supseteq \mathbb{Z}_{(p)}$ , а потому нам достаточно показать, что для некоторого  $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{(p)}$   $t_{ij}(\beta) \in H$  при некоторых  $i \neq j$ . Пусть  $a = (a_{ij}) \in H \setminus H_p$ . Так как  $H \supseteq G(\sigma_p)$ , то можно считать, что матрица  $a$  имеет вид

$$a = \begin{pmatrix} p^{k_1} & & \\ p^{k_2} & & * \\ \vdots & & \\ p^{k_n} & & \end{pmatrix}, \quad k_i \in \mathbb{Z}.$$

Если для некоторого  $i$   $k_i < k_s$  при всех  $s = \overline{1, n}$ , то рассмотрим матрицу

$$b = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n t_{si}(-p^{k_s - k_i}) \cdot a, \quad k_s - k_i \geq 1,$$

в которой  $b_{s1} = 0$  для всех  $s \neq i$  и  $b_{si} = p^{k_i}$ . Далее, умножая слева матрицу  $b$  на соответствующую матрицу-перестановку из  $G(\sigma_p)$ , получим, что

$$b = \begin{pmatrix} p^{k_i+1} & & \\ 0 & & * \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если  $k_i = k_j$  ( $i > j$ ), то в матрице  $b = t_{ij}(-1)a$  мы имеем  $b_{i1} = 0$ ,  $b_{j1} = p^{k_i}$ . Итак, можно считать, что матрица  $a$  имеет вид

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ 0 & & & * \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

где  $a_{11} = p^{k_1}$ . Далее, возьмем  $\theta \in \mathbb{Z}_{(p)}^*$  так, что  $1 + \theta \in \mathbb{Z}_{(p)}^*$ . Тогда

$$b = [d_i^{-1}(1 + \theta^{-1}), [a^{-1}, d_1(1 + \theta)]] = t_{1i}(a'_{11}a_{1j}),$$

где  $a'_{11} = \frac{1}{a_{11}}$ . Аналогично можно считать, что  $a_{1j} = p^{s_j}$   $j = \overline{2, n}$ . Тогда  $a'_{11}a_{1j} = p^{s_j - k_1}$ . Если для некоторого  $j$   $s_j \leq k_1$ , то  $t_{1j}(p^{s_j - k_1}) \in H$ , а потому  $(H \geq T)t_{21}(p^{s_j - k_1 - 1}) \in H$ , где  $s_j - k_1 - 1 < 0$ , следовательно,  $A_2 \supseteq \left\langle \frac{1}{p}, \mathbb{Z}_{(p)} \right\rangle_{rihg} = \mathbb{Q}$ . Если же  $s_j > k_1$  для всех  $j = 2, \dots, n$ , то рассмотрим матрицу ( $s_j - k_1 \geq 1$ )

$$a \cdot \prod_{j=2}^n t_{1j}(-p^{s_j - k_1}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & * \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Действуя таким образом, мы получим, что либо  $A_2 = \mathbb{Q}$ , либо матрица  $a$  приводится с помощью элементов из  $G(\sigma_p)$  к диагональной матрице

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

где  $c_{ii} = p^{k_i}$ . Если  $k_1 = \dots = k_n$ , то скалярная матрица  $c$  содержится в торе  $T$ , но по условию  $a \notin T \cdot G(\sigma_p)$ . Пусть  $a_{11} \neq a_{22}$ ,

$a_{11} = p^{k_1}$ ,  $a_{22} = p^{k_2}$ ,  $k_1 \neq k_2$ , причем  $k_1 > k_2$ . Тогда

$$ct_{21}(1)c^{-1} = t_{21}(p^{k_2-k_1}),$$

но  $k_2 - k_1 < 0$ , а потому  $A_2 \ni \frac{1}{p}$  и  $A_2 = \mathbb{Q}$ .  $\triangleright$

**Теорема 2.8.7.** Пусть  $p$  — простой делитель числа  $d$ . Тогда для сети  $\sigma_p$

$$\sigma_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & d\mathbb{Z}_{(p)} & \dots & d\mathbb{Z}_{(p)} \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)} & \dots & d\mathbb{Z}_{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)} & \dots & \mathbb{Z}_{(p)} \end{pmatrix}$$

группа  $H_p = T \cdot G(\sigma_p)$  является максимальной нетривиальной (не содержащей  $SL(n, \mathbb{Q})$ ) подгруппой полной линейной группы  $G = GL(n, \mathbb{Q})$ , содержащей тор  $T$ .

$\triangleleft$  Согласно 2.8.5 нам достаточно показать, что группа  $H_p$  максимальна. Пусть  $H$  — подгруппа группы  $G = GL(n, \mathbb{Q})$ , причем  $H \supsetneq H_p$ . Покажем, что  $H = G$ . Согласно 2.8.6  $H \supseteq SL(n, \mathbb{Q})$ . Далее, так как  $H$  содержит тор  $T$ , то матрица  $c(\bar{x})$  при  $\bar{x} = (0, 1, 0, \dots, 0)$  содержится в группе  $H$ . Умножая матрицу  $c(\bar{x})$  на матрицы-перестановки из  $SL(n, \mathbb{Q})$  и диагональные матрицы  $d_i(-1) \in G(\sigma_p)$ , мы получим, что  $d_i(d) \in H$ . Но так как  $H \supseteq G(\sigma_p)$ , то  $d_i(p) \in H$  и  $d_i(\frac{1}{p}) \in H$ . Следовательно,

$$d_i(\mathbb{Z}_{(p)}^*) \subseteq H, \quad d_i(p) \in H,$$

а потому группа диагональных матриц  $D(2, \mathbb{Q})$  содержится в  $H$  и, следовательно,  $H = GL(n, \mathbb{Q})$ .  $\triangleright$

**Следствие 2.8.8.** Для всякого простого числа  $p$  группа  $T(p)G(\sigma_p)$  является максимальной нетривиальной (не содержащей  $SL(n, \mathbb{Q})$ ) подгруппой полной линейной группы  $GL(n, \mathbb{Q})$ .

## ГЛАВА 3

### ПОДГРУППЫ ГРУППЫ $GL(2, k)$ , СОДЕРЖАЩИЕ НЕРАСЩЕПИМЫЙ МАКСИМАЛЬНЫЙ ТОР

Пусть  $k$  — произвольное поле характеристики не равной 2,  $K$  — квадратичное расширение поля  $k$ . Пусть, далее,  $T$  — максимальный нерасщепимый тор в полной линейной группе  $G = GL(2, k)$ , связанный с квадратичным расширением  $K/k$ . В этой главе исследуются подгруппы  $H$  группы  $G$ , содержащие тор  $T$ .

#### § 1. Кольца множителей, связанные с промежуточными подгруппами

Пусть  $K$  — расширение поля  $k$  степени  $n$ ,  $H$  — промежуточная подгруппа,  $T \leq H \leq G = GL_k(K)$ , содержащая трансвекцию, т. е. отображение  $\tau(\alpha, \varphi) \in G$  вида  $\tau(\alpha, \varphi) = 1 + \alpha\varphi$ , где  $\alpha \in K$ ,  $\varphi : K \rightarrow k$  — ненулевой функционал, причем  $\varphi(\alpha) = 0$ :

$$\tau(\alpha, \varphi)(x) = x + \alpha\varphi(x), \quad x \in K.$$

Зафиксируем  $\varphi$  и рассмотрим множество (модуль трансвекций)

$$A = A_\varphi = \{\alpha \in K : \tau(\alpha, \varphi) \in H\},$$

которое является подгруппой аддитивной группы  $K^+$  в силу равенства  $\tau(\alpha, \varphi)\tau(\beta, \varphi) = \tau(\alpha + \beta, \varphi)$ . Нетрудно проверить равенство  $A_\varphi = tA_{\varphi t}$  справедливое для любого  $t \in K^*$ , где  $\varphi t$  — функционал  $(\varphi t)(x) = \varphi(tx)$ . Далее (из соображений размерности), очевидно, что множество  $\{\varphi t : t \in K\}$  совпадает с множеством всех функционалов. Следовательно, для любых двух

ненулевых функционалов  $\varphi$  и  $\psi$  найдется  $t \in K^*$ , что  $A_\varphi = tA_\psi$ . Рассмотрим кольцо множителей  $R$  модуля  $A_\varphi$

$$R = R(A_\varphi) = \{\lambda \in k : \lambda A_\varphi \subseteq A_\varphi\}.$$

В силу сказанного выше это кольцо  $R$  не зависит от функционала  $\varphi$ , а зависит только от подгруппы  $H$ . Поэтому кольцо  $R = R(H)$  мы называем кольцом множителей промежуточной подгруппы  $H$ . Теперь мы займемся нахождением элементов, принадлежащих кольцу множителей  $R$  в случае квадратичного тора. А, именно, мы покажем (теорема 3.1.2), что в случае квадратичного тора ( $K$  — квадратичное расширение поля  $k$ )

$$2 \cdot \frac{\text{tr}(z^2)}{N(z)} \in R$$

для всякого  $z \in K^*$ , где  $\text{tr}(z)$  и  $N(z)$  — соответственно след и норма элемента  $z$  в расширении  $K/k$ .

В дальнейшем  $n = (K : k) = 2$ ,  $\text{char } k \neq 2$ ,  $T$  — квадратичный тор.

**Лемма 3.1.1.** Пусть  $K$  — квадратичное расширение поля  $k$ ,  $\varphi : K \rightarrow k$  — функционал,  $\alpha \in \ker \varphi$ . Тогда

$$\varphi(z\alpha) = -N(z)\varphi(z^{-1}\alpha),$$

$$z^{-1}\alpha\varphi - \varphi(z^{-1}\alpha) = \frac{\alpha}{N(z)}\varphi z$$

для всякого  $z \in K^*$  (второе равенство понимается как равенство эндоморфизмов поля  $K$ ).

◁ Первое равенство следует из того, что  $\varphi(\alpha) = 0$  и  $z + N(z)z^{-1} \in k$ . Докажем второе равенство. Если  $z \in k$ , то оно очевидно. Пусть  $z \in K \setminus k$ . Тогда ненулевые элементы  $\alpha$  и  $z^{-1}\alpha$  составляют базис  $K$  над  $k$  (если  $\alpha = 0$ , то лемма очевидна). Несложно проверить теперь равенство эндоморфизмов, стоящих в левой и правой части второго равенства леммы, на элементах базиса. ▷

**Теорема 3.1.2.** Пусть  $R$  — кольцо множителей промежуточной подгруппы  $H$ ,  $T \leq H \leq G$ ,  $T$  — квадратичный тор. Тогда для всех  $z \in K^*$

$$2 \cdot \frac{\text{tr}(z^2)}{N(z)} \in R.$$

◁ Пусть  $\tau(\alpha, \varphi) \in H$ ,  $\alpha \in A = A_\varphi$ . На основании леммы 3.1.1 нетрудно доказать равенство

$$(z^{-1} - \varphi(z^{-1}\alpha))\tau(\alpha, \varphi)z = 1 + \alpha\omega,$$

где  $\omega$  — функционал,

$$\omega = -\varphi(z^{-1}\alpha)\varphi z + \frac{1}{N(z)}\varphi z^2.$$

Заметим, что левая часть указанного равенства содержится в группе  $H$  в следствие того, что  $\tau(\alpha, \varphi) \in H$  и  $K^* \leq H$ . Заменив в этом равенстве  $z$  на  $z^{-1}$  и  $\alpha$  на  $(-\alpha)$ , мы получим

$$(z + \varphi(z\alpha))\tau(-\alpha, \varphi)z^{-1} = 1 + \alpha\omega_1,$$

где для функционала  $\omega_1$  имеем

$$\omega_1 = -\varphi(z\alpha)\varphi z^{-1} - N(z)\varphi z^{-2}.$$

Учитывая первое равенство леммы 3.1.1, нетрудно видеть, что  $\omega(\alpha) = \omega_1(\alpha)$ . Последнее равенство влечет за собой равенство

$$(1 + \alpha\omega)(1 + \alpha\omega_1)^{-1} = 1 + \alpha(\omega - \omega_1).$$

Для функционала  $\omega - \omega_1$  имеем  $(\omega - \omega_1)(\alpha) = 0$ , а потому  $1 + \alpha(\omega - \omega_1)$  — трансвекция, содержащаяся в группе  $H$ . Нетрудно проверить, что

$$\omega - \omega_1 = \frac{1}{N(z)}[\varphi(z\alpha)\varphi(z + \bar{z}) + \varphi(z^2 + \bar{z}^2)],$$

где  $\bar{z}$  — сопряжение элемента  $z$ ,  $z + \bar{z} \in k$ . Таким образом, трансвекция

$$1 + \alpha(\omega - \omega_1) = 1 + \frac{1}{N(z)} \left[ \varphi(z\alpha)(z + \bar{z}) + (z^2 + \bar{z}^2) \right] \alpha \varphi$$

содержится в группе  $H$ , а потому для всякого  $\alpha \in A_\varphi$

$$\frac{1}{N(z)} \left[ \varphi(z\alpha)(z + \bar{z}) + (z^2 + \bar{z}^2) \right] \alpha \in A_\varphi.$$

В последнем включении заменим  $\alpha$  на  $(-\alpha)$  и вычтем одно из другого. Тогда  $\frac{2}{N(z)}(z^2 + \bar{z}^2)\alpha \in A_\varphi$ . Так как  $z^2 + \bar{z}^2 = \text{tr}(z^2) - 2N(z)$ , то теорема доказана.  $\triangleright$

Рассмотрим подкольцо  $R_0$  поля  $k$ , определенное квадратичным расширением  $K/k$

$$R_0 = \text{ring}_{z \in K^*} \left\langle 1, \frac{2\text{tr}(z^2)}{N(z)} \right\rangle.$$

**Следствие 3.1.3.** Кольцо множителей  $R$  произвольной промежуточной подгруппы  $H$  содержит подкольцо  $R_0$ .

Отметим тот факт, что поле  $K$  можно представить в виде  $K = k(\sqrt{\mu})$ , где  $\mu \in R_0$ . Действительно, пусть  $K = k(\sqrt{\mu_1})$ . Для  $s = \frac{16}{4-\mu_1}$  положим  $\mu = \mu_1 s^2$ . Тогда  $K = k(\sqrt{\mu_1}) = k(\sqrt{\mu})$ , но как легко проверить, для  $z = \frac{4+\mu_1}{4} + \sqrt{\mu_1}$  мы имеем

$$\mu = \mu_1 s^2 = 4 \cdot \frac{\text{tr}(z^2)}{N(z)} - 16 \in R_0.$$

## § 2. Допустимые кольца и модули ( $2 \in R_0^*$ )

В этом параграфе продолжается изучение модуля трансвекций  $A$  и кольца множителей  $R$ , определенных для промежуточной подгруппы  $H$ . Мы дадим необходимые и достаточные условия того, когда модуль и его кольцо множителей реализуются

в качестве промежуточной подгруппы. На протяжении всего дальнейшего изложения мы предполагаем, что  $2 \in R_0^*$ . Для удобства вычислений выберем базис  $(1, \sqrt{\mu})$  поля  $K = k(\sqrt{\mu})$  над  $k$ ,  $\text{char } k \neq 2$ , причем согласно предыдущему параграфу  $\mu \in R_0$ . В этом случае  $G = GL(2, k)$ , а тор  $T = T(K)$  имеет вид

$$T = T(\mu) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y\mu \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in k, (x, y) \neq (0, 0) \right\}.$$

Согласно § 4 этой главы для промежуточной подгруппы  $H$ , не содержащей трансвекций либо  $H = T$ , либо  $H$  совпадает с полупрямым произведением тора  $T$  на циклическую группу второго порядка  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ . Поэтому мы считаем, что  $H$  — промежуточная подгруппа,  $T \leq H \leq G$ , содержащая трансвекцию.

Для подгруппы  $H$  определим *модуль трансвекций*  $A = A(H)$ :

$$A = A(H) = \left\{ \alpha \in k : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in H \right\}$$

и его *кольцо множителей*

$$R = R(H) = \{ \lambda \in k : \lambda A \subseteq A \}.$$

Согласно следствию 3.1.3 кольцо  $R$  содержит подкольцо  $R_0$ , (напомним, что  $\mu \in R_0$ ,  $2 \in R_0^*$ ). Согласно теореме 3.1.2

$$R_0 = \text{ring}_{x \in k} \left\langle \frac{\mu}{x^2 - \mu} \right\rangle.$$

Рассмотрим вопрос о том, какие элементы содержатся в кольце  $R_0$ .

**Лемма 3.2.1.** *Для любых  $x, y \in k$  элементы*

$$\frac{\mu x}{x^2 - \mu}, \quad \frac{\mu xy}{(x^2 - \mu)(y^2 - \mu)}$$

*содержатся в кольце  $R_0$ .*

◁ Нетрудно проверить справедливость формулы

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{x^2 - \mu} + \frac{\mu}{y^2 - \mu} &= \frac{\mu}{z^2 - \mu} + \frac{2\mu}{x^2 - \mu} + \\ &+ \frac{2\mu^2}{(x^2 - \mu)(z^2 - \mu)} + \frac{2zx\mu}{(x^2 - \mu)(z^2 - \mu)}, \end{aligned}$$

где  $z = \frac{xy+\mu}{x+y}$ , или  $y = \frac{\mu-zx}{z-x}$ . Но элементы  $\frac{\mu}{x^2-\mu}$ ,  $\frac{\mu}{y^2-\mu}$ ,  $\frac{\mu}{z^2-\mu}$  содержатся в кольце  $R_0$ , а потому

$$\frac{2\mu^2}{(x^2 - \mu)(z^2 - \mu)} = 2 \frac{\mu}{x^2 - \mu} \frac{\mu}{z^2 - \mu} \in R_0.$$

Следовательно, из формулы мы получаем, что  $\frac{2\mu zx}{(x^2-\mu)(z^2-\mu)} \in R_0$  и так как  $2 \in R_0^*$ , то  $\frac{\mu zx}{(x^2-\mu)(z^2-\mu)} \in R_0$ . Положив в последнем включении  $z = 1$  и умножив его на  $(1-\mu)$ , мы получим  $\frac{\mu}{x^2-\mu}$ . ▷

Лемма 3.2.1 дает возможность определить идеал  $Q$  для всякого кольца  $R$ , содержащего  $R_0$ ,  $R_0 \subseteq R \subseteq k$ . А именно, пусть  $Q$  — идеал кольца  $R$ , порожденный всеми элементами  $\frac{\mu x}{x^2-\mu} \in R_0 \subseteq R$ :

$$Q = \text{ideal}_{x \in k} \left( \frac{\mu x}{x^2 - \mu} \right).$$

**Лемма 3.2.2.** Пусть  $R$  — подкольцо поля  $k$ , содержащее  $R_0$ ;  $Q$  — идеал кольца  $R$  определенный выше. Тогда

$$\mu R \subseteq Q \subseteq R, \quad Q^2 \subseteq \mu R.$$

◁ Пусть  $r \in R$ . Тогда

$$\mu r = \frac{\mu r}{r^2 - \mu} (r^2 - \mu) \in Q,$$

следовательно,  $\mu R \subseteq Q$ . Пусть, далее,  $q_1 = \frac{\mu x}{x^2-\mu}$ ,  $q_2 = \frac{\mu y}{y^2-\mu}$  — элементы идеала  $Q$ . По лемме 3.2.1

$$\frac{\mu xy}{(x^2 - \mu)(y^2 - \mu)} \in R_0 \subseteq R,$$

поэтому  $q_1 q_2 \in \mu R$ . ▷

**Лемма 3.2.3.** Пусть  $A$  — аддитивная подгруппа группы  $k^+$ ,  $R = R(A)$  — кольцо множителей модуля  $A$ ,  $R = \{\lambda \in k : \lambda A \subseteq A\}$ . Если  $R \supseteq R_0$  и  $\mu A^2 \subseteq R$ , то имеют место включения

$$QA^2 \subseteq A, QA \subseteq R, \mu A \subseteq Q \subseteq R, \mu A \subseteq QA, \mu A^2 \subseteq QA.$$

◁ Пусть  $\frac{\mu x}{x^2 - \mu} \in Q$ ,  $\alpha, \beta \in A$ . Тогда ( $\alpha \neq 0$ )

$$\frac{\mu x}{x^2 - \mu} \alpha \beta = \frac{\mu x \left(\frac{1}{\alpha}\right)}{(x^2 - \mu) \left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - \mu\right)} (1 - \mu \alpha^2) \beta.$$

По условию  $1 - \mu \alpha^2 \in R$ , согласно 3.2.1 элемент  $\frac{\mu x \left(\frac{1}{\alpha}\right)}{(x^2 - \mu) \left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - \mu\right)}$  содержится в  $R_0 \subseteq R$ . Далее,  $\beta \in A$ . Следовательно,  $\frac{\mu x}{x^2 - \mu} \alpha \beta \in A$ . Итак, мы показали, что  $QA^2 \subseteq A$ . Далее, пусть  $\lambda \in QA$ . Тогда согласно доказанному включению  $QA^2 \subseteq A$  имеем  $\lambda A \subseteq A$ , откуда по определению  $\lambda \in R$ . Итак,  $QA \subseteq R$ . Далее, пусть  $\alpha \in A$ , тогда

$$\mu \alpha = \frac{\mu \left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - \mu} (1 - \mu \alpha^2).$$

Но так как  $\mu \alpha^2 \in R$ , то  $\mu \alpha \in Q$ , откуда  $\mu A \subseteq Q$ . Так как  $\frac{\mu x}{x^2 - \mu} \in Q$ , то при  $x = 1$  имеем  $\frac{\mu}{1 - \mu} \in Q$ , откуда  $\mu \in Q$  ( $1 - \mu \in R_0 \subseteq R$ ). Следовательно,  $\mu A \subseteq QA$ . Мы уже доказали, что  $\mu A \subseteq Q$ , откуда  $\mu A^2 \subseteq QA$ . ▷

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Под  $QA$  понимается  $R$ -подмодуль модуля  $A$ , порожденный всеми элементами  $qa$ , где  $q \in Q$ ,  $a \in A$ . Согласно лемме 3.2.3  $QA$  и  $\mu A$  — целые идеалы кольца  $R$ .

Пусть выполнены условия леммы 3.2.3. Рассмотрим таблицу

$$\sigma = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} QA & \mu A \\ A & QA \end{pmatrix},$$

которая согласно лемме 3.2.3 является сетью, т. е.  $\sigma_{ir} \sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$  для всех  $1 \leq i, j \leq 2$ . Следовательно, мы можем определить сетевую группу  $G(\sigma) = (e + M(\sigma))^*$ , где  $e$  — единичная матрица,

$M(\sigma) = \{a = (a_{ij}) : a_{ij} \in \sigma_{ij}\}$  — сетевое кольцо. Итак, сетевая группа  $G(\sigma)$  состоит из всех обратимых элементов кольца с единицей  $e + M(\sigma)$ .

**Лемма 3.2.4.** *Справедливо равенство:*

$$G(\sigma) = \{g \in e + M(\sigma) : \det g \in R^*\}.$$

◁ Заметим, что для всякого  $g \in e + M(\sigma)$ ,  $\det g \in R$ . Следовательно, включение ( $\subseteq$ ) очевидно. Докажем обратное включение. Пусть  $g \in e + M(\sigma)$  и  $\Delta = \det g \in R^*$ ,

$$g = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1 + a_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{11}, a_{22} \in QA, a_{21} \in A, a_{12} \in \mu A.$$

Тогда  $g^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 + a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 + a_{11} \end{pmatrix}$ . Так как  $\Delta = \det g$  и  $a_{12}a_{21} \in \mu A^2 \subseteq QA$  (по лемме 3.2.3), то  $\Delta = \det g \in 1 + QA$ . Поэтому  $\Delta^{-1} \in 1 + QA$ , откуда  $g^{-1} \in e + M(\sigma)$ , а потому  $g \in G(\sigma)$ . ▷

**Теорема 3.2.5.** *Пусть  $R$  — кольцо множителей модуля  $A$ ,  $A \leq k^+$ . Если  $R \supseteq R_0$  и  $\mu A^2 \subseteq R$ , то тор  $T$  нормализует группу  $G(\sigma)$ , а потому  $T \cdot G(\sigma)$  — группа, содержащая тор  $T$ .*

◁ Пусть  $a = (a_{ij}) \in G(\sigma)$ ,  $c(x) = \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix} \in T$ . Покажем, что для всякого  $x \in k$ ,  $b = c(x)ac^{-1}(x) \in G(\sigma)$ . Для этого достаточно показать, что  $b_{ij} - a_{ij} \in \sigma_{ij}$ . Имеем

$$b_{11} - a_{11} = \frac{\mu}{x^2 - \mu}(a_{11} - a_{22}) + \frac{\mu x}{x^2 - \mu}(\mu a_{21} - a_{12})\frac{1}{\mu}.$$

Так как

$$\frac{\mu}{x^2 - \mu} \in R_0 \subseteq R, \quad a_{11} - a_{22} \in QA,$$

$$\frac{\mu x}{x^2 - \mu} \in Q, \quad (\mu a_{21} - a_{12})\frac{1}{\mu} \in A,$$

то  $b_{11} - a_{11} \in QA = \sigma_{11}$ . Далее,  $b_{22} - a_{22} = -(b_{11} - a_{11}) \in QA = \sigma_{22}$ .

Имеем

$$b_{21} - a_{21} = \frac{x}{x^2 - \mu}(a_{11} - a_{22}) + \frac{\mu}{x^2 - \mu}(\mu a_{21} - a_{12})\frac{1}{\mu}.$$

Так как  $\frac{x}{x^2 - \mu}(a_{11} - a_{22}) \in \frac{1}{\mu}Q \cdot QA$  и  $Q^2 \subseteq \mu R$ , то  $\frac{x}{x^2 - \mu}(a_{11} - a_{22}) \in A$ . Далее,  $\frac{\mu}{x^2 - \mu} \in R_0 \subseteq R$ ,  $(\mu a_{21} - a_{12})\frac{1}{\mu} \in A$ . Итак,  $b_{21} - a_{21} \in A = \sigma_{21}$ . И, наконец,  $b_{12} - a_{12} = -\mu(b_{21} - a_{21}) \in \mu A = \sigma_{12}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $A$  — подгруппа аддитивной группы поля  $k$ ,  $A \neq (0)$ ,  $A \leq k^+$ ,  $R = R(A)$  — кольцо множителей модуля  $A$ . Пара  $(R, A)$  называется *допустимой*, если для некоторой промежуточной подгруппы  $H$ ,  $T \leq H \leq G$ ,  $A$  совпадает с модулем трансвекций группы  $H$ , а  $R$  с его кольцом множителей:  $A = A(H)$ ,  $R = R(H)$ . Далее, мы говорим, что подкольцо  $R$  поля  $k$  *допустимо*, если для некоторой подгруппы  $H$ ,  $T \leq H \leq G$ ,  $R = R(H)$ .

**Теорема 3.2.6.** Для того, чтобы пара  $(R, A)$  была допустимой, необходимо и достаточно, чтобы  $R_0 \subseteq R$  и  $\mu A^2 \subseteq R$ .

$\triangleleft$  *Необходимость.* Если пара  $(R, A)$  допустима, то для некоторой подгруппы  $H$ ,  $T \leq H \leq G$ , мы имеем  $A = A(H)$ ,  $R = R(H)$ . Включение  $R_0 \subseteq R$  вытекает из следствия 3.1.3.

Покажем, что  $\mu A^2 \subseteq R$ . Пусть  $\alpha \in A = A(H)$ , тогда  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in H$ .

Из формулы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu\alpha & \mu \\ 1 & -\mu\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - \mu\alpha^2) \end{pmatrix} \in H$$

следует, что  $1 - \mu\alpha^2 \in R^*$ , откуда  $\mu\alpha^2 \in R$  для всякого  $\alpha \in A$ . Поэтому для любых  $\alpha, \beta \in A$   $\mu(\alpha + \beta)^2 \in R$ , откуда  $\mu\alpha^2 + \mu\beta^2 + 2\mu\alpha\beta \in R$ . Но согласно доказанному  $\mu\alpha^2, \mu\beta^2 \in R$ . Следовательно,  $2\mu\alpha\beta \in R$ , откуда  $(2 \in R_0^* \subseteq R^*)$  мы имеем  $\mu\alpha\beta \in R$  и  $\mu A^2 \subseteq R$ .

*Достаточность.* По условию  $R \geq R_0$  и  $\mu A^2 \subseteq R$ . Следовательно, мы можем рассмотреть группу  $H = T \cdot G(\sigma)$  из

теоремы 3.2.5, где

$$\sigma = \begin{pmatrix} QA & \mu A \\ A & QA \end{pmatrix}.$$

Осталось показать, что модуль трансвекций  $A(H)$  группы  $H$  совпадает с  $A$ . Очевидно, что  $A \subseteq A(H)$ . Обратно, пусть  $\alpha \in A(H)$ , т. е.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in H = T \cdot G(\sigma)$ . Тогда для некоторой матрицы

$$t = \begin{pmatrix} x & y\mu \\ y & x \end{pmatrix} \in T$$

мы имеем

$$t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in G(\sigma),$$

откуда  $y\mu \in \mu A$ ,  $x \in 1 + QA$ . Следовательно,  $t \in e + M(\sigma)$ . Но так как

$$t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in G(\sigma),$$

то по лемме 3.2.4  $\det(t) \in R^*$ , а потому  $t \in G(\sigma)$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in G(\sigma)$ . Следовательно,  $\alpha \in A$ .  $\triangleright$

**Следствие 3.2.7.** *Подкольцо  $R$  поля  $k$  допустимо тогда и только тогда, когда  $R \supseteq R_0$ .*

$\triangleleft$  Достаточно в теореме 3.2.6 взять пару  $(R, R)$ .  $\triangleright$

### § 3. Включение в нормализатор

Пусть  $H$  — промежуточная подгруппа,  $T \leq G \leq G = GL(2, k)$ , содержащая трансвекцию. Пусть, далее,  $A = A(H)$  — модуль трансвекций промежуточной подгруппы  $H$ ,  $A = \{\alpha \in k : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in H\}$ , а  $R = R(H) = \{\lambda \in k : \lambda A \subseteq A\}$  — кольцо множителей. Пара  $(R, A)$  допустима (см. § 2), а потому согласно теореме 3.2.6 кольцо  $R$  содержит подкольцо  $R_0$  (напомним, что

мы предполагаем, что  $2 \in R_0^*$  и  $\mu A^2 \subseteq R$ . Рассмотрим (см. § 2) идеал  $Q$  кольца  $R$ , порожденный всеми элементами  $\frac{\mu x}{x^2 - \mu} \in R_0$ . Далее, рассмотрим сеть

$$\sigma = \begin{pmatrix} QA & \mu A \\ A & QA \end{pmatrix}.$$

Через  $E(\sigma)$  обозначим подгруппу, порожденную всеми (общими) трансвекциями из сетевой группы  $G(\sigma)$ . Напомним, что под общими трансвекциями подразумеваются (при  $n = 2$ ) матрицы  $\begin{pmatrix} 1 + \alpha & \beta \\ \gamma & 1 - \alpha \end{pmatrix}$  из  $SL(2, k)$ , т. е. матрицы указанного вида с условием  $\alpha^2 = -\beta\gamma$ . Далее, нетрудно видеть, что всякая общая трансвекция сопряжена с помощью матрицы из тора  $T$  с элементарной трансвекцией. Следующая теорема носит структурный характер.

**Теорема 3.3.1.** Пусть  $H$  — промежуточная подгруппа,  $T \leq H \leq G$ , содержащая трансвекцию. Тогда  $T \cdot E(\sigma)$  является группой, причем

$$TE(\sigma) \leq H \leq N_G(E(\sigma)),$$

где  $N_G(E(\sigma))$  — нормализатор подгруппы  $E(\sigma)$  в группе  $G$ .

◁ Пара  $(R, A)$  — допустима, а потому (теорема 3.2.6) выполнены условия теоремы 3.2.5, согласно которой тор  $T$  нормализует сетевую группу  $G(\sigma)$ , а вместе с ней и группу  $E(\sigma)$ . Следовательно,  $T \cdot E(\sigma)$  — группа. Для доказательства включения  $T \cdot E(\sigma) \leq H \leq N_G(E(\sigma))$  достаточно показать, что группа  $E(\sigma)$  совпадает с подгруппой  $E(H)$  порожденной всеми трансвекциями из  $H$ . Покажем включение  $E(\sigma) \subseteq E(H)$ . Пусть  $g$  — трансвекция из  $E(\sigma)$

$$g = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & \mu\beta_1 \\ \beta_2 & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in QA, \quad \beta_1, \beta_2 \in A, \quad \alpha^2 = -\mu\beta_1\beta_2.$$

Пусть  $\beta_2 \neq 0$  (иначе включение  $g \in E(H)$  очевидно). Для  $x = -\frac{\alpha}{\beta_2}$  имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ \frac{x}{\mu} & 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 1 & x \\ \frac{x}{\mu} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\xi = -2\alpha \frac{x}{x^2-\mu} - \beta_2 \frac{\mu}{x^2-\mu} + \beta_1 \left(1 + \frac{\mu}{x^2-\mu}\right)$ . Но  $Q^2 \subseteq \mu R$ , поэтому  $\xi \in A = A(H)$ , следовательно,  $g \in E(H)$ . Покажем теперь обратное включение  $E(H) \subseteq E(\sigma)$ . Пусть

$$g = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & \beta_1 \\ \beta_2 & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = -\beta_1 \beta_2$$

— трансвекция из  $H$ . Тогда для  $y = -\frac{\alpha}{\beta_2}$  имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ \frac{y}{\mu} & 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 1 & y \\ \frac{y}{\mu} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \in H.$$

Откуда  $\xi \in A = A(H)$ . Теперь для  $x = -\frac{\mu}{y}$  имеем

$$g = \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix}^{-1} \in E(H).$$

Но

$$g = \begin{pmatrix} 1 + \xi \frac{\mu x}{x^2-\mu} & -\frac{\mu}{x^2-\mu} \mu \xi \\ \frac{x^2}{x^2-\mu} \xi & 1 - \xi \frac{\mu x}{x^2-\mu} \end{pmatrix},$$

где  $\frac{\mu x}{x^2-\mu} \in Q$ ,  $\xi \in A$ ,  $\frac{x^2}{x^2-\mu} \in R_0 \subseteq R$ ,  $\frac{\mu}{x^2-\mu} \in R_0 \subseteq R$ . Следовательно,  $g \in G(\sigma)$ , а потому  $g \in E(\sigma)$ .  $\triangleright$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В силу сказанного выше нетрудно видеть, что группа  $T \cdot E(\sigma)$  совпадает с группой  $\langle T, t_{21}(A) \rangle$ .

В следующем утверждении дается вычисление нормализатора  $N_G(E(\sigma))$  подгруппы  $E(\sigma)$  в группе  $G = GL(2, k)$ .

**Предложение 3.3.2.** Нормализатор  $N_G(E(\sigma))$  подгруппы  $E(\sigma)$  в группе  $G = GL(2, k)$  совпадает с группой  $T \cdot G(\omega)$ , где

$$\omega = \begin{pmatrix} R & Q \\ \frac{1}{\mu} Q & R \end{pmatrix}.$$

◁ Заметим в начале, что таблица  $\omega$  является сетью в силу леммы 3.2.2, согласно которой  $Q^2 \leq \mu R$ , откуда  $\frac{1}{\mu}Q \cdot Q \subseteq R$ . Далее, дословно повторяя доказательство теоремы 3.2.5 для сети  $\omega$ , можно убедиться в том, что тор  $T$  нормализует группу  $G(\omega)$ , а потому  $T \cdot G(\omega)$  — группа. Докажем теперь равенство  $T \cdot G(\omega) = N_G(E(\sigma))$ . Заметим в начале, что  $T \leq N_G(E(\sigma))$ . Действительно, тор  $T$  нормализует группу  $G(\sigma)$  (см. 3.2.5), а потому и группу  $E(\sigma)$ . Используя лемму 3.2.3, легко видеть, что для всех  $a \in G(\sigma)$  и  $g \in G(\omega)$ ,  $gag^{-1} \in G(\sigma)$ , следовательно, группа  $G(\omega)$  нормализует группу  $G(\sigma)$ , а потому и группу  $E(\sigma)$ . Итак,  $T \cdot G(\omega) \leq N_G(E(\sigma))$ . Докажем обратное включение. Пусть  $H_1 = N_G(E(\sigma))$ . Как мы уже отметили  $T \leq H_1$ . Пусть  $A_1 = A(H_1)$ ,  $R_1 = R(H_1)$ . Пара  $(R_1, A_1)$  допустима, а потому (см. 3.2.6)  $R_1 \geq R_0$ . Воспользуемся теперь факторизацией (см. гл. II, § 2, следствие 2.2.2) для промежуточной подгруппы  $H_1$ . Так как  $2 \in R_0^* \in R_1^*$ , то группу  $H_1$  можно представить в виде

$$H_1 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_1 & \Delta_1 \end{pmatrix},$$

где  $\Delta_1 \subseteq R_1^*$ . Так как  $H_1 = N_G(E(\sigma))$ , то для всякого  $\gamma_1 \in \Delta_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_1 A & 1 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix},$$

но тогда  $\gamma_1 A \subseteq A$ , а потому  $\gamma_1 \in R^*$  и  $\Delta_1 \subseteq R^*$ . Далее, как мы уже показали  $H_1 \supseteq T \cdot G(\omega)$ , а потому  $\Delta_1 \supseteq R^*$ . И, следовательно,  $\Delta_1 = R^*$ . Теперь для доказательства включения  $H_1 \subseteq T \cdot G(\omega)$  нам достаточно показать, что  $A_1 \subseteq \frac{1}{\mu}Q$ . Пусть  $\beta \in A_1$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \in H_1$ . Тогда для  $\begin{pmatrix} 1 & \mu\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E(\sigma)$ ,  $\alpha \in A$  мы имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (1 - \mu\alpha\beta) & \mu\alpha \\ -\mu\beta^2\alpha & (1 + \mu\alpha\beta) \end{pmatrix}.$$

Откуда  $\mu\beta^2\alpha \in A$  для любых  $\alpha \in A$ ,  $\beta \in A_1$ . Поэтому  $\mu A_1^2 A \subseteq A$ .

Отсюда по определению  $\mu A_1^2 \subseteq R$ . Пусть  $\beta \in A_1$ ,  $\beta \neq 0$ , тогда

$$\beta = \frac{\frac{1}{\beta}}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 - \mu} (1 - \mu\beta^2).$$

Но  $\frac{\frac{1}{\beta}}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 - \mu} \in \frac{1}{\mu}Q$ , а  $\mu\beta^2 \in R$ , отсюда  $\beta \in \frac{1}{\mu}Q$ . Итак,  $A_1 \subseteq \frac{1}{\mu}Q$ .  $\triangleright$

**Следствие 3.3.3.** Нормализатор  $N_G(E(\sigma))$  совпадает с группой

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\mu}Q & R^* \end{pmatrix}.$$

В заключение параграфа рассмотрим вопросы факторизации. Пусть  $H$  — промежуточная группа,  $T \leq H \leq G$ , содержащая трансвекцию. Пусть далее,  $A = A(H)$ ,  $R = R(H)$ ;  $(R, A)$  — допустимая пара.

**Лемма 3.3.4.** Подгруппа  $H$  допускает факторизацию

$$H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix},$$

где

$$\Delta = \Delta(H) = \left\{ \delta \in k^* : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in H \right\}, \quad \Delta \leq R^*,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \delta \end{pmatrix} : \alpha \in A, \delta \in \Delta \right\}.$$

$\triangleleft$  Заметим сразу, что  $\Delta \leq R^*$ . Согласно следствию 2.2.2 подгруппа  $H$  допускает факторизацию  $H = T \cdot H_0$ , где  $H_0 = H \cap \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & k^* \end{pmatrix}$ . Очевидно, что  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix} \leq H_0$ . Покажем обратное включение. Пусть  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H_0$ . Тогда согласно 3.4.5  $2\beta \in A$ ,

но  $2 \in R_0^* \subseteq R^*$ , откуда  $\beta \in A$ . Но тогда  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in H_0$ , поэтому  $\gamma \in \Delta$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}$ .  $\triangleright$

**Предложение 3.3.5.** Пусть  $(R, A)$  — допустимая пара  $\sigma = \begin{pmatrix} QA & \mu A \\ A & QA \end{pmatrix}$ . Тогда имеет место равенство

$$T \cdot G(\sigma) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & (1 + QA)^* \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$  Включение  $(\supseteq)$  очевидно. Докажем обратное включение. Согласно 3.2.6 и 3.2.5  $H = T \cdot G(\sigma)$  — промежуточная подгруппа, причем как показано в теореме 3.2.6 модуль трансвекций  $A(H)$  подгруппы  $H$  совпадает с  $A$ . Следовательно, согласно лемме 3.3.4  $H = T \cdot G(\sigma) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}$ , где  $A = A(H)$ ,  $\Delta = \left\{ \delta \in K^* : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in H \right\}$ ,  $\Delta \leq R^*$ . Покажем, что  $\Delta = (1 + QA)^*$ . Очевидно, что  $(1 + QA)^* \leq \Delta$ . Обратно, пусть  $\delta \in \Delta$ . Тогда  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in T \cdot G(\sigma)$ . Поэтому для некоторого  $t = \begin{pmatrix} x & \mu g \\ y & x \end{pmatrix} \in T$ ,  $t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in G(\sigma)$ , откуда  $\begin{pmatrix} x & \mu y \delta \\ y & x \delta \end{pmatrix} \in G(\sigma)$ . Следовательно,  $y \in A$ ,  $x \in 1 + QA$ . Далее,  $\det(t)\delta \in R^*$ , но  $\delta \in R^*$ , откуда  $\det(t) \in R^*$ , поэтому  $t \in G(\sigma)$ , а потому  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in G(\sigma)$  и  $\delta \in (1 + QA)^*$ .  $\triangleright$

#### § 4. Правило перемещения и вытекающие из него следствия

Согласно § 2 гл. II для группы  $G = GL(2, k)$  имеет место факторизация  $G = T \cdot G_0 = G_0 \cdot T$ , где

$$T = T(\mu) = \left\{ \begin{pmatrix} x & \mu y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in k, (x, y) \neq (0, 0) \right\}$$

— тор, связанный с квадратичным расширением  $K = k(\sqrt{\mu})$  поля  $k$ ;  $G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & k^* \end{pmatrix}$ , причем  $G_0 \cap T = e$ . Следовательно, для любых  $t \in T$  и  $g \in G_0$  произведение  $gt$  допускает однозначное представление в виде

$$gt = t_1 g_1, \quad t_1 \in T, \quad g_1 \in G_0.$$

Следующая теорема позволяет выяснить вид матрицы  $g_1$  по заданным  $g$  и  $t$ . Этот вопрос решается очевидным образом, если  $t$  скалярная матрица. Поэтому в качестве матрицы  $t$  возьмем  $\begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Результаты этого параграфа справедливы для произвольного поля  $K = k(\sqrt{\mu})$  без ограничения  $2 \in R^*$ .

**Теорема 3.4.1** (правило перемещения). Пусть  $t = \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix}$ ,  $x \in k$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in G_0$ . Если

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} t = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix},$$

от

$$\beta_1 = \beta + \frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\gamma^2 - 1 + \mu\beta^2}{\gamma} + \frac{2\mu}{x^2 - \mu} \beta,$$

$$\gamma_1 = \gamma + \frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\gamma^2 - 1 + \mu\beta^2}{\gamma} + \frac{2x\mu}{x^2 - \mu} \beta = \frac{(\mu\beta + \gamma x)^2 - \mu}{\gamma(x^2 - \mu)}.$$

◁ Достаточно в качестве матрицы  $t_1 \in T$  взять

$$t_1 = \frac{1}{\gamma(x^2 - \mu)[(\mu\beta + \gamma x)^2 - \mu]} \begin{pmatrix} \mu\beta + \gamma x & \mu \\ 1 & \mu\beta + \gamma x \end{pmatrix}$$

и проверить равенство матриц  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} t = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$ .

Введем обозначение  $f(x, \beta, \gamma) = \frac{(\mu\beta + \gamma x)^2 - \mu}{\gamma^2(x^2 - \mu)}$ . Тогда для  $\gamma_1$  из 3.4.1 мы имеем  $\gamma_1 = \gamma f(x, \beta, \gamma)$ . Так как в случае  $2 \in R_0^* \subseteq R^*$  всякая матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$  из промежуточной подгруппы  $H$ ,  $T \leq H \leq G$  представляется в виде произведения

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \in H, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in H,$$

то нам нужно записать правило перемещения для элементарной трансвекции и диагональной матрицы.

**Следствие 3.4.2.** Пусть  $t = \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix}$  и

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} t = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in T.$$

Тогда

$$\beta_1 = \alpha + \frac{x}{x^2 - \mu} \mu \alpha^2 + \frac{2\mu}{x^2 - \mu} \alpha, \quad \gamma_1 = \delta f(x, \alpha, 1) = \frac{(\mu\alpha + x)^2 - \mu}{x^2 - \mu}.$$

**Следствие 3.4.3.** Пусть  $t = \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix}$ ,  $\delta \in k^*$  и

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} t = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\beta_1 = \frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\delta^2 - 1}{\delta}, \quad \gamma_1 = \delta f(x, 0, \delta) = \frac{\delta^2 x^2 - \mu}{\delta(x^2 - \mu)}.$$

**Предложение 3.4.4.** Пусть  $f(x, \alpha) = f(x, \alpha, 1)$ ,  $g(x, \delta) = f(x, 0, \delta)$ . Тогда

$$f(x, \beta, \gamma) = f(x\gamma, \beta) \cdot g(x, \gamma), \quad (1)$$

$$f(x, \beta, \gamma)^{-1} = f(\mu\beta + \gamma x, -\beta\gamma^{-1}, \gamma^{-1}), \quad (2)$$

$$g(x, \delta_1 \delta_2) = g(x, \delta_1) \cdot g(\delta_1 x, \delta_2). \quad (3)$$

◁ Имеем

$$f(x\gamma, \beta) = f(x\gamma, \beta, 1) = \frac{(\mu\beta + \gamma x)^2 - \mu}{(\gamma x)^2 - \mu},$$

$$g(x, \gamma) = f(x, 0, \gamma) = \frac{\gamma^2 x^2 - \mu}{\gamma^2(x^2 - \mu)}, \quad f(x, \beta, \gamma) = \frac{(\mu\beta + \gamma x)^2 - \mu}{\gamma^2(x^2 - \mu)}.$$

Отсюда следует справедливость равенства (1). Далее,

$$f(x, \beta, \gamma)^{-1} = \frac{\gamma^2(x^2 - \mu)}{(\mu\beta + \gamma x)^2 - \mu},$$

$$f(\mu\beta + \gamma x, -\beta\gamma^{-1}, \gamma^{-1}) = \frac{[-\mu\beta\gamma^{-1} + \gamma^{-1}(\mu\beta + \gamma x)]^2 - \mu}{\gamma^{-2}[(\mu\beta + \gamma x)^2 - \mu]}.$$

Следовательно, имеет место равенство (2). Далее,

$$g(x, \delta_1) = \frac{\delta_1^2 x^2 - \mu}{\delta_1^2(x^2 - \mu)}, \quad g(\delta_1 x, \delta_2) = \frac{\delta_1^2 \delta_2^2 x^2 - \mu}{\delta_2^2(\delta_1^2 x^2 - \mu)}.$$

Следовательно, справедлива и формула (3).

**Лемма 3.4.5.** Пусть  $H$  — промежуточная подгруппа и  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H$ . Тогда  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix} \in H$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\beta & 1 \end{pmatrix} \in H$ .

◁ В теореме 3.4.1 достаточно взять  $x = \frac{1-\gamma^2-\mu\beta^2}{2\beta\gamma}$ . Тогда мы получим  $\beta_1 = -\beta$ ,  $\gamma_1 = \gamma$ . Следовательно,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix} \in H$ , но тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\beta & 1 \end{pmatrix} \in H. \triangleright$$

Отметим следующий результат.

**Предложение 3.4.6.** Нормализатор тора  $T = T(\mu)$  в полной линейной группе  $G = GL(2, k)$ ,  $\text{char } k \neq 2$ , совпадает с

полупрямым произведением тора  $T$  и группы второго порядка, порожденной матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ :

$$N_G(T) = T \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Это предложение можно вывести из результатов гл. II, § 3, однако мы дадим другое доказательство.

◁ Включение  $\supseteq$  очевидно, докажем обратное включение. Пусть  $g \in N_G(T)$  и  $g \notin T$ . Тогда в силу факторизации для группы  $N_G(T)$ , содержащей тор  $T$ , можно считать, что  $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ .

Имеем  $g \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g^{-1} \in T$ , откуда  $\mu\beta = -\mu\beta$  и  $\beta = 0$ ;  $\gamma = \gamma^{-1}$ ,

откуда  $\gamma^2 = 1$ ,  $\gamma = \pm 1$ , следовательно  $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ . ▷

**Теорема 3.4.7.** Промежуточная подгруппа  $H$ ,  $T \leq H \leq G$ , не содержащая трансвекций, совпадает либо с тором  $T$ , либо с его нормализатором  $N_G(T)$ .

◁ В силу факторизации для группы  $H$ , имеем  $H = T \cdot H_0$ , где  $H_0 = H \cap G_0$ ,  $G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & k^* \end{pmatrix}$ . Пусть  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H_0$ . Согласно лемме 3.4.5 тогда  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\beta & 1 \end{pmatrix} \in H_0 \leq H$ , откуда  $\beta = 0$  так как  $\text{char } k \neq 2$ . Итак,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in H_0$ . Для последней матрицы применим теорему 3.4.1 и лемму 3.4.5, тогда так как  $H$  не содержит трансвекций, то  $2\beta_1 = \frac{x}{x^2-\mu} \frac{\gamma^2-1}{\gamma} = 0$ , откуда  $\gamma^2 = 1$ ,  $\gamma = \pm 1$ . Итак,  $H_0 \leq \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ , а потому  $H_0 = e$ , или  $H_0 \leq \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ . В первом случае  $H = T$ , а во втором  $H = N_G(T)$ . ▷

### § 5. Подрешетка $\text{Lat}(R, A)$

Мы продолжаем изучение решетки промежуточных подгрупп  $\text{Lat}(T, G)$ . Первый шаг в этом направлении сделан в § 2 этой главы. Там мы дали описание допустимых пар  $(R, A)$ , т. е. пар, которые реализуются для промежуточных подгрупп  $H$ ,  $T \leq H \leq G$ ,  $A = A(H)$ ,  $R = R(H)$ . Пусть  $(R, A)$  — допустимая пара. Положим

$$\text{Lat}(R, A) = \{H \in \text{Lat}(T, G) : A(H) = A, R(H) = R\}.$$

Очевидно, что для различных допустимых пар  $(R, A)$  подмножества  $\text{Lat}(R, A)$  различны и

$$\text{Lat}(T, G) = \{T\} \cup \{N_G(T)\} \bigcup_{(R,A)} \text{Lat}(R, A),$$

где объединение берется по всем различным допустимым парам  $(R, A)$ . Следовательно, изучение решетки  $\text{Lat}(T, G)$  сводится к изучению подмножеств  $\text{Lat}(R, A)$ , которые согласно следующей теореме являются подрешетками.

**Теорема 3.5.1.** Пусть  $(R, A)$  — допустимая пара. Тогда  $\text{Lat}(R, A)$  является подрешеткой решетки  $\text{Lat}(T, G)$ .

◁ Пусть  $H_1, H_2 \in \text{Lat}(R, A)$ . Покажем, что  $H_1 \cap H_2 \in \text{Lat}(R, A)$ ,  $\langle H_1, H_2 \rangle \in \text{Lat}(R, A)$ . Рассмотрим факторизацию для  $H_1$  и  $H_2$ . Пусть

$$H_1 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_2 \end{pmatrix},$$

где  $\Delta_1, \Delta_2 \leq R^*$  (см. 3.3.4). Тогда  $H_1 \cap H_2 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_1 \cap \Delta_2 \end{pmatrix}$ .

Это очевидно следует из того, что  $T \cap \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_i \end{pmatrix} = e$ ,  $i = 1, 2$ . Следовательно,  $H_1 \cap H_2 \in \text{Lat}(R, A)$ . Покажем теперь, что

$\langle H_1, H_2 \rangle = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_1 \Delta_2 \end{pmatrix}$ . Включение в левую сторону очевидно. Включение в правую сторону следует из того, что

$$H_i = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_i \end{pmatrix} T$$

— группа,  $i = 1, 2$ . Итак,  $\langle H_1, H_2 \rangle = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_1 \Delta_2 \end{pmatrix}$  — группа и  $\langle H_1, H_2 \rangle \in \text{Lat}(R, A)$ .  $\triangleright$

**Предложение 3.5.2.** Для промежуточной подгруппы  $H \in \text{Lat}(R, A)$  положим  $H_{(1)} = T^H = \langle h T h^{-1} : h \in H \rangle$  и  $H^{(1)} = N_G(H)$ . Тогда  $H_{(1)} \in \text{Lat}(R, A)$  и  $H^{(1)} \in \text{Lat}(R, A)$ .

$\triangleleft$  Покажем, что  $A(H_{(1)}) = A(H^{(1)}) = A$ , где  $A = A(H)$ . Покажем в начале, что  $A(H_{(1)}) = A$ . Пусть  $A_1 = A(H_{(1)})$ . Ясно, что  $A_1 \subseteq A$ . Обратно, пусть  $\alpha \in A = A(H)$ . Из равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\alpha & 1 \end{pmatrix} t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

где

$$t_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\mu\alpha}{2} & \mu \\ 1 & -\frac{\mu\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} \frac{\mu\alpha}{2} & \mu \\ 1 & \frac{\mu\alpha}{2} \end{pmatrix},$$

следует, что  $2\alpha \in A_1$ . Группа  $H_{(1)}$  является промежуточной подгруппой. Следовательно, кольцо  $R_1 = R(H_{(1)})$  допустимо, а потому  $R_0 \subseteq R_1$ , но  $2 \in R_0^*$ , поэтому  $2 \in R_1^*$ , откуда  $\alpha \in A_1$ . Итак,  $A \subseteq A_1$  и  $A = A_1$ . Покажем теперь, что  $A^1 = A(H^{(1)}) = A$ , где  $A = A(H)$ . Очевидно, что  $A \subseteq A^1$ . Обратно, так как  $T^{H^{(1)}} \leq H$ , то в силу уже доказанного  $A(T^{H^{(1)}}) = A(H^{(1)}) = A^1 \leq A(H) = A$ .  $\triangleright$

**Следствие 3.5.3.** Всякая нетривиальная гирлянда содержится в  $\text{Lat}(R, A)$  для некоторой допустимой пары  $(R, A)$ .

В заключение докажем следующее предложение.

**Предложение 3.5.4.** Пусть  $H_1, H_2 \in \text{Lat}(R, A)$ ,  $H_1 \leq H_2$ . Тогда  $N_G(H_1) \leq N_G(H_2)$ .

$\triangleleft$  Пусть  $H_i = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_i \end{pmatrix}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\Delta_i \leq R^*$ ,  $\Delta_1 \leq \Delta_2$ .

Согласно предложению 3.5.2  $N_G(H_i) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta'_i \end{pmatrix}$ ,  $i = 1, 2$ , где  $\Delta_i \leq \Delta'_i \leq R^*$ . Нам нужно показать, что  $\Delta'_1 \leq \Delta'_2$ . Пусть  $\delta \in \Delta'_1$ . Тогда  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} \subseteq H_1$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} H_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} \subseteq \\ & \subseteq H_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_2 \end{pmatrix} = H_2, \end{aligned}$$

а потому  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in N_G(H_2)$ , откуда  $\delta \in \Delta'_2$ .

### § 6. Наибольшая и наименьшая подгруппы подрешетки $\text{Lat}(R, A)$

В этом параграфе мы покажем, что в подрешетке  $\text{Lat}(R, A)$  имеются наименьшая  $F_0 = F_0(A)$  и наибольшая  $F^0 = F^0(A)$  подгруппы и построим их.

Итак, пусть  $(R, A)$  — допустимая пара,  $Q$  — идеал кольца  $R$ , определенный в § 2 этой главы (см. 3.2.2). Для каждой подгруппы  $H \in \text{Lat}(R, A)$  мы имеем  $A(H) = A$ . Следовательно, подгруппа

$$F_0 = F_0(A) = \left\langle T, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle T, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} : \alpha \in A \right\rangle$$

является наименьшей подгруппой в  $\text{Lat}(R, A)$ . Мы уже встречались с этой подгруппой (см. § 3). Согласно замечанию к теореме 3.3.1

$$F_0 = T \cdot E(\sigma), \quad \text{где } \sigma = \begin{pmatrix} QA & \mu A \\ A & QA \end{pmatrix}.$$

Мы дадим другое описание подгруппы  $F_0$ . В § 4 мы ввели в рассмотрение функцию (см. 3.4.4)

$$f(x, \alpha) = \frac{(\mu\alpha + x)^2 - \mu}{x^2 - \mu} = \left(1 + \frac{x\mu}{x^2 - \mu} \alpha\right)^2 - \mu \left(\frac{\mu}{x^2 - \mu} \alpha\right)^2,$$

где  $x \in k$ ,  $\alpha \in A$ . Напомним (см. § 2), что  $\frac{\mu x}{x^2 - \mu} \in Q$ ,  $\frac{\mu}{x^2 - \mu} \in R_0 \subseteq R$ . Далее, согласно лемме 3.2.3  $\mu A^2 \subseteq QA$ . Следовательно,  $f(x, \alpha) \in 1 + QA \subseteq R$ . С другой стороны согласно 3.4.4  $f(x, \alpha)^{-1} = f(\mu\alpha + x, -\alpha) \in 1 + QA$ . А потому  $f(x, \alpha) \in (1 + QA)^* \leq R^*$  для всех  $x \in k$ ,  $\alpha \in A$ . В группе  $(1 + QA)^*$  рассмотрим подгруппу

$$\Omega_0(A) = \langle f(x, \alpha) : x \in k, \alpha \in A \rangle.$$

**Теорема 3.6.1.** Для наименьшей подгруппы  $F_0 = F_0(A)$  из  $\text{Lat}(R, A)$  мы имеем

$$F_0 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega_0(A) \end{pmatrix}.$$

Так как  $A(F_0) = A$ , то в силу факторизации  $F_0 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}$  нам достаточно показать, что  $\Delta = \Omega_0(A)$ . Пусть  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in F_0$ ,  $\alpha \in A$ . Тогда мы имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in T, \quad (1)$$

где согласно 3.4.2  $\gamma_1 = \frac{(\mu\alpha + x)^2 - \mu}{x^2 - \mu} = f(x, \alpha)$ . Но  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \in F_0$ , поэтому  $\gamma_1 = f(x, \alpha) \in \Delta$  для всех  $x \in k$ ,  $\alpha \in A$ . Откуда  $\Omega_0(A) \leq \Delta$ . Покажем обратное включение. Пусть

$$h \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix} \leq F_0, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \delta \end{pmatrix}, \quad \beta \in A, \delta \in \Delta,$$

$$h = h_1 t_1 \cdot \dots \cdot h_k t_k, \quad h_i \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix}, \quad t_i \in T.$$

Индукцией по  $k$  покажем, что  $\delta \in \Omega_0(A)$ . Если  $k=1$ , то очевидно  $t_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $\delta = 1 \in \Omega_0(A)$ . Допустим, что наше утверждение справедливо для всякого представления длины  $k \leq n-1$ . Пусть  $k=n$ ,  $h_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_n & 1 \end{pmatrix}$ ,  $t_n = \begin{pmatrix} x_n & \mu \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$ . Тогда согласно (1)

$$h_n t_n = t'_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t'_n \in T,$$

где  $\beta_1 \in A$ ,  $\gamma_1 = f(x_n, \alpha_n) \in \Omega_0(A)$ . Поэтому

$$h \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}^{-1} = h_1 t_1 \cdot \dots \cdot h_{n-1} t_{n-1} t'_n.$$

Согласно индукционному предположению

$$h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta'_1 & \gamma'_1 \end{pmatrix},$$

где  $\beta'_1 \in A$ ,  $\gamma'_1 \in \Omega_0(A)$ . Поэтому очевидно  $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ , где  $\delta \in \Omega_0(A)$ .  $\triangleright$

Определим теперь наибольшую подгруппу подрешетки  $\text{Lat}(R, A)$ . Рассмотрим подмножество  $S$  из  $R$ ,

$$S = \{s \in R: Qs \subseteq \mu A\}.$$

Так как  $Q$  — идеал кольца  $R$ , то  $S$  является наибольшим идеалом кольца  $R$  с условием  $QS \subseteq \mu A$ . Далее, согласно 3.2.2  $Q^2 \leq \mu R$ , тогда  $Q \cdot Q \cdot A \leq \mu R A \leq \mu A$ , а потому  $QA \leq S$ . С другой стороны так как  $\mu \in Q$ , то  $\mu S \subseteq \mu A$ . Следовательно,  $S \subseteq A$ . Таким образом для идеала  $S$  мы имеем  $QA \subseteq S \subseteq A$ . Положим

$$\Omega^0(A) = \{\theta \in R^*: \theta^2 - 1 \in S\}.$$

**Лемма 3.6.2.** Для идеала  $S$  мы имеем  $QA \subseteq S \subseteq A$ . Для подгруппы  $\Omega^0(A)$  имеют место включения

$$\Omega_0(A) \leq (1 + QA)^* \leq \Omega^0(A).$$

◁ Справедливость включений для идеала  $S$  показана выше. По определению  $\Omega_0(A)$  — подгруппа в группе  $(1 + QA)^*$ . Далее, пусть  $\theta = 1 + q\alpha \in (1 + QA)^*$ ,  $q \in Q$ ,  $\alpha \in A$ . Тогда  $\theta^2 - 1 \in QA$ , но  $QA \subseteq S$ , поэтому  $\theta^2 - 1 \in S$  и  $\theta \in \Omega^0(A)$ . ▷

**Теорема 3.6.3.** Множество

$$F^0 = F^0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix}$$

является группой, которая является наибольшей подгруппой подрешетки  $\text{Lat}(R, A)$ .

◁ Так как  $\Omega^0(A) \leq R^*$ , то  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix}$  — группа. Покажем в начале, что  $F^0 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix}$  — группа, т. е. тор  $T$  перестановочен с группой  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix}$ . Пусть  $\alpha \in A$ ,  $\gamma \in \Omega^0(A)$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix}$ . Согласно 3.4.1 имеем для

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in T :$$

$$\beta_1 = \beta + \frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\gamma^2 - 1 + \mu\beta^2}{\gamma} + \frac{2\mu}{x^2 - \mu} \beta,$$

$$\gamma_1 = \gamma + \frac{\mu}{x^2 - \mu} \frac{\gamma^2 - 1 + \mu\beta^2}{\gamma} + \frac{2\mu x}{x^2 - \mu} \beta.$$

Так как  $\gamma^2 - 1 \in S$  и  $QS \leq \mu A$ , то  $\frac{x}{x^2 - \mu} \frac{(\gamma^2 - 1)}{\gamma} \in \frac{1}{\mu} QS \subseteq A$ , далее (3.2.3),  $QA^2 \leq A$ , поэтому  $\beta_1 \in A$ . Далее,  $\gamma^2 - 1 \in S$ ,

$\mu A^2 \subseteq QA$  (см. 3.2.3), но согласно 3.6.2  $QA \subseteq S$ , а потому  $\mu A^2 \subseteq S$ . Поэтому  $\gamma_1 - \gamma \in S$ . Отсюда  $\gamma_1^2 - 1 = \gamma_1^2 - \gamma^2 + \gamma^2 - 1 \in S$ . Следовательно,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix}$ . Итак, тор  $T$  перестановочен с группой  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix}$ , а потому  $F^0 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix}$  — группа. Очевидно, что  $A(F^0) = A$ , а потому  $F^0 \in \text{Lat}(R, A)$ . Покажем, что  $F^0$  — наибольшая подгруппа в  $\text{Lat}(R, A)$ . Действительно, пусть

$$H \in \text{Lat}(R, A), \quad H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}, \quad \Delta \leq R^*.$$

Покажем, что  $\Delta \leq \Omega^0(A)$ . Пусть  $\delta \in \Delta$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in H$ . Для ситуации  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$ ,  $t_1 \in T$ , воспользуемся леммой 3.4.3, откуда  $\beta_1 = \frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\delta^2 - 1}{\delta} \in A$ . Следовательно,  $\frac{\mu x}{x^2 - \mu} (\delta^2 - 1) \in \mu A$  для всякого  $x \in k$ . Так как идеал  $Q$  порождается в кольце  $R$  элементами  $\frac{\mu x}{x^2 - \mu}$ , то  $Q(\delta^2 - 1) \subseteq \mu A$ . А потому  $\delta^2 - 1 \in S$  и  $\delta \in \Omega^0(A)$ .  $\triangleright$

## § 7. Подгруппы из $\text{Lat}(R, A)$

В § 6 для допустимой пары  $(R, A)$  мы показали, что подрешетка  $\text{Lat}(R, A)$  решетки  $\text{Lat}(T, G)$  обладает наименьшей и наибольшей подгруппами  $F_0 = F_0(A)$  и  $F^0 = F^0(A)$  соответственно. В этом параграфе мы дадим описание подгрупп из  $\text{Lat}(R, A)$ . При этом мы пользуемся подгруппами  $\Omega_0(A)$  и  $\Omega^0(A)$  группы  $R^*$ , определенными в § 6.

Рассмотрим функцию

$$g(x, \theta) = \frac{\theta^2 x^2 - \mu}{\theta^2 (x^2 - \mu)} = 1 + \frac{\mu}{x^2 - \mu} \frac{\theta^2 - 1}{\theta^2},$$

определенную в § 4 (см. 3.4.4) для  $x \in k$ ,  $\theta \in k^*$ . Мы рассмотрим поведение функции  $g(x, \theta)$  для  $\theta \in \Omega_0(A)$  и  $\theta \in \Omega^0(A)$ .

**Предложение 3.7.1.** Пусть  $\Delta = \Omega_0(A)$  или  $\Delta = \Omega^0(A)$ . Тогда  $g(x, \delta) \in \Delta$  для всех  $x \in k$ ,  $\delta \in \Delta$ .

◁ Пусть

$$H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}.$$

Из теорем 3.6.1 и 3.6.3 следует, что  $H$  — группа. Согласно 3.4.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \delta g(x, \delta) \end{pmatrix}, \quad t_1 \in T, \quad \delta \in \Delta.$$

Но так как  $H$  — группа, то  $\beta_1 \in A$  и  $g(x, \delta) \in \Delta$ . ▷

Доказанное свойство оказывается характерным не только для подгрупп  $\Omega_0(A)$  и  $\Omega^0(A)$ , но и для всех подгрупп  $\Delta \leq R^*$ , связанных с промежуточными подгруппами.

Теперь мы займемся описанием подгрупп из  $\text{Lat}(R, A)$ . Рассмотрим множество

$$[R, A] = \left\{ \Delta \leq R^* : \Omega_0(A) \leq \Delta \leq \Omega^0(A), \right. \\ \left. g(x, \delta) \in \Delta, \quad x \in k, \quad \delta \in \Delta \right\}.$$

**Предложение 3.7.2.** Для всякого  $\Delta \in [R, A]$  множество

$$H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}$$

является группой, а потому  $H \in \text{Lat}(R, A)$ .

◁ Покажем в начале, что  $H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}$  — группа, т. е.,

тор  $T$  перестановочен с группой  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}$ . Для этого достаточно показать, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix} T \subseteq T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} T \subseteq T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}.$$

Согласно 3.4.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in T, \quad x \in k, \quad \alpha \in A,$$

где

$$\beta_1 = \alpha + \frac{x}{x^2 - \mu} \mu \alpha^2 + \frac{2\mu}{x^2 - \mu} \alpha, \quad \gamma_1 = f(x, \alpha)$$

(см. 3.4.4). Но  $\frac{2\mu}{x^2 - \mu} \in R$  (см. 3.2.1 и 3.2.6) и  $\frac{\mu x}{x^2 - \mu} \alpha \in QA \subseteq R$  (см. 3.2.3), а потому  $\beta_1 \in A$ . Далее,  $f(x, \alpha) \in \Omega_0(A) \leq \Delta$ . Следовательно,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}$ . Согласно 3.4.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta'_1 & \gamma'_1 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in T, \quad x \in k, \quad \delta \in \Delta,$$

где

$$\beta'_1 = \frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\delta^2 - 1}{\delta}, \quad \gamma'_1 = \delta g(x, \delta).$$

Но так как  $\Delta \in [R, A]$ , то  $\gamma'_1 \in \Delta$ . Далее, из того что  $\Delta \leq \Omega^0(A)$ , следует (см. § 4), что  $\delta^2 - 1 \in S$ , но тогда  $(\delta^2 - 1)Q \subseteq \mu A$  и  $\frac{\delta^2 - 1}{\delta} \cdot \frac{1}{\mu} Q \subseteq A$ , а потому  $\frac{\delta^2 - 1}{\delta} \frac{x}{x^2 - \mu} \in A$  (напомним, что  $\frac{x}{x^2 - \mu} \in \frac{1}{\mu} Q$ , см. 3.2.2). Итак,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta'_1 & \gamma'_1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}$ , а потому  $H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}$  является группой, для которой очевидно  $A(H) = A$ .  $\triangleright$

Предложение 3.7.2 дает нам возможность сформулировать следующую теорему.

**Теорема 3.7.3.** *Отображение*

$$[R, A] \longrightarrow \text{Lat}(R, A),$$

$$\Delta \dashrightarrow H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix},$$

которое всякому  $\Delta \in [R, A]$  ставит в соответствие подгруппу  $H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix} \in \text{Lat}(R, A)$ , является биективным.

◁ Инъективность отображения очевидна.

Пусть  $H \in \text{Lat}(R, A)$ . Тогда, очевидно,  $H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}$  для некоторого  $\Delta \leq R^*$ . Покажем, что  $\Delta \in [R, A]$ . Так как, согласно 3.6.1 и 3.6.3,

$$F_0 = F_0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega_0(A) \end{pmatrix}, \quad F^0 = F^0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix}$$

соответственно наименьшая и наибольшая подгруппа из  $\text{Lat}(R, A)$ , то, очевидно,  $\Omega_0(A) \leq \Delta \leq \Omega^0(A)$ . Далее, согласно 3.4.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in T, \quad x \in k, \quad \delta \in \Delta,$$

где  $\gamma_1 = \delta g(x, \delta)$ . Но так как  $H$  — группа, то  $\gamma_1 \in \Delta$ , а потому  $g(x, \delta) \in \Delta$  для всех  $x \in k, \delta \in \Delta$ . Поэтому  $\Delta \in [R, A]$ . ▷

**Лемма 3.7.4.** Если  $\gamma \in (1 + \mu A)^*$ , то  $\gamma^2 \in \Omega_0(A)$ .

◁ Достаточно воспользоваться формулой ( $\gamma = 1 + \alpha\mu$ )

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & \mu \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma^{-1}(1 - \mu)\alpha & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} -1 & \mu \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\gamma}{\mu(\mu - 1)}. \quad \triangleright \end{aligned}$$

Напомним, что

$$\Omega_0(A) = \langle f(x, \alpha) : x \in k, \alpha \in A \rangle,$$

а потому (см. § 6)  $\Omega_0(A)$  — подгруппа группы  $(1 + QA)^*$ . Сейчас мы дадим другую интерпретацию группы  $\Omega_0(A)$ . Рассмотрим множество

$$\Omega(\mu) = \{u^2 - \mu\nu^2 \in R^* : u \in 1 + QA, \nu \in A\}.$$

Согласно формулам

$$(u_1^2 - \mu\nu_1^2)(u_2^2 - \mu\nu_2^2) = (u_1u_2 + \mu\nu_1\nu_2)^2 - \mu(u_1\nu_2 + u_2\nu_1)^2, \quad (1)$$

$$(u^2 - \mu\nu^2)^{-1} = \left( \frac{u}{u^2 - \mu\nu^2} \right)^2 - \mu \left( \frac{\nu}{u^2 - \mu\nu^2} \right)^2, \quad (2)$$

множество  $\Omega(\mu)$  является подгруппой группы  $(1 + QA)^*$ .

**Лемма 3.7.5.** *Если  $\text{sr } R = 1$ ,  $\gamma \in \Omega(\mu)$ , то для некоторого  $f(x, \alpha)$ ,  $x \in k$ ,  $\alpha \in A$*

$$\gamma f(x, \alpha) = u^2 - \mu\nu^2,$$

где  $u \in (1 + QA)^*$ ,  $\nu \in A$ .

◁ Пусть  $\gamma = u_0^2 - \mu\nu_0^2$ , где  $u_0 \in 1 + QA$ ,  $\nu_0 \in A$ . Рассмотрим  $f(x, \alpha)$  для  $x = 0$ . Имеем

$$f(0, \alpha) = 1 - \mu\alpha^2.$$

Имеем  $\gamma f(0, \alpha) = u^2 - \mu\nu^2$ , где согласно (1)

$$u = u_0 - \mu\nu_0\alpha, \quad \nu = -u_0\alpha + \nu_0.$$

Так как  $\gamma = u_0^2 - \mu\nu_0^2 \in R^*$ , то  $(u_0, \mu\nu_0) = 1$  (строка унимодулярна). Далее,  $u_0 \in 1 + QA \subseteq 1 + A$ , поэтому положим  $u_0 = 1 + \alpha_1$ ,  $\alpha_1 \in A$ . Отсюда  $(u_0, \alpha_1) = 1$ . Следовательно,

$$(u_0, \mu\nu_0\alpha_1) = 1.$$

Так как  $\text{sr } R = 1$ , то для некоторого  $r \in R$

$$u_0 - \mu\nu_0\alpha_1r \in R^*.$$

Положим  $\alpha = \alpha_1r$ . Тогда

$$u = u_0 - \mu\nu_0\alpha \in R^*.$$

Но  $\nu_0, \alpha_1 \in A$ , а потому  $\mu\nu_0\alpha = \mu\nu_0\alpha_1r \in \mu A^2 \subseteq QA$  (см. 3.2.3), следовательно,  $u \in 1 + QA$ , откуда  $u \in (1 + QA)^*$ ,  $\nu \in A$ . ▷

**Теорема 3.7.6.** Пусть  $\mu A = QA$ ,  $\text{sr } R = 1$ . Тогда имеет место равенство групп

$$\Omega_0(A) = \Omega(\mu).$$

◁ Пусть  $f(x, \alpha) \in \Omega_0(A)$ . Тогда  $f(x, \alpha) = u^2 - \mu\nu^2$ , где (см. § 6)

$$u = 1 + \frac{x}{x^2 - \mu}\mu\alpha, \quad \nu = \frac{\mu}{x^2 - \mu}\alpha,$$

но  $\frac{\mu x}{x^2 - \mu} \in Q$ ,  $\frac{\mu}{x^2 - \mu} \in R_0 \subseteq R$ , откуда  $f(x, \alpha) \in \Omega(\mu)$ . Обратно, пусть  $\gamma = u^2 - \mu\nu^2 \in \Omega(\mu)$ ,  $u \in 1 + QA$ ,  $\nu \in A$ ,  $\gamma \in (1 + QA)^*$ . Имеем

$$\gamma = u^2 \left( 1 - \mu(\nu u^{-1})^2 \right).$$

В силу леммы 3.7.5 можно считать, что  $u \in (1 + QA)^*$ . В силу леммы 3.7.4  $u^2 \in \Omega_0(A)$ . Заметим, что  $\nu u^{-1} \in A$ . Но  $1 - (\nu u^{-1})^2 = f(0, \nu u^{-1}) \in \Omega_0(A)$ . Поэтому  $\gamma \in \Omega_0(A)$ . ▷

**Предложение 3.7.7.** Если  $\Delta_1, \Delta_2 \in [R, A]$ , то

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 \in [R, A], \quad \Delta_1 \Delta_2 \in [R, A].$$

Следовательно, биективное отображение, построенное в 3.7.3 является структурным изоморфизмом.

◁ Пусть  $H_1, H_2 \in \text{Lat}(R, A)$ ,  $\Delta_1 = \Delta(H_1)$ ,  $\Delta_2 = \Delta(H_2)$ :

$$H_1 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta(H_1 \cap H_2) = \Delta(H_1) \cap \Delta(H_2) = \Delta_1 \cap \Delta_2,$$

откуда  $\Delta_1 \cap \Delta_2 \in [R, A]$ . Далее,

$$g(x, \delta_1 \delta_2) = g(x, \delta_1)g(\delta_1 x, \delta_2).$$

Отсюда  $\Delta_1 \Delta_2 \in [R, A]$ . ▷

Следующие два предложения предлагают нам примеры построения подгрупп из  $[R, A]$ .

**Предложение 3.7.8.** Пусть  $Q = \mu R$ . Если  $\Delta \in [R, A]$ , то группа

$$\Delta(m) = \{\theta \in \Delta: \theta^m \in (1 + QA)^*\}$$

также содержится в  $[R, A]$ .

◁ Так как  $\Omega_0(A) \leq \Delta \leq \Omega^0(A)$  и  $\Omega_0(A) \leq (1 + QA)^*$ , то

$$\Omega_0(A) \leq \Delta(m) \leq \Omega^0(A).$$

Для доказательства включения  $\Delta(m) \in [R, A]$  нам достаточно теперь показать, что для всякого  $\theta \in \Delta(m)$

$$g(x, \theta) \in \Delta(m).$$

Отметим, во-первых, что так как  $\theta \in \Delta(m) \leq \Delta$ , то по определению подгрупп из  $[R, A]$   $g(x, \theta) \in \Delta$ . Покажем, что  $g(x, \theta)^m \in (1 + QA)^*$ . Имеем

$$g(x, \theta)^m - 1 = \left( (\theta^2 g(x, \theta))^m - 1 \right) + (1 - \theta^m)(1 + \theta^m)g(x, \theta)^m.$$

Так как  $\theta \in \Delta(m)$ , то  $\theta^m - 1 \in QA$ . Тогда согласно последней формуле для доказательства включения  $g(x, \theta) \in 1 + QA$  нам достаточно показать, что

$$\left( \theta^2 g(x, \theta) \right)^m - 1 \in QA.$$

Так как (см. 3.4.4)

$$\theta^2 g(x, \theta) = \frac{\theta^2 x^2 - \mu}{x^2 - \mu},$$

то несложно проверить формулу

$$\begin{aligned} \left( \theta^2 g(x, \theta) \right)^m - 1 &= \left( \frac{x^2}{x^2 - \mu} \right)^m (\theta^m - 1)(\theta^m + 1) + \\ &+ \sum_{s=1}^{m-1} (-1)^s C_m^s \left( \frac{x^2}{x^2 - \mu} \right)^{m-s-1} \left( \frac{x}{x^2 - \mu} \right)^2 \times \\ &\times \left( \frac{\mu}{x^2 - \mu} \right)^{s-1} \mu (\theta^{2(m-s)} - 1). \end{aligned}$$

Так как  $\Delta(m) \leq \Delta \leq \Omega^0(A) \leq (1 + A)^*$ , то  $\theta^{2(m-s)} - 1 \in A$ .

Далее,  $\frac{x}{x^2-\mu} \in \frac{1}{\mu}Q = R$ ,  $\frac{x^2}{x^2-\mu} = 1 + \frac{\mu}{x^2-\mu} \in R_0 \subseteq R$ , следовательно, так как  $\theta^m \in 1 + QA$  ( $QA = \mu A$ ), то

$$\left(\theta^2 g(x, \theta)\right)^m - 1 \in QA. \triangleright$$

**Лемма 3.7.9.** Если  $\theta \in \Omega^0(A)$ , то для всех  $x \in k$  элемент

$$\frac{g(x, \theta^{2^n})}{g(x, \theta)^{2^n}}, \quad n \geq 1,$$

содержится в  $\Omega_0(A)$ .

◁ Доказательство проведем индукцией по  $n$ . Пусть

$$\delta_n = \frac{g(x, \theta^{2^n})}{g(x, \theta)^{2^n}}.$$

Имеем

$$g(x, \theta^2) = g(x, \theta)^2 \left(1 - \mu \left(\frac{1}{g(x, \theta)} \frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\theta^2 - 1}{\theta^2}\right)^2\right).$$

Откуда

$$\delta_2 = \frac{g(x, \theta^2)}{g(x, \theta)^2} = 1 - \mu \nu^2,$$

где

$$\nu = \frac{1}{g(x, \theta)} \frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\theta^2 - 1}{\theta^2}.$$

Так как  $\theta \in \Omega^0(A)$  и  $\Omega^0(A) \in [R, A]$ , то  $g(x, \theta) \in \Omega^0(A) \leq R^*$  и  $(\theta^2 - 1)Q \subseteq \mu A$ , откуда

$$\nu = \frac{1}{g(x, \theta)} \frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\theta^2 - 1}{\theta^2} \in A,$$

но тогда  $\delta_2 = f(0, \nu) \in \Omega_0(A)$ . Таким образом, наша лемма справедлива для  $n=1$ . Предположим теперь, что  $\delta_{n-1} \in \Omega_0(A)$ .

Покажем, что  $\delta_n \in \Omega_0(A)$ . Положим  $\theta_1 = \theta^{2^{n-1}}$ . Согласно доказанному тогда  $(\theta_1 \in \Omega^0(A))$

$$\frac{g(x, \theta_1^2)}{g(x, \theta_1)^2} \in \Omega_0(A).$$

Но

$$\delta_n = \delta_{n-1}^2 \frac{g(x, \theta_1^2)}{g(x, \theta_1)^2},$$

откуда  $\delta \in \Omega_0(A)$ .  $\triangleright$

**Предложение 3.7.10.** Если  $\Delta \in [R, A]$ , то

$$\Delta^{2^n} \Omega_0(A) \in [R, A], \quad n \geq 0.$$

Далее, если  $\Delta \in [R, A]$ , то подгруппа

$$\bar{\Delta}(n) = \{\theta \in \Omega^0(A) : \theta^{2^n} \in \Delta\}, \quad n \geq 0.$$

также содержится в  $[R, A]$ .

$\triangleleft$  Докажем первое утверждение предложения. Достаточно показать, что если  $\Delta \in [R, A]$ , то  $\Delta^2 \Omega_0(A) \in [R, A]$ . Для этого достаточно показать, что для любого

$$\theta = \theta_1^2 \theta_2 \in \Delta^2 \Omega_0(A), \quad \theta_1 \in \Delta, \quad \theta_2 \in \Omega_0(A),$$

элемент  $g(x, \theta)$  содержится в  $\Delta^2 \Omega_0(A)$  для всех  $x \in k$ . Но

$$g(x, \theta) = g(x, \theta_1^2) g(\theta_1^2 x, \theta_2).$$

Так как  $\theta_1 \in \Delta$  и  $\Delta \in [R, A]$ , то  $g(x, \theta_1) \in \Delta$ . Но тогда согласно 3.7.9  $g(x, \theta_1^2) \in \Delta^2 \Omega_0(A)$ . Далее,  $\Omega_0(A) \in [R, A]$ , откуда для  $\theta_2 \in \Omega_0(A)$   $g(x, \theta_2) \in \Omega_0(A)$ . Следовательно,

$$g(x, \theta) = g(x, \theta_1^2) g(\theta_1^2 x, \theta_2) \in \Delta^2 \Omega_0(A).$$

Докажем второе утверждение предложения.

Очевидно, что  $\Omega_0(A) \leq \bar{\Delta}(n) \leq \Omega^0(A)$ , так как  $\Delta \in [R, A]$ .

Пусть  $\theta \in \bar{\Delta}(n)$ . Покажем, что  $g(x, \theta) \in \bar{\Delta}(n)$ ,  $x \in k$ . Для этого достаточно показать, что  $g(x, \theta)^{2^n} \in \Delta$ . Согласно 3.7.9

$$g(x, \theta)^{-2^n} \in g(x, \theta^{2^n})^{-1} \Omega_0(A).$$

Но  $\theta^{2^n} \in \Delta$ , а потому  $g(x, \theta^{2^n}) \in \Delta$ . Отсюда

$$g(x, \theta)^{2^n} \in \Delta \Omega_0(A) = \Delta.$$

Следовательно,  $g(x, \theta) \in \bar{\Delta}(n)$ .  $\triangleright$

### § 8. Спуск

В этом параграфе на решетке  $\text{Lat}(T, G)$  мы рассмотрим унарную операцию взятия нормального замыкания,  $H \in \text{Lat}(T, G)$ :

$$H \longrightarrow H_{(1)},$$

где

$$H_{(1)} = T^H = \langle hTh^{-1} : h \in H \rangle.$$

Ясно, что  $H_{(1)}$  также промежуточная подгруппа,  $H_{(1)} \trianglelefteq H$ , причем  $H_{(1)}$  — наименьшая промежуточная подгруппа, нормальная в  $H$ . Согласно 2.2.2  $H = T \cdot H_0$ , где

$$H_0 = \{h \in H : h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}, \beta \in k, \gamma \in k^*\}.$$

Ясно, что  $H_{(1)} = T^H = T^{H_0}$ , следовательно, группа  $H_{(1)}$  порождается матрицами

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1},$$

где  $x \in k$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H$ . В силу 3.4.1

$$h = t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где

$$\beta_1 = (1 - \gamma_1)\beta + \frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\gamma^2 - 1 + \mu\beta^2}{\gamma} + \frac{2\mu}{x^2 - \mu} \beta, \quad (1)$$

$$\gamma_1 = f(x, \beta, \gamma) = \frac{(\mu\beta + \gamma x)^2 - \mu}{\gamma^2(x^2 - \mu)}. \quad (2)$$

Таким образом, нормальное замыкание  $H_{(1)} = T^H$  порождается тором  $T$  и всеми матрицами вида  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$ , где  $\beta_1$  и  $\gamma_1$  определяются из (1) и (2), для всех  $x \in k$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H$ .

Пусть  $(R, A)$  — допустимая пара (см. 3.2.6). Напомним, что

$$\text{Lat}(R, A) = \{H \in \text{Lat}(T, G) : A(H) = A, R(H) = R\}.$$

Согласно 3.5.2  $A_{(1)} = A(H_{(1)}) = A(H) = A$  для всякой подгруппы  $H \in \text{Lat}(R, A)$ . Следовательно, справедлива

**Теорема 3.8.1.** Если  $H \in \text{Lat}(R, A)$ , то  $H_{(1)} \in \text{Lat}(R, A)$ .

**Предложение 3.8.2.** Пусть  $H \in \text{Lat}(R, A)$ ,  $\Delta = \Delta(H)$ ,  $H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}$ . Если  $H_{(1)} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_{(1)} \end{pmatrix}$ ,  $\Delta_{(1)} = \Delta(H_{(1)})$ , то

$$\Delta^2 \leq \Delta_{(1)} \leq \Delta.$$

◁ Пусть  $\delta \in \Delta$ . Покажем, что  $\delta^2 \in \Delta_{(1)}$ . Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in H.$$

Тогда согласно сказанному выше матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$  содержится в  $H_{(1)}$ , где  $\beta_1$  и  $\gamma_1$  определяются из (1) и (2). Из (2) тогда при  $x = 0$  мы имеем  $\gamma_1 = \delta^{-2} \in \Delta_{(1)}$ , откуда  $\delta^2 \in \Delta_{(1)}$ . ▷

Из 3.8.1 и 3.8.2 следует

**Предложение 3.8.3.** Для всякой промежуточной подгруппы  $H$  фактор-группа  $H/H_{(1)}$  является элементарной абелевой группой показателя 2.

**Лемма 3.8.4.** Пусть  $H \in \text{Lat}(R, A)$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H$ . Пусть

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t \in T, \quad x \in k.$$

Тогда  $\gamma_1 \equiv 1 \pmod{A}$ .

◁ Согласно 3.4.5  $2\beta_1 \in A$ , но  $2 \in R^*$ , следовательно,  $\beta_1 \in A$ . Из (1) тогда

$$\beta_1 = (1 - \gamma_1)\beta + \frac{x\mu}{x^2 - \mu} \cdot \beta^2 \cdot \frac{1}{\gamma} + \frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} + \frac{2\mu}{x^2 - \mu} \beta \in A.$$

Но  $\gamma_1 \in \Delta(H) \leq R^*$ ,  $\frac{x\mu}{x^2 - \mu} \beta^2 \in QA^2 \subseteq A$  (см. 3.2.3) и, наконец,  $\frac{2\mu}{x^2 - \mu} \in R_0 \subseteq R$ . Следовательно,

$$\frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \in A,$$

для всех  $x \in k$ . Полагая  $x = 1$ , мы получим  $\gamma^2 - 1 \in A$ . Далее из (2)

$$\gamma_1 = 1 + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \cdot \frac{\mu}{x^2 - \mu} + \frac{2\mu\beta x}{\gamma(x^2 - \mu)} + \frac{\mu^2\beta^2}{(x^2 - \mu)\gamma^2}.$$

Заметим, что согласно 3.4.5  $2\beta \in A$ , откуда  $\beta \in A$ . Согласно сказанному выше  $\gamma^2 - 1 \in A$ . Теперь легко видеть, что  $\gamma_1 - 1 \in A$ . ▷

**Теорема 3.8.5.** Пусть  $H \in \text{Lat}(R, A)$ ,  $\Delta = \Delta(H)$

$$H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}, \quad H_{(1)} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_{(1)} \end{pmatrix},$$

$\Delta_{(1)} = \Delta(H_{(1)})$ . Тогда

$$\Delta_{(1)} = \Omega_0(A) \langle g(x, \delta) : x \in k, \delta \in \Delta \rangle.$$

◁ Согласно 3.8.1  $H_{(1)} \in \text{Lat}(R, A)$ , а потому (см. 3.7.3)  $\Delta_{(1)} \in [R, A]$  откуда  $\Delta_{(1)} \geq \Omega_0(A)$ . Далее, согласно (2)

$$\Delta_{(1)} = \langle f(x, \alpha, \delta) : \alpha \in A, \delta \in \Delta, x \in k \rangle.$$

Согласно формуле (1) из 3.4.4 правую часть последнего равенства можно представить в виде произведения

$$\langle f(x, \alpha) : x \in k, \alpha \in A \rangle \cdot \langle g(y, \delta) : y \in k, \delta \in \Delta \rangle.$$

Первая часть этого произведения по определению совпадает с  $\Omega_0(A)$ . ▷

Напомним, что промежуточная подгруппа  $H \in \text{Lat}(T, G)$  называется полной (относительно  $T$ ), если

$$H_{(1)} = T^H = H.$$

Следующее утверждение следует непосредственно из 3.8.1 и 3.8.2.

**Предложение 3.8.6.** Пусть  $H \in \text{Lat}(R, A)$ ,  $\Delta = \Delta(H)$ ,  $\Delta_1 = \Delta(H_{(1)})$ . Тогда  $\Delta^2 \Omega_0(A) \leq \Delta_{(1)}$ . Далее, если  $\Delta \leq \Delta^2 \Omega_0(A)$ , то группа  $H$  является полной.

Положим

$$H_{(n)} = (H_{(n-1)})_{(1)}, \quad n \geq 2.$$

**Теорема 3.8.7.** Пусть

$$H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & (1 + QA)^* \end{pmatrix}.$$

Если  $\text{sr } R = 1$ , то

$$\Delta(H_{(n)}) = \Omega_0(A)(1 + QA)^{2^n}, \quad \text{при всех } n \geq 1.$$

◁ Заметим в начале, что согласно 3.3.5  $H$  — промежуточная подгруппа, причем  $A(H) = A$ . Далее, согласно 3.8.1  $A(H_{(n)}) = A$

для всех  $n \geq 1$ . Положим  $\Delta_{(0)} = \Delta(H) = (1 + QA)^*$  и, далее, положим

$$\Delta_{(n)} = \Delta(H_{(n)}), \quad n \geq 1.$$

Для доказательства предложения достаточно показать, что

$$\Delta_{(n)} = \Delta_{(n-1)}^2 \Omega_0(A), \quad n \geq 1.$$

Согласно 3.8.6  $\Delta_{(n-1)}^2 \Omega_0(A) \leq \Delta_{(n)}$ . Поэтому достаточно показать обратное неравенство

$$\Delta_{(n)} \leq \Delta_{(n-1)}^2 \Omega_0(A), \quad n \geq 1. \quad (3)$$

Отметим в начале, что

$$\Omega(\mu) \leq \Omega_0(A)(1 + QA)^{*2}. \quad (4)$$

Пусть  $\gamma \in \Omega(\mu)$ . Так как  $\text{sr } R = 1$ , то для некоторых  $\alpha \in A$ ,  $x \in k$  согласно 3.7.5

$$\gamma f(x, \alpha) = u^2 - \mu \nu^2,$$

где  $u \in (1 + QA)^*$ ,  $\nu \in A$ . Откуда

$$\gamma = u^2 \left(1 - \mu(\nu u^{-1})^2\right) f(x, \alpha)^{-1} = u^2 f(0, \nu u^{-1}) f(x, \alpha)^{-1}.$$

Следовательно,  $\gamma \in \Omega_0(A)(1 + QA)^{*2}$ .

Докажем теперь неравенство (3) индукцией по  $n$ . Пусть  $n = 1$ . Имеем (3.8.5)

$$\Delta_{(1)} = \Omega_0(A) \langle g(x, \delta) : x \in k, \delta \in \Delta_{(0)} = (1 + QA)^* \rangle.$$

Пусть  $\delta \in (1 + QA)^*$ ,  $\delta = 1 + \lambda$ ,  $\lambda \in QA$ . Тогда

$$g(x, \delta) = u^2 - \mu \nu^2,$$

где

$$u = 1 + \frac{\mu}{x^2 - \mu} \frac{1}{\delta} \lambda, \quad \nu = \frac{x}{x^2 - \mu} \frac{1}{\delta} \lambda.$$

Но  $\frac{\mu}{x^2-\mu} \in R$ ,  $\frac{x}{x^2-\mu} \lambda \in \frac{1}{\mu} Q \cdot QA \subseteq A$ . Следовательно,  $u \in 1 + QA$ ,  $\nu \in A$ . Тогда по определению

$$\Delta_{(1)} \leq \Omega_0(A) \Omega(\mu),$$

но теперь из (4) мы имеем

$$\Delta_{(1)} \leq \Omega_0(A) (1 + QA)^{*2}.$$

Таким образом (3) доказано для  $n = 1$ . Предположим, что (3) доказано для показателя  $(n - 1)$ :

$$\Delta_{(n-1)} \leq \Delta_{(n-2)}^2 \Omega_0(A).$$

Согласно 3.8.5

$$\Delta_{(n)} = \Omega_0(A) \langle g(x, \delta) : x \in k, \delta \in \Delta_{(n-1)} \rangle.$$

Пусть  $\delta \in \Delta_{(n-1)}$ . Покажем, что  $g(x, \delta) \in \Delta_{(n-1)}^2 \Omega_0(A)$  (это и завершит доказательство неравенства (3)). По индукционному предположению

$$\delta = \delta_1^2 \delta_2, \quad \delta_1 \in \Delta_{(n-2)}, \quad \delta_2 \in \Omega_0(A).$$

Тогда

$$g(x, \delta) = g(x, \delta_1^2) g(\delta_1^2 x, \delta_2).$$

Согласно 3.7.9  $g(x, \delta_1^2) \in g(x, \delta_1)^2 \Omega_0(A)$ . Так как  $\delta_1 \in \Delta_{(n-2)}$ , то согласно 3.8.5  $g(x, \delta_1) \in \Delta_{(n-1)}$ . С другой стороны, так как  $\Omega_0(A) \in [R, A]$ , то  $g(y, \delta_2) \in \Omega_0(A)$  для всех  $y \in k$ ,  $\delta_2 \in \Omega_0(A)$ . Следовательно,

$$g(x, \delta) \in \Delta_{(n-1)}^2 \Omega_0(A). \triangleright$$

### § 9. Подъем

В этом параграфе на решетке  $\text{Lat}(T, G)$  мы рассматриваем унарную операцию взятия нормализатора,  $H \in \text{Lat}(T, G)$ ,

$$H \longrightarrow H^{(1)},$$

где  $H^{(1)} = H' = N_G(H)$  — нормализатор подгруппы  $H$  в группе  $G$ . В дальнейшем  $(R, A)$  — допустимая пара. Пусть  $H \in \text{Lat}(R, A)$ ,

$$A(H) = A, \quad R(H) = R, \quad H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}, \quad \Delta = \Delta(H).$$

Из 3.5.2 вытекает следующая

**Теорема 3.9.1.** Если  $H \in \text{Lat}(R, A)$ , то  $H^{(1)} \in \text{Lat}(R, A)$ .

**Теорема 3.9.2.** Пусть  $H_1, H_2 \in \text{Lat}(R)$ , где  $R$  — допустимое кольцо и

$$\text{Lat}(R) = \{H \in \text{Lat}(T, G) : R(H) = R\}.$$

Если  $H_1 \leq H_2$ , то  $H_1^{(1)} \leq H_2^{(1)}$ .

◁ Пусть  $H_1 \in \text{Lat}(R, A_1)$ ,  $H_2 \in \text{Lat}(R, A_2)$ ,

$$H_1 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_1 & \Delta_1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_2 & \Delta_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_i \leq R^*, \quad i = 1, 2.$$

Согласно 3.9.1  $H_1^{(1)} \in \text{Lat}(R, A_1)$ ,  $H_2^{(1)} \in \text{Lat}(R, A_2)$ :

$$H_1^{(1)} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_1 & \Delta'_1 \end{pmatrix}, \quad H_2^{(1)} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_2 & \Delta'_2 \end{pmatrix},$$

где  $\Delta'_1 \leq R(A_1) = R$ ,  $\Delta'_2 \leq R(A_2) = R$ . Нам нужно показать, что  $\Delta'_1 \leq \Delta'_2$ . Так как  $H_1 \leq H_2$ , то

$$A_1 \leq A_2, \quad \Delta_1 \leq \Delta_2.$$

Пусть  $\delta \in \Delta'_1$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} \subseteq H_1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} H_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_2 & \Delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} \subseteq \\ & \subseteq H_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_2 & \Delta_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_1 & \Delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_2 & \Delta_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_2 & \Delta_2 \end{pmatrix} = H_2. \end{aligned}$$

Отсюда  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in N_G(H_2) = H_2^{(1)}$ , следовательно,  $\delta \in \Delta'_2$ .  $\triangleright$

**Лемма 3.9.3.** Пусть  $H \in \text{Lat}(R, A)$ ,  $H' = H^{(1)} = N_G(H)$ .

Включение  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H'$  справедливо тогда и только тогда,

когда  $\beta \in A$ ,  $\gamma \in \Omega^0(A)$  и кроме того  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \in H$  для всех

$$\beta_1 = \frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\gamma^2 - 1 + \mu\beta^2}{\gamma} + \frac{2\mu}{x^2 - \mu} \beta, \quad \gamma_1 = f(x, \beta, \gamma), \quad x \in k.$$

$\triangleleft$  Пусть  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H'$ . Согласно 3.9.1  $H' \in \text{Lat}(R, A)$ . По этому согласно 3.7.3  $\beta \in A$ ,  $\gamma \in \Omega^0(A)$ . Согласно (1) и (2) §8

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\beta}_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где

$$\gamma_1 = f(x, \beta, \gamma), \quad \bar{\beta}_1 = (1 - \gamma_1)\beta + \frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\gamma^2 - 1 + \mu\beta^2}{\gamma} + \frac{2\mu}{x^2 - \mu} \beta.$$

Так как  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H' \in \text{Lat}(R, A)$ , то  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\beta}_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \in H$ , откуда  $1 - \gamma_1 \in R$ , поэтому  $(1 - \gamma_1)\beta \in A$ . Отсюда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta(1 - \gamma_1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\beta}_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \in H.$$

Обратно, пусть  $\beta \in A$ ,  $\gamma \in \Omega^0(A)$  и все матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$ , определенные в лемме, содержатся в  $H$  для всех  $x \in k$ . Тогда ( $\gamma_1 \in R^*(1 - \gamma_1)\beta \in A$ ), как и в начале доказательства,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \mu \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} \in H.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} \in H.$$

Отсюда очевидно, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} \in H$$

и тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H'. \triangleright$$

**Теорема 3.9.4.** Пусть  $H \in \text{Lat}(R, A)$ ,

$$H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}, \quad H' = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta' \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta' = \{\theta \in \Omega^0(A) : g(x, \theta) \in \Delta, \text{ для всех } x \in k\}.$$

$\triangleleft$  Обозначим правую часть доказываемого равенства через  $B$ . Пусть  $\delta \in \Delta'$ . Тогда  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in H'$ . Но так как  $H' \in \text{Lat}(R, A)$ , то согласно 3.6.3  $\delta \in \Omega^0(A)$ . Далее, согласно 3.9.3  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \in H$ , где

$$\gamma_1 = f(x, 0, \delta) = g(x, \delta),$$

откуда  $g(x, \delta) \in \Delta$ , следовательно,  $\delta \in B$ . Обратно, пусть  $\delta \in B$ . Тогда  $\delta \in \Omega^0(A)$  и  $g(x, \delta) \in \Delta$ ,  $x \in k$ . Имеем ( $\beta = 0$ ,  $\gamma = \delta$ ) из 3.9.3

$$\beta_1 = \frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\delta^2 - 1}{\delta}, \quad \gamma_1 = f(x, 0, \delta) = g(x, \delta).$$

По условию  $g(x, \delta) \in \Delta$ . Далее, так как  $\delta \in \Omega^0(A)$ , то по определению группы  $\Omega^0(A)$  (см. §6)  $(\delta^2 - 1)Q \subseteq \mu A$ , откуда  $\beta_1 \in A$ . Следовательно, согласно 3.9.3, так как  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \in H$ , то  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in H'$ , откуда  $\delta \in \Delta'$ .  $\triangleright$

**Лемма 3.9.5.** Пусть  $H \in \text{Lat}(R, A)$ ,  $\Delta = \Delta(H)$ ,  $\Delta' = \Delta(H')$ . Если  $\text{sr } R = 1$ ,  $Q = \mu R$ , то

$$(1 + QA)^* \leq \Delta'.$$

$\triangleleft$  Согласно 3.9.1  $H' = H^{(1)} \in \text{Lat}(R, A)$ . Пусть  $\delta \in (1 + QA)^*$ . Тогда согласно 3.6.2  $\delta \in (1 + QA)^* \leq \Omega^0(A)$ , откуда  $\delta \in \Omega^0(A)$ . Далее, (см. 3.4.4)

$$g(x, \delta) = \frac{\delta^2 x^2 - \mu}{\delta^2 (x^2 - \mu)},$$

откуда

$$g(x, \delta) = \left(1 + \frac{\mu}{x^2 - \mu} \frac{\delta - 1}{\delta}\right)^2 - \mu \left(\frac{x}{x^2 - \mu} \frac{\delta - 1}{\delta}\right)^2.$$

Так как  $\delta \in (1 + QA)^*$ , то  $\delta - 1 \in QA$ , а потому согласно 3.2.1 и по определению группы  $\Omega(\mu)$ ,  $g(x, \delta) \in \Omega(\mu)$ . Но тогда согласно 3.7.6  $g(x, \delta) \in \Omega_0(A)$ . Так как  $\Omega_0(A) \leq \Delta$ , то  $g(x, \delta) \in \Delta$ . Теперь согласно 3.9.4  $\delta \in \Delta'$ .  $\triangleright$

**Лемма 3.9.6.** Пусть  $H \in \text{Lat}(R, A)$ ,  $\Delta = \Delta(H)$ ,  $\Delta' = \Delta(H')$ . Тогда

$$\Delta'^2 \leq \Delta.$$

◁ Согласно 3.8.2

$$\Delta'^2 = (\Delta(H'))^2 \leq \Delta(T^{H'}) \leq \Delta(H).$$

Откуда  $\Delta'^2 \leq \Delta$ . ▷

**Лемма 3.9.7.** Пусть  $H \in \text{Lat}(R, A)$ ,  $\Delta = \Delta(H)$ ,  $\Delta' = \Delta(H')$ .

Тогда

$$\Delta' \leq \Delta^* = \{\delta \in \Omega^0(A) : \delta^2 \in \Delta\}.$$

Если  $\Delta^* \leq \Delta$ , то  $H = H'$ .

◁ Пусть  $\delta \in \Delta'$ . Так как  $H' \in \text{Lat}(R, A)$  согласно 3.9.1, то согласно 3.7.3  $\Delta' \in [R, A]$ , а потому  $\delta \in \Omega^0(A)$ . Далее, согласно 3.9.6  $\delta^2 \in \Delta$ , откуда  $\delta \in \Delta^*$ . ▷

Сформулируем теперь аналог предложения 3.8.7 для «подъема».

**Предложение 3.9.8.** Пусть  $H \in \text{Lat}(R, A)$ ,

$$H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & (1 + QA)^* \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta^{(n)} = \Delta(H^{(n)}) = \{\delta \in \Omega^0(A) : \delta^{2^n} \in (1 + QA)^*\}, \quad n \geq 1,$$

где  $H^{(n)} = (H^{(n-1)})'$ ,  $n \geq 2$  и  $H^{(1)} = H'$ .

◁ Согласно 3.3.5  $H$  является промежуточной подгруппой. Обозначим правую часть доказываемого равенства через  $\Delta^*(n)$ . Пусть  $\Delta = \Delta(H) = (1 + QA)^*$ . Тогда

$$\Delta^*(n) = \{\delta \in \Omega^0(A) : \delta^{2^n} \in \Delta\}.$$

Нам нужно доказать равенство

$$\Delta^{(n)} = \Delta(H^{(n)}) = \Delta^*(n), \quad n \geq 1. \quad (1)$$

Доказательство проведем индукцией по  $n$ . Пусть  $n = 1$ . Включение  $\Delta^{(1)} = \Delta' \leq \Delta^*(1) = \Delta^*$  следует из леммы 3.9.7. Обратно, пусть  $\theta \in \Delta^*(1)$ . Тогда

$$\theta \in \Omega^0(A), \quad \theta^2 \in \Delta = (1 + QA)^*.$$

Для доказательства включения  $\theta \in \Delta'$  согласно 3.9.4 достаточно показать, что  $g(x, \theta) \in \Delta$ . Имеем

$$g(x, \theta) = 1 + \frac{\mu}{x^2 - \mu} \frac{\theta^2 - 1}{\theta^2}.$$

Но  $\theta^2 - 1 \in QA$ ,  $\frac{\mu}{x^2 - \mu} \in R_0 \subseteq R$ , отсюда  $g(x, \theta) \in 1 + QA$ . Далее, согласно формуле (2) § 4

$$g(x, \theta)^{-1} = g(\theta x, \theta^{-1}),$$

причем  $\theta^{-2} \in \Delta = (1 + QA)^*$ , поэтому  $g(x, \theta) \in \Delta = (1 + QA)^*$ . Итак,  $\Delta^{(1)} = \Delta^*$ , т. е. равенство (1) доказано для  $n = 1$ . Пусть  $n \geq 2$  и равенство (1) справедливо для  $n - 1$ , т. е.

$$\Delta^{(n-1)} = \Delta(H^{(n-1)}) = \Delta^*(n - 1). \quad (2)$$

В силу леммы 3.9.7

$$\Delta^{(n)} = (\Delta^{(n-1)})' \leq \{\delta \in \Omega^0(A) : \delta^2 \in \Delta^{(n-1)}\},$$

откуда согласно (2)  $\Delta^{(n)} \leq \Delta^*(n)$ . Обратно, пусть  $\theta \in \Delta^*(n)$ ,

$$\theta \in \Omega^0(A), \quad \theta^{2^n} \in \Delta = (1 + QA)^*.$$

Согласно 3.7.9

$$\frac{g(x, \theta^{2^{n-1}})}{g(x, \theta)^{2^{n-1}}} \in \Omega_0(A) \leq (1 + QA)^* = \Delta. \quad (3)$$

Пусть  $\delta = \theta^{2^{n-1}}$ , тогда  $\delta \in \Omega^0(A)$ ,  $\delta^2 \in \Delta$ . Согласно доказанному равенству  $\Delta' = \Delta^*(1)$  тогда  $\delta \in \Delta'$ . Но тогда согласно 3.9.4  $g(x, \delta) \in \Delta$ . Следовательно, из (3)

$$g(x, \theta)^{2^{n-1}} \in \Delta.$$

Далее, согласно § 6 так как  $\theta \in \Omega^0(A)$ , то  $g(x, \theta) \in \Omega^0(A)$ . Итак,

$$g(x, \theta) \in \Omega^0(A), \quad g(x, \theta)^{2^{n-1}} \in \Delta.$$

Следовательно, по определению  $g(x, \theta) \in \Delta^*(n-1)$ , но тогда согласно (2)  $g(x, \theta) \in \Delta^{(n-1)}$ . Теперь согласно 3.9.4

$$\theta \in (\Delta^{(n-1)})' = \Delta^{(n)}.$$

Итак,  $\Delta^*(n) = \Delta^{(n)}$ .  $\triangleright$

## ГЛАВА 4

### ПОДГРУППЫ ГРУППЫ $GL(2, \mathbb{Q})$ , СОДЕРЖАЩИЕ НЕРАСЩЕПИМЫЙ МАКСИМАЛЬНЫЙ ТОР

В этой главе находят приложение результаты исследований гл. III. А именно, исследуются подгруппы полной линейной группы  $GL(2, \mathbb{Q})$  степени 2 над полем рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ , содержащие нерасщепимый максимальный тор  $T$ .

#### § 1. Кольцо $R_0$

В § 1 гл. III для квадратичного расширения  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  ( $\mu = d$  — целое свободное от квадратов) мы определили кольцо

$$R_0 = R(d) = \text{ring}_{x \in K} \left\langle 1, \frac{2tr(z^2)}{N(z)} \right\rangle,$$

которое содержится в кольце множителей  $R$  модуля  $A$  произвольной промежуточной подгруппы  $H$ ,  $T = T(d) \leq H \leq G = GL(2, \mathbb{Q})$ , для которой  $A = A(H) \neq (0)$ . Выберем базис  $1, \sqrt{d}$  поля  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  над  $\mathbb{Q}$ . Тогда для  $z = x + y\sqrt{d} \in K$ ,  $x, y \in \mathbb{Q}$  мы имеем  $tr(z^2) = 2(x^2 + dy^2)$ ,  $N(z) = x^2 - dy^2$ , а потому

$$\frac{2tr(z^2)}{N(z)} = \frac{4x^2 + 4dy^2}{x^2 - dy^2} = 4 + \frac{8dy^2}{x^2 - dy^2}.$$

Следовательно,

$$R_0 = \text{ring}_{x \in \mathbb{Q}} \left\langle 1, \frac{8d}{x^2 - d} \right\rangle.$$

Мы покажем, что в случае поля  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел

$$R_0 = \text{ring}_{x \in \mathbb{Q}} \left\langle 1, \frac{4d}{x^2 - d} \right\rangle.$$

**Лемма 4.1.1.** Пусть  $H$  — промежуточная подгруппа  $T \leq H \leq G = GL(2, \mathbb{Q})$ ,  $A = A(H) \neq (0)$ ,  $R = R(H)$ . Рассмотрим множество

$$B = \left\{ \beta \in \mathbb{Q}: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H \right\}.$$

Тогда либо  $B = A$ , либо  $B = \frac{1}{2}A$ .

◁ Несложно показать (см. [139, теорема 2 § 8]), что  $B$  — подгруппа аддитивной группы поля  $\mathbb{Q}$ . Пусть  $\beta \in B$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H$ .

Тогда согласно 3.4.5  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\beta & 1 \end{pmatrix} \in H$ , а потому  $2\beta \in A$ . Следовательно,

$$A \leq B \leq \frac{1}{2}A,$$

но если  $B \neq A$ , то  $(\frac{1}{2}A : A) = 2$ , а потому  $B = \frac{1}{2}A$ . ▷

**Следствие 4.1.2.** В обозначениях леммы 4.1.1  $R(A) = R(B) = R$ .

**Лемма 4.1.3.** Всякое кольцо множителей  $R$ , связанное с промежуточной подгруппой  $H$  ( $A(H) \neq (0)$ ) содержит элементы  $\frac{4d}{x^2 - d}$ ,  $x \in \mathbb{Q}$ .

◁ Пусть  $\beta \in B = \left\{ \beta \in \mathbb{Q}: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H \right\}$ , тогда согласно 3.4.1

$$\beta_1 = \beta(x) = \beta + \frac{x}{x^2 - d} \frac{\gamma^2 - 1 + d\beta^2}{\gamma} + \frac{2d}{x^2 - d} \beta \in B$$

для любого  $x \in \mathbb{Q}$ . Но согласно 4.1.1  $B$  — подгруппа группы  $\mathbb{Q}^+$ , а потому

$$\beta(x) + \beta(-x) - 2\beta = \frac{4d}{x^2 - d} \beta \in B,$$

откуда согласно 4.1.2

$$\frac{4d}{x^2-d} \in R(B) = R(A) = R. \triangleright$$

Последняя лемма дает нам возможность определить кольцо  $R_0$ :

$$R_0 = \text{ring}_{x \in \mathbb{Q}} \left\langle 1, \frac{4d}{x^2-d} \right\rangle,$$

которое согласно 4.1.3 содержится в кольце множителей  $R$  всякой промежуточной подгруппы  $H$ . Сейчас (теорема 4.1.4) мы охарактеризуем кольцо  $R_0$ .

Пусть  $P$  — множество всех простых чисел. Рассмотрим подмножество  $P(d)$  множества  $P$ , определенное следующим образом:

$$P(d) = \begin{cases} p \in P, p \neq 2 & \text{и} \quad \left(\frac{d}{p}\right) = 1, d \not\equiv 1 \pmod{8}; \\ p \in P, p = 2 & \text{или} \quad p \neq 2 \text{ и} \quad \left(\frac{d}{p}\right) = 1, d \equiv 1 \pmod{8}, \end{cases}$$

где  $\left(\frac{d}{p}\right)$  — символ Лежандра. Таким образом, если  $d \equiv 1 \pmod{8}$ , то  $P(d)$  состоит из тех нечетных простых чисел  $p$ , по модулю которых  $d$  является квадратичным вычетом; если же  $d \not\equiv 1 \pmod{8}$ , то помимо указанных нечетных простых чисел в  $P(d)$  мы включаем также четное простое число  $p = 2$ . Рассмотрим кольцо частных  $S^{-1}\mathbb{Z}$ , где  $S$  — мультипликативная система порожденная множеством  $P(d)$ . Обозначим это кольцо частных через  $R(d)$ . Очевидно, что кольцо  $R(d)$  состоит из тех рациональных чисел, в знаменатели которых (в несократимой записи) входят лишь простые числа из  $P(d)$ .

**Теорема 4.1.4.** Кольцо  $R_0$  совпадает с кольцом  $R(d)$ .

$\triangleleft$  Пусть  $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ,  $n \neq 0$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $(m, n) = 1$ ,  $\frac{4d}{x^2-d} = \frac{4dn^2}{m^2-dn^2} \in R_0$  и  $p \in P$  — простое число, которое содержится в знаменателе рационального числа  $\frac{4dn^2}{m^2-dn^2}$  (в несократимой

записи). Следовательно,  $p \mid (m^2 - dn^2)$ . Но тогда  $(p, n) = 1$ . Далее, если  $p \mid m$ , то  $p \mid d$ , но так как  $d$  свободно от квадратов, а  $p$  входит в знаменатель числа  $\frac{4dn^2}{m^2 - dn^2}$  в его несократимой записи, то это невозможно. По указанной причине  $(p, d) = 1$ . Итак,  $(p, m) = (p, n) = (p, d) = 1$  и  $p \mid (m^2 - dn^2)$ . Таким образом, если  $p$  нечетно, то  $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$  и  $p \in P(d)$ . Пусть  $p = 2$ . Тогда  $(2, m) = (2, n) = (2, d) = 1$ ,  $2 \mid (m^2 - dn^2)$  и  $p = 2$  содержится в несократимой записи числа  $\frac{4dn^2}{m^2 - dn^2}$ . Следовательно, в виду наличия числа 4 в числителе,  $2^3 \mid (m^2 - dn^2)$ , а потому сравнение  $x^2 \equiv d \pmod{8}$  имеет решение, но как известно это возможно лишь в случае  $d \equiv 1 \pmod{8}$ . Итак, при  $p = 2$  мы имеем  $d \equiv 1 \pmod{8}$ , а потому  $2 \in P(d)$ . Таким образом, доказано включение  $R_0 \subseteq R(d)$ .

Покажем обратное включение. Пусть  $p \in P(d)$ . Покажем, что тогда  $p$  входит в знаменатель рационального числа из  $R_0$  в несократимой его записи. Хорошо известно, что для нечетных простых чисел  $p$ , для которых  $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$ , а также для  $p = 2$  при  $d \equiv 1 \pmod{8}$  сравнение  $x^2 \equiv d \pmod{p^k}$  разрешимо для любого натурального  $k$ . Возьмем соответствующее решение  $x \in \mathbb{Z}$  и степень  $k \geq 3$ . Очевидно тогда, что для  $p \in P(d)$  простое  $p$  входит в знаменатель числа  $\frac{4d}{x^2 - d} \in R_0$  в несократимой его записи.  $\triangleright$

**Теорема 4.1.5.** Пусть  $x \in \mathbb{Q}$ . Тогда

(1) Если  $d$  четно, или  $d \equiv 1 \pmod{8}$ , то

$$\frac{x}{x^2 - d}, \frac{d}{x^2 - d} \in R_0.$$

(2) Если  $d \equiv 3 \pmod{4}$ , то

$$\frac{2d}{x^2 - d}, \frac{2x}{x^2 - d}, \frac{x + d}{x^2 - d} \in R_0.$$

(3) Если  $d \equiv 5 \pmod{8}$ , то

$$\frac{4x}{x^2 - d}, \frac{2(x + d)}{x^2 - d} \in R_0.$$

◁ Отметим в начале, что для  $x \in \mathbb{Q}$  рациональные числа  $\frac{d}{x^2-d}$  и  $\frac{x}{x^2-d}$  имеют один и тот же канонический знаменатель (т. е. знаменатель после сокращений). Этот простой факт связан с тем, что целое  $d$  не содержит квадратов. Таким образом, числа  $\frac{2^k d}{x^2-d}$  и  $\frac{2^k x}{x^2-d}$  ( $k$  — целое,  $k \geq 0$ ) содержатся в  $R_0$  одновременно. Далее, если простое  $p \neq 2$  входит в знаменатель числа  $\frac{d}{x^2-d}$ , то  $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$ , а потому  $p \in P(d)$  и  $\frac{1}{p} \in R(d) = R_0$ . Но так как  $\frac{4d}{x^2-d} \in R_0$  для любого  $x \in \mathbb{Q}$ , то осталось проверить вхождение в знаменатель числа 2 (исключительность двойки связана с разрешимостью квадратичных сравнений по модулю степени числа 2). Отметим, наконец, что если  $\frac{2^k d}{x^2-d} \in R_0$  и  $\frac{2^k x}{x^2-d} \in R_0$  ( $k \geq 1$ ), то  $\frac{2^{k-1}(x+d)}{x^2-d} \in R_0$ . Перейдем теперь к рассмотрению тех трех случаев сформулированных в теореме. Напомним, что по определению  $\frac{4d}{x^2-d} \in R_0$  для всех  $x \in \mathbb{Q}$ .

(1) Если  $d \equiv 1 \pmod{8}$ , то  $\frac{1}{2} \in R(d) = R_0$ . Поэтому  $\frac{d}{x^2-d} = \frac{1}{2^2} \frac{4d}{x^2-d} \in R_0$ . Если же  $d$  четно, то число 2, очевидно, не входит в канонический знаменатель числа  $\frac{d}{x^2-d}$ , а потому  $\frac{d}{x^2-d} \in R_0$ .

(2) Пусть  $d \equiv 3 \pmod{4}$ . Пусть  $x = \frac{m}{n}$ ,  $(m, n) = 1$ ,  $n \neq 0$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Рассмотрим число  $\frac{2d}{x^2-d} = \frac{2dn^2}{m^2-dn^2}$ . Пусть  $2^s \mid (m^2-dn^2)$ . Тогда  $(2, n) = 1$  (так как  $(m, n) = 1$ ) и  $(2, m) = 1$ . Но в нашем случае  $d \equiv 3 \pmod{4}$  и сравнение  $x^2 \equiv d \pmod{2^s}$  разрешимо лишь при  $s = 1$ . Сократив число  $\frac{2dn^2}{m^2-dn^2}$  на  $2^s = 2$  мы получим, что число 2 не входит в канонический знаменатель числа  $\frac{2dn^2}{m^2-dn^2}$ . Следовательно,  $\frac{2d}{x^2-d} \in R_0$ .

(3)  $d \equiv 5 \pmod{8}$ . Рассмотрение этого случая можно опустить в силу замечания, сделанного в начале доказательства и того, что  $\frac{4d}{x^2-d} \in R_0$ . ▷

## § 2. Стабильный ранг подколец поля $\mathbb{Q}$

В этом параграфе мы сформулируем ряд результатов о стабильном ранге подколец поля рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ . Эти результаты понадобятся нам в дальнейшем при описании решет-

ки промежуточных подгрупп  $\text{Lat}(T, G)$ . Основные результаты этого параграфа получены в [34].

Мы рассматриваем подкольца поля  $\mathbb{Q}$ , содержащие кольцо целых чисел  $\mathbb{Z}$ . Очевидно, что такие подкольца являются кольцами частных вида  $S^{-1}\mathbb{Z}$ , где  $S$  — мультипликативная система, порожденная некоторым множеством простых чисел. Рассматриваемые нами подкольца являются кольцами главных идеалов, а потому (см., например, [152]) их стабильные ранги равны либо 1, либо 2.

В настоящем параграфе формулируются результаты о стабильном ранге колец, возникающих при описании промежуточных подгрупп группы  $GL(2, \mathbb{Q})$ , содержащих тор  $T = T(d)$ .

Напомним определение стабильного ранга. Строчка  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  из элементов коммутативного кольца  $R$  называется *унимодулярной*, если эти элементы взаимно просты в совокупности, т. е. если

$$\alpha_1 r_1 + \dots + \alpha_n r_n = 1$$

при некоторых  $r_i \in R$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Унимодулярность строчки  $(\alpha)$  длины 1 равносильна обратимости элемента  $\alpha$  в кольце  $R$ . *Стабильный ранг* кольца  $R$  (в обозначении  $\text{sr } R$ ) — это наименьшее натуральное число  $m$ , обладающее свойством: для всякой унимодулярной строчки  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  с элементами из  $R$  длины  $n > m$  в кольце  $R$  существуют такие элементы  $r_1, \dots, r_{n-1}$ , что строчка

$$(\alpha_1 + r_1 \alpha_n, \dots, \alpha_{n-1} + r_{n-1} \alpha_n)$$

длины  $n - 1$  также унимодулярна. Если  $\text{sr } R = 1$ , то, в частности, для всякой унимодулярной пары  $(\alpha, \beta)$  существует такой элемент  $r \in R$ , что  $\alpha + r\beta \in R^*$ .

Стабильный ранг полулокального кольца (в частности, локального) равен 1. Кольцо  $\mathbb{Z}$  имеет стабильный ранг 2 (см., например, [152]). Пусть  $R = S^{-1}\mathbb{Z}$  — подкольцо поля  $\mathbb{Q}$ , где  $S$  — мультипликативная система, порожденная подмножеством  $P'$

множества всех простых чисел  $P$ . Если множество  $P \setminus P'$  конечно, то кольцо  $R$  полулокально, поэтому  $\text{sr } R = 1$ . В противном случае, если множество  $P'$  конечно, стабильный ранг кольца  $R$  равен 2 [152]. Отметим, что кольцо  $R_0 = R(d)$  определяется множеством простых  $P(d)$  (см. § 1), которое, как нетрудно показать, бесконечно; бесконечно также и множество  $P \setminus P(d)$ . Подробное доказательство следующих утверждений 4.2.1–4.2.5 можно найти в [34].

**Теорема 4.2.1.** Пусть  $R$  и  $R_1$  — два унитарных подкольца поля  $\mathbb{Q}$ , причем  $R \subseteq R_1$ . Если  $\text{sr } R = 1$ , то  $\text{sr } R_1 = 1$ .

**Теорема 4.2.2.** Стабильный ранг кольца  $R_0 = R(d)$  равен 1, если  $d < 0$  и равен 2, если  $d > 0$ .

**Лемма 4.2.3.** Пусть  $d > 0$ , и пусть  $d \not\equiv 1 \pmod{8}$ . Тогда

$$\text{sr} \left\langle R(d), \frac{1}{2} \right\rangle_{\text{ring}} = 1.$$

**Теорема 4.2.4.** Пусть  $d > 0$ . Если простое число  $r$  не обратимо в  $R(d)$ , то

$$\text{sr} \left\langle R(d), \frac{1}{r} \right\rangle_{\text{ring}} = 1.$$

**Следствие 4.2.5.** Если  $d < 0$ , то для всякого подкольца  $R \supseteq R(d)$  поля  $\mathbb{Q}$  мы имеем  $\text{sr } R = 1$ . Если же  $d > 0$ , то для всякого подкольца  $R \supsetneq R(d)$  поля  $\mathbb{Q}$  мы имеем  $\text{sr } R = 1$ .

**Следствие 4.2.6.** Утверждения 4.2.2 и 4.2.5 справедливы для произвольного рационального (не обязательно целого)  $d$ , не являющегося квадратом в  $\mathbb{Q}$ , где

$$R_0 = R(d) = \text{ring}_{x \in \mathbb{Q}} \left\langle \frac{4d}{x^2 - d} \right\rangle.$$

◁ Пусть  $d_1$  — произвольное рациональное, не являющееся квадратом в  $\mathbb{Q}$ . Тогда для некоторого целого  $d$  (свободного от квадратов)  $d_1 = s^2 d$ ,  $s \in \mathbb{Q}$ , а потому, как легко видеть,  $R(d_1) = R(d) = R_0$ . ▷

### § 3. Группы уровня идеала

В этом параграфе мы определяем группы  $G(\mathfrak{A})$ , связанные с идеалом  $\mathfrak{A}$  (группы уровня идеала), необходимые для исследования допустимых пар.

Пусть  $R$  — кольцо,  $\mathfrak{A} \subseteq R$  — идеал кольца  $R$ ,  $d \in R$ . Рассмотрим множество

$$G(\mathfrak{A}) = \left\{ a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in GL(2, R) : \right. \\ \left. a_{11} - a_{22} \in d\mathfrak{A}, \quad da_{21} - a_{12} \in d\mathfrak{A} \right\}.$$

**Лемма 4.3.1.** *Множество  $G(\mathfrak{A})$  является группой, модуль трансвекций которой совпадает с идеалом  $\mathfrak{A}$ .*

◁ Пусть  $a, b \in G(\mathfrak{A})$ ,  $a = (a_{ij})$ ,  $b = (b_{ij})$ ,  $c = (c_{ij}) = ab$ . Тогда

$$c_{11} - c_{22} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} - (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) = b_{11}(a_{11} - a_{22}) + \\ + a_{22}(b_{11} - b_{22}) + b_{21}(a_{12} - da_{21}) + a_{21}(db_{21} - b_{12}) \in d\mathfrak{A}.$$

Аналогично проверяется включение  $dc_{21} - c_{12} \in d\mathfrak{A}$ . Очевидно, далее, что если  $a \in G(\mathfrak{A})$ , то  $a^{-1} \in G(\mathfrak{A})$ . И, наконец, если  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in G(\mathfrak{A})$ , то  $\alpha \in \mathfrak{A}$ . ▷

**Лемма 4.3.2.** *Пусть  $T = T(d)$  — тор. Если  $H = TG(\mathfrak{A})$  — группа, то модуль трансвекций группы  $H$  совпадает с идеалом  $\mathfrak{A}$ ,  $A(H) = \mathfrak{A}$ .*

◁ Из леммы 4.3.1 очевидно следует включение  $\mathfrak{A} \subseteq A(H)$ .

Покажем обратное включение. Пусть  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in H = TG(\mathfrak{A})$ .

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & yd \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{Q}, \quad a = (a_{ij}) \in G(\mathfrak{A}).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} xa_{11} + dy a_{21} &= 1, \\ xa_{12} + dy a_{22} &= 0, \\ ya_{11} + xa_{21} &= \alpha. \end{aligned}$$

Из первых трех уравнений следует, что  $x = \frac{a_{22}}{\Delta}$ ,  $yd = -\frac{a_{12}}{\Delta}$ , где  $\Delta = \det a \in R^*$ . Подставляя эти значения в третье уравнение мы получим

$$\alpha = \frac{a_{22}a_{21}}{\Delta} - \frac{a_{12}a_{11}}{d\Delta} = \frac{da_{21}(a_{22} - a_{11}) + a_{11}(da_{21} - a_{12})}{d\Delta}.$$

Но  $a_{ij} \in R$ ,  $a_{22} - a_{11} \in d\mathfrak{A}$ ,  $da_{21} - a_{12} \in d\mathfrak{A}$ , откуда  $\alpha \in \mathfrak{A}$ .  $\triangleright$

**Теорема 4.3.3.** Пусть  $R$  — подкольцо поля  $\mathbb{Q}$ , содержащее кольцо  $R_0$ . Пусть, далее  $\mathfrak{A}$  — идеал кольца  $R$ , причем при нечетном  $d$   $\mathfrak{A} \subseteq 2R$ . Если  $d \not\equiv 5 \pmod{8}$ , то тор  $T = T(d)$  нормализует группу  $G(\mathfrak{A})$ , а потому  $H = TG(\mathfrak{A})$  — промежуточная подгруппа, содержащая тор  $T$ , модуль трансвекций которой (согласно 4.3.2) совпадает с идеалом  $\mathfrak{A}$ ,  $A(H) = \mathfrak{A}$ .

$\triangleleft$  Пусть  $a = (a_{ij}) \in G(\mathfrak{A})$ ,  $c(x) = \begin{pmatrix} x & d \\ 1 & x \end{pmatrix} \in T$ ,  $b = c(x)ac^{-1}(x)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11} + \beta(x)(a_{11} - a_{22}) + \alpha(x)(da_{21} - a_{12}), \\ b_{21} &= a_{21} + \alpha(x)(a_{11} - a_{22}) + \frac{1}{d}\beta(x)(da_{21} - a_{12}), \\ b_{12} &= a_{12} + \alpha(x)d(a_{22} - a_{11}) + \beta(x)(a_{12} - da_{21}), \\ b_{22} &= a_{22} + \beta(x)(a_{22} - a_{11}) + \alpha(x)(a_{12} - da_{21}), \end{aligned}$$

где  $\beta(x) = \frac{d}{x^2-d}$ ,  $\alpha(x) = \frac{x}{x^2-d}$ . Если  $d$  четно, то согласно 4.1.5  $\alpha(x), \beta(x) \in R_0 \subseteq R$ , а потому  $b \in GL(2, R)$ . Если же  $d$  нечетно и  $\mathfrak{A} \subseteq 2R$ , то так как  $\mathfrak{A} \subseteq 2R$  и согласно 4.1.5 ( $d \not\equiv 5 \pmod{8}$ )  $2\alpha(x), 2\beta(x) \in R_0 \subseteq R$ , то так же  $b \in GL(2, R)$ . Покажем теперь, что  $b_{11} - b_{22} \in d\mathfrak{A}$ ,  $db_{21} - b_{12} \in d\mathfrak{A}$ . Имеем

$$b_{11} - b_{22} = a_{11} - a_{22} + 2\beta(x)(a_{11} - a_{22}) + 2\alpha(x)(da_{21} - a_{12}).$$

Но по условию  $a_{11} - a_{22} \in d\mathfrak{A}$ ,  $da_{21} - a_{12} \in d\mathfrak{A}$ , а как уже было отмечено  $2\alpha(x), 2\beta(x) \in R_0 \subseteq R$ , откуда  $b_{11} - b_{22} \in d\mathfrak{A}$ . Аналогично,  $db_{21} - b_{12} \in d\mathfrak{A}$ . Следовательно,  $b \in G(\mathfrak{A})$ .  $\triangleright$

Перейдем теперь к рассмотрению случая  $d \equiv 5 \pmod{8}$ . Для этого введем в рассмотрение группу  $G^*(A)$  аналогичную группе  $G(\mathfrak{A})$ , но более сложного строения.

Пусть  $R$  — кольцо,  $\mathfrak{A}$  — идеал кольца  $R$ ,  $A = 2\mathfrak{A}$ . Рассмотрим множество

$$G^*(A) = \{a \in GL(2, R) : a_{11} - a_{22} \in d\mathfrak{A}, \\ da_{21} - a_{12} \in d\mathfrak{A}, a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12} \in dA\}.$$

Ясно, что  $G^*(A) = \{a \in G(\mathfrak{A}) : a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12} \in dA\}$ .

**Предложение 4.3.4.** Если  $d - 1 \in 2R$ , то  $G^*(A)$  — группа.

$\triangleleft$  Пусть  $a, b \in G^*(A)$ . Покажем, что  $ab \in G^*(A)$  и  $a^{-1} \in G^*(A)$ . Заметим в начале, что из леммы 4.3.1 следует, что  $ab, a^{-1} \in G(\mathfrak{A})$ . Покажем, что  $a^{-1} \in G^*(\mathfrak{A})$ . Имеем

$$(a^{-1})_{11} - (a^{-1})_{22} + d(a^{-1})_{21} - (a^{-1})_{12} = \\ = (a_{22} - a_{11} - da_{21} + a_{12}) \frac{1}{\Delta} \in dA,$$

где  $\Delta = \det a \in R^*$ , поэтому  $a^{-1} \in G^*(A)$ . Пусть теперь  $c = (c_{ij}) = ab$ . Покажем, что  $c \in G^*(A)$ . Нетрудно проверить формулу

$$c_{11} - c_{22} + dc_{21} - c_{12} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} - (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) + \\ + d(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) = \\ = (a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12})(b_{11} - b_{12} + db_{21} - b_{21}) + \\ + (b_{11} - b_{22} + db_{21} - b_{12})(a_{22} + a_{12} - da_{21} + a_{21}) + \\ + (d - 1)[b_{21}(a_{22} - a_{11}) + a_{21}(b_{11} - b_{22})].$$

Но по условию  $a, b \in G^*(A)$ , а потому элементы

$$a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12}, \quad b_{11} - b_{22} + db_{21} - b_{12}$$

содержатся в идеале  $dA = 2d\mathfrak{A}$  и  $a_{11} - a_{22} \in d\mathfrak{A}$ ,  $b_{11} - b_{22} \in d\mathfrak{A}$ .

Учитывая теперь, что  $d - 1 \in 2R$  мы получаем, что

$$c_{11} - c_{22} + dc_{21} - c_{12} \in dA = 2d\mathfrak{A}. \triangleright$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.3.5.** Заметим, что модуль трансвекций группы  $G^*(A)$  совпадает с идеалом  $A$ .

**Предложение 4.3.6.** Пусть  $d - 1 \in 2R$ , тогда  $G^*(A)$  — группа (см. 4.3.4). Если  $H = T \cdot G^*(A)$  — группа, то модуль трансвекций группы  $H$  совпадает с идеалом  $A$ ,  $A(H) = A$ .

◁ Включение  $A(H) \supseteq A$  очевидно следует из замечания 4.3.5.

Докажем обратное включение. Пусть  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \in T \cdot G^*(A)$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & dy \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } a = (a_{ij}) \in G^*(A).$$

Имеем четыре уравнения

$$\begin{aligned} xa_{11} + dy a_{21} &= 1, \\ xa_{12} + dy a_{22} &= 0, \\ ya_{11} + xa_{21} &= \beta, \\ ya_{12} + xa_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений мы имеем  $x = \frac{a_{22}}{\Delta}$ ,  $dy = -\frac{a_{12}}{\Delta}$ , где  $\Delta = \det a \in R^*$ . Подставив эти значения в четвертое уравнение и учитывая, что  $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , мы получаем, что

$$da_{22}(a_{11} - a_{22}) - a_{12}(da_{21} - a_{12}) = 0. \quad (*)$$

Далее из третьего уравнения

$$\beta = \frac{da_{22}a_{21} - a_{12}a_{11}}{d\Delta} = \frac{a_{22}(da_{21} - a_{12}) - a_{12}(a_{11} - a_{22})}{d\Delta}.$$

Прибавив к числителю последнего выражения левую часть равенства (\*), мы получаем

$$\beta = \frac{(a_{22} - a_{12})(a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12}) + a_{22}(d - 1)(a_{11} - a_{22})}{d\Delta}.$$

Так как  $a \in G^*(A)$ , то  $\Delta \in R^*$ ,  $a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12} \in dA$ ,  $a_{11} - a_{22} \in d\mathfrak{A}$ ,  $d - 1 \in 2R$ , следовательно,  $(d - 1)(a_{11} - a_{22}) \in 2d\mathfrak{A} = dA$ , а потому  $\beta \in A$ .  $\triangleright$

**Предложение 4.3.7.** Пусть  $\alpha(x) = \frac{x}{x^2-d}$ ,  $\beta(x) = \frac{d}{x^2-d}$ ,  $x \in \mathbb{Q}$ . Тогда элементы  $4\beta(x)$ ,  $2(\alpha(x) \pm \beta(x))$ ,  $2(d\alpha(x) \pm \beta(x))$ ,  $(d - 1)\alpha(x)$ ,  $(d - 1)\beta(x)$  содержатся в кольце  $R_0$ .

$\triangleleft$  Из теоремы 4.1.5 следует, что  $4\beta(x) \in R_0$ . Далее, включения  $(d - 1)\alpha(x) \in R_0$ ,  $(d - 1)\beta(x) \in R_0$ , также следует из 4.1.5. Так как  $\alpha(-x) = -\alpha(x)$ , то остальные включения докажем для знака "+". Согласно 4.1.5 имеем

$$2(\alpha(x) + \beta(x)) = \frac{2(x + d)}{x^2 - d} \in R_0.$$

Далее,

$$2(d\alpha(x) + \beta(x)) = 2\left(\frac{dx + d}{x^2 - d}\right) = 2(d - 1)\alpha(x) + 2(\alpha(x) + \beta(x)).$$

Согласно доказанному  $2(\alpha(x) + \beta(x)) \in R_0$ . Далее, если  $d$  четно, то  $\alpha(x) \in R_0$  (см. 4.1.5), если же  $d$  нечетно,  $d = 2k + 1$ , то согласно 4.1.5  $2(d - 1)\alpha(x) = 4k\alpha(x) \in R_0$ . Следовательно,  $2(d\alpha(x) + \beta(x)) \in R_0$ .  $\triangleright$

**Теорема 4.3.8.** Пусть  $d$  нечетно,  $R$  — подкольцо поля  $\mathbb{Q}$ , содержащее  $R_0$ . Пусть, далее,  $\mathfrak{A}$  — идеал кольца  $R$ , причем  $\mathfrak{A} \subseteq 2R$ . Если  $A = 2\mathfrak{A}$ , то тор  $T$  нормализует группу  $G^*(A)$ , а потому  $H = T \cdot G^*(A)$  — промежуточная подгруппа, модуль трансвекций которой (4.3.6) совпадает с  $A$ ,  $A(H) = A$ .

$\triangleleft$  Пусть  $a = (a_{ij}) \in G^*(A)$ ,  $c(x) = \begin{pmatrix} x & d \\ 1 & x \end{pmatrix}$ ,  $b = (b_{ij}) = c(x)ac^{-1}(x)$ . Покажем, что  $b \in G^*(A)$ . Для элементов  $b_{ij}$  матрицы  $b$  имеем

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11} + \beta(x)(a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12}) + (\alpha(x) - \beta(x))(da_{21} - a_{12}), \\ b_{12} &= a_{12} + \beta(x)(a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12}) - (d\alpha(x) - \beta(x))(a_{11} - a_{22}), \end{aligned}$$

$$b_{21} = a_{21} + \frac{1}{d}\beta(x)(a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12}) + \frac{1}{d}(d\alpha(x) - \beta(x))(a_{11} - a_{22}),$$

$$b_{22} = a_{22} + \beta(x)(a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12}) - (\alpha(x) - \beta(x))(da_{21} - a_{12}).$$

Так как

$$a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12} \in dA = 2d\mathfrak{A} \subseteq 4dR,$$

$$a_{11} - a_{22} \in d\mathfrak{A} \subseteq 2dR,$$

$$da_{21} - a_{12} \in d\mathfrak{A} \subseteq 2dR,$$

то из 4.3.7 следует, что  $b \in GL(2, R)$ . Далее,

$$b_{11} - b_{22} = a_{11} - a_{22} + 2\beta(x)(a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12}) +$$

$$+ 2(\alpha(x) - \beta(x))(da_{21} - a_{12}),$$

$$db_{21} - b_{12} = da_{21} - a_{12} + 2\beta(x)(a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12}) +$$

$$+ 2(d\alpha(x) - \beta(x))(a_{11} - a_{22}),$$

$$b_{11} - b_{22} + db_{21} - b_{12} = a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12} +$$

$$+ 4\beta(x)(a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12}) + (\alpha(x) - \beta(x))(da_{21} - a_{12}) +$$

$$+ 2(d\alpha(x) - \beta(x))(a_{11} - a_{22}) = (1 + 2(\alpha(x) + \beta(x))) \times$$

$$\times (a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12}) + (d - 1)(a_{11} - a_{22})2\alpha(x).$$

Так как  $a_{11} - a_{22} \in d\mathfrak{A}$ ,  $da_{21} - a_{12} \in d\mathfrak{A}$ ,  $a_{11} - a_{22} + da_{21} - a_{12} \in dA = 2d\mathfrak{A}$ , то из 4.3.7 мы имеем

$$b_{11} - b_{22} \in d\mathfrak{A}, \quad db_{21} - b_{12} \in d\mathfrak{A}, \quad b_{11} - b_{22} + db_{21} - b_{12} \in dA. \triangleright$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3.9. Случай  $d \equiv 5 \pmod{8}$ ,  $A \subseteq 2R$  — идеал ( $R \supseteq R_0$ ) и  $A \not\subseteq 4R$  рассмотрен в [139]. А именно, там показано, что в этом случае для

$$\sigma = \begin{pmatrix} dA & dA \\ A & dA \end{pmatrix}$$

тор  $T$  перестановочен с группой  $G(\sigma)$ , а потому  $H = T \cdot G(\sigma)$  — группа, для которой  $A(H) = A$ . Там же показано, что в этом случае для  $\sigma = \begin{pmatrix} A & dA \\ A & A \end{pmatrix}$  произведение  $T \cdot G(\sigma)$  также является группой.

#### § 4. Допустимые кольца и допустимые пары

Напомним, что для промежуточной подгруппы  $H$ ,  $T \leq H \leq G = GL(2, \mathbb{Q})$  мы определяем модуль трансвекций  $A = A(H)$ ,

$$A = \left\{ \alpha \in \mathbb{Q}: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in H \right\}$$

и кольцо множителей  $R = R(H) = \{\lambda \in \mathbb{Q}: \lambda A \subseteq A\}$ . В этом параграфе мы покажем, что  $A \subseteq R$ , т. е.  $A$  — целый идеал кольца  $R$  и дадим необходимые и достаточные условия допустимости пары  $(R, A)$  (без ограничений на  $d$ ). Напомним по определению (см. гл. III, § 2), что пара  $(R, A)$  допустима тогда и только тогда, когда существует промежуточная подгруппа  $H$ , для которой  $A = A(H)$  и  $R = R(H)$ .

**Предложение 4.4.1.** Пусть  $H$  — промежуточная подгруппа,  $A = A(H) \neq (0)$ ,  $R = R(H)$ . Тогда  $A \subseteq R$ , т. е.  $A$  — целый идеал кольца  $R$ .

◁ Пусть  $\alpha \in A$ , т. е.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in H$ . Из 3.2.6 следует, что  $d\alpha^2 \in R$ . Пусть  $p$  входит в канонический знаменатель рационального числа  $\alpha$ , тогда (так как  $d$  свободно от квадратов)  $\frac{1}{p} \in R$ . Следовательно,  $\alpha \in R$ . Итак,  $A \subseteq R$ . ▷

**Предложение 4.4.2.** Пусть выполнены условия предложения 4.4.1. Если  $d$  нечетно, то  $A \subseteq 2R$ .

◁ Согласно 4.4.1  $A \subseteq R$ . Пусть  $d$  нечетно и  $A \not\subseteq 2R$ . Тогда для некоторого  $\alpha \in A$ ,  $\alpha \in R \setminus 2R$ . Если  $\alpha = \frac{m}{n}$ ,  $(m, n) = 1$ , то  $m$  нечетно и  $n \in R^*$ . Из 3.2.6 (см. доказательство 3.2.6) следует, что  $1 - d\alpha^2 \in R^*$ , откуда  $1 - \frac{dm^2}{n^2} = \frac{n^2 - dm^2}{n^2} \in R^*$  и  $n^2 - dm^2 \in R^*$ . Если  $n$  четно, то  $2 \in R^*$  (так как  $n \in R^*$ ), если же  $n$  нечетно, то  $n^2 - dm^2$  четно, а потому  $2 \in R^*$ . Следовательно,  $\alpha \in R = 2R$ . Полученное противоречие доказывает предложение. ▷

В гл. III мы дали необходимые и достаточные условия допустимости пары  $(R, A)$  при условии  $2 \in R_0^*$ . Этими условиями

были:  $R \supseteq R_0$  и  $\mu A^2 \subseteq R$ . Так как в нашем случае поля  $\mathbb{Q}$  модуль  $A$  всегда содержится (см. 4.4.1) в кольце  $R$  ( $A$  — идеал кольца  $R$ ) и  $\mu = d$  — целое (свободное от квадратов), то условие  $dA^2 \subseteq R$  выполнено автоматически. Нашей целью является доказательство следующей теоремы.

**Теорема 4.4.3.** Пусть  $R$  — подкольцо поля  $\mathbb{Q}$ ,  $A$  — идеал кольца  $R$ ,  $A \neq (0)$ . Для того чтобы пара  $(R, A)$  была допустимой необходимо и достаточно, чтобы  $R \supseteq R_0$  и  $A \subseteq 2R$  в случае нечетного  $d$ .

◁ Заметим, что согласно 4.1.3 необходимым условием допустимой пары  $(R, A)$  является включение  $R \supseteq R_0$ . Далее, (см. 4.4.1)  $A \subseteq R$ , а из 4.4.2 следует необходимость включения  $A \subseteq 2R$  в случае нечетного  $d$ . Поэтому обратимся к доказательству достаточности условий теоремы. Если  $d \equiv 1 \pmod{8}$ , то как нетрудно видеть (см.  $R(d) = R_0$ )  $2 \in R_0^*$ , а потому этот случай вытекает из теоремы 3.2.6. Если  $d$  четно, то согласно теореме 4.1.5

$$\frac{d}{x^2 - d}, \frac{x}{x^2 - d} \in R_0,$$

а потому доказательство достаточности условий теоремы 4.4.3 дословно повторяет случай  $d \equiv 1 \pmod{8}$  (см. 3.2.5, 3.2.6). Таким образом, осталось рассмотреть случаи  $d \equiv 3 \pmod{4}$  и  $d \equiv 5 \pmod{8}$ . Рассмотрение этих случаев следует из теоремы 4.3.3, теоремы 4.3.8 и замечания 4.3.9. ▷

**Следствие 4.4.4.** Подкольцо  $R$  поля  $\mathbb{Q}$  допустимо тогда и только тогда, когда  $R \supseteq R_0$ .

В заключении параграфа приведем примеры промежуточных подгрупп с кольцом множителей  $R$  при условии  $2 \in R^*$ . Итак, пусть  $(R, A)$  — допустимая пара,  $R \supseteq R_0$ , причем  $2 \in R^*$ ,  $A$  — идеал кольца  $R$ . Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.4.5.** Для произвольного делителя  $d'$  числа  $d$  рассмотрим сеть

$$\sigma = \begin{pmatrix} d'A & dA \\ A & d'A \end{pmatrix}.$$

Тогда тор  $T = T(d)$  нормализует сетевую группу  $G(\sigma)$ , а поэтому  $T \cdot G(\sigma)$  — промежуточная подгруппа, причем

$$TG(\sigma) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 + d'A \end{pmatrix}^*.$$

◁ Заметим, что для случая  $d' = d$  теорема вытекает из 3.2.5, 3.3.5 и 4.1.5. Так как  $2 \in R^*$  и  $R \supseteq R_0$ , то согласно 3.1.2 (см. также 3.2.1) и § 1 гл. III

$$\frac{x}{x^2 - d}, \frac{d}{x^2 - d} \in R.$$

Теперь доказательство того, что тор  $T$  нормализует группу  $G(\sigma)$  дословно совпадает с доказательством теоремы 3.2.5. Покажем последнее равенство теоремы. Пусть  $H = T \cdot G(\sigma)$ ,

$$H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}, \quad \Delta \leq R^*.$$

Очевидно, что  $(1 + d'A)^* \subseteq \Delta$ . Покажем обратное включение. Пусть  $\delta \in \Delta$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in H = TG(\sigma).$$

Поэтому для некоторого  $t = \begin{pmatrix} x & yd \\ y & x \end{pmatrix} \in T$ ,

$$t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in G(\sigma).$$

Отсюда  $\begin{pmatrix} x & yd\delta \\ y & x\delta \end{pmatrix} \in G(\sigma)$ , а потому  $y \in A$ ,  $x \in 1 + d'A$ . Далее,  $\det(t)\delta \in R^*$ , откуда  $\det(t) \in R^*$ . Следовательно,  $t \in G(\sigma)$ , откуда  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in G(\sigma)$  и  $\delta \in (1 + d'A)^*$ . ▷

### § 5. Максимальные промежуточные подгруппы

В этом параграфе (теорема 4.5.8) мы дадим описание максимальных нетривиальных (т. е. не содержащих  $SL(2, \mathbb{Q})$ ) подгрупп группы  $G = GL(2, \mathbb{Q})$ , содержащих тор  $T = T(d)$ . В качестве одного из результатов отметим следующий (см. 4.5.9). Для всякого простого числа  $p$  определяется максимальная нетривиальная подгруппа группы  $G$ , а именно, таковой является группа

$$T(p) \left( \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & p\mathbb{Z}_{(p)} \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)} \end{pmatrix} \right)^*,$$

где  $\mathbb{Z}_{(p)}$  — кольцо  $p$ -целых чисел, т. е. кольцо всех рациональных чисел, у которых  $p$  не входит в канонический знаменатель.

Пусть  $R$  — кольцо,  $2 \in R^*$ ,  $d \in R$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} R & dR \\ R & R \end{pmatrix}$ . Рассмотрим группу

$$G(\sigma) = \begin{pmatrix} R & dR \\ R & R \end{pmatrix}^*.$$

Если  $R \supseteq R_0$  и  $2 \in R^*$ , то, как нетрудно видеть, тор  $T = T(d)$  нормализует группу  $G(\sigma)$  (см. формулы из доказательства 4.3.3). Следовательно,  $T \cdot G(\sigma)$  — промежуточная подгруппа. Обозначим эту подгруппу через  $G_R$ :

$$G_R = T \cdot G(\sigma).$$

Заметим, что  $A(G_R) = R(G_R) = R$ .

**Предложение 4.5.1.** Пусть  $H$  — максимальная нетривиальная промежуточная подгруппа,  $T < H < G$ . Тогда кольцо  $R = R(H)$  множителей подгруппы  $H$  является максимальным подкольцом поля  $\mathbb{Q}$ , содержащим кольцо  $R_0 = R_0(d)$ .

◁ Из 4.4.4 следует, что  $R \supseteq R_0$ . Предположим, что кольцо  $R$  не максимально в  $\mathbb{Q}$ . Рассмотрим два случая. Пусть  $2 \notin R^*$ . Тогда  $R_1 = \langle \frac{1}{2}, R \rangle_{\text{ring}} \neq \mathbb{Q}$ , причем  $2 \in R_1^*$ . Тогда

$$H \subseteq T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}R & R^* \end{pmatrix} \subsetneq G_{R_1},$$

но это противоречит максимальной подгруппы  $H$ . Пусть теперь  $2 \in R^*$ . Так как по предположению кольцо  $R$  не максимально, то

$$R_0 \subseteq R \subsetneq R' \subsetneq \mathbb{Q}$$

для некоторого подкольца  $R'$ , причем  $\frac{1}{2} \in R'$ . Тогда

$$H \subseteq T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ R & R^* \end{pmatrix} \subsetneq G_{R'},$$

что также противоречит максимальной подгруппы  $H$ .  $\triangleright$

Предложение 4.5.1 сводит описание максимальных нетривиальных промежуточных подгрупп к максимальным промежуточным подкольцам  $R$ ,  $R_0 \subset R \subset \mathbb{Q}$ . Очевидно, что все такие подкольца совпадают с кольцами  $\mathbb{Z}_{(p)}$  —  $p$ -целых чисел, где  $p \notin P(d)$  (см. 4.1.4). Заметим, что если  $p \neq 2$ , то  $2 \in \mathbb{Z}_{(p)}^*$ .

Нетрудно проверить справедливость следующей леммы.

**Лемма 4.5.2.** *Имеет место формула  $(x, y \neq 0)$*

$$\begin{pmatrix} x & yd \\ y & x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{y}{x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{y}{x})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{x}{y})^2 - d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{yd}{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $d \equiv 3 \pmod{4}$  или  $d \equiv 5 \pmod{8}$ , тогда положим

$$\bar{H}_{(2)} = G_{2\mathbb{Z}_{(2)}} = T \begin{pmatrix} 1 + 2\mathbb{Z}_{(p)} & 2\mathbb{Z}_{(2)} \\ 2\mathbb{Z}_{(2)} & 1 + 2\mathbb{Z}_{(p)} \end{pmatrix}^*.$$

Согласно 4.3.3 и 4.3.9  $\bar{H}_{(2)}$  является промежуточной подгруппой с модулем трансвекций  $A = 2\mathbb{Z}_{(2)}$ .

**Предложение 4.5.3.** *Если  $d \equiv 3 \pmod{4}$ , то группа  $\bar{H}_{(2)}$  является максимальной подгруппой в группе  $G = GL(2, \mathbb{Q})$ . Если же  $d \equiv 5 \pmod{8}$ , то группа  $\bar{H}_{(2)}$  не максимальна в  $G$ .*

$\triangleleft$  Пусть  $\bar{H}_{(2)} \subsetneq H \subset G$ . Пусть  $A = A(H)$ ,  $R = R(H)$ . Очевидно, что  $A \supseteq 2\mathbb{Z}_{(2)}$ ,  $R \supseteq \mathbb{Z}_{(2)}$ . Рассмотрим три случая:

1)  $A = 2\mathbb{Z}_{(2)}$ ,  $R = \mathbb{Z}_{(2)}$ . Покажем, что тогда  $H \subseteq \bar{H}_{(2)}$ , а потому этот случай невозможен. Пусть  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H$ . Тогда (4.1.1)  $\beta \in \mathbb{Z}_{(2)}$ ,  $\gamma \in \mathbb{Z}_{(2)}^*$ . Тогда (см. 3.2.6)  $1 - d\beta^2 \in R^*$ , но если  $\beta \in \mathbb{Z}_{(2)} \setminus 2\mathbb{Z}_{(2)}$ , то  $1 - d\beta^2 \in 2\mathbb{Z}_{(2)}$  при нечетном  $d$ , что противоречит тому, что  $1 - d\beta^2 \in R^* = \mathbb{Z}_{(2)}^*$ . Следовательно,  $\beta \in 2\mathbb{Z}_{(2)}$ . Далее, так как  $\gamma \in \mathbb{Z}_{(2)}^*$ , то  $\gamma - 1 \in 2\mathbb{Z}_{(2)}$ . Итак,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\mathbb{Z}_{(2)} & 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)} \end{pmatrix}^*,$$

а потому  $H \subseteq \bar{H}_{(2)}$ . Противоречие.

2)  $A = \mathbb{Z}_{(2)}$ ,  $R = \mathbb{Z}_{(2)}$ . Покажем, что этот случай также невозможен. Пусть  $\alpha \in A$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in H$ . Тогда  $\alpha \in \mathbb{Z}_{(2)}$ . Возьмем в качестве  $\alpha$  нечетное целое. Имеем (см. 3.2.6)  $1 - d\alpha^2 \in R^* = \mathbb{Z}_{(2)}^*$ , но так как  $d$  нечетно, то  $1 - d\alpha^2 \in 2\mathbb{Z}_{(2)} \subsetneq \mathbb{Z}_{(2)}^*$ . Противоречие.

3)  $A \supsetneq \mathbb{Z}_{(2)}$ . Тогда  $A = \mathbb{Q}$ ,  $R = \mathbb{Q}$ . В этом случае  $H \supseteq TSL(2, \mathbb{Q})$  и  $H \supsetneq \bar{H}_{(2)}$ . Покажем, что в случае  $d \equiv 3 \pmod{4}$   $H = G = GL(2, \mathbb{Q})$ . Для этого достаточно показать, что для любого простого  $p$  матрица

$$d_2(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

содержится в группе  $H$ . Если  $p$  нечетно, то  $p - 1 \in 2\mathbb{Z}_{(2)}$  и  $\frac{1}{p} - 1 \in 2\mathbb{Z}_{(2)}$ . Следовательно,

$$p \in (1 + 2\mathbb{Z}_{(2)})^*,$$

а потому  $d_2(p) \in \bar{H}_{(2)} \subset H$ . Пусть  $p = 2$ . Положив в лемме 4.5.2  $x = y$ , мы получим, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - d \end{pmatrix} \in H.$$

Если  $d \equiv 3 \pmod{4}$ , то  $2 \mid (1-d)$  и  $2^2 \nmid (1-d)$ . Но так как для нечетных простых  $p$  мы показали, что  $d_2(p) \in H$ , то  $d_2(2) \in H$ . А потому в случае  $d \equiv 3 \pmod{4}$   $H = GL(2, \mathbb{Q})$ . Если же  $d \equiv 5 \pmod{8}$ , то

$$\bar{H}_{(2)} \subsetneq \mathbb{Q}^* \cdot D(2, \mathbb{Z}_{(2)}) \cdot SL(2, \mathbb{Q}),$$

где  $D(2, \mathbb{Z}_{(2)})$  — группа диагональных матриц 2-го порядка над кольцом  $\mathbb{Z}_{(2)}$ . Действительно, если  $d \equiv 5 \pmod{8}$ , то для всякого  $z \in \mathbb{Q}$  число 2 входит в рациональное число  $z^2 - d$  с четным показателем, а потому

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^2 - d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^* \cdot SL(2, \mathbb{Q}) \cdot D(2, \mathbb{Z}_{(2)}),$$

но тогда из 4.5.2

$$T \leq \mathbb{Q}^* \cdot SL(2, \mathbb{Q}) \cdot D(2, \mathbb{Z}_{(2)}).$$

А потому

$$\bar{H}_2 \subsetneq \mathbb{Q}^* \cdot D(2, \mathbb{Z}_{(2)}) \cdot SL(2, \mathbb{Q}). \triangleright$$

**Лемма 4.5.4.** Если нечетное простое  $p$  не делит  $d$  и  $p \notin P(d)$ , то для всякого  $z \in \mathbb{Q}$   $p$  входит в рациональное число  $z^2 - d$  с четным показателем.

$\triangleleft$  Пусть  $z = \frac{k}{l}$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$ ,  $l \neq 0$ ,  $(k, l) = 1$ . Тогда

$$z^2 - d = \frac{k^2 - dl^2}{l^2}.$$

Достаточно показать, что  $p \nmid (k^2 - dl^2)$ . Действительно, если  $p \mid (k^2 - dl^2)$ , то  $(p, l) = 1$  и  $(p, k) = 1$  (напомним, что  $(p, d) = 1$ ). Следовательно,  $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$ , а потому  $p \in P(d)$ . Противоречие.  $\triangleright$

**Предложение 4.5.5.** Пусть  $p$  — нечетное простое число,  $p \notin P(d)$ . Если  $p$  не делит число  $d$  ( $p \nmid d$ ), то группа

$$G_{\mathbb{Z}_{(p)}} = T \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & d\mathbb{Z}_{(p)} \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)} \end{pmatrix}^*$$

не является максимальной.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5.6. Группа  $G_{\mathbb{Z}_{(p)}}$  является промежуточной подгруппой так как  $p \neq 2$ ,  $2 \in \mathbb{Z}_{(p)}^*$  (см. начало параграфа).

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.5.5. Покажем, что

$$G_{\mathbb{Z}_{(p)}} \subsetneq \mathbb{Q}^* \cdot D(2, \mathbb{Z}_{(p)}) \cdot SL(2, \mathbb{Q}).$$

Пусть  $H = \mathbb{Q}^* \cdot D(2, \mathbb{Z}_{(p)}) \cdot SL(2, \mathbb{Q})$ . Очевидно, что для доказательства включения  $G_{\mathbb{Z}_{(p)}} \subsetneq H$  достаточно показать, что тор  $T = T(H)$  содержится в  $H$ . Согласно 4.5.2 для этого достаточно показать, что для  $z \in \mathbb{Q}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^2 - d \end{pmatrix} \in H.$$

Но последнее включение следует из 4.5.4. ▷

**Предложение 4.5.7.** Пусть  $p$  — простое число, делящее  $d$ ,  $p \mid d$ . Тогда группа

$$G_{\mathbb{Z}_{(p)}} = T \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & d\mathbb{Z}_{(2)} \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)} \end{pmatrix}^*$$

является максимальной подгруппой в  $G = GL(2, \mathbb{Q})$ .

◁ Заметим в начале, что если  $p = 2$  ( $d$  чётно), то  $G_{\mathbb{Z}_{(p)}}$  — группа (см. 4.1.5 и 4.3.3). Пусть  $a \in G \setminus G_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ . Покажем, что тогда группа  $H = \langle a, G_{\mathbb{Z}_{(p)}} \rangle$  совпадает с  $G$ . Пусть  $A = A(H)$ . Так как  $G_{\mathbb{Z}_{(p)}} \subsetneq H$ , то  $A = R = \mathbb{Q}$ . В противном случае (если  $A = \mathbb{Z}_{(p)}$ )

$$H \subseteq T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)}^* \end{pmatrix} \subseteq G_{\mathbb{Z}_{(p)}}.$$

Итак,  $A = R = \mathbb{Q}$ . Следовательно,  $H \supseteq SL(2, \mathbb{Q})$ . Для доказательства того, что  $H = GL(2, \mathbb{Q})$  достаточно показать, что матрица

$$d_2(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

содержится в  $H$  для любого простого  $q$ . Но так как  $H \supseteq G_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ , то  $d_2(q) \in G_{\mathbb{Z}_{(p)}} \subseteq H$  для всякого  $q \neq p$ . Покажем, что  $d_2(p) \in H$ . Имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in H,$$

но так как  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Q}) \subseteq H$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in H$ , то  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in H$ . Но как мы уже показали  $d_2(q) \in H$  для всякого простого  $q \neq p$ . Следовательно, так как  $d$  свободно от квадратов и  $p \mid d$ , то  $d_2(p) \in H$ .  $\triangleright$

**Теорема 4.5.8.** Пусть  $p$  — простой делитель числа  $d$ . Тогда группа

$$G_{\mathbb{Z}_{(p)}} = T \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & d\mathbb{Z}_{(p)} \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)} \end{pmatrix}^* = T \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & p\mathbb{Z}_{(p)} \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)} \end{pmatrix}^*$$

является максимальной нетривиальной подгруппой группы  $G = GL(2, \mathbb{Q})$ ; в случае  $d \equiv 3 \pmod{4}$  кроме указанных групп  $G_{\mathbb{Z}_{(p)}}$  ( $p \mid d$ ) группа

$$\bar{H}_{(2)} = T \begin{pmatrix} 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)} & 2\mathbb{Z}_{(2)} \\ 2\mathbb{Z}_{(2)} & 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)} \end{pmatrix}^*$$

также является максимальной нетривиальной подгруппой группы  $G$ . Перечисленными подгруппами исчерпываются все максимальные нетривиальные промежуточные подгруппы группы  $G$ .

$\triangleleft$  Первая часть теоремы следует из 4.5.3 и 4.5.7. Пусть теперь  $H$  — максимальная нетривиальная промежуточная подгруппа. Пусть, далее,  $A = A(H)$ ,  $R = R(H)$ . Согласно 4.5.1  $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ , где  $p \notin P(d)$  (по поводу  $P(d)$  см. § 1, 4.1.4). Рассмотрим два случая

1)  $p \neq 2$ . Очевидно, что

$$H \subseteq T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)}^* \end{pmatrix} \subseteq G_{\mathbb{Z}_{(p)}},$$

но согласно 4.5.5 группа  $G_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ , не максимальна при  $p \nmid d$ . Следовательно,  $p$  делит число  $d$ . В этом случае

$$H \subseteq T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)}^* \end{pmatrix} \subseteq G_{\mathbb{Z}_{(p)}},$$

но группа  $H$  максимальна, а потому  $H = G_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ .

2)  $p = 2$ . В этом случае  $R = R(H) = \mathbb{Z}_{(2)}$ . Рассмотрим отдельно четыре случая:

2а)  $d \equiv 1 \pmod{8}$ . Тогда  $2 \in P(d)$ , но  $p \notin P(d)$  поэтому этот случай исключен.

2б)  $d$  четно. В этом случае

$$H \subseteq T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbb{Z}_{(2)} & \mathbb{Z}_{(2)}^* \end{pmatrix} \subseteq G_{\mathbb{Z}_{(2)}}.$$

Но, в силу максимальной  $H$ ,  $H = G_{\mathbb{Z}_{(2)}}$ .

2в)  $d \equiv 5 \pmod{8}$ . Тогда  $A \subseteq 2R = 2\mathbb{Z}_{(2)}$ . Пусть  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H$ .

Тогда  $\beta \in \mathbb{Z}_{(2)}$ ,  $\gamma \in \mathbb{Z}_{(2)}^*$ . Если  $\beta \in \mathbb{Z}_{(2)} \setminus 2\mathbb{Z}_{(2)}$ , то так как  $1 - d\beta^2 \in R^* = \mathbb{Z}_{(2)}^*$ , то этот случай исключен, следовательно,  $\beta \in 2\mathbb{Z}_{(2)}$ . Так как  $\gamma \in \mathbb{Z}_{(2)}^*$ , то  $\gamma - 1 \in 2\mathbb{Z}_{(2)}$ , таким образом, группа  $H \subseteq \bar{H}_{(2)}$  не максимальна (см. 4.5.3), следовательно, этот случай исключен.

2г)  $d \equiv 3 \pmod{4}$ . Тогда  $A \subseteq 2\mathbb{Z}_{(2)}$ . Если  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H$ , то  $\beta \in 2\mathbb{Z}_{(2)}$  и  $\gamma - 1 \in 2\mathbb{Z}_{(2)}$ , а потому

$$H \subseteq T \begin{pmatrix} 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)} & 2\mathbb{Z}_{(2)} \\ 2\mathbb{Z}_{(2)} & 1 + 2\mathbb{Z}_{(2)} \end{pmatrix}^* = \bar{H}_{(2)},$$

но так как  $\bar{H}_{(2)}$  — максимальна, то  $H = \bar{H}_{(2)}$ .  $\triangleright$

**Следствие 4.5.9.** Для всякого простого числа  $p$  группа

$$T(p) \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & p\mathbb{Z}_{(p)} \\ \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Z}_{(p)} \end{pmatrix}^*$$

является максимальной нетривиальной подгруппой группы  $G = GL(2, \mathbb{Q})$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5.10. Ясно, что существует бесконечное множество максимальных промежуточных подгрупп, содержащих тор  $T = T(d)$ : достаточно рассмотреть подгруппы, содержащие группу  $T \cdot SL(2, \mathbb{Q})$ . Однако, как следует из теоремы 5.5.8 число нетривиальных (т. е. не содержащих  $SL(2, \mathbb{Q})$ ) максимальных промежуточных подгрупп конечно и это число совпадает с числом простых делителей целого  $d$  (и на единицу больше если  $d \equiv 3 \pmod{4}$ ).

## § 6. Полные промежуточные подгруппы

Пусть  $(R, A)$  — допустимая пара (см. § 4), т. е.  $R$  — подкольцо поля  $\mathbb{Q}$ , содержащее кольцо  $R_0$ , а  $A$  — идеал кольца  $R$ . В этом параграфе мы дадим описание полных промежуточных подгрупп из  $\text{Lat}(R, A)$ , при условии  $2 \in R^*$ ,  $\text{sr } R = 1$ . Напомним, что  $\text{Lat}(R, A)$  — это множество всех промежуточных подгрупп  $H$ ,  $T \leq H \leq G = GL(2, \mathbb{Q})$ , для которых  $A = A(H)$ ,  $R = R(H)$ . Очевидно, что наименьшей полной подгруппой из  $\text{Lat}(R, A)$  является группа  $F_0 = F_0(A)$  (см. гл. III, § 6, 3.6.1), порожденная тором  $T = T(d)$  и группой  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix}$ . Согласно 4.1.5 (так как  $2 \in R^*$ ) для всех  $x \in \mathbb{Q}$

$$\frac{x}{x^2 - d} \in Q,$$

где  $Q$  — идеал кольца  $R$ , определенный в гл. III, § 2. Следовательно, в нашем случае  $Q = dR$ . Таким образом (см. 3.6.1)

$$F_0 = F_0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega_0(A) \end{pmatrix},$$

где  $\Omega_0(A)$  — подгруппа в группе  $(1 + dA)^*$ , порожденная элементами  $f(x, \alpha)$  для всех  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $\alpha \in A$ , где  $f(x, \alpha)$  — функция из 3.4.4.

Пусть

$$H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & (1 + A)^* \end{pmatrix}.$$

Согласно 4.4.5  $H, H \in \text{Lat}(R, A)$ , является промежуточной подгруппой, причем как и в 3.8.7 можно показать, что

$$\Delta(H_{(n)}) = \Omega_0(A)(1+A)^{*2^n}, \quad n \geq 1.$$

Положим

$$V_0(A) = F_0(A).$$

Пусть  $n = 1 + \nu_2(\phi(d))$ , где  $\phi$  — теоретико-числовая функция Эйлера,  $\nu_2(l)$  — степень вхождения числа 2 в целое число  $l$ . Пусть  $n = 1 + \nu_2(\phi(d))$ ,

$$\Delta^0(A) = \Omega_0(A)(1+A)^{*2^n}.$$

Положим

$$V^0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta^0(A) \end{pmatrix}.$$

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

**Теорема 4.6.1.** Пусть  $2 \in R^*$ ,  $\text{sr } R = 1$ . Множество всех полных подгрупп из  $\text{Lat}(R, A)$  совпадает с интервалом

$$\text{Lat}(V_0(A), V^0(A)) = \{H : V_0(A) \leq H \leq V^0(A)\}.$$

Промежуточная подгруппа  $H \in \text{Lat}(R, A)$  является полной тогда и только тогда, когда для  $\Delta = \Delta(H)$  индекс  $(\Delta : \Omega_0(A))$  является нечетным числом. Наконец, для всякой подгруппы  $H \in \text{Lat}(R, A)$  при  $m \geq 2 + \nu_2(\phi(d))$  группа  $H_{(m)}$  является полной.

**Лемма 4.6.2.** Пусть  $H \in \text{Lat}(R, A)$ , причем  $\Delta(H) \leq (1+A)^*$ ; пусть, далее,  $n = 1 + \nu_2(\phi(d))$ . Тогда

$$\Delta(H_{(n)}) \leq \Delta^0(A).$$

◁ Ясно, что

$$H \leq T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & (1+A)^* \end{pmatrix}.$$

Беря нормальное замыкание обеих частей, согласно сказанному выше, мы получим, что

$$H_{(n)} \leq V^0(A),$$

откуда  $\Delta(H_{(n)}) \leq \Delta^0(A)$ .  $\triangleright$

**Лемма 4.6.3.** (см. [139, предложение § 10]). Пусть  $R$  — подкольцо поля  $\mathbb{Q}$ ,  $R \supseteq \mathbb{Z}$ ,  $d$  — целое, свободное от квадратов. Предположим, что стабильный ранг кольца  $R$  равен 1. Пусть, далее,  $A \neq (0)$  — идеал кольца  $R$ ,  $A = aR$ , где  $a$  — каноническая образующая идеала  $A$  ( $a$  — наименьшее натуральное из  $A$ ). Пусть  $d = d_0 d_1$ , где  $d_0 \in R^*$ ,  $d_1 \notin R^*$ , причем всякий простой делитель числа  $d_1$  не содержится в  $R^*$ . Тогда группа

$$(1 + A)^*/(1 + dA)^*$$

имеет порядок  $\phi(d_1 a) \phi(a)^{-1}$ , где  $\phi$  — теоретико-числовая функция Эйлера.

**Следствие 4.6.4.** Пусть выполнены условия леммы 4.6.3. Если  $2 \in R^*$ , то порядок группы

$$(1 + A)^*/(1 + dA)^*$$

равен  $\phi(d_1 a) \phi(a)^{-1}$ , где  $d_1$  нечетно,  $d_1 \mid d$ , а потому

$$(1 + A)^{d_1 \phi(d)} \leq (1 + dA)^*.$$

$\triangleleft$  Покажем неравенство, сформулированное в следствии. Нетрудно видеть, что число  $\phi(d_1 a) \phi(a)^{-1}$  делит число  $d_1 \phi(d)$ , а потому согласно 4.6.3

$$(1 + A)^{d_1 \phi(d)} \leq (1 + dA)^*. \triangleright$$

**Лемма 4.6.5.** Имеет место неравенство

$$\Delta^0(A)/\Omega_0(A) \leq (1 + A)^*/(1 + dA)^*.$$

$\triangleleft$  Покажем в начале, что

$$\Delta^0(A) \cap (1 + dA)^* = \Omega_0(A). \quad (1)$$

Включение  $\supseteq$  очевидно. Покажем обратное включение.

Положим

$$s = \frac{d_1\phi(d)}{2\nu_2(\phi(d))}.$$

Ясно, что  $s$  нечетно. Имеем

$$\begin{aligned} (\Delta^0(A))^s &= (\Omega_0(A))^s (1+A)^{*s2^{1+\nu_2\phi(d)}} \leq \Omega_0(A)(1+A)^{*2\cdot d_1\phi(d)} \leq \\ &\leq \Omega_0(A) \left( (1+A)^{*d_1\phi(d)} \right)^2. \end{aligned}$$

Но согласно 4.6.4

$$(1+A)^{*d_1\phi(d)} \leq (1+dA)^*.$$

Далее, согласно 3.7.4  $(1+dA)^{*2} \leq \Omega_0(A)$ . Следовательно,

$$(\Delta^0(A))^s \leq \Omega_0(A). \quad (2)$$

Пусть  $\delta \in \Delta^0(A) \cap (1+dA)^*$ . Тогда согласно (2),  $s$  нечетно,

$$\delta = \delta^{1-s}\delta^s = (\delta^2)^{1-s/2}\delta^s \subseteq (1+dA)^{*2}\Omega_0(A).$$

Но согласно 3.7.4  $(1+dA)^{*2} \leq \Omega_0(A)$ , откуда  $\delta \in \Omega_0(A)$ . Таким образом, доказано равенство (1). Докажем теперь лемму. Имеем очевидный изоморфизм

$$\Delta^0(A)(1+dA)^*/(1+dA)^* \approx \Delta^0(A)/\Delta^0(A) \cap (1+dA)^*.$$

Откуда согласно (1) и того, что  $\Delta^0(A)(1+dA)^* \leq (1+A)^*$  мы имеем

$$\Delta^0(A)/\Omega_0(A) \leq (1+A)^*/(1+dA)^*. \triangleright$$

**Следствие 4.6.6.** *Индекс  $(\Delta^0(A): \Omega_0(A))$  нечетен.*

$\triangleleft$  Согласно 4.6.4 и 4.6.5 индекс  $(\Delta^0(A): \Omega_0(A))$  конечен, но согласно (2) так как  $s$  нечетно, то индекс  $(\Delta^0(A): \Omega_0(A))$  нечетен.  $\triangleright$

**Предложение 4.6.7.** *Для всякого  $H \in \text{Lat}(R, A)$  и  $m \geq 2 + \nu_2(\phi(d))$  группа  $H_{(m)}$  является полной.*

$\triangleleft$  Очевидно, (см., например, 3.8.4), что для  $\Delta_{(1)} = \Delta(H_{(1)})$  мы имеем  $\Delta_{(1)} \leq (1 + A)^*$ , а потому к группе  $H_{(1)}$  применима леммы 4.6.2. Имеем согласно 4.6.2 так как  $m - 1 \geq 1 + \nu_2(\phi(d))$

$$\Delta(H_{(m)}) = \Delta((H_{(1)})_{(m-1)}) \leq \Delta^0(A).$$

Но  $A(H_{(m)}) = A$  (см. 3.8.1). Следовательно,

$$\Omega_0(A) \leq \Delta_{(m)} \leq \Delta^0(A),$$

где  $\Delta_{(m)} = \Delta(H_{(m)})$ . Согласно 4.6.6 индекс  $(\Delta^0(A) : \Omega_0(A))$  нечетен, следовательно, индекс  $(\Delta_{(m)} : \Delta_{(m)}^2 \Omega_0(A))$  также нечетен, а потому

$$\Delta_{(m)} = \Delta_{(m)}^2 \Omega_0(A).$$

Согласно 3.8.6 тогда группа  $H_{(m)}$  является полной.  $\triangleright$

**Предложение 4.6.8.** Пусть

$$H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix} \in \text{Lat}(R, A).$$

Подгруппа  $H$  является полной тогда и только тогда, когда индекс  $(\Delta : \Omega_0(A))$  нечетен.

$\triangleleft$  Если индекс  $(\Delta : \Omega_0(A))$  нечетен, то  $\Delta = \Delta^2 \Omega_0(A)$ , а потому согласно 3.8.6 группа  $H$  является полной. Обратно, пусть  $H = H_{(n)}$  для любого  $n \geq 1$ . Тогда согласно 4.6.2  $\Delta = \Delta(H_{(n)}) \leq \Delta^0(A)$

$$\Omega_0(A) \leq \Delta \leq \Delta^0(A).$$

Но согласно 4.6.6 индекс  $(\Delta^0(A) : \Omega_0(A))$  нечетен, поэтому индекс  $(\Delta : \Omega_0(A))$  нечетен.  $\triangleright$

**Предложение 4.6.9.** Множество всех полных подгрупп из  $\text{Lat}(R, A)$  совпадает с интервалом

$$\text{Lat}(V_0(A), V^0(A)),$$

где

$$V_0(A) = F_0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega_0(A) \end{pmatrix}, \quad V^0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta^0(A) \end{pmatrix}.$$

◁ Как мы уже отметили в начале параграфа  $V_0(A)$  — наименьшая полная подгруппа из  $\text{Lat}(R, A)$ . Далее, согласно 4.6.2, 4.6.6 и 4.6.8  $V^0(A)$  — наибольшая полная подгруппа из  $\text{Lat}(R, A)$ . Пусть теперь  $H \in \text{Lat}(V_0(A), V^0(A))$ ,

$$V_0(A) \leq H \leq V^0(A), \quad \Omega_0(A) \leq \Delta \leq \Delta^0(A).$$

Тогда согласно 4.6.6 и 4.6.8 группа  $H$  является полной. ▷

Теорема 4.6.1 вытекает теперь из предложений 4.6.7–4.6.9.

## § 7. Самонормализуемые промежуточные подгруппы

Пусть  $(R, A)$  — допустимая пара, где  $R$  — подкольцо поля  $\mathbb{Q}$ ,  $R \supseteq R_0$ ,  $A$  — ненулевой идеал кольца  $R$ . Промежуточная подгруппа  $H$ ,  $T \leq H \leq G = GL(2, \mathbb{Q})$  называется самонормализуемой, если  $N_G(H) = H$ . В гл. III, § 9 мы определили операцию «подъема»:

$$H \longrightarrow H^{(1)},$$

где  $H^{(1)} = H' = N_G(H)$ , которая, очевидно, допускает интерирование

$$H^{(n)} = (H^{(n-1)})^{(1)}, \quad n \geq 2.$$

Таким образом, подгруппа  $H$  самонормализуема, если  $H^{(1)} = H$ .

В этом параграфе мы дадим описание самонормализуемых подгрупп из  $\text{Lat}(R, A)$ , при условии  $\text{sr } R = 1$ ,  $2 \in R^*$ .

Очевидно (см. 3.6.3), что группа

$$F^0 = F^0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix}$$

является наибольшей самонормализуемой подгруппой в  $\text{Lat}(R, A)$  (как наибольшая подгруппа из  $\text{Lat}(R, A)$ ). Далее, отметим, (см. 3.9.1), что если  $H \in \text{Lat}(R, A)$ , то  $H^{(1)} \in \text{Lat}(R, A)$ .

Пусть  $n = 1 + \nu_2(\phi(d))$ , где  $\phi$  — функция Эйлера. Положим

$$\Delta_0(A) = \{\theta \in \Omega^0(A) : \theta^{2^n} \in (1 + dA)^*\}.$$

Согласно 3.7.10, 3.7.2, 4.4.5 произведение

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_0(A) \end{pmatrix}$$

является промежуточной подгруппой из  $\text{Lat}(R, A)$ . Пусть

$$N_0 = N_0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_0(A) \end{pmatrix}, \quad N^0 = N^0(A) = F^0(A).$$

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема

**Теорема 4.7.1.** Пусть  $2 \in R^*$ ,  $\text{sr } R = 1$ . Множество всех самонормализуемых подгрупп из  $\text{Lat}(R, A)$  совпадает с интервалом

$$\text{Lat}(N_0(A), N^0(A)) = \{H : N_0 \leq H \leq N^0\}.$$

Промежуточная подгруппа  $H \in \text{Lat}(R, A)$  является самонормализуемой тогда и только тогда, когда для  $\Delta = \Delta(H)$  индекс  $(\Omega^0(A) : \Delta)$  нечетен. Наконец, для всякой промежуточной подгруппы  $H \in \text{Lat}(R, A)$ , при  $m \geq 2 + \nu_2(\phi(d))$  группа  $H^{(m)}$  самонормализуема.

**Лемма 4.7.2.** Пусть  $H \in \text{Lat}(R, A)$ , причем  $(1 + dA)^* \leq \Delta = \Delta(H)$ . Тогда для  $n = 1 + \nu_2(\phi(d))$

$$\Delta_0(A) \leq \Delta(H^{(n)}).$$

◁ Имеем

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & (1 + dA)^* \end{pmatrix} \leq H.$$

Теперь лемма вытекает из 3.9.8 (заметим, что  $QA = dA$ ). ▷

**Лемма 4.7.3.** Индекс  $(\Omega^0(A) : \Delta_0(A))$  нечетен.

◁ Пусть  $n = 1 + \nu_2(\phi(d))$ . Согласно 4.6.4

$$(1 + A)^{*d_1\phi(d)} \leq (1 + dA)^*$$

для некоторого нечетного  $d_1$ ,  $d_1 \mid d$ . Далее, по определению

$$\Omega^0(A)^2 \leq (1 + A)^*. \quad (1)$$

Положим (см. 4.6.5)

$$s = \frac{d_1\phi(d)}{2^{\nu_2(\phi(d))}}.$$

Ясно, что  $s$  нечетно. Далее,

$$(\Omega^0(A)^s)^{2^n} = (\Omega^0(A)^2)^{d_1\phi(d)} \leq (1+A)^{*d_1\phi(d)} \leq (1+dA)^*.$$

Следовательно, по определению

$$\Omega^0(A)^s \leq \Delta_0(A). \quad (2)$$

Тогда

$$\Omega^0(A) = \Delta_0(A)(1+A)^*. \quad (3)$$

Действительно, включение  $\supseteq$  очевидно (заметим, что  $Q = dR$ ).  
Обратно, если  $\delta \in \Omega^0(A)$ , то согласно (1) и (2)

$$\delta = \delta^{1-s}\delta^s \in (1+A)^*\Delta_0(A).$$

Из (3) мы имеем

$$\Omega^0(A)/\Delta_0(A) \approx (1+A)^*/\Delta_0(A) \cap (1+A)^*.$$

Так как

$$(1+dA)^* \leq (1+A)^* \cap \Delta_0(A)$$

и фактор-группа  $(1+A)^*/(1+dA)^*$  конечна, то фактор-группа  $\Omega^0(A)/\Delta_0(A)$  в силу последнего изоморфизма также конечна и из (2) индекс  $(\Omega^0(A) : \Delta_0(A))$  нечетен.  $\triangleright$

**Предложение 4.7.4.** Для всякого  $H \in \text{Lat}(R, A)$  и

$$m \geq 2 + \nu_2(\phi(d))$$

группа  $H^{(m)}$  самономализуема.

◁ Согласно 3.9.5 (так как  $Q = dR$ )

$$(1+dA)^* \leq \Delta' = \Delta(H').$$

Поэтому к группе  $H'$  применима лемма 4.7.2. Так как  $m - 1 \geq 1 + \nu_2(\phi(d))$ , то согласно 4.7.2

$$\Delta_0(A) \leq \Delta((H')^{m-1}) = \Delta(H^{(m)}).$$

Таким образом

$$\Delta_0(A) \leq \Delta(H^{(m)}) \leq \Omega^0(A).$$

Согласно 4.7.3 тогда индекс  $(\Omega^0(A) : \Delta(H^{(m)}))$  нечетен. Согласно 3.9.7

$$\Delta(H^{(m)}) \leq \Delta(H^{(m+1)}) \leq \Delta^* \leq \Omega^0(A),$$

где  $\Delta^* = \{\delta \in \Omega^0(A) : \delta^2 \in \Delta(H^{(m)})\}$ , причем  $\Delta^{*2} \leq \Delta(H^{(m)})$  (по определению  $\Delta^*$ ). Таким образом индекс  $(\Delta^* : \Delta(H^{(m)}))$  нечетен и  $\Delta^{*2} \leq \Delta(H^{(m)})$ , поэтому  $\Delta^* = \Delta(H^{(m)})$ . Но тогда согласно 3.7.9  $H^{(m)} = H^{(m+1)}$ , т. е. группа  $H^{(m)}$  самонормализуема.  $\triangleright$

**Предложение 4.7.5.** Пусть  $H \in \text{Lat}(R, A)$ ,

$$H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}.$$

Подгруппа  $H$  является самонормализуемой тогда и только тогда, когда индекс  $(\Omega^0(A) : \Delta)$  нечетен.

$\triangleleft$  Если индекс  $(\Omega^0(A) : \Delta)$  нечетен, то согласно 3.9.7

$$\Delta \leq \Delta' \leq \Delta^*,$$

но по определению группы  $\Delta^*$  мы имеем  $\Delta^{*2} \leq \Delta$ . Далее индекс  $(\Delta^* : \Delta)$  делит индекс  $(\Omega^0(A) : \Delta)$  так как  $\Delta^* \leq \Omega^0(A)$ . Поэтому индекс  $(\Delta^* : \Delta)$  нечетен и так как  $\Delta^{*2} \leq \Delta$ , то  $\Delta^* = \Delta$ , откуда согласно 3.9.7  $H = H'$  и подгруппа  $H$  самонормализуема. Обратно, пусть  $H = H^{(n)}$  для всякого  $n \geq 1$ . Из 3.9.5 имеем  $(1 + dA) \leq \Delta' = \Delta(H')$ , а потому согласно 4.7.2

$$\Delta_0(A) \leq \Delta(H^{(n)}) = \Delta.$$

Итак,  $\Delta_0(A) \leq \Delta \leq \Omega^0(A)$ , следовательно, согласно 4.7.3 индекс  $(\Omega^0(A) : \Delta)$  нечетен.  $\triangleright$

**Предложение 4.7.6.** *Множество всех самонормализуемых подгрупп из  $\text{Lat}(R, A)$  совпадает с интервалом*

$$\text{Lat}(N_0(A), N^0(A)),$$

где

$$N_0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta_0(A) \end{pmatrix}, \quad N^0(A) = F^0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix}.$$

◁ Как мы уже отметили в начале параграфа  $N^0(A)$  наибольшая самонормализуемая подгруппа из  $\text{Lat}(R, A)$ . Далее, согласно 4.7.2, 4.7.3 и 4.7.5  $N_0(A)$  — наименьшая самонормализуемая подгруппа. Пусть теперь  $H \in \text{Lat}(R, A)$ ,  $H \in \text{Lat}(N_0(A), N^0(A))$ ,  $H = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}$ ,

$$N_0(A) \leq H \leq N^0(A), \quad \Delta_0(A) \leq \Delta \leq \Omega^0(A).$$

Согласно 4.7.3 и 4.7.5  $H$  является самонормализуемой подгруппой. ▷

Теорема 4.7.1 вытекает теперь из предложений 4.7.4–4.7.6.

### § 8. Решетка $\text{Lat}(T, G)$

Пусть  $G = GL(2, \mathbb{Q})$  — полная линейная группа второго порядка над полем  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел;  $T = T(d)$  — максимальный нерасщепимый тор, связанный с квадратичным расширением  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  поля  $\mathbb{Q}$ . Согласно 3.4.7 решетка  $\text{Lat}(T, G)$  всех промежуточных подгрупп допускает представление в виде объединения

$$\text{Lat}(T, G) = T \cup N_G(T) \cup_{(R, A)} \text{Lat}(R, A),$$

где объединение берется по всем допустимым парам  $(R, A)$ ,  $\text{Lat}(R, A)$  — множество всех промежуточных подгрупп, для которых модуль трансвекций и кольцо множителей совпадает соответственно с  $A$  и  $R$ . Допустимые пары нами описаны полностью в § 4: пара  $(R, A)$  допустима, если  $R \supset R_0 = R(d)$ , а  $A$  —

идеал кольца  $R$ , причем  $A \subseteq 2R$  при нечетном  $d$ . Таким образом, изучение решетки  $\text{Lat}(T, G)$  мы свели к изучению подрешетки (см. 3.7.3 и 3.7.7)  $\text{Lat}(R, A)$  для произвольной допустимой пары  $(R, A)$ . В качестве аппарата описания мы обращаемся к языку «графа нормальности», описанному в гл. I.

В решетке  $\text{Lat}(T, G)$  введем структуру графа, взяв в качестве вершин все промежуточные подгруппы  $H$ ,  $T \leq H \leq G$ . Если  $H_1$  и  $H_2$  — две промежуточные подгруппы и  $H_1 \triangleleft H_2$ , то  $H_1$  и  $H_2$  мы соединяем ребром, указывая направление на ребре из  $H_1$  в  $H_2$ . Полученный граф называется *графом нормальности* решетки  $\text{Lat}(T, G)$ . Ясно, что граф нормальности распадается на непересекающиеся связные компоненты, которые мы называем *гирляндами*. Для изучения решетки  $\text{Lat}(T, G)$  достаточно изучить множество всех гирлянд, а затем каждую гирлянду в отдельности.

Через  $\Gamma_H$  обозначим гирлянду, содержащую подгруппу  $H \in \text{Lat}(T, G)$ . «Нижняя» гирлянда  $\Gamma_T$  (гирлянда, содержащая тор  $T$ ) согласно 3.4.7 состоит из тора  $T$  и его нормализатора  $N_G(T)$ . Далее, согласно 3.8.1 и 3.9.1 в случае  $2 \in R^*$  каждая нетривиальная гирлянда целиком содержится в подрешетке  $\text{Lat}(R, A)$  для некоторой допустимой пары  $(R, A)$ .

В этом параграфе мы дадим описание подрешетки  $\text{Lat}(R, A)$  в случае  $2 \in R^*$  и  $\text{sr } R = 1$ . Согласно сказанному выше для изучения решетки  $\text{Lat}(R, A)$  нам нужно изучить множество всех гирлянд в  $\text{Lat}(R, A)$ , а затем изучить каждую гирлянду из  $\text{Lat}(R, A)$ .

В нашем случае ( $2 \in R^*$ ,  $\text{sr } R = 1$ ) каждая гирлянда из  $\text{Lat}(R, A)$  имеет конечный тип (см. 4.6.1, 4.7.1), т. е. для произвольной подгруппы  $H \in \text{Lat}(R, A)$  цепочка последовательных подъемов и спусков стабилизируется. Гирлянда имеет конечный тип тогда и только тогда, когда она содержит единственную полную промежуточную подгруппу (см. гл. I, § 3). Таким образом, в нашем случае множество всех гирлянд из  $\text{Lat}(R, A)$  находится во взаимно однозначном соответствии со всеми пол-

ными подгруппами из  $\text{Lat}(R, A)$ . Согласно 4.6.1 множество всех полных подгрупп из  $\text{Lat}(R, A)$  совпадает с интервалом

$$\text{Lat}(V_0(A), V^0(A)) = \{H : V_0(A) \leq H \leq V^0(A)\},$$

где

$$V_0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega_0(A) \end{pmatrix}, \quad V^0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta^0(A) \end{pmatrix},$$

причем

$$V^0(A) = \Omega_0(A)(1 + A)^{*2^n}, \quad n = 1 + \nu_2(\phi(d)).$$

Согласно сказанному выше нам осталось описать каждую гирлянду из  $\text{Lat}(R, A)$ . Пусть  $\Gamma_V$  — гирлянда из  $\text{Lat}(R, A)$ , содержащая полную подгруппу  $V$ ,

$$V_0(A) \leq V \leq V^0(A).$$

Тогда согласно 4.6.1 и 4.7.1

$$\Gamma_V = \text{Lat}(V, N) = \{H : V \leq H \leq N\},$$

где  $N$  — самонормализуемая подгруппа, причем

$$N = V^{(n)}, \quad N_{(n)} = V, \quad n = 2 + \nu_2(\phi(d)).$$

Выделим отдельно случай подрешетки  $\text{Lat}(R, A)$ , когда  $d$  является обратимым элементом кольца  $R$ ,  $d \in R^*$ . В частности, это так, если  $R \supset \langle R_0, \frac{1}{2}, \frac{1}{d} \rangle$ . В этом случае решетка  $\text{Lat}(R, A)$  состоит из одной гирлянды

$$\text{Lat}(R, A) = \Gamma_{V_0(A)} = \{H : V_0(A) \leq H \leq N^0(A)\},$$

где

$$V_0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega_0(A) \end{pmatrix}, \quad N^0(A) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix}.$$

Справедливость этого утверждения вытекает из следующей леммы

**Лемма 4.8.1.** Если  $2 \in R^*$ ,  $\text{sr } R = 1$  и  $d \in R^*$ , то  $V_0(A) = V^0(A)$ ,  $N_0(A) = N^0(A)$ .

◁ Пусть  $n = 1 + \nu_2(\phi(d))$ . Тогда  $n \geq 1$ . Согласно 3.7.4  $(1 + dA)^{*2} \leq \Omega_0(A)$ . Откуда  $(dA = A)$

$$\Delta^0(A) = \Omega_0(A)(1 + A)^{*2^n} \leq \Omega_0(A)(1 + dA)^{*2} \leq \Omega_0(A).$$

Поэтому  $\Delta^0(A) = \Omega_0(A)$  и  $V_0(A) = V^0(A)$ . Далее, пусть  $\theta \in \Omega^0(A)$ , тогда  $\theta^2 - 1 \in A = dA$ , откуда  $\theta^2 \in (1 + dA)^*$ , а тогда  $\theta^{2^n} \in (1 + dA)^*$ , следовательно,  $\theta \in \Delta_0(A)$ . Таким образом,  $\Omega^0(A) \leq \Delta_0(A)$ , откуда  $\Omega^0(A) = \Delta_0(A)$  и  $N_0(A) = N^0(A)$ . ▷

В частности, рассмотрим «верхнюю» гирлянду  $\Gamma_G$ , где  $G = GL(2, \mathbb{Q})$ . Очевидно, что она совпадает с  $\text{Lat}(R, A)$  для  $R = \mathbb{Q}$ ,  $A = \mathbb{Q}^+$ , т. е. с  $\text{Lat}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+)$ . Действительно,  $\Gamma_G \subset \text{Lat}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+)$ . Но согласно сказанному выше ( $d \in \mathbb{Q}^*$ ) решетка  $\text{Lat}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+)$  состоит из одной гирлянды. Поэтому  $\Gamma_G = \text{Lat}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+)$ . В этой гирлянде  $N^0(\mathbb{Q}^+) = G = GL(2, \mathbb{Q})$  — самонормализуемая подгруппа, а полная подгруппа имеет вид

$$V_0(\mathbb{Q}) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbb{Q} & \Omega_0(\mathbb{Q}^+) \end{pmatrix},$$

причем  $\Omega_0(\mathbb{Q}^+) = \{u^2 - dv^2 : u, v \in \mathbb{Q}, (u, v) \neq (0, 0)\}$ . Ясно, что

$$V_0(\mathbb{Q}) = D(2, \Omega_0(\mathbb{Q}^+)) SL(2, \mathbb{Q}),$$

причем  $V_0(\mathbb{Q}) = T^G$ . Таким образом

$$\Gamma_G = \text{Lat}(T^G, G).$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.8.2.** В силу 4.2.2 и 4.1.4 мы имеем полное описание множества всех гирлянд решетки  $\text{Lat}(T, G)$  и каждой гирлянды в отдельности в случае, если  $d < 0$  и  $d \equiv 1 \pmod{8}$ . Таким образом, в случае  $d < 0$  и  $d \equiv 1 \pmod{8}$  мы имеем полное описание решетки  $\text{Lat}(T, G)$ .

## ДОПОЛНЕНИЕ

### СТРОЕНИЕ РЕШЕТКИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПОДГРУПП, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТИЧНЫЙ ТОР, ДЛЯ ПОЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть  $k = \mathbb{F}_q(t)$  — поле рациональных функций от одной переменной над конечным полем  $\mathbb{F}_q$  нечетной характеристики,  $(q, 2) = 1$ ,  $\mu \in \mathbb{F}_q \setminus \mathbb{F}_q^2$  — неквадрат поля констант,  $K = k(\sqrt{\mu})$  — квадратичное расширение поля  $k$ .

Мы дадим описание подгрупп полной линейной группы  $GL(2, k)$  степени 2 над полем рациональных функций  $k = \mathbb{F}_q(t)$ , содержащих нерасщепимый максимальный тор

$$T = T(\mu) = \left\{ \begin{pmatrix} x & \mu y \\ y & x \end{pmatrix}, (x, y) \neq (0, 0), x, y \in k \right\},$$

связанный с квадратичным расширением  $K = k(\sqrt{\mu})$ . Результаты этой части книги (доказательства мы опускаем) получены в работах [75, 76, 78].

В ходе построения допустимых колец важную роль играют неприводимые многочлены четной степени кольца  $\mathbb{F}_q[t]$ . Одним из основных инструментов описания кольца  $R_0 = R(\mu)$ , определяющего структуру промежуточных подгрупп, является следующее утверждение, в котором предлагается специальный способ представления неприводимых многочленов четной степени.

**Предложение Д 1.** Для всякого неприводимого многочлена  $\varphi \in \mathbb{F}_q[t]$  четной степени и любого неквадрата  $\mu \in \mathbb{F}_q \setminus \mathbb{F}_q^2$  существуют взаимно простые многочлены  $f, g \in \mathbb{F}_q[t]$ , такие, что  $\varphi = f^2 - \mu g^2$ . Далее, для произвольных многочленов  $f, g \in \mathbb{F}_q[t]$ ,

$(f, g) = 1$ , имеет место разложение в произведение неприводимых

$$f^2 - \mu g^2 = \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_s,$$

где каждый многочлен  $\psi_i$  имеет четную степень, причем  $\psi_i = f_i^2 - \mu g_i^2$  для некоторых  $f_i, g_i \in F_q[t]$  и  $(f_i, g_i) = 1$ ,  $i = \overline{1, s}$ .

Дадим описание кольца  $R_0 = R(\mu)$ , определенного в § 1 гл. 3. Согласно определению

$$R_0 = \text{ring} \left\langle \frac{\mu}{x^2 - \mu} \right\rangle_{x \in F_q(t)} = \text{ring} \left\langle \frac{\mu g^2}{f^2 - \mu g^2} \right\rangle_{f, g \in F_q[t]}.$$

Обозначим через  $S_0$  множество всех неприводимых многочленов четной степени кольца  $F_q[t]$ , через  $S_0^{-1}(F_q[t])$  кольцо частных, состоящее из всех рациональных функций, знаменатели которых представляют собой произведение многочленов из  $S_0$ . Далее, пусть  $\nu$  – показатель поля рациональных функций  $F_q(t)$ , т. е.

$$\nu \left( \frac{f}{g} \right) = \deg g - \deg f.$$

В поле  $F_q(t)$  рассмотрим подкольцо полуправильных дробей, т. е.

$$\Lambda = \left\{ \frac{f}{g} \in F_q(t) : \nu \left( \frac{f}{g} \right) \geq 0 \right\}.$$

**Предложение Д 2.** Кольцо  $R_0$  совпадает с множеством всех рациональных дробей  $\frac{f}{g}$ , степень числителя которых не превосходит степени знаменателя, причем знаменатель представляет собой произведение неприводимых многочленов четной степени,

$$R_0 = S_0^{-1}(F_q[t]) \cap \Lambda.$$

Пусть  $(R, A)$  — допустимая пара. Положим

$$\text{Lat}(R, A) = \{H \in \text{Lat}(T, G) : A(H) = A, R(H) = R\}.$$

Для различных допустимых пар  $(R, A)$  подмножества  $\text{Lat}(R, A)$  различны и

$$\text{Lat}(T, G) = \{T\} \cup \{N_G(T)\} \bigcup_{(R,A)} \text{Lat}(R, A),$$

где объединение берется по всем различным допустимым парам  $(R, A)$  (см. § 5 гл. 3). Следовательно, изучение решетки  $\text{Lat}(T, G)$  сводится к изучению подрешеток  $\text{Lat}(R, A)$ , которые находятся в биективном соответствии с множеством всех допустимых пар  $(R, A)$ . Описание допустимых пар дается в следующем утверждении.

**Теорема Д 3.** *Подкольцо  $R$  поля рациональных функций  $\mathbb{F}_q(t)$  допустимо тогда и только тогда, когда  $R \supseteq R_0$ . Далее, пара  $(R, A)$  допустима тогда и только тогда, когда  $A$  — идеал кольца  $R$  и  $R \supseteq R_0$ .*

Мы не будем подробно останавливаться на строении допустимых колец, отметим лишь то, что (см. [78]) всякое подкольцо поля  $\mathbb{F}_q(t)$ , строго содержащее кольцо  $R_0$ , является кольцом главных идеалов. Далее, идеалы кольца  $R_0$  являются либо главными, либо порождаются двумя элементами (в кольце  $R_0$ ).

Приступим теперь к описанию подрешеток  $\text{Lat}(R, A)$ , при этом будем предполагать, что стабильный ранг кольца  $R$  равен 1,  $sr R = 1$  (это так, например, если  $R = S^{-1}(\mathbb{F}_q[t])$  для произвольного  $S \supseteq S_0$ ).

Всякая гирлянда (за исключением нижней, которая совпадает с  $\{T, N_G(T)\}$ ) совпадает с  $\text{Lat}(R, A)$  для некоторой допустимой пары  $(R, A)$ .

Рассмотрим сеть  $\sigma$  идеалов кольца  $R$ ,

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}.$$

Положим  $G(A) = G(\sigma)$ . Далее, пусть  $E(A)$  подгруппа, порожденная всеми трансвекциями из  $G(A)$ . Согласно § 6 гл. 3 наи-

меньшая подгруппа  $F_0$  решетки  $\text{Lat}(R, A)$  имеет вид

$$F^0 = T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega_0(A) \end{pmatrix},$$

где  $\Omega_0(A) = \langle f(x, \alpha) : x \in k = F_q(t), \alpha \in A \rangle$ . Можно показать, что  $F_0 = T \cdot E(A)$ .

Наибольшая подгруппа  $F^0$  из  $\text{Lat}(R, A)$  определяется следующим образом. Пусть  $\Omega^0(A) = \{\theta \in R^* : \theta^2 - 1 \in A\}$ .

Тогда

$$F^0 = T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Omega^0(A) \end{pmatrix}.$$

**Теорема Д 4.** Пусть  $srR = 1$ . Всякая гирлянда (за исключением нижней) совпадает с  $\text{Lat}(R, A)$  для некоторой допустимой пары  $(R, A)$ . Для произвольной промежуточной подгруппы  $H \in \text{Lat}(R, A)$  спуск и подъем стабилизируются на втором шаге. Точнее, второе нормальное замыкание совпадает с наименьшей подгруппой  $F_0$ , а нормализатор нормализатора — с наибольшей подгруппой  $F^0$ , т. е.

$$H_{(2)} = F_0, \quad H^{(2)} = F^0.$$

В заключение отметим важную роль подгруппы  $H(A) = TG(A)$  в решетке  $\text{Lat}(R, A)$ . А именно, нормальное замыкание подгруппы  $H(A)$  совпадает с наименьшей подгруппой  $F_0$ ,  $(H(A))_{(1)} = F_0$ , а нормализатор подгруппы  $H(A)$  в группе  $G$  совпадает с наибольшей подгруппой  $F^0$  решетки  $\text{Lat}(R, A)$ ,  $(H(A))^{(1)} = F^0$ . Далее, для произвольной подгруппы  $H \in \text{Lat}(R, A)$  имеют место включения

$$F^0 \leqslant (H)_{(1)} \leqslant H(A) \leqslant (H)^{(1)} \leqslant F^0.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аль Хамад А. Х., Бондаренко А. А., Борович З. И. Нормализатор группы «диагональных» автоморфизмов в алгебрах над коммутативным кольцом // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—1991.—Т. 191.—С. 5–8.
2. Артин Э. Геометрическая алгебра.—М: Наука, 1969.—285 с.
3. Ба М. С., Борович З. И. О расположении промежуточных подгрупп. Кольца и линейные группы // Сб. науч. трудов.—Краснодар, 1988.—С. 14–41.
4. Басс Х. Алгебраическая  $K$ -теория.—М: Мир, 1973.—592 с.
5. Башкиров Е. Л. Линейные группы над телами, содержащие подгруппы квадратичных унитарных элементов: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—СПб, 2006.—270 с.
6. Башкиров Е. Л. Линейные группы, содержащие специальную унитарную группу ненулевого индекса // Вести Акад. Наук БССР. Сер. 5.—1985.—С. 122–123.
7. Башкиров Е. Л. Линейные группы, содержащие симплектическую группу // Вести Акад. Наук БССР. Сер. 3.—1987.—С. 116–117.
8. Башкиров Е. Л. О подгруппах полной линейной группы над телом кватернионов, содержащих специальную унитарную группу // Сиб. мат. журн.—1998.—Т. 39, № 6.—С. 1251–1266.
9. Бондаренко А. А. Промежуточные подгруппы, содержащие нерасщепимый тор, в полной линейной группе степени 2 над локальным числовым полем: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—СПб, 1994.—157 с.
10. Бондаренко А. А. Расположение подгрупп, содержащих неразветвленный квадратичный тор, в полной линейной группе степени 2 над локальным числовым полем ( $p \neq 2$ ) // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—1994.—Т. 211.—С. 67–79.
11. Бонадаренко А. А. Расположение подгрупп, содержащих неразветвленный квадратичный тор, в полной линейной группе степени 2 над локальным числовым полем ( $p = 2$ ) // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—1994.—Т. 211.—С. 80–90.
12. Бондаренко А. А. Расположение подгрупп, содержащих разветвленный квадратичный тор, в полной линейной группе степени 2 над локальным числовым полем ( $p \neq 2$ ) // Вестн. СПбГУ.—1993.—Т. 22, № 1/4.—С. 7–15.

13. Борович З. И. О параболических подгруппах в линейных группах над полулокальным кольцом // Вест. ЛГУ.—1976.—Т. 13.—С. 16–24.
14. Борович З. И. О параболических подгруппах в специальной линейной группе над полулокальным кольцом // Вестн. ЛГУ.—1976.—Т. 19.—С. 29–34.
15. Борович З. И. Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1976.—Т. 64.—С. 12–29.
16. Борович З. И. О некоторых подгруппах полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1977.—Т. 71.—С. 42–46.
17. Борович З. И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
18. Борович З. И. О расположении подгрупп // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1979.—Т. 94.—С. 5–12.
19. Борович З. И., Вавилов Н. А. О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 32–34.
20. Борович З. И., Вавилов Н. А. Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц // Тр. мат. ин-та АН СССР.—1978.—Т. 148.—С. 43–57.
21. Борович З. И., Вавилов Н. А. О подгруппах полной линейной группы над коммутативным кольцом // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 267, № 4.—С. 777–778.
22. Борович З. И., Вавилов Н. А. Расположение подгрупп, содержащих группу клеточно-диагональных матриц, в полной линейной группе над кольцом // Изв. вузов.—1982.—Т. 11, № 11.—С. 11–15.
23. Борович З. И., Вавилов Н. А. Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом // Тр. мат. ин-та АН СССР.—1984.—Т. 165.—С. 24–42.
24. Борович З. И., Вавилов Н. А., Наркевич В. О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1979.—Т. 94.—С. 13–20.
25. Борович З. И., Вавилов Н. А., Шмидт Р. А. Подгруппы полной линейной группы над кольцом частных коммутативного кольца // XI Всесоюз. симпоз. по теории групп. Тезисы сообщений.—Свердловск, 1989.—С. 20.
26. Борович З. И., Койбаев В. А. Подгруппы полной линейной группы над полем из пяти элементов // Алгебра и теория чисел.—Владикавказ, 1978.—Вып. 3.—С. 9–32.

27. Борович З. И., Койбаев В. А. О кольцах множителей, связанных с промежуточными подгруппами для квадратичных торов // Вестн. СПбГУ.—1993.—Т. 1, № 2.—С. 5–10.
28. Борович З. И., Койбаев В. А., Лаврентьев М. В. Гирлянды, содержащие полную линейную группу над промежуточным полем // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—1997.—Т. 236.—С. 34–41.
29. Борович З. И., Койбаев В. А., Чан Нгок Хой. Подгруппы полной линейной группы степени 2 над полем рациональных чисел, содержащие нерасщепимый тор // Междунар. конф. по алгебре. Тезисы докл. по теории групп.—Новосибирск, 1991.—С. 12.
30. Борович З. И., Койбаев В. А., Чан Нгок Хой. Решетки подгрупп в  $GL(2, Q)$ , содержащих нерасщепимый тор // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—1991.—Т. 191.—С. 24–43.
31. Борович З. И., Крупецкий С. Л. Подгруппы унитарной группы, содержащие группу диагональных матриц // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1979.—Т. 86.—С. 19–29.
32. Борович З. И., Мацедонская О. Н. О решетке подгрупп // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1980.—Т. 103.—С. 13–19.
33. Борович З. И., Мысовских В. И. Бесконечные цепи последовательных нормализаторов в полной линейной группе над полем // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1991.—Т. 191.—С. 44–48.
34. Борович З. И., Чан Нгок Хой. О стабильном ранге некоторых подколец поля рациональных чисел // Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей.—СПб: Издательство СПбГУ, 1993.—Вып. 3.—С. 7–16.
35. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. 3-е изд.—М.: Наука, 1985.—503 с.
36. Борель А., Титс Ж. Редуктивные группы // Математика. Период. сб. перев. ин. статей.—1967.—Т. 11, № 1.—С. 43–111; № 2.—С. 3–31.
37. Буй Суан Хай. О расположении подгрупп в специальной линейной группе над телом с бесконечным центром // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1989.—Т. 175.—С. 5–11.
38. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Ч. 2.—М.: Мир, 1972.—334 с.
39. Вавилов Н. А. Об описании подгрупп полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1979.—Т. 86.—С. 30–33.
40. Вавилов Н. А. О сопряженности подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 5.—С. 216–217.
41. Вавилов Н. А. Разложение Брюа для подгрупп, содержащих группу диагональных матриц // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1980.—Т. 103.—С. 20–30.

42. Вавилов Н. А. О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц // Вестник ЛГУ.—1981.—Т. 1.—С. 10–15.
43. Вавилов Н. А. О подгруппах расширенных групп Шевалле, содержащих максимальный тор // XVI Всесоюз. алгебр. конф. Тезисы. Ч. 1.—Л., 1981.—С. 26–27.
44. Вавилов Н. А. Разложение Брюа для подгрупп, содержащих группу диагональных матриц. II // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1982.—Т. 114.—С. 50–61.
45. Вавилов Н. А. О подгруппах унитарной группы над полулокальным кольцом // Успехи мат. наук.—1982.—Т. 37, № 4.—С. 147–148.
46. Вавилов Н. А. Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу клеточно-диагональных матриц // Вестник ЛГУ.—1983.—Т. 1.—С. 16–21.
47. Вавилов Н. А. О подгруппах специальной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц. I–IV // Вестник ЛГУ.—1985.—Т. 22, № 1—С. 3–7; 1986.—Вып. 1.—С. 10–15; 1987.—Вып. 2.—С. 3–8; 1988.—Вып. 3.—С. 10–15.
48. Вавилов Н. А. Максимальные подгруппы группы Шевалле, содержащие максимальный расщепимый тор // Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей.—1986.—Т. 1.—С. 67–75.
49. Вавилов Н. А. О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом арифметического типа // Изв. вузов.—1987.—Т. 12.—С. 14–20.
50. Вавилов Н. А. Подгруппы расщепимых классических групп: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—Л., 1987.—338 с.
51. Вавилов Н. А. Строение расщепимых классических групп над коммутативным кольцом // Докл. АН СССР.—1988.—Т. 299, № 6.—С. 1300–1303.
52. Вавилов Н. А. О подгруппах расщепимых ортогональных групп // Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 3.—С. 12–25.
53. Вавилов Н. А. О подгруппах расщепимых ортогональных групп над кольцом // Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 4.—С. 31–43.
54. Вавилов Н. А. Линейные группы, порожденные однопараметрическими группами одномерных преобразований // Успехи мат. наук.—1989.—Т. 44, вып. 1.—С. 189–190.
55. Вавилов Н. А. О подгруппах расщепимых классических групп // Тр. мат. ин-та АН СССР.—1990.—Т. 183.—С. 29–41.
56. Вавилов Н. А. Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор // Тр. Ленингр. мат. об-ва.—1990.—Т. 1.—С. 64–109.

- 
57. Вавилов Н. А. О подгруппах спинорной группы, содержащих расщепимый максимальный тор. I // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1991.—Т. 191.—С. 49–75.
58. Вавилов Н. А. О подгруппах полной симплектической группы над коммутативным кольцом // Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей.—СПб: Изд-во СПбГУ, 1993.—Вып. 3.—С. 16–38.
59. Вавилов Н. А., Дыбкова Е. В. О подгруппах полной симплектической группы, содержащих группу диагональных матриц. I, II // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1980.—Т. 103.—С. 31–47; 1983.—Т. 132.—С. 44–56.
60. Вавилов Н. А., Нестеров В. В. Геометрия микровесовых торов // Вл. дикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, № 1.—С. 10–23.
61. Вавилов Н. А., Петров В. А. О надгруппах  $EO(2l, R)$  // Зап. научн. семин. ПОМИ.—2000.—Т. 272.—С. 68–85.
62. Вавилов Н. А., Петров В. А. О надгруппах  $Ep(2l, R)$  // Алгебра и анализ.—2003.—Т. 15.—С. 72–14.
63. Вавилов Н. А., Петров В. А. О надгруппах  $EO(n, R)$  // Алгебра и анализ.—2007.—Т. 19.—С. 10–51.
64. Вавилов Н. А., Плоткин Е. Б. Сетевые подгруппы групп Шевалле. I, II // Зап. научн. семин. ЛОМИ.—1979.—Т. 94.—С. 40–49; 1982.—Т. 114.—С. 62–76.
65. Вавилов Н. А., Степанов А. В. Надгруппы полупростых групп // Вестн. СамГУ. Естеств.-науч. сер.—2008.—Т. 62, № 3.—С. 51–95.
66. Вавилов Н. А., Степанов А. В. О подгруппах полной линейной группы над кольцом, удовлетворяющим условиям стабильности // Изв. вузов.—1989.—Т. 10.—С. 19–25.
67. Васерштейн Л. Н., Михалев А. В. О нормальных подгруппах ортогональной группы над кольцом с инволюцией // Алгебра и логика.—Новосибирск, 1970.—Т. 9, № 6.—С. 629–632.
68. Голубчик И. З. О подгруппах полной линейной группы  $GL_n(R)$  над ассоциативным кольцом // Успехи мат. наук.—1984.—Т. 39, № 1.—С. 125–126.
69. Голубчик И. З. О нормальных делителях линейной и унитарной групп над ассоциативным кольцом // Пространства над алгебрами и некот. вопросы теории сетей.—Уфа, 1985.—С. 122–142.
70. Голубчик И. З., Михалев А. В. Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативным кольцом // Зап. научн. семин. ЛОМИ.—1983.—Т. 132.—С. 97–109.
71. Голубчик И. З., Михалев А. В. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом // Вестник МГУ. Сер. мат.-мех.—1983.—№ 3.—С. 61–72.

72. Джусоева Н. А., Койбаев В. А. Подгруппы, содержащие тор, связанные с полем отношений кольца с однозначным разложением // Владикавк. мат. журнал.—2003.—Т. 5, № 4.—С. 31–39.
73. Дзигоева В. С. Описание допустимых колец поля рациональных функций // Вестник СОГУ.—1999.—Т. 1.—С. 15–17.
74. Дзигоева В. С. О решетке промежуточных подгрупп полной линейной группы степени 2 над полем рациональных функций, содержащих нерасщепимый максимальный тор // Междунар. алгебр. конф. памяти Д. К. Фаддеева.—СПб.: Тезисы докл, 2007.—С. 25.
75. Дзигоева В. С. О решетке промежуточных подгрупп полной линейной группы степени 2, содержащих квадратичный тор // Изв. вузов. Сер. естеств. науки. Сев.-Кавк. рег.—2008.—Т. 3.—С. 8–9.
76. Дзигоева В. С., Койбаев В. А. Подгруппы полной линейной группы степени 2 над полем рациональных функций, содержащие нерасщепимый тор // Междунар. алгебр. конф. памяти Д. К. Фаддеева. Тезисы докл.—СПб, 1997.—С. 193.
77. Дзигоева В. С., Койбаев В. А. О подгруппах полной линейной группы степени 2 над полем рациональных функций, содержащих нерасщепимый тор // Вестник СОГУ.—1999.—Т. 1.—С. 22–24.
78. Дзигоева В. С., Койбаев В. А. Промежуточные подгруппы в полной линейной группе второго порядка над полем рациональных функций, содержащие нерасщепимый тор // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, № 1.—С. 27–34.
79. Дыбкова Е. В. О сетевых подгруппах гиперболических унитарных групп // Алгебра и анализ.—1997.—Т. 9.—С. 87–96.
80. Дыбкова Е. В. О наддиагональных подгруппах гиперболической унитарной группы над некоммутативным телом // Зап. научн. семинаров ПОМИ.—2002.—Т. 289.—С. 154–206.
81. Дыбкова Е. В. Подгруппы гиперболических унитарных групп: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—СПб, 2006.—182 с.
82. Залесский А. Е. Классификация конечных неприводимых линейных групп степени 5 над полем характеристики, не равной 0, 2, 3, 5 // Докл. АН БССР.—1976.—Т. 20, № 9.—С. 773–775.
83. Залесский А. Е. Классификация конечных линейных групп степеней 4 и 5 над полем характеристики 2 // Докл. АН БССР.—1977.—Т. 21, № 5.—С. 389–392.
84. Залесский А. Е. Линейные группы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 5.—С. 57–107.
85. Залесский А. Е. Линейные группы // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия.—1983.—Т. 21.—С. 135–182.

86. Залесский А. Е., Сережкин В. Н. Линейные группы, порожденные трансвекциями // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1976.—Т. 40, № 1.—С. 26–49.
87. Залесский А. Е., Сережкин В. Н. Конечные линейные группы, порожденные отражениями, над полями нечетных характеристик.—Минск, 1979.—59 с. (Препринт № 20(76)).
88. Залесский А. Е., Сережкин В. Н. Конечные линейные группы, порожденные отражениями // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1980.—Т. 44, № 6.—С. 1279–1307.
89. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп.—М.: Наука, 1982.—288 с.
90. Койбаев В. А. Примеры немногозначных линейных групп без трансвекций // Зап. научн. семин. ЛОМИ.—1977.—Т. 71.—С. 153–154.
91. Койбаев В. А. Подгруппы полной линейной группы над полем из четырех элементов // Алгебра и теория чисел.—Нальчик, 1979.—Вып. 4.—С. 21–31.
92. Койбаев В. А. О подгруппах полной линейной группы над полем из четырех элементов // XV Всесоюзн. алгебр. конф. Тезисы.—Красноярск, 1979.—С. 75.
93. Койбаев В. А. Описание  $D$ -полных подгрупп в полной линейной группе над полем из трех элементов // Зап. научн. семин. ЛОМИ.—1980.—Т. 103.—С. 76–78.
94. Койбаев В. А. Подгруппы полной линейной группы над полем из трех элементов // Структурные свойства алгебраических систем.—Нальчик, 1981.—С. 56–68.
95. Койбаев В. А. Подгруппы полной линейной группы над полем из трех элементов // XVI Всесоюзн. алгебр. конф. Тезисы. Ч. 1.—Л., 1981.—С. 73–74.
96. Койбаев В. А. О подгруппах полной линейной группы, содержащих группу элементарных клеточно-диагональных матриц // Вестн. ЛГУ.—1982.—Т. 13.—С. 33–40.
97. Койбаев В. А. Расположение подгрупп в линейных группах над конечными полями: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—СПб: СПбГУ, 1982.—140 с.
98. Койбаев В. А. О подгруппах полной линейной группы, содержащих группу элементарных клеточно-диагональных матриц // VIII Всесоюзн. симпозиум по теории групп. Тезисы докл.—Киев, 1982.—С. 53–54.
99. Койбаев В. А. Подгруппы полной линейной группы над конечным полем, содержащие группу элементарных клеточно-диагональных матриц // Структурные свойства групп.—Владикавказ, 1982.—С. 6–16.

100. Койбаев В. А. Неприводимые группы отражений, содержащие группу ортогональных диагональных матриц // XVIII Всесоюзн. алгебр. конф. Тезисы докл.—Минск, 1983.—С. 103–104.
101. Койбаев В. А. Подгруппы ортогональной группы над конечным полем, содержащие группу диагональных матриц // Кольца и матричные группы.—Владикавказ, 1984.—С. 57–76.
102. Койбаев В. А. Подгруппы специальной линейной группы над полем из пяти элементов, содержащие группу диагональных матриц // IX Всесоюзн. симпозиум по теории групп. Тезисы докл.—М., 1984.—С. 210–211.
103. Койбаев В. А. Подгруппы специальной линейной группы над полем из четырех элементов, содержащие группу диагональных матриц // XVIII Всесоюзн. алгебр. конф. Тезисы докл.—Кишинев, 1985.—С. 264.
104. Койбаев В. А. Промежуточные подгруппы в специальной линейной группе порядка 6 над полем из четырех элементов // X Всесоюзн. симпозиум по теории групп. Тезисы докладов.—Минск, 1986.—С. 115.
105. Койбаев В. А. О подгруппах группы  $GL(2, Q)$ , содержащих нерасщепимый максимальный тор // Междунар. конф. по алгебре. Тезисы докл. по теории групп.—Новосибирск, 1989.—С. 61.
106. Койбаев В. А. Подгруппы специальной линейной группы над полями из четырех и пяти элементов, содержащие группу диагональных матриц // Арифметика и геометрия многообразий.—Куйбышев, 1989.—С. 78–91.
107. Койбаев В. А. Подгруппы группы  $GL(2, Q)$ , содержащие нерасщепимый максимальный тор // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 312, № 1.—С. 36–38.
108. Койбаев В. А. Нормализатор группы автоморфизмов модуля, возникающего при расширении основного кольца // III Международная конф. по алгебре. Тезисы докл.—Красноярск, 1993.—С. 157.
109. Койбаев В. А. Подгруппы специальной линейной группы порядка 6 над полем из четырех элементов, содержащие группу диагональных матриц // Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. Вып. 3.—СПб: Изд-во СПбГУ, 1993.—С. 61–70.
110. Койбаев В. А. Подгруппы группы  $GL(2, K)$ , содержащие нерасщепимый максимальный тор // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—1994.—Т. 211.—С. 136–145.
111. Койбаев В. А. Нормализатор группы автоморфизмов модуля, возникающего при расширении основного кольца // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—1994.—Т. 211.—С. 133–135.
112. Койбаев В. А. О подгруппах полной линейной группы, содержащих максимальный нерасщепимый тор, связанный с радикальным расширением // Вестн. СПбГУ. Сер. 1.—1995.—№ 1.—С. 29–33.

113. Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук.—1986.—Т. 41, № 1.—С. 57–96.
114. Корлюков А. В. Линейные группы, порожденные двумерными элементами порядка  $r \geq 5$  // Вестн. МГУ. Сер. Математика. Механика.—1983.—Т. 5.—С. 19–32.
115. Крупецкий С. Л. Подгруппы ортогональной группы, содержащие группу клеточно-диагональных матриц // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1979.—Т. 94.—С. 73–80.
116. Крупецкий С. Л. О подгруппах унитарной группы над локальным полем // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1979.—Т. 94.—С. 81–103.
117. Крупецкий С. Л. О некоторых подгруппах унитарной группы над квадратичным расширением упорядоченного евклидова поля // Алгебра и теория чисел. Межвуз. сб.—Нальчик, 1979.—Вып. 4.—С. 39–48.
118. Крупецкий С. Л. О подгруппах унитарной группы над диадическим локальным полем // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1980.—Т. 103.—С. 79–89.
119. Крупецкий С. Л. Промежуточные подгруппы в унитарной группе над телом кватернионов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1982.—Т. 115.—С. 96–101.
120. Крупецкий С. Л. Промежуточные подгруппы унитарной группы над  $p$ -адическим телом кватернионов // Кольца и матричные группы.—Владикавказ, 1984.—С. 75–82.
121. Крупецкий С. Л. О подгруппах унитарной группы над телом кватернионов, содержащих максимальный тор // Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей.—Л., 1986.—Вып. 1.—С. 103–115.
122. Крупецкий С. Л. Промежуточные подгруппы вещественной изотропной ортогональной группы // Кольца и линейные группы.—Краснодар, 1988.—С. 54–59.
123. Крупецкий С. Л., Шокуев В. Н. Подгруппы конечной унитарной группы, содержащие диагональ // Структурные свойства алгебраических систем.—Нальчик, 1981.—С. 69–79.
124. Левчук В. М. Параболические подгруппы некоторых АВА-групп // Мат. заметки.—1982.—Т. 31, № 4.—С. 509–525.
125. Мерзляков Ю. И. Центральные ряды и ряды коммутантов матричных групп // Алгебра и логика.—1964.—Т. 3, № 4.—С. 49–58.
126. Мерзляков Ю. И. Линейные группы // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия.—1978.—Т. 16.—С. 35–89.
127. О’Мира О. Лекции о линейных группах // Автоморфизмы классических групп.—М.: Мир, 1976.—С. 57–167.

128. Нужин Я. Н. О группах, заключенных между группами лиева типа над различными полями // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 525–541.
129. Нужин Я. Н. О подгруппах, лежащих между группами Шевалле над различными кольцами // Алгебра и логика.—1983.—Т. 22, № 5.—С. 525–541; Красноярск: Краснояр. политехн. ин-т, 1984.—6 с. Деп. в ВИНТИ 5.12.84, № 7764-84.
130. Нужин Я. Н., Якушевич А. В. Промежуточные подгруппы групп Шевалле над полем частных кольца главных идеалов // Алгебра и логика.—2006.—Т. 39, № 3.—С. 347–358.
131. Романовский Н. С. Максимальные подкольца поля  $\mathbb{Q}$  и максимальные подгруппы группы  $SL(n, \mathbb{Q})$  // Алгебра и логика.—1967.—Т. 6, № 4.—С. 75–82.
132. Романовский Н. С. Подгруппы, лежащие между специальными линейными группами над кольцом и его подкольцом // Мат. заметки.—1969.—Т. 6, № 3.—С. 335–345.
133. Романовский Н. С. О подгруппах общей и специальной линейных групп над кольцом // Мат. заметки.—1971.—Т. 9, № 6.—С. 669–708.
134. Сережкин В. Н. Группы отражений над конечным полем характеристики  $p > 5$  // Докл. АН СССР.—1976.—Т. 227, № 3.—С. 574–575.
135. Степанов А. В. Описание подгрупп полной линейной группы над кольцом при помощи условий стабильности // Кольца и линейные группы.—Краснодар, 1988.—С. 82–91.
136. Супруненко Д. А. Группы матриц.—М.: Наука, 1972.
137. Супруненко И. Д. Конечные неприводимые группы степени 4 над полями характеристик 3 и 5 // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.—1981.—Т. 3.—С. 16–22.
138. Хамдан И. О подгруппах специальной линейной группы над локальным кольцом главных идеалов // Кольца и линейные группы.—Краснодар, 1988.—С. 119–126.
139. Чан Нгюк Хой. Расположение подгрупп в  $GL(2, \mathbb{Q})$ , содержащих нерасщепимый тор: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Л.: ЛГУ, 1990.—182 с.
140. Шмидт Р. А. О подгруппах полной линейной группы над полем частных кольца главных идеалов // Зап. научн. семин. ЛОМИ.—1979.—Т. 94.—С. 185–187.
141. Шмидт Р. А. О подгруппах полной линейной группы над полем частных дедекиндова кольца // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.—1979.—Т. 94.—С. 119–130.
142. Aschbacher M. On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math.—1984.—Vol. 76, № 3.—P. 469–514.
143. Bloom D. M. The subgroups of  $PSL(3, q)$  for odd  $q$  // Trans. Amer. Math. Soc.—1967.—Vol. 127, № 1.—P. 150–178.

- 
144. Borel A., Tits J. Groupes reductifs // Inst. Hautes Etudes. Sci. Publ. Math.—1965.—Vol. 27.—P. 55–150.
  145. Carter R. W. Simple groups of Lie type.—London etc.: Wileys Sons, 1972.
  146. Cohen A. M. Finite complex reflection groups // Ann. sci. Ec. Norm. Sup. Ser. 4.—1976.—Vol. 9.—P. 379–436.
  147. Djokovic D. Z. Subgroups of compact Lie groups containing a maximal torus are closed // Proc. Amer. Math. Soc.—1981.—T. 83, № 2.—P. 431–432.
  148. Dye R. H. On the maximality of the orthogonal groups in the symplectic groups in characteristic two // Math. Z.—1980.—Vol. 172, № 3.—P. 203–212.
  149. Dye R. H. Maximal subgroups of symplectic groups stabilizing spreads. I, II // J. Algebra.—1984.—Vol. 87, № 2.—P. 493–509; J. London. Math. Soc.—1989.—Vol. 40, № 2.—P. 215–226.
  150. Dye R. H. Maximal subgroups of  $PSp_{6n}(q)$  stabilizing spreads of totally isotropic planes // J. Algebra.—1986.—Vol. 99.—P. 111–129.
  151. Dye R. H. Spreads and classes of maximal subgroups of  $GL_n(q)$ ,  $SL_n(q)$ ,  $PGL_n(q)$  and  $PSL_n(q)$  // Ann. Math. Pura Appl.—1991.—Vol. 158.—P. 33–50.
  152. Estes D., Ohm J. Stable range in commutative rings // J. Algebra.—1967.—Vol. 7, № 3.—P. 343–362.
  153. Hartley R. W. Determination of the ternary linear collineation groups whose coefficients lie in the  $GF(2^n)$  // Ann. Math.—1926.—Vol. 27, № 1.—P. 140–158.
  154. Kantor W. M. Subgroups of classical groups generated by long root elements // Trans. Amer. Math. Soc.—1979.—Vol. 248, № 2.—P. 347–379.
  155. Kantor W. M. Linear groups containing a Singer cycle // J. Algebra.—1980.—Vol. 62, № 1.—P. 232–234.
  156. Kariyama K. On conjugacy classes of maximal tori in classical groups // J. Algebra.—1989.—Vol. 125, № 1.—P. 133–149.
  157. Key J. D. Some maximal subgroups of certain projective unimodular groups // J. London Math. Soc.—1979.—Vol. 19, № 2.—P. 291–300.
  158. King O. H. Subgroups of the special linear group containing the diagonal subgroup // J. Algebra.—1990.—Vol. 132, № 1.—P. 198–204.
  159. Li Shangzhi. Overgroups in  $GL(nr, F)$  of certain subgroups of  $SL(n, K)$  // J. Algebra.—1989.—Vol. 125, № 1.—P. 215–235.
  160. Li Shangzhi. The maximality of monomial subgroups of linear groups over division rings // J. Algebra.—1989.—Vol. 127, № 1.—P. 22–39.
  161. Di Martino L., Wagner A. The irreducible subgroups of  $PSL(V, q)$ , where  $q$  is odd // Resultate Math.—1979.—Vol. 2, № 1.—P. 54–61.
  162. Mc Laughlin J. Some groups generated by transvections // Arch. Math.—1976.—Vol. 18, № 4.—P. 364–368.

163. *Mc Laughlin J.* Some groups of  $SL_n(F_2)$  // Illinois J. Math.—1969.—Vol. 13, № 1.—P. 108–115.
164. *Mwene B.* On some subgroups of  $PSL_4(q)$ ,  $q$  odd // Geom. Dedic.—1982.—Vol. 12, № 2.—P. 189–199.
165. *Platonov V. P.* Subgroups of algebraic groups over local or a global field containing a maximal torus // C. R. Acad. Sci. Paris.—1994.—Vol. 318, № 10.—P. 899–903.
166. *Pollatsek H.* Irreducible groups generated by transvections of over finite fields of characteristic two // J. Algebra.—1976.—Vol. 39, № 1.—P. 328–333.
167. *Seitz G. M.* Subgroups of finite groups of Lie type // J. Algebra.—1979.—Vol. 61.—P. 16–27.
168. *Seitz G. M.* Properties of the known simple groups // Proc. Symp. Pure Math.—1980.—Vol. 37.—P. 231–237.
169. *Seits G. M.* On the subgroup structure of the classical groups // Commun. Algebra.—1982.—Vol. 10, № 8.—P. 875–885.
170. *Seitz G. M.* Root subgroups for maximal tori in finite groups of Lie type // Pacif. J. Math.—1983.—Vol. 106, № 1.—P. 153–244.
171. *Stepanov A.* Non-standard subgroups between  $E_n(A)$  and  $GL_n(A)$  // Algebra Collog.—2004.—Vol. 11, № 3.—P. 321–334.
172. *Stepanov A.* Free product subgroups between Chevalley groups  $G(\Phi, F)$  and  $G(\Phi, F[t])$  // Israel J. Math.—2008.—To appear.
173. *Thompson J. G.* Quadratic pairs // Actes du Congr. Internat. des Math. (Nice, 1970).—Paris: Gauthier-Villars, 1971.—Vol. 1.—P. 375–376.
174. *Tits J.* Theoreme de Bruhat et sous-groupes paraboliques // C. R. Acad. Sci.—Paris, 1962.—Vol. 254, № 16.—P. 2910–2912.
175. *Vavilov N. A.* On subgroups of split orthogonal groups in even dimensions // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math.—1981.—Vol. 29, № 9–10.—P. 425–429.
176. *Vavilov N. A.* Structure of Chevalley groups over commutative rings // World Sci. Publ (Proc. Conf. Non-associative algebras and related topics.—Hiroshima, 1990).—Singapore et al., 1991.—P. 219–335.
177. *Vavilov N. A.* Geometry of 1-tori in  $GL_n$ .—Univ. Bielefeld, 1995.—21 p. (Preprint № 8).
178. *Vavilov N. A.* Subgroups of  $SL_n$  over a semilocal ring.—Univ. Bielefeld, 1998.—13 p. (Preprint № 11).
179. *Vavilov N.* Intermediate subgroups in Chevalley groups // Proc. Conf. Groups of Lie Type and their Geometries (Como, 1993).—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.—P. 233–280.
180. *Wagner A.* The subgroups of  $PSL(5, 2^a)$  // Resultate Math.— 1978.—Vol. 1, № 2.—P. 207–226.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- D-сеть**, 29
- Базисные подгруппы веера**, 31
- Веер**, 31
- Гирлянда**, 34
- верхняя, 34
  - нижняя, 34
  - ограниченная сверху, 35
  - ограниченная снизу, 35
  - конечного типа, 36
- Граф нормальности**, 34
- Группа уровня идеала**, 134
- Действие симметрической группы на сетях**, 29
- Допустимая пара**, 88
- Интервал веера**, 31
- Кольцо**
- множителей, 61, 63, 81, 84
  - $p$ -целых чисел, 75
- Матрица-перестановка**, 30
- Модуль трансвекций**, 61, 63, 80, 84
- Мультипликативная система**, 29
- Норма элемента**, 51, 73
- Нормальное замыкание**, 33
- Однородный многочлен**, 73, 75
- Подгруппа**
- веерная, 31
  - полинормальная, 33
  - полная промежуточная, 33
  - промежуточная, 30
  - сетевая, 29
- Подкольцо**
- допустимое, 61, 88
  - сетевое, 29
  - унитарное, 29
- Подобные сети**, 30
- Подъем**, 35
- Правило перемещения**, 95
- Расширение полей**
- конечное, 58
  - куммерово, 57
  - радикальное, 61
- Свободный  $\Lambda$ -модуль**, 43

Свободный  $R$ -модуль, 43

Секция веера, 31

Сеть, 28

Символ Лежандра, 129

Спуск, 35

Стабильный ранг кольца, 132

**Тор**

— квадратичный, 18

— минизотропный, 39

**Тор**

— нерасщепимый максимальный, 39

Трансвекция, 80

— общая, 58

— элементарная, 57

**У**нимодулярная строка, 132

**Ц**ентрализатор подкольца, 44

## УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел,  
 $\mathbb{Z}$  — кольцо целых чисел,  
 $\mathbb{Q}$  — поле рациональных чисел,  
 $\mathbb{R}$  — поле действительных чисел,  
 $\mathbb{C}$  — поле комплексных чисел.

|                                                             |                                                      |
|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| <b>Глава 1</b>                                              | $Aff(n-1, k)$ , 40                                   |
| $M(\sigma)$ , 29                                            | $G_0$ , 40                                           |
| $M(n, \Lambda)$ , 29                                        | $GL_L(K)$ , 42                                       |
| $G(\sigma)$ , 29                                            | $\text{Aut}(K/k)$ , 43                               |
| $\sigma^\pi$ , 30                                           | $\text{Aut}(L/k)$ , 43                               |
| $\text{Lat}(T, G)$ , 30                                     | $\text{End}({}_\Lambda M)$ , 43                      |
| $\mathfrak{M} = \{G_\alpha, N_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , 31 | $\text{End}({}_R M)$ , 43                            |
| $\text{Lat}(G_\alpha, N_\alpha)$ , 31                       | $\text{Aut}({}_\Lambda M)$ , 43                      |
| $T^x = x^{-1}Tx$ , 33                                       | $\text{Aut}({}_R M)$ , 43                            |
| $T^X = \langle T^x : x \in X \rangle$ , 33                  | $\widehat{\Lambda}$ , 44                             |
| $H^{(n)} = (H^{(n-1)})^{(1)}$ , 35                          | $C(\widehat{\Lambda})$ , 44                          |
| $H_{(n)} = (H_{(n-1)})_{(1)}$ , 35                          | $\langle \text{Aut}({}_\Lambda M) \rangle_{ad}$ , 44 |
| $H^{(1)} = N_G(H)$ , 35                                     | $C(\text{End}({}_\Lambda M))$ , 44                   |
| $H_{(1)} = T^H = \langle h^{-1}Th : h \in H \rangle$ , 35   | $M(m, \text{End}_k(L))$ , 47                         |
|                                                             | $\Gamma_L$ , 50                                      |
| <b>Глава 2</b>                                              | $N_{K/L}K^*$ , 51                                    |
| $GL(n, k)$ , 38                                             | $N_{K/L}(\alpha)$ , 51                               |
| $GL_k(K)$ , 39                                              | $C(\overline{x})$ , 57                               |
| $\text{Aut}_k(K)$ , 39                                      | $t_{rs}(\alpha) = e + \alpha e_{rs}$ , 57            |
| $T(K)$ , 39                                                 | $e + \overline{\alpha}^T \overline{\beta}$ , 58      |
| $\widehat{\alpha}$ , 39                                     | $A_{ij} = A_{ij}(H)$ , 63                            |

- $R_{ij} = R_{ij}(H) = R_{ij}(A_{ij})$ , 63  
 $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n) =$   
 $N_{K/\mathbb{Q}}(z) = \det c(\bar{x})$ , 73  
 $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} | (n, p) = 1\}$ , 75
- Глава 3**
- $\tau(\alpha, \varphi)$ , 80  
 $A_\varphi$ , 80  
 $R(A_\varphi)$ , 81  
 $tr(z)$ , 81  
 $N(z)$ , 81  
 $R_0$ , 68, 83, 165, 165  
 $R(\mu)$ , 68, 164  
 $Q = \text{ideal}_{x \in k} \left( \frac{\mu x}{x^2 - \mu} \right)$ , 85  
 $(R, A)$ , 88  
 $E(\sigma)$ , 90  
 $\Delta(H)$ , 93  
 $f(x, \beta, \gamma)$ , 96  
 $f(x, \alpha)$ , 96  
 $g(x, \delta)$ , 96  
 $\text{Lat}(R, A)$ , 99  
 $F_0 = F_0(A)$ , 101, 166  
 $\Omega_0(A)$ , 102, 166  
 $\Omega^0(A)$ , 103, 166  
 $F^0 = F^0(A)$ , 104  
 $[R, A]$ , 106  
 $\Omega(\mu)$ , 108  
 $\Delta(m)$ , 111  
 $\bar{\Delta}(n)$ , 113  
 $H'$ , 121  
 $\Delta^*$ , 124  
 $\Delta^*(n)$ , 124  
 $\Delta_{(n)}$ , 118
- $\Delta^{(n)}$ , 124  
**Глава 4**  
 $R(d)$ , 76, 127, 129  
 $P(d)$ , 129  
 $\left(\frac{d}{p}\right)$ , 129  
 $S^{-1}\mathbb{Z}$ , 129  
 $\text{sr } R$ , 132  
 $G(\mathfrak{A})$ , 134  
 $G^*(A)$ , 136  
 $G_R$ , 143  
 $V_0(A)$ , 151, 161, 162  
 $V^0(A)$ , 151, 162,  
 $\Delta^0(A)$ , 151  
 $\text{Lat}(V_0(A), V^0(A))$ , 151  
 $\Delta_0(A)$ , 155, 156  
 $N_0(A)$ , 156  
 $N^0(A)$ , 156, 161  
 $\text{Lat}(N_0(A), N^0(A))$ , 156  
 $\Gamma_V$ , 161
- Дополнение**
- $S_0$ , 164  
 $\Lambda$ , 164  
 $\nu\left(\frac{f}{g}\right)$ , 164  
 $S_0^{-1}(\mathbb{F}_q[t])$ , 164  
 $S^{-1}(\mathbb{F}_q[t])$ , 165  
 $G(A)$ , 165  
 $E(A)$ , 165  
 $H(A)$ , 166

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

**Койбаев Владимир Амурханович**

**ПОДГРУППЫ ГРУППЫ  $GL(2, k)$ ,  
СОДЕРЖАЩИЕ НЕРАСЩЕПИМЫЙ ТОР**

под редакцией А. А. Махнева

*Утверждено к печати Ученым советом  
Южного математического института  
Владикавказского научного центра  
Российской академии наук*

Компьютерная верстка В. В. Кибизовой  
Зав. редакцией М. С. Биченова

Подписано в печать 24.06.2009.  
Формат бумаги  $60 \times 84^{1/16}$ . Усл. п. л. 10,64.  
Тираж 120 экз. Заказ № 146

Владикавказский научный центр  
362008, г. Владикавказ, пр. Коста, 93.

Отпечатано в ИПО СОИГСИ им. В. И. Абаева  
362040, г. Владикавказ, пр. Мира, 10.

ISBN 978-5-93000-059-7

