

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ИТОГИ НАУКИ • ЮГ РОССИИ

С Е Р И Я

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

Выпуск 3

Ш. С. Хубежты

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ
ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ
И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Владикавказ
2011

ББК 22.193
УДК 519.64
К 98

Ответственный редактор

д. ф-м. н, профессор Д. Г. Саникидзе

Рецензент

д. ф-м. н., профессор А. Ф. МАТВЕЕВ

д. ф-м. н., профессор А. О. ВАТУЛЬЯН

Хубежты Ш. С.

Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения / отв. ред. Д. Г. Саникидзе.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2011.—236 с.—(Итоги науки. Юг России. Математическая монография. Вып. 3).

Монография посвящена построению квадратурных формул для сингулярных интегралов и интегралов типа Коши. Также представлены результаты по точным методам вычисления указанных интегралов. Основная цель автора — дать в руки исследователей аппарат для вычисления интегралов типа Коши и сингулярных интегралов, с помощью которых можно решать некоторые задачи гидро- и аэродинамики, теории упругости, математической физики и т. д.

Книга может быть полезна всем, интересующимся методами приближенного вычисления одномерных сингулярных интегралов с ядрами Коши и их приложениями к численному решению уравнений, содержащих такие интегралы.

ISBN 978-5-904695-07-1

© Южный математический институт

ВНИЦ РАН и РСО-А, 2011

© Ш. С. Хубежты, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
Глава 1. Элементы теории сингулярных интегралов.	
Сингулярные интегральные уравнения.....	11
1.1. Гладкие и кусочно-гладкие линии. Условие Гёльдера ..	11
1.2. Интегралы типа Коши	14
1.3. Предельные значения интеграла типа Коши. Формулы Сохоцкого — Племяля	16
1.4. Сингулярные интегралы	19
1.5. Сингулярные интегральные уравнения	23
1.6. Теоремы Нётера	26
Глава 2. Приближенное вычисление сингулярных интегралов.....	29
2.1. Обзор некоторых результатов по аппроксимации сингулярных интегралов	29
2.2. Метод дискретных особенностей	35
2.3. Метод интерполяции плотностей	38
2.4. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с наперед заданными узлами	42
2.5. Равномерные оценки погрешности для сингулярных интегралов с весами Якоби	48
2.6. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с применением внешних узлов	57
2.7. О квадратурных формулах для некоторых сингуляр- ных интегралов с негладкими плотностями	62
2.8. О приближенном вычислении некоторых криволиней- ных интегралов с ядром Коши	67
2.9. Квадратурные формулы Гаусса для сингулярного интеграла	77
2.10. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и формулы обращения	79

Глава 3. Вычисления интегралов типа Коши	87
3.1. Точное вычисление некоторых интегралов типа Коши	87
3.2. Квадратурные формулы интерполяционного типа	94
3.3. Квадратурные формулы для интегралов типа Коши с применением свободных параметров	98
3.4. Квадратурные формулы для интегралов типа Коши встречающихся в формулах для напряжений и смещений в задачах плоской теории упругости	103
3.5. Квадратурные формулы для интегралов типа Коши с весовыми функциями	112
3.6. О приближенном вычислении компонентов напряжений и смещений в задачах плоской теории упругости	117
Глава 4. Численное решение сингулярных интегральных уравнений	120
4.1. Общие принципы численного решения сингулярных интегральных уравнений. Некоторые результаты	120
4.2. О численном решении некоторых задач методом обобщенных сингулярных интегральных уравнений	125
4.3. Обоснование модифицированного метода дискретных особенностей с применением внешних узлов к решению сингулярных интегральных уравнений I-го рода	129
4.4. К вопросу эффективной оценки погрешности численного решения сингулярных интегральных уравнений методом квадратур	139
4.5. Применение некоторых прямых схем интерполяционной степени точности к численному решению некоторых классов сингулярных интегральных уравнений	151
4.6. Численное решение сингулярных интегральных уравнений I-го рода на отрезках при $\kappa = \pm 1$	161
Глава 5. Приложения к граничным задачам теории функции, математической физики и теории упругости	165
5.1. О граничных задачах теории функций и математической физики	165

5.2. К численному решению уравнения Липмана — Швингера	166
5.3. О численном решении задачи Дирихле в случае областей с углами	179
5.4. О применении схемы локально-канонического разбиения к численному решению основных задач теории упругости	185
5.5. О численном решении некоторых задач теории трещин методом дискретных особенностей	203
5.6. Сингулярные интегральные уравнения в численных конформных отображениях	211
5.7. О пакете программ для численного решения сингулярных интегральных уравнений и некоторых граничных задач	218
Литература	225
Предметный указатель	231
Указатель обозначений	232

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы при решении различных прикладных задач все большее применение находят сингулярные интегральные уравнения (см., например, [1], [4], [5], [13], [19], [28], [35], [46], [54]). Но решить сингулярные интегральные уравнения аналитическими методами можно довольно редко. Поэтому активно развиваются численные методы решения таких уравнений и методы вычисления сингулярных интегралов. Как известно, численное решение сингулярного интегрального уравнения существенно зависит от точности аппроксимации сингулярного интеграла, содержащегося в этом уравнении.

В основе построения теории краевых задач аналитических функций комплексной переменной лежат интегралы типа Коши. Решение многих граничных задач теории аналитических функций выражается через интегралы типа Коши с заданной плотностью или с неизвестными плотностями, для определения которых требуется решать сингулярные интегральные уравнения. Интегралы типа Коши также редко можно вычислить точно.

Первой работой по численному решению сингулярных интегральных уравнений была работа М. А. Лаврентьева (1932 г.), в которой предложены и обоснованы два численных метода, основанные на полигональной аппроксимации решения и предвосхищающие на частном примере общую схему применения метода типа Ритца — Галёркина. В предисловии к указанной работе академик С. А. Чаплыгин писал: «Приветствуя появление работы профессора М. А. Лаврентьева, следует выразить пожелание, чтобы исследование это было продолжено и чтобы была сделана попытка упростить применение приема, увеличив его сходимость. Для решения этой задачи имеется много возможностей, и нам представляется, что результаты окупят потраченные усилия».

В монографии Н. И. Мусхелишвили [46], подводящей итог многолетним исследованиям в области теории сингулярных интегральных уравнений и их приложений, сказано: «Дальнейшая разработка этого (метода Лаврентьева) и аналогичных методов приближенного

решения сингулярных интегральных уравнений является, как мне кажется, одной из важнейших очередных задач теории этих уравнений...».

Данная монография посвящена построению квадратурных формул для сингулярных интегралов и интегралов типа Коши. Также представлены результаты по точным методам вычисления указанных интегралов. Основная цель автора — дать в руки исследователей аппарат для вычисления интегралов типа Коши и сингулярных интегралов, с помощью которых можно решать некоторые задачи гидро- и аэродинамики, теории упругости, математической физики и т. д.

Работа написана на основе 30-летних исследований автора: сперва в Институте вычислительной математики им. Н. И. Мусхелишвили АН Грузии, позже в Северо-Осетинском государственном университете им. К. Л. Хетагурова и Южном математическом институте ВНИЦ РАН и РСО-А.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Д. Г. Саникидзе за ценные советы и большую помощь при подготовке монографии к изданию.

Ш. С. Хубежты

ВВЕДЕНИЕ

Сингулярные интегралы и соответствующие уравнения с ядром Коши находят все более широкое применение в различных областях математики, механики и физики. К этим уравнениям сводятся граничные задачи теории функций, к которым, в свою очередь, сводятся многие важные задачи математической физики и механики, в частности, теории упругости и гидро-аэродинамики. Многочисленным приложениям сингулярных интегралов типа Коши и сингулярных интегральных уравнений посвящены, например, монографии [5], [6], [13], [25], [40], [46]. В работе [19] указывается применение сингулярных интегральных уравнений к решению задач анализа и синтеза систем автоматического управления и некоторых задач теоретической физики. Широкие возможности сингулярных интегральных уравнений применительно к решению различных важных задач прикладного характера отчетливо проявляются в монографиях [50], [51].

Возможность понизить на единицу размерность задачи сведением ее к граничному интегральному уравнению и некоторые другие достоинства метода интегральных уравнений позволяют при имеющихся вычислительных средствах рассматривать иногда более сложные классы задач, чем те, которые можно решать иными методами. При этом, численное решение соответствующих задач с привлечением аппарата сингулярных интегральных уравнений с разработкой надлежащих методов аппроксимации, входящих в эти уравнения сингулярных интегралов, оказывается очень эффективным.

Указанные обстоятельства обусловили то большое внимание, которое ряд известных математиков стали уделять вопросу численного решения интегральных уравнений с сингулярными интегралами в смысле главного значения. В 1932 г. М. А. Лаврентьев получил в этом направлении ряд существенных результатов: в работе [26] одна практическая задача гидродинамики сводится к сингулярному интегральному уравнению определенного типа и обоснованы численные методы решения таких уравнений. К сравнительно раннему периоду относятся также работы [20], [40], [41], в которых предлага-

ются приближенные схемы для решения сингулярных интегральных уравнений различных видов.

Большое влияние на дальнейшее развитие общей теории сингулярных интегральных уравнений оказали развитие численных методов и расширение круга задач, сводящихся к решению подобных уравнений. Разработке и обоснованию таких методов в 50–60-е гг. прошлого века было посвящено значительное число работ. Следует особо отметить упомянутую выше монографию [19], а также обзорную статью [8], отражающие достижения российских и зарубежных авторов в области теории аппроксимации сингулярных интегралов и численного решения сингулярных интегральных уравнений.

Начиная с 70-х годов, появляются многочисленные работы, посвященные приближенному вычислению сингулярных интегралов, разработке и теоретическому обоснованию численных методов решения сингулярных интегральных уравнений. Особо следует отметить работы С. М. Белоцерковского [1] по аэродинамике, послужившие основой создания существенно нового, хорошо известного в настоящее время метода численного решения сингулярных интегральных уравнений — метода дискретных особенностей. Позже этот метод был существенно развит учениками С. М. Белоцерковского во главе с И. К. Лифановым (см. [1], [11], [12], [29]–[38]). Метод дискретных особенностей до сих пор является одним из актуальных методов в этом направлении.

Отметим также результаты, полученные грузинской математической школой под руководством Д. Г. Саникидзе (см. [9], [49], [59]–[77]). Здесь сингулярные интегральные уравнения решаются без применения регуляризации, а построенные вычислительные схемы пригодны и в случаях, когда уравнения кривых не заданы аналитически, что особенно важно при решении прикладных задач.

Среди работ других авторов, посвященных приближенному вычислению сингулярных интегралов и решению интегральных уравнений, содержащих такие интегралы, следует отметить работы [2], [3], [14]–[17], [43], [44], [79]–[84].

В подавляющем большинстве случаев фактическое построение практически осуществимых вычислительных схем для численного решения сингулярных интегральных уравнений сводится в той или иной мере к удачной аппроксимации входящих в эти уравнения сингулярных интегралов. С другой стороны, построение вычислительной схемы само по себе представляет значительный теоретический

и практический интерес. В связи с этим в настоящей работе наряду с вопросами чисто вычислительного характера достаточное внимание уделяется также некоторым общетеоретическим вопросам приближения сингулярных интегралов с ядром Коши различными аппроксимирующими средствами.

Формально к численному решению сингулярных интегральных уравнений могут быть применены те же методы, которые обычно применяются при решении интегральных уравнений Фредгольма второго рода [19], но обоснование этих методов применительно к сингулярным интегральным уравнениям часто представляет значительные трудности. В частности, это относится к методу механических квадратур, основанному на кусочно-полиномиальном приближении искомого решения. Между тем этот метод считается одним из наиболее удобных для численного решения интегральных уравнений Фредгольма благодаря тому, что он для этих уравнений достаточно прост и может быть эффективно применен к решению уравнений с достаточно общими контурами интегрирования без какого-либо предварительного преобразования последних.

В настоящей монографии для численного решения достаточно общих классов сингулярных интегральных уравнений предлагаются новые подходы, основанные на полученных автором схемах аппроксимации сингулярных интегралов. Схемы эти приводят к аппроксимирующим уравнениям значительно более удобной вычислительной структуры и применимы к достаточно общим классам уравнений при общепринятых предположениях относительно разрешимости соответствующих аппроксимирующих уравнений и с указанием оценки скорости сходимости их решений к решению исходного уравнения. Даны приложения к численному решению ряда задач математической физики и механики.

Дадим теперь краткое описание структуры монографии и ее основных результатов.

В первой главе дано изложение общей теории сингулярных интегральных уравнений, приведены основные свойства интегралов типа Коши и сингулярных интегралов.

Во второй главе рассмотрены основные методы приближенного вычисления сингулярных интегралов, показано поведение остаточных членов приближенных формул и установлены порядки точности сходимости.

Третья глава посвящена интегралам типа Коши, приводятся некоторые способы их точного вычисления. Кроме того, строятся квадратурные формулы приближенного характера как для обычных интегралов, так и для интегралов с весовыми функциями.

В четвертой главе даются основные методы численного решения сингулярных интегральных уравнений.

Пятая глава посвящена некоторым граничным задачам теории функций, математической физики и теории упругости. Здесь, в частности, рассматриваются задачи теории гармонических функций, основные задачи плоской теории упругости, задача рассеяния квантовой теории поля, задачи теории трещин и некоторые родственные им задачи.

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ. СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Гладкие и кусочно-гладкие линии.

Условие Гёльдера

Будем рассматривать линии, расположенные на плоскости xOy . Под системой координат на этой плоскости подразумеваем прямоугольную декартову правую систему. Под гладкими линиями понимаются простые, т. е. те, которые не пересекают сами себя.

Разомкнутой гладкой дугой или *разомкнутым гладким контуром* L называется линия, которую можно описать параметрически следующим образом:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s_a \leq s \leq s_b, \quad (1.1.1)$$

где s_a и s_b — некоторые постоянные, а $x(s)$, $y(s)$ — непрерывно дифференцируемые функции на $[s_a, s_b]$, причем производные $x'(s)$, $y'(s)$ одновременно в нуль не обращаются. Различным значениям параметра $s \in [s_a, s_b]$ соответствуют различные точки кривой L .

Если через $t = x(s) + iy(s)$, где i — мнимая единица, обозначить точки кривой L , то между t и s существует взаимно однозначное соответствие.

Иногда кривую L , описанную выше, будем обозначать через ab , где $a := t(s_a)$, $b := t(s_b)$.

Гладким замкнутым контуром L называется гладкая кривая, у которой $x(s_b) = x(s_a)$, $y(s_b) = y(s_a)$, причем $x'(s_b - 0) = x'(s_a + 0)$ и $y'(s_b - 0) = y'(s_a + 0)$. Таким образом, в этом случае функции $x(s)$, $y(s)$ и $x'(s)$, $y'(s)$ можно рассматривать как периодические с периодом $T = s_b - s_a$. Другими словами, гладкая замкнутая кривая (контур) имеет непрерывно меняющийся орт касательной к точке кривой, когда эта точка описывает кривую.

Гладкой линией называется совокупность конечного числа замкнутых или разомкнутых гладких контуров, не имеющих общих точек (в том числе и концов).

Кусочно-гладкой называется кривая, состоящая из конечного числа гладких разомкнутых кривых, не имеющих общих точек, за исключением, быть может, концов. Будем говорить, что эта кривая имеет только угловые узлы, если в каждом узле любые две гладкие кривые сходятся под углом, отличным от нулевого, т. е. узел не является точкой возврата.

Гладкая кривая L , очевидно, спрямляема, поэтому в качестве параметра s мы можем взять длину дуги, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки на L и снабженную определенным знаком в зависимости от направления отсчета. В соответствии с этим мы будем иметь

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1. \quad (1.1.2)$$

Параметр s в этом случае называется *дуговой абсциссой*, соответствующей точке линии L .

Под касательной к линии L подразумевают положительную касательную, проведенную в сторону возрастания s . Если θ обозначает угол, составляемый касательной в точке t с осью Ox и отсчитываемый от этой последней, то

$$\cos \theta = x'(s), \quad \sin \theta = y'(s). \quad (1.1.3)$$

Эти формулы показывают, что угол, составляемый касательной с каким-либо постоянным направлением, изменяется непрерывно вместе с s . Очевидно и обратное, если θ изменяется непрерывно вместе с s , то $x'(s)$, $y'(s)$ — непрерывные функции от s .

Если $t = x(s) + iy(s)$ — уравнение кривой, где s — дуговая абсцисса, то

$$t'(s) = \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds} = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}, \quad (1.1.4)$$

где θ означает то же, что выше. Очевидно, что

$$|t'(s)| = \left| \frac{dt}{ds} \right| = 1. \quad (1.1.5)$$

Пусть L — простая кусочно-гладкая кривая, т. е. состоит из конечного числа гладких разомкнутых кривых a_1a_2 , a_2a_3 , $\dots$, $a_{n-1}a_n$,

расположенных так, что конечная точка каждой предыдущей гладкой кривой совпадает с начальной точкой последующей, которая имеет только угловые узлы. Тогда (см. [46]) для любой пары точек t_1, t_2 на кривой L выполняется неравенство

$$k_0 \sigma(t_1, t_2) \leq r(t_1, t_2) \leq \sigma(t_1, t_2), \quad (1.1.6)$$

где $\sigma(t_1, t_2)$ — длина части кривой L , заключенной между точками t_1 и t_2 , причем, если L — замкнутая, то $\sigma(t_1, t_2)$ обозначает меньшую длину; $r(t_1, t_2) = |t_1 - t_2|$ — расстояние между точками t_1 и t_2 на плоскости xOy ; k_0 не зависит от положения точек t_1 и t_2 на кривой L , при этом $0 < k_0 < 1$, т. е. формулу (1.1.6) можно записать в виде

$$0 < k_0 \leq \frac{|t_2 - t_1|}{|s_2 - s_1|} \leq 1. \quad (1.1.7)$$

Условие Гёльдера. Пусть $\varphi(t)$ — функция (комплексной) переменной t , заданная на некотором множестве T . Будем говорить, что $\varphi(t)$ удовлетворяет *условию Гёльдера* с показателем μ (условию $H(\mu)$) на этом множестве, если для любых двух значений t_1 и t_2 переменной t на этом множестве

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leq A |t_2 - t_1|^\mu, \quad (1.1.8)$$

где A и μ , $0 < \mu \leq 1$, — положительные числа. Постоянную A называют *коэффициентом*, а μ — *показателем условия* $H(\mu)$.

Ясно, что если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$, то тому же условию удовлетворяет $|\varphi(t)|$.

Гладкая разомкнутая кривая L с уравнением $t = t(s)$ называется *кривой Ляпунова*, если производная $t'(s)$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$ на $[s_a, s_b]$. В этом случае, как показано в [46], отношение $\frac{t(s) - t(s_0)}{s - s_0}$ тоже удовлетворяет условию $H(\alpha)$ по обоим переменным s и s_0 и не обращается в нуль на $[s_a, s_b]$.

Если $\mu = 1$, то условие $H(1)$ (условие Гёльдера с показателем 1) превращается в условие Липшица. Простейшим примером функций, удовлетворяющих условию $H(1)$, т. е. условию Липшица, являются функции действительной переменной, имеющие ограниченную производную.

Заметим еще, что при $\mu > 1$ из (1.1.8) следует, что $\varphi'(t) = 0$ и, следовательно, $\varphi = \text{const}$. Кроме этого, если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$, то она удовлетворяет и условию $H(\nu)$ при всяком положительном $\nu \leq \mu$.

Справедливы следующие признаки принадлежности к классу $H(\mu)$ функций, заданных на гладких линиях:

1. Пусть разомкнутая дуга $L = ab$ разбита точкой t_0 на две части: at_0 и t_0b . Если $\varphi(t)$ непрерывна на L и удовлетворяет условию $H(\mu)$ на каждой из частей at_0 и t_0b в отдельности, то она удовлетворяет условию $H(\mu)$ и на всей дуге L .

2. Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют на L соответственно условиям $H(\mu)$ и $H(\nu)$, то функции $\varphi(t) + \psi(t)$, $\varphi(t)\psi(t)$ удовлетворяют на L условию $H(\lambda)$, где λ — наименьшее из чисел μ, ν .

3. Если $\varphi(t)$ удовлетворяет на L условию $H(\mu)$, причем $\varphi(t) \neq 0$ всюду на L , то $1/\varphi(t)$ также удовлетворяет на L условию $H(\mu)$.

4. Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет на L условию $H(\mu)$ и пусть $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$. Тогда функция от t и t_0

$$\psi(t, t_0) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{|t - t_0|^\lambda}$$

удовлетворяет на L условию $H(\mu - \lambda)$.

5. Пусть функция $f(s)$ действительной переменной s , заданная в интервале $s_1 \leq s \leq s_2$, имеет непрерывную на этом интервале n -ю производную $f^{(n)}(s)$. Положим

$$F(s, s_0) = \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0}, \quad s_1 \leq s, \quad s_0 \leq s_2,$$

подразумевая, что

$$F(s, s) = \frac{df(s)}{ds}.$$

Тогда существуют частные производные $(n-1)$ -го порядка

$$\frac{\partial^{(n-1)} F(s, s_0)}{\partial s^k \partial s_0^l}, \quad k + l = n - 1,$$

и эти производные непрерывны при $s_1 < s$, $s_0 \leq s_2$. Если, кроме того, $f^{(n)}(s)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$, то вышеуказанные частные производные удовлетворяют условию $H(\mu)$ по обоим переменным s, s_0 .

Доказательства этих признаков приводятся в [46].

1.2. Интегралы типа Коши

Пусть D есть односвязная область, ограниченная произвольной кусочно-гладкой линией L , и $\varphi(z)$ — функция, аналитическая в замкнутой области $\bar{D}$. Это значит, что функция $\varphi(z)$ имеет конечную

производную в каждой точке некоторой области D' , содержащей $\overline{D}$. Тогда справедлива *формула Коши*

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad (1.2.1)$$

где z — любая точка внутри L , и интегрирование совершается по контуру L в определенном направлении. Эта формула выражает значение функции $\varphi(z)$ во всякой точке, внутренней к линии L , через значения этой функции на контуре L . Отсюда вытекает, что значения аналитической функции тесно связаны между собой, так как ее значения вдоль замкнутого контура L вполне определяют ее значения внутри L .

Пусть теперь L — замкнутая или разомкнутая гладкая линия. Таким образом, линия L может состоять из раздельно расположенных частей. Если в состав L входят разомкнутые дуги, то концы этих дуг будем называть концами линии L . Также будем считать, что на L выбрано определенное положительное направление. В соответствии с этим можем различать «левую» и «правую» окрестности каждой точки t , расположенной на L и не совпадающей с ее концами. Левую и правую окрестности будем обозначать соответственно знаками $(+)$ и $(-)$.

Пусть $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$ — некоторая комплексная функция, заданная на L , абсолютно интегрируемая в обычном (римановом) смысле.

Интегралом типа Коши, взятым по линии L , называется интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad (1.2.2)$$

где z — некоторая точка плоскости xOy .

В интеграле типа Коши функция $\varphi(t)$ называется *плотностью*, а $1/(t-z)$ — *ядром Коши*.

Будем предполагать, что точка z не расположена на линии L . Тогда интеграл (1.2.2) имеет вполне определенный смысл и представляет собой функцию комплексной переменной z , определенную на всей плоскости, за исключением точек линии L . Обозначим эту функцию через $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt. \quad (1.2.3)$$

Легко видеть, что функция $\Phi(z)$ голоморфна на всей плоскости, кроме, может быть, точек линии L . Если линия L содержит замкнутые контуры, то имеется в виду, что функция $\Phi(z)$ голоморфна внутри каждой части, на которые разбивается плоскость линией L .

Итак, справедливы следующие теоремы:

Теорема 1.2.1. *Функция $\Phi(z)$, определенная интегралом типа Коши (1.2.3), есть аналитическая функция во всякой односвязной области D , не содержащей точек линии L , и для ее производной имеет место формула*

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt. \quad (1.2.4)$$

Теорема 1.2.2. *Функция $\Phi(z)$, определенная интегралом типа Коши (1.2.3), имеет в каждой точке z , лежащей вне L , производные всех порядков, для которых имеет место формула (см., например, [27], [46], [56])*

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^{n+1}} dt, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.2.5)$$

1.3. Предельные значения интеграла типа Коши. Формулы Сохоцкого — Племеля

Перейдем теперь к наиболее существенному для нас вопросу — изучению поведения интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \quad (1.3.1)$$

вблизи линии интегрирования L , которую считаем кусочно-гладкой.

Основной результат формулируется так:

Теорема 1.3.1. *Если плотность $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H на некоторой гладкой части линии L , то функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима слева и справа на эту часть, за исключением, быть может, ее концов (если таковые имеются).*

Исследуем сначала поведение интеграла

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-z} dt \quad (1.3.2)$$

при $z \rightarrow t_0$, где t_0 — произвольная точка контура L .

Справедлива следующая

Лемма 1.3.2. Если плотность $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, и точка t_0 не совпадает с концами гладкого контура L , то функция (1.3.2) ведет себя при переходе через точку $z = t_0$ контура как функция непрерывная, т. е. она имеет определенное предельное значение при приближении z к t_0 с любой стороны контура по любому пути:

$$\lim_{z \rightarrow t_0} \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt = \Psi(t_0). \quad (1.3.3)$$

Доказательство этой леммы при произвольном стремлении z к t_0 изложено в [13], [46].

◁ Доказательство теоремы. Достаточно ограничиться случаем, когда $L = ab$ — гладкий разомкнутый контур, а $\varphi(t)$ удовлетворяет на L условию H (включая концы).

Имеем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - z_0} dt + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \int_L \frac{1}{t - z} dt,$$

или

$$\Phi(z) = \Psi(z) + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \ln \frac{z - b}{z - a}, \quad (1.3.4)$$

где под логарифмом подразумевается ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль $L = ab$ плоскости, исчезающая на бесконечности.

На основании упомянутой леммы 1.3.2 $\Psi(z)$ равномерно стремится к определенному пределу $\Psi(t_0)$, когда z стремится к t_0 так, как указано в формулировке леммы. Очевидно, что и второе слагаемое в правой части (1.3.4) равномерно стремится к определенным пределам, когда z стремится слева или справа к любой точке t_0 на L , находящейся на конечном расстоянии от концов. Но из равномерного стремления к пределу следует, что функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима слева и справа на любую точку t_0 линии L , отличную от концов. ▷

Переходя в (1.3.4) к пределу при $z \rightarrow t_0$ слева или справа, получаем соответственно

$$\begin{aligned}\Phi^+(t_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \ln \frac{t_0 - b}{t_0 - a}, \\ \Phi^-(t_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i} \ln \frac{t_0 - b}{t_0 - a} - \varphi(t_0),\end{aligned}\tag{1.3.5}$$

где под $\ln \frac{t_0 - b}{t_0 - a}$ подразумевается значение, принимаемое слева от L функцией $\ln \frac{z - b}{z - a} = \ln \frac{b - z}{a - z}$, голоморфной на разрезанной вдоль $L = ab$ плоскости и исчезающей на бесконечности. В частности при $\varphi(t) = 1$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{1}{t - t_0} dt = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{b - t_0}{a - t_0} - \frac{1}{2}.$$

Первая из формул (1.3.5) очевидна, если принять во внимание, что по определению выражение $\ln \frac{t_0 - b}{t_0 - a}$ представляет собой граничное значение функции $\ln \frac{z - b}{z - a}$ слева от L . Вторая из формул (1.3.5) также станет очевидной, если принять во внимание, что граничное значение предыдущего выражения справа от L равно $\ln \frac{t_0 - b}{t_0 - a} - 2\pi i$, ибо если z переходит с левой стороны L на правую, обходя, скажем, конец a , то $\ln(z - a)$ получает приращение $2\pi i$, а $\ln(z - b)$ возвращается к прежнему значению.

Отметим, что если z находится в окрестности точки a , то имеем представление

$$\Phi(z) = -\frac{\varphi(a)}{2\pi i} \ln(z - a) + \Phi_0(z),\tag{1.3.6}$$

где $\Phi_0(z)$ голоморфна вблизи a на разрезанной плоскости и непрерывно продолжима на L слева, справа, вблизи a , а также на точку a .

Совершенно аналогично вблизи конца b будем иметь

$$\Phi(z) = +\frac{\varphi(b)}{2\pi i} \ln(z - b) + \Phi_0(z),\tag{1.3.7}$$

где функция $\Phi_0(z)$ голоморфна вблизи b на разрезанной вдоль L плоскости и непрерывно продолжима на L слева и справа вблизи b , а также на точку b .

Мы видим, таким образом, что если $\varphi(t)$ принадлежит классу H на дуге $L = ab$, то $\Phi(z)$ представляет собой кусочно-голоморфную функцию с линией скачков L , исчезающую на бесконечности.

Формулы (1.3.5) неудобны в том отношении, что они непосредственно применимы лишь к случаю, когда L — простая разомкнутая дуга.

Если же ввести в рассмотрение главное значение интеграла по Коши (полное определение в следующем параграфе), то эти формулы можно преобразовать к весьма простому виду, притом пригодному для любой кусочно-гладкой линии интегрирования. А именно, формулы (1.3.5) можно переписать так:

$$\Phi^+(t_0) = \frac{1}{2}\varphi(t_0) + \Phi(t_0) = \frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt, \quad (1.3.8)$$

$$\Phi^-(t_0) = -\frac{1}{2}\varphi(t_0) + \Phi(t_0) = -\frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt, \quad (1.3.9)$$

где в правых частях фигурируют главные значения интеграла. Формулы (1.3.8) и (1.3.9) можно переписать еще в виде

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \varphi(t_0), \quad (1.3.10)$$

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt. \quad (1.3.11)$$

Формулы (1.3.8), (1.3.9) или (1.3.10), (1.3.11) называются *формулами Сохоцкого — Племеля*.

1.4. Сингулярные интегралы

В предыдущем параграфе фигурировало понятие главного значения интеграла типа Коши:

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt. \quad (1.4.1)$$

Но остался неясным смысл указанного интеграла.

Напомним определение сингулярного интеграла типа Коши на кусочно-гладкой линии.

Пусть точка t_0 не совпадает ни с одним узлом кривой L , т. е. является внутренней точкой. Опишем из t_0 как из центра окружность настолько малого радиуса $\varepsilon > 0$, чтобы она пересекала L ровно в двух точках t' и t'' , и обозначим через l дугу $t't''$ (см. рис. 1).

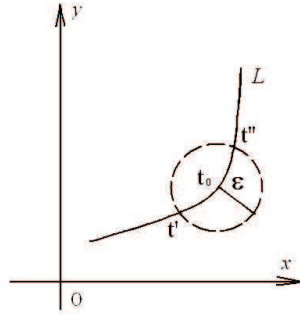


Рис. 1.

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L \setminus l} \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt.$$

Если при $\varepsilon \rightarrow 0$ этот интеграл стремится к определенному пределу, то этот предел и называется *главным значением интеграла по Коши*:

$$\Phi(t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L \setminus l} \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt, \quad t_0 \in L. \quad (1.4.2)$$

Таким образом, *сингулярным интегралом* называется главное значение интеграла (1.4.1).

Теорема Племеля — Привалова. Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ на гладкой линии L , то сингулярный интеграл $\Phi(t_0)$ удовлетворяет на L , кроме, быть может, сколь угодно малых окрестностей концов L , условию $H(\mu)$ при $\mu < 1$ и условию $H(\mu - \varepsilon)$ при $\mu = 1$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Пусть теперь $\varphi(t)$ — функция точек замкнутого контура, производная которой удовлетворяет условию Гёльдера. Тогда

$$\Phi'(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi'(t)}{t - t_0} dt. \quad (1.4.3)$$

Доказательство этой формулы проводится следующим образом. Применяя интегрирование по частям и учитывая, что L — замкнутый контур в (1.4.1), имеем

$$\Phi'(t_0) = \frac{d}{dt_0} \left(\frac{1}{2} \varphi(t_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi'(t) \ln(t - t_0) dt \right).$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_0} \int_L \varphi'(t) \ln(t - t_0) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dt_0} \int_{L \setminus l} \varphi'(t) \ln(t - t_0) dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{L \setminus l} \frac{\varphi'(t)}{t - t_0} dt + \varphi'(t_2) \ln(t_2 - t_0) - \varphi'(t_1) \ln(t_1 - t_0) \right) = \\ &= - \int_L \frac{\varphi'(t)}{t - t_0} dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varphi'(t_2) - \varphi'(t_1)] \ln(t_2 - t_0) + \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi'(t_1) [\ln(t_2 - t_0) - \ln(t_1 - t_0)]. \end{aligned}$$

Так как $\varphi'(t_0)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то первый из оставшихся пределов равен нулю, а второй — $\pi \varphi'(t_0)$. Поэтому получаем

$$\Phi'(t_0) = \frac{1}{2} \varphi'(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi'(t)}{t - t_0} dt - \frac{1}{2} \varphi'(t_0),$$

что доказывает (1.4.3).

В общем случае, если $\varphi(t_0)$ — функция точек замкнутого контура L , m -я производная которой удовлетворяет условию Гёльдера, тогда для производной m -го порядка функции $\Phi(z)$ справедливы формулы

$$\Phi^{(m)+}(t_0) = \frac{1}{2} \varphi^{(m)}(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi^{(m)}(t)}{t - t_0} dt,$$

$$\Phi^{(m)-}(t_0) = -\frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi^{(m)}(t)}{t - t_0} dt.$$

Доказательства этих формул имеется в [13].

Из теории ортогональных многочленов для сингулярных интегралов известны следующие основные формулы (см. [19, с. 125]):

$$\begin{aligned} 1. & \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \cdot \frac{T_k^*(x)}{x-y} dx = -T_k(y), \\ 2. & \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} \cdot \frac{T_k^*(x)}{x-y} dx = T_k(y), \\ 3. & \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{T_k^*(x)}{\sqrt{(b-x)(x-a)}(x-y)} dx = T_{k-1}(y), \\ 4. & \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)} \frac{T_k^*(x)}{x-y} = -T_{k+1}(y), \end{aligned}$$

где T_k^* и T_k — ортогональные многочлены степени k в пространствах $L(\rho^{-1})$ и $L(\rho)$, т. е. соответственно с весами $\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$ и $\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}$ в первом и втором случаях, а также, соответственно с весами $\frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$ и $\sqrt{(b-x)(x-a)}$ в третьем и четвертом случаях на отрезке $[a, b]$.

Пусть Γ — замкнутый кусочно-гладкий контур. Пространство $H(\alpha, \Gamma)$ — линейное нормированное пространство функций $\varphi(t)$ с нормой Мусхелишвили

$$\|\varphi\|_{H(\alpha)} = \max_{t \in \Gamma} |\varphi(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in \Gamma} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha}, \quad (1.4.4)$$

где $H(\alpha)$ — условие Гёльдера с показателем μ , будет банаховым.

Теорема Мусхелишвили. Пространство $H(\alpha, \Gamma)$ банахово. Кроме того, если $\varphi \in H(\alpha, \Gamma)$ ($0 < \alpha < 1$), то $S\varphi \in H(\alpha, \Gamma)$, причем S является ограниченным оператором в $H(\alpha, \Gamma)$, где

$$S\varphi = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt.$$

◁ Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — какая-либо фундаментальная последовательность в этом пространстве такая, что при всяком целом $p > 0$

$$\|\varphi_{n+p} - \varphi_n\| < \varepsilon_n,$$

где ε_n не зависит от p и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

Из (1.4.4) следует, что последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ является фундаментальной и в пространстве C , так что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ в том смысле, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \max |\varphi - \varphi_n| = 0$. Далее, из (1.4.4) следует

$$\sup \left| \frac{\varphi_{n+p}(t_2) - \varphi_{n+p}(t_1)}{|t_2 - t_1|^\alpha} - \frac{\varphi_n(t_2) - \varphi_n(t_1)}{|t_2 - t_1|^\alpha} \right| \leq \varepsilon_n,$$

откуда вследствие того, что ε_n не зависит от p , следует

$$\sup \left| \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{|t_2 - t_1|^\alpha} - \frac{\varphi_n(t_2) - \varphi_n(t_1)}{|t_2 - t_1|^\alpha} \right| \leq \varepsilon_n.$$

Отсюда следует, что $\frac{|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\alpha}$ — ограниченная величина, и что поэтому функция φ принадлежит пространству $H(\alpha, \Gamma)$. Очевидно, далее, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0$, а это доказывает полноту (банаховость) пространства $H(\alpha, \Gamma)$. Вторая часть теоремы о принадлежности сингулярного оператора $S(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0}$ к $H(\alpha, \Gamma)$ следует из теоремы Племеля — Привалова. ▷

1.5. Сингулярные интегральные уравнения

Пусть L — линия, состоящая из конечного числа гладких замкнутых контуров $L_1, L_2, \dots, L_p$ без общих точек.

Сингулярным интегральным уравнением называется уравнение вида

$$\begin{aligned} \mathbb{K}\varphi \equiv & A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0), \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

где $t_0 \in L$; $A(t_0)$, $B(t_0)$, $K(t_0, t)$, $f(t_0)$ — заданные на L функции класса H ; $\varphi(t)$ — искомая функция.

Предполагается, что $A(t_0) \pm B(t_0) \neq 0$ на L (условия нормальности уравнения (1.5.1)).

Уравнение

$$\mathbb{K}^0 \varphi \equiv A(t_0) \varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt = f(t_0) \quad (1.5.2)$$

называется *характеристическим уравнением*, соответствующим уравнению (1.5.1), а функции $A(t_0)$, $B(t_0)$ — *коэффициентами характеристического уравнения*.

Отметим, что оператор

$$\mathbb{K} \varphi \equiv A(t_0) \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{K(t_0, t) \varphi(t)}{t - t_0} dt, \quad (1.5.3)$$

$$\begin{aligned} B(t) &= K(t, t), \quad S(t) = A(t) + B(t), \\ D(t) &= A(t) - B(t) \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

называется *сингулярным оператором нормального типа* если $S(t)$ и $D(t)$ нигде на L в нуль не обращаются.

Оператор

$$\mathbb{K}' \varphi \equiv A(t_0) \varphi(t_0) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{K(t, t_0) \varphi(t)}{t - t_0} dt$$

называется *сопряженным (союзным) оператором оператора $\mathbb{K}$* , а соответствующее уравнение — *сопряженным (союзным) сингулярным уравнением уравнения (1.5.1)*.

В частности, оператором, сопряженным (союзным) с характеристическим оператором $\mathbb{K}^0$ является оператор $\mathbb{K}^{0'}$, определяемый формулой

$$\mathbb{K}^{0'} \psi \equiv A(t_0) \psi(t_0) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{B(t) \psi(t)}{t - t_0} dt.$$

Теорема 1.5.1. *Сингулярный оператор $\mathbb{K}$ переводит всякую функцию $\varphi(t)$ класса H в новую функцию $\psi(t)$ также класса H (см. [46]).*

Введем (см. [46]) понятие, играющее важную роль в теории сингулярных интегральных уравнений. А именно, *индексом оператора $\mathbb{K}$*

или уравнения $\mathbb{K}\varphi = f$ называется целое число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i} \left(\ln \frac{A-B}{A+B} \right)_L = \frac{1}{2\pi i} \left(\ln \frac{D}{S} \right)_L, \quad (1.5.5)$$

где $(\cdot)_L$ обозначает приращение функции, заключенной в скобки, при обходе L в положительном направлении.

Из определения следует, что индекс зависит лишь от характеристической части оператора $\mathbb{K}$.

Индекс можно представить в виде интеграла

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i} \int_L d \ln \frac{A-B}{A+B} = \frac{1}{2\pi} \int_L d \arg \frac{A-B}{A+B}. \quad (1.5.6)$$

Пусть $t = x(s) + iy(s)$ ($0 \leq s \leq l$) — уравнение контура L . Подставляя выражение комплексной координаты t в функцию $\frac{A-B}{A+B}$, получим

$$\frac{A(t) - B(t)}{A(t) + B(t)} = \xi(s) + i\eta(s).$$

Здесь $\xi = \xi(s)$, $\eta = \eta(s)$ — параметрическое уравнение некоторой кривой Γ . В силу непрерывности функции $\frac{A-B}{A+B}$ и замкнутости контура L кривая Γ будет замкнутой.

Число витков кривой Γ вокруг начала координат, т. е. число полных оборотов радиус-вектора, когда переменная s изменяется от 0 до l , и будет очевидно, индексом оператора $\mathbb{K}$.

В общем случае вычисление индекса может быть произведено по формуле (1.5.5), полагая в ней на основании формулы (1.5.6)

$$d \arg \frac{A-B}{A+B} = d \operatorname{arctg} \frac{\eta(s)}{\xi(s)}$$

и предполагая ξ и η дифференцируемыми, получим

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\xi(s)\eta'(s) - \eta(s)\xi'(s)}{\xi^2(s) + \eta^2(s)} ds. \quad (1.5.7)$$

1.6. Теоремы Нётера

В начале рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Оно имеет вид

$$\mathbb{K}\varphi \equiv \varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t, s) \varphi(s) ds = f(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (1.6.1)$$

где $f(t)$ и $k(t, s)$ — непрерывные функции на отрезке $[a, b]$.

Для уравнения (1.6.1) справедливы хорошо известные теоремы Фредгольма.

Теорема 1.6.1. Если λ не является характеристическим числом, то интегральное уравнение (1.6.1) имеет единственное непрерывное решение, которое дается формулой

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t, s, \lambda) f(s) ds. \quad (1.6.2)$$

$R(x, s, \lambda)$ называется резольвентой интегрального уравнения.

Теорема 1.6.2. Если λ есть характеристическое число ядра, то однородное интегральное уравнение

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t, s) \varphi(s) ds = 0 \quad (1.6.3)$$

и сопряженное с ним интегральное уравнение

$$\psi(t) - \lambda \int_a^b k(s, t) \psi(s) ds = 0 \quad (1.6.4)$$

имеют одно и то же число линейных независимых собственных функций.

Теорема 1.6.3. Если λ является характеристическим числом однородного уравнения (1.6.3), то неоднородное уравнение (1.6.1) разрешимо тогда и только тогда, когда свободный член $f(t)$ будет ортогонален ко всем решениям сопряженного интегрального уравнения (1.6.4), т. е. верно равенство

$$\int_a^b f(t) \psi_j(t) dt = 0,$$

где $\psi_j(t)$ ($j = 1, \dots, p$) — решения уравнения (1.6.4).

Теперь рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \mathbb{K}\varphi \equiv & A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0), \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

где L — замкнутый гладкий контур, $t_0 \in L$; $A(t_0), B(t_0), k(t_0, t), f(t_0) \in H$, $A(t) \pm B(t) \neq 0$ нигде на L .

Для уравнения (1.6.5) справедливы теоремы Нётера, в какой-то степени аналогичные теоремам Фредгольма.

Теорема 1.6.4. *Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения*

$$\mathbb{K}\varphi = f \quad (1.6.6)$$

закljučаются в том, что

$$\int_L f(t) \psi_j(t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, k', \quad (1.6.7)$$

где $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{k'}(t)$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения $\mathbb{K}'\psi = 0$.

Теорема 1.6.5. *Разность числа k линейно независимых решений однородного уравнения $\mathbb{K}\varphi = 0$ и числа k' линейно независимых решений союзного однородного уравнения $\mathbb{K}'\psi = 0$ зависит лишь от характеристической части оператора $\mathbb{K}$.*

Теорема 1.6.6. *Упомянутая в предыдущей теореме разность равна индексу оператора $\mathbb{K}$, т. е.*

$$k - k' = \varkappa.$$

Отметим одно следствие теоремы 1.6.6.

Следствие. *Если индекс $\varkappa > 0$, то однородное уравнение $\mathbb{K}\varphi = 0$ имеет по крайней мере $\varkappa$ линейно независимых решений, ибо число решений этого уравнения $k = \varkappa + k'$ и $k' \geq 0$.*

Очевидно, что если $\varkappa = 0$, то $k = k'$. В этом случае неоднородное уравнение $\mathbb{K}\varphi = f$ разрешимо при всякой правой части класса H , если однородное уравнение $\mathbb{K}\varphi = 0$ не имеет решений, отличных от

нуля (ибо тогда и союзное однородное уравнение $\mathbb{K}'\psi = 0$ обладает этим свойством).

Такие сингулярные уравнения можно назвать *квазифредгольмовыми*, а соответствующие операторы (т. е. операторы с индексом нуль) — *квазифредгольмовыми операторами*.

ГЛАВА 2

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

2.1. Обзор некоторых результатов по аппроксимации сингулярных интегралов

В дальнейшем всюду сингулярный интеграл

$$S(\varphi; t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt, \quad t_0 \in L, \quad (2.1.1)$$

где L — данный контур, а $\varphi(t)$ — заданная на L функция класса H , будем рассматривать в смысле главного значения (см. [46]).

Пусть L — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Следуя [35], отметим некоторые результаты по приближенному вычислению сингулярных интегралов. Выберем на L множества точек $E = \{t_k, k = 1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{t_{0k}, k = 1, \dots, n\}$ так, что точки t_k ($k = 1, \dots, n$) разбивают окружность на n равных частей, а точка t_{0k} является серединой дуги $t_k t_{k+1}$, где полагаем $t_{n+1} = t_1$. Множества таких точек E и E_0 называются *каноническим разбиением окружности L* .

Обозначим

$$S_n(\varphi; t_{0j}) = \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) \Delta t_k}{t_k - t_{0j}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.1.2)$$

где $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, \dots, n$.

Теорема 2.1.1. Пусть $\varphi(t) \in H(\alpha)$ на L . Тогда выполняются неравенства

$$|S(\varphi; t_{0j}) - S_n(\varphi; t_{0j})| \leq \Theta(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.1.3)$$

$$\Theta(t_{0j}) = O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right) + |\varphi(t_{0j})| O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Пусть теперь $L = [a, b]$ — отрезок действительной оси, $E = \{t_k\}$, $E_0 = \{t_{0k}\}$, $t_k = a + kh$, $t_{0k} = t_k + h/2$ ($k = 0, 1, \dots, n+1$), $h = (b-a)/(n+1)$ (см. [35]). Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.1.2. Пусть функция $\varphi(t) \in H(\alpha)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда для любой точки $t_{0j} \in E_0$ справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{0j})}{t - t_{0j}} dt - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{0j})}{t_k - t_{0j}} h \right| \leq O(h^\alpha |\ln h|). \quad (2.1.4)$$

Теорема 2.1.3. Пусть $\varphi(t) \in H(\alpha)$ на отрезке $[a, b]$, и множества E и E_0 образуют каноническое разбиение этого отрезка. Тогда для любой точки $t_{0j} \in E_0$ имеем

$$|S(\varphi; t_{0j}) - S_n(\varphi; t_{0j})| \leq O\left(\frac{h^\alpha |\ln h| + |\varphi(t_{0j})| h}{(t_{0j} - a)(b - t_{0j})}\right). \quad (2.1.5)$$

Теперь пусть L — произвольный замкнутый гладкий контур. Обозначим через $H_r(\alpha)$ ($r \geq 1$) класс функций $\varphi(t) \in H_r(\alpha)$, имеющих непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка, а производная r -го порядка $\varphi^{(r)}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α , $0 < \alpha \leq 1$.

Для функций $\varphi(t) \in H_r(\alpha)$ строятся оператор-функции (см. [62]) вида

$$\begin{aligned} \Phi_n(\varphi, t, t_0) &= \varphi(t_0) + (t - t_0) \times \\ &\times \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\sigma(t)}{(t - t_{\sigma k}) \omega'_\sigma(t_{\sigma k})} \cdot \frac{L_\nu(\varphi; t_0) - \varphi(t_{\sigma k})}{t_0 - t_{\sigma k}}, \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

где

$$\omega_\sigma(t) = \prod_{k=0}^{m-1} (t - t_{\sigma k}), \quad \omega'_\sigma(t_{\sigma k}) = \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^{m-1} (t_{\sigma k} - t_{\sigma j}),$$

$L_\nu(\varphi; t_0)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа, τ_σ ($\sigma = 0, 1, \dots, n-1$) — точки контура L , равномерно отдаленные друг от друга, $t_{\sigma k} = t(s_\sigma + x_k h)$, $x_k \in [0; 1]$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$), $h = (s_b - s_a)/n$. Функция $\Phi_n(\varphi; t, t_0) \equiv \varphi(t_0)$, если φ является многочленом степени не больше $m-1$.

Тогда для интеграла (2.1.2) получается квадратурная формула

$$S_n(\varphi; t_0) \approx L_\nu(\varphi; t_0) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} p_{\sigma k} \frac{L_\nu(\varphi; t_0) - \varphi(t_{\sigma k})}{t_0 - t_{\sigma k}}.$$

В частности, в точках $t_{\nu j}$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$) при $m = 4$ справедлива формула

$$\begin{aligned} S_n(\varphi; t_{\nu j}) = & \left(1 + \sum_{\substack{\sigma=0, \\ \sigma \neq \nu}}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \frac{p_{\sigma k}^*}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^2 \frac{p_{\nu k}^*}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} + \right. \\ & \left. + p_{\nu j}^* \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^3 \frac{1}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} \right) \varphi(t_{\nu j}) - \sum_{\substack{\sigma=0, \\ \sigma \neq \nu}}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \frac{p_{\sigma k}^*}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} \varphi(t_{\sigma k}) - \\ & - \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^2 \frac{p_{\nu k}^*}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} \varphi(t_{\nu k}) + p_{\nu j}^* \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^3 d_{\nu k}(t_{\nu j}) \varphi(t_{\nu k}), \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

где

$$\begin{aligned} p_{\sigma k}^* = & \begin{cases} p_{\sigma k}, & \sigma = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 1, 2, \\ p_{\sigma-1,3} + p_{\sigma 0}, & \sigma = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0, \end{cases} \\ p_{\sigma k} = & \frac{1}{\pi i \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 (t_{\sigma k} - t_{\sigma j})} \left(\frac{\tau_{\sigma+1}^4 - \tau_{\sigma}^4}{4} - \frac{\tau_{\sigma+1}^3 - \tau_{\sigma}^3}{3} \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} + \right. \\ & \left. + \frac{\tau_{\sigma+1}^2 - \tau_{\sigma}^2}{2} \sum_{\substack{k \neq j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 t_{\sigma j} t_{\sigma j_0} - (\tau_{\sigma+1} - \tau_{\sigma}) \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} \right), \\ d_{\nu k}(t_{\nu j}) = & \prod_{\substack{j_0=0, \\ j_0 \neq k, j}}^3 (t_{\nu j} - t_{\nu j_0}) / \prod_{\substack{j_0=0, \\ j_0 \neq k}}^3 (t_{\nu k} - t_{\nu j_0}). \end{aligned}$$

Теорема 2.1.4. Пусть $\varphi(t) \in H_r(\alpha)$, L — замкнутый гладкий контур. Тогда для погрешности справедливо неравенство

$$\max_{t_0 \in L} |S(\varphi; t_0) - S_n(\varphi; t_0)| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right). \quad (2.1.8)$$

Приведем вкратце обзор результатов ряда других работ, относящихся к вопросу приближенного вычисления различных сингулярных интегралов.

В [19], считая, что ab — простой гладкий разомкнутый контур с концами a, b , даны следующие разложения сингулярных интегралов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{dt}{(t-c)^\gamma(t-t_0)} &= \pm \frac{c \operatorname{tg} \gamma \pi}{i(t_0-c)^\gamma} \mp \\ &\mp \frac{1}{\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{k+\gamma}}{k+\gamma} (b-a)^{-k-\gamma} (t_0-c)^k, \end{aligned}$$

где c — любой из концов a, b . Знаки $\pm$ соответствуют $c = a, b$. Эта формула представляет уточнение известного соотношения [46, § 22].

В [63] строятся квадратурные формулы для интегралов

$$\begin{aligned} S(f; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}} dt, \quad -1 \leq x \leq 1, \\ S^*(f; x) &= \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

вида

$$S_n(f; x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{1-x_k^2} U_{n-1}(x) - 1}{x - x_k} f(x_k),$$

$$\begin{aligned} S_n^*(f; x) &= \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\frac{(-1)^{k-1}}{n} \sqrt{1-x_k^2} \left(H_{n-1}(x) + T_n(x) \ln \frac{1-x}{1+x} \right) - A_k}{x - x_k} f(x_k), \end{aligned}$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $H_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n A_k \frac{T_n(x)}{x-x_k}$, $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$, $k = 1, \dots, n$;

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{n} \left(1 - 2 \sum_{r=1}^{m/2} \frac{1}{4r^2 - 1} \cos \frac{r(2k-1)}{n} \pi \right), \\ m &= \begin{cases} n-1, & n - \text{нечетное}, \\ n-2, & n - \text{четное}. \end{cases} \end{aligned}$$

Эти формулы являются точными, когда f представляет собой произвольный многочлен степени не выше n .

Теорема 2.1.5. *Если $f \in H_r(\alpha)$, то для остаточного члена справедливо*

$$\max_{x \in [-\xi, \xi]} |R_n(f; x)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \quad 0 < \xi < 1.$$

Отметим еще, что в [75] строятся квадратурные формулы повышенной точности по модифицированной схеме метода дискретных вихрей. Эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt \approx \varphi(t_0) + \\ & + \sum_{\sigma=0}^{n-1} (p_{\nu+2\sigma-1} + p_{\nu+2\sigma+1}) \frac{\varphi(\tau_{\nu+2\sigma+1}) - \varphi(t_0)}{\tau_{\nu+2\sigma+1} - t_0}, \end{aligned}$$

$t_0 \in \tau_{\nu-1}\tau_{\nu+1}$ ($t_0 \neq \tau_{\nu\pm 1}$), $p_{\nu+2\sigma-1} = \frac{\tau_{\nu+2\sigma+1} - \tau_{\nu+2\sigma-1}}{2\pi i}$, $\{\tau_p\}_{p=1}^n$ — система точек, разбивающая L на n равных (по длине) частей. При выборе значений $t_0 = \tau_\nu$ мы получаем схему типа дискретных вихрей с контрольными узлами $\{\tau_\nu\}$.

Для остаточного члена в определенных предположениях относительно функции $\varphi(t)$ справедлива оценка

$$|R_n(\varphi; t_0)| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Представляют интерес также формулы типа дискретных вихрей, имеющие интерполяционную степень точности.

Пусть $\gamma(t) \in H_r(\alpha)$ на окружности L радиуса 1 с центром в начале координат. В [35] для $\gamma(t)$ строится интерполяционный многочлен

$$\gamma_n(t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \gamma(t_k) \frac{t^{2n+1} - t_k^{2n+1}}{(t - t_k)t^n t_k^n},$$

где точки t_k разбивают окружность L на $2n+1$ равных частей. Тогда для интегралов

$$I(t_0) = \int_L \frac{\gamma(t)}{t - t_0} dt, \quad S(t_0) = \int_L \frac{\gamma_n(t)}{t - t_0} dt$$

справедлива оценка

$$|I(t_{0m}) - S(t_{0m})| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \quad m = 0, 1, \dots, 2n,$$

где $t_{0m} = \exp i\left(\theta_m + \frac{\pi}{2n+1}\right)$, $\theta_m = \frac{2\pi}{2n+1}m$, $m = 0, 1, \dots, 2n$, т. е. t_{0k} делит пополам дугу $t_k t_{k+1}$.

Отметим еще результаты работы [84].

1) Пусть L — единичная окружность, $\varphi(t) \in H(\alpha)$ — комплекснозначная функция на L и

$$S(\varphi; t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \approx \sum_{j=0}^{2n} A_j(t) \varphi(t_j),$$

где

$$A_j(t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^n t_j^{-k} t^k - \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^n t_j^k t^{-k},$$

$$t_j = e^{is_j}, \quad s_j = \frac{2\pi}{2n+1}j, \quad j = 0, 1, \dots, 2n.$$

Теорема 2.1.6. Если $\varphi \in H_r(\alpha)$ ($r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$), то для остаточного члена имеет место оценка

$$|S(\varphi; t) - S(\varphi_n; t)| \leq C \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}.$$

2) Пусть $L = ab$ — гладкая разомкнутая дуга, заданная уравнением $t = t(s)$, $s_a \leq s \leq s_b$, s — дуговая абсцисса, $\varphi(t) \in H(\alpha)$. Тогда справедлива

Теорема 2.1.7. Если $\varphi(t) \in H(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, $t \in L$, $L = ab$ — гладкая разомкнутая дуга, то последовательность $S_n(t) = S(\varphi_n^{(1)}, t)$, где $\varphi_n^{(1)}(t)$ — ломанная и

$$\varphi_n^{(1)}(t) = \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} \varphi(t_k) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \varphi(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

равномерно сходится к $S(t) \equiv S(\varphi, t)$ для любого $t \in L$ при $n \rightarrow \infty$, и справедлива оценка

$$|S(t) - S_n(t)| \leq C \frac{\ln n}{n^\alpha}, \quad t \in L,$$

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\pi i} \int_{t_k t_{k+1}} \frac{\varphi_n^{(1)}(\tau)}{\tau - t} dt.$$

2.2. Метод дискретных особенностей

Методу дискретных особенностей для приближенного вычисления сингулярных интегралов положила начало работа С. М. Белоцерковского [1] по аэродинамике. Метод в настоящее время быстро развивается (см. [35], [37], [74]).

Суть метода состоит в следующем. Рассматривается сингулярный интеграл

$$S(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt, \quad t_0 \in L, \quad (2.2.1)$$

где L — замкнутый гладкий контур, $\varphi(t) \in H(\alpha)$. На L выбираются два множества точек $E = \{t_k, k = 1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{t_{0k}, k = 1, \dots, n\}$, где точки t_k ($k = 1, \dots, n$) разбивают контур L на n равных частей, а точка t_{0k} является серединой дуги $t_k t_{k+1}$, полагаем $t_{n+1} = t_1$. Множества точек E и E_0 называются *каноническим разбиением контура L* .

Обозначим

$$S_n(\varphi; t_{0j}) = \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k)}{t_k - t_{0j}} \Delta t_k, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.2.2)$$

где $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, \dots, n$.

Теорема 2.2.1. Пусть $\varphi(t) \in H(\alpha)$ на L . Тогда выполняется неравенство

$$|S(\varphi; t_{0j}) - S_n(\varphi; t_{0j})| \leq \theta(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.2.3)$$

$$\theta(t_{0j}) = O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right) + |\varphi(t_{0j})| O\left(\frac{1}{n}\right).$$

В этом случае множество E_0 называется *контрольным*, а E — *расчетным*.

◁ Для доказательства рассмотрим случай, когда L является окружностью единичного радиуса с центром в начале координат. Тогда

$$t_k = e^{i\theta_k}, \quad t_{0k} = e^{i\theta_{0k}}, \quad \theta_k = \frac{2\pi}{n}k, \quad \theta_{0k} = \frac{2\pi}{n}k + \frac{\pi}{n},$$

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Для удобства полагаем $t_{0j} = 1$. В этом случае

$$\begin{aligned} |S(\varphi; t_{0j}) - S_n(\varphi; t_{0j})| &\leq I_1 + I_2, \\ I_1 &= \left| \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{t - 1} dt - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) - \varphi(1)}{t_k - 1} \Delta t_k \right|, \\ I_2 &= |\varphi(1)| \left| \int_L \frac{dt}{t - 1} - \sum_{k=1}^n \frac{\Delta t_k}{t_k - 1} \right|. \end{aligned}$$

Интеграл I_2 оценивается непосредственно, так как справедлива оценка (см. [35])

$$\left| \int_L \frac{dt}{t - t_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{\Delta t_k}{t_k - t_{0j}} \right| \leq O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Выражение для I_1 преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq I'_1 + I''_1 + I'''_1, \\ I'_1 &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{t - 1} - \frac{\varphi(t_k) - \varphi(1)}{t_k - 1} \right) dt \right|, \\ I''_1 &= \left| \int_{t_n}^{t_1} \frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{t - 1} dt \right|, \quad I'''_1 = \left| \frac{\varphi(t_n) - \varphi(1)}{t_n - 1} \right| \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Так как функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$ на L , то

$$I''_1 \leq \int_{t_n}^{t_1} \frac{|\varphi(t) - \varphi(1)|}{|t - 1|} |dt| \leq A \int_{t_n}^{t_1} |t - 1|^{-1+\alpha} |dt|.$$

Для единичной окружности $|dt| = |e^{i\theta} i d\theta| = d\theta$ и

$$|t - 1| = |e^{i\theta} - 1| = |(\cos \theta - 1) + i \sin \theta| = 2|\sin \theta/2|.$$

Поэтому

$$I''_1 \leq A \cdot 2^\alpha \int_0^{\pi/n} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-1+\alpha} d\theta \leq c_1 \int_0^{\pi/n} \theta^{-1+\alpha} d\theta = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Для I_1''' получим

$$I_1''' \leq A|t_n - 1|^{-1+\alpha} \frac{2\pi}{n} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Для оценки I_1' потребуется преобразование

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{0j})}{t - t_{0j}} - \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{0j})}{t_k - t_{0j}} = \\ & = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_k)}{t - t_{0j}} + \frac{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{0j})](t_k - t)}{(t - t_{0j})(t_k - t_{0j})}. \end{aligned}$$

В силу этой формулы

$$\begin{aligned} I_1' & \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|\varphi(t) - \varphi(t_k)|}{|t - 1|} |dt| + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|\varphi(t_k) - \varphi(t_{0j})|}{|t_k - 1|} \cdot \frac{|t_k - t|}{|t - 1|} |dt| = S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Так как $\varphi(t) \in H(\alpha)$ и $t = e^{i\theta}$, то

$$S_1 \leq A \left(\frac{2\pi}{n}\right)^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|dt|}{|t - 1|} \leq c_2 \frac{1}{n^\alpha} \int_{\pi/n}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\theta} = O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right).$$

Наконец, для S_2 получаем

$$S_2 \leq A \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|t_k - 1|^{1-\alpha}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|dt|}{|t - 1|} \leq c_3 \frac{\pi}{n} \int_{\pi/n}^{\pi} \frac{d\theta}{\theta^{2-\alpha}} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Подставляя оценки для S_1 и S_2 в неравенство для I_1' , а оценки для I_1' , I_1'' и I_1''' в неравенство для I_1 , видим, что $I_1 \leq O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right)$.

Таким образом, теорема доказана. $\triangleright$

Теперь рассмотрим сингулярный интеграл на отрезке. Будем считать, что $L = [a, b]$ — отрезок действительной оси, $\varphi(t) \in H(\alpha)$.

Справедливы следующие леммы.

Лемма 2.2.2. Для любой точки $t_{0j} \in E_0$ выполняется неравенство

$$\left| \int_a^b \frac{dt}{t - t_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{h}{t_k - t_{0j}} \right| \leq \frac{hB}{(t_{0j} - a)(b - t_{0j})}, \quad (2.2.4)$$

где B — некоторая константа, $h = \frac{b-a}{n+1}$, $a = t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = b$ разбивают отрезок $[a, b]$ на $n+1$ равных частей длины h ; t_{0j} ($j = 0, \dots, n$) являются серединами отрезков $[t_j, t_{j+1}]$.

Лемма 2.2.3. Пусть теперь функция $\varphi(t) \in H(\alpha)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда для любой точки $t_{0j} \in E_0$ справедливо неравенство

$$I_1 = \left| \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{0j})}{t - t_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{0j})}{t_k - t_{0j}} h \right| \leq O(h^\alpha |\ln h|). \quad (2.2.5)$$

Из этих лемм следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.2.4. Пусть функция $\varphi(t) \in H(\alpha)$ на отрезке $[a, b]$ и множества E и E_0 образуют каноническое разбиение этого отрезка. Тогда для любой точки $t_0 \in E_0$ имеем

$$|S(\varphi; t_{0j}) - S_n(\varphi; t_{0j})| \leq O\left(\frac{h^\alpha |\ln h| + |\varphi(t_{0j})| h}{(t_{0j} - a)(b - t_{0j})}\right),$$

где

$$S_n(\varphi; t_{0j}) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(t_i)}{t_i - t_{0j}} h.$$

Доказательства приведенных лемм и теоремы приводятся в [35].

2.3. Метод интерполяции плотностей

Пусть функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $H_r(\alpha)$ на окружности L единичного радиуса с центром в начале координат. Рассмотрим для нее следующий многочлен:

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \varphi(t_k) \frac{t^{2n+1} - t_k^{2n+1}}{(t - t_k) t^n t_k^n}, \quad (2.3.1)$$

где точки t_k разбивают окружность L на $2n+1$ равных частей. С помощью деления многочлена на многочлен несложно показать, что $\varphi_n(t_k) = \varphi(t_k)$ ($k = 0, 1, \dots, 2n$), так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{t^{2n+1} - t_k^{2n+1}}{(t - t_k)t^n t_k^n} &= \\ &= \begin{cases} 1, & t = t_k, k = 0, 1, \dots, 2n, \\ 0, & t = t_m, m \neq k, m = 0, 1, \dots, 2n. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Рассмотрим теперь сингулярный интеграл

$$S(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt,$$

где $\varphi(t) \in H_r(\alpha)$ на окружности L . Обозначим через $S_n(\varphi; t_0)$ функцию

$$\begin{aligned} S_n(\varphi; t_0) &= \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_n(t)}{t - t_0} dt = \frac{1}{2n+1} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{2n} \varphi(t_k) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{t^{2n+1} - t_k^{2n+1}}{(t - t_k)t^n t_k^n} \cdot \frac{dt}{t - t_0}. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Используя известную формулу Коши

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{t^n}{t - t_0} dt = \begin{cases} t_0^n, & n \geq 0, \\ -t_0^n, & n < 0, \end{cases} \quad (t = e^{i\theta}, t_0 = e^{i\theta_0})$$

и очевидное тождество

$$\frac{1}{(t - t_k)(t - t_0)} = \frac{1}{t_0 - t_k} \left(\frac{1}{t - t_0} - \frac{1}{t - t_k} \right),$$

получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{t^{2n+1} - t_k^{2n+1}}{(t - t_k)t^n t_k^n} \cdot \frac{dt}{t - t_0} = \frac{1}{t_k - t_0} \times \\ &\times \left(\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{t^{2n+1} - t_k^{2n+1}}{t^n t_k^n} \cdot \frac{dt}{t - t_k} - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{t^{2n+1} - t_k^{2n+1}}{t^n t_k^n} \cdot \frac{dt}{t - t_0} \right) = \\ &= \frac{1}{t_k - t_0} \left(\frac{t_k^{n+1} + t_k^{2n+1} t_k^{-n}}{t_k^n} - \frac{t_0^{2n+1} + t_k^{2n+1}}{t_0^n t_k^n} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, в качестве квадратурной суммы для сингулярного интеграла $S(\varphi; t_0)$ берем сумму

$$S_n(\varphi; t_0) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\varphi(t_k)}{t_k - t_0} \cdot \frac{1}{2n+1} \left(2t_k - \frac{t_0^{2n+1} + t_k^{2n+1}}{t_0^n t_k^n} \right). \quad (2.3.4)$$

Для погрешности справедливо неравенство

$$|S(\varphi; t_0) - S_n(\varphi; t_0)| \leq O\left(\frac{\ln n + n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

В точках $t_{0m} = \exp\left(\theta_m + \frac{\pi}{2n+1}\right)$ ($m = 0, 1, \dots, 2n$) справедливо

$$|S(\varphi; t_{0m}) - S_n(\varphi; t_{0m})| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Доказательство этого неравенства приводится в [35].

Рассмотрим теперь сингулярный интеграл на отрезке действительной оси с весом

$$S^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\varphi; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{\varphi(t)}{t-x} dt. \quad (2.3.5)$$

Приближим функцию $\varphi(t)$ в сингулярном интеграле (2.3.5) ее интерполяционным многочленом по узлам Чебышева:

$$L_{n-1}(\varphi; t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} T_n(t)}{t - x_j} \sqrt{1 - x_j^2} \varphi(x_j), \quad (2.3.6)$$

$T_n(t) = \cos(n \arccos x)$ — многочлен Чебышева, $x_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi$, $j = 1, \dots, n$. Воспользовавшись при этом свойством ортогональности на отрезке $[-1; 1]$ многочленов $T_n(t)$ по весу $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, несложными вычислениями приходим к следующим приближенным формулам:

$$\begin{aligned} S_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\varphi, x) = \\ = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{x - x_j} \left(\sqrt{1 - x_j^2} T_n(x) + \lambda_j(x) \right) \varphi(x_j), \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

где

$$\lambda_j(x) = \sqrt{1 - x_j^2} \sum_{\sigma=1}^n B_\sigma \frac{T_n(x)}{x - x_\sigma} + (-1)^j B_j n,$$

$$B_\sigma = \frac{2}{n} \cos^2 \frac{2\sigma - 1}{4n} \pi, \quad \sigma = 1, \dots, n,$$

причем $\lambda_j(x_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Справедливы следующие леммы.

Лемма 2.3.1. Если $\psi \in H(\gamma)$, $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1]$, то

$$\|S^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})} \psi\|_{H(\gamma-1/2)} \leq M \|\psi\|_{H(\gamma)}, \quad M = \text{const}.$$

Лемма 2.3.2. При условии $\psi \in H_r(\alpha)$ ($r > 1$, $0 < \alpha \leq 1$) и $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1]$ справедливо неравенство

$$\|S^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\psi, x) - S_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\psi, x)\|_{H(\gamma-1/2)} \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\gamma-1}}\right).$$

Лемма 2.3.3. При любом $\beta \in (0, 1]$ и $n \geq 1$ справедливо

$$\|L_{n-1}(\psi, x)\|_{H(\beta)} \leq 2n^{1+\beta} \left(8 + \frac{4}{\pi} \ln n\right) \max_{1 \leq j \leq n} |\psi(x_j)|,$$

где $\|\cdot\|_{H(\gamma)}$ — норма Гёльдера следующего вида:

$$\|\psi\|_{H(\gamma)} = \max_{t \in [-1, 1]} |\psi(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in [-1, 1]} \frac{|\psi(t_1) - \psi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\gamma}.$$

Доказательства лемм 2.3.1–2.3.3 приводятся в [70].

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулы вида (2.3.7) могут быть построены и для следующих сингулярных интегралов:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{\varphi(t)}{t-x}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}(t-x)}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi(t)}{t-x}.$$

2.4. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с наперед заданными узлами

В прикладных задачах часто возникает необходимость построения таких квадратурных формул, часть узлов которых задается заранее. Например, граничная задача для дифференциального уравнения второго порядка на отрезке $[a, b]$ с граничными условиями на концах a и b естественно требует применения квадратурных формул, содержащих два фиксированных узла a и b (см. [24]).

Квадратурные формулы указанного вида впервые рассмотрел выдающийся русский ученый XIX столетия А. А. Марков. В честь него некоторые авторы такие формулы называют *формулами типа Маркова*.

Широкое развитие теории сингулярных интегралов и сингулярных уравнений связано с тем, что решение многих важных задач может быть выражено в интегралах с ядром Коши. Исходя хотя бы из этих соображений, представляет значительный интерес разработка эффективных приближенных методов вычисления таких интегралов.

Квадратурные формулы с наперед заданными узлами для регулярных интегралов имеют вид

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \sum_{l=1}^m B_l f(a_l), \quad (2.4.1)$$

в которых m узлов $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ фиксированы.

Формула (2.4.1) содержит $2n + m$ параметров A_k, x_k ($k = 1, \dots, n$) и B_l ($l = 1, \dots, m$), которыми можно распорядится исходя из тех или иных соображений.

При построении таких формул в сингулярном случае, как и для регулярных интегралов, существование и единственность гарантируется при весовых функциях $p(x) \geq 0$. В формулах с наперед заданными узлами в роли $p(x)$ выступает функция $\rho(x) = p(x)(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)$. Таким образом, требуется чтобы $\rho(x) \geq 0$. Это возможно для следующих случаев:

- 1) $m = 1$ и берется один фиксированный узел $a_1 = a$.
- 2) $m = 1$ и берется один фиксированный узел $a_1 = b$.
- 3) $m = 2$ и берутся два фиксированных узла $a_1 = a, a_2 = b$.

Теперь рассмотрим сингулярный интеграл с ядром Коши вида

$$S(\varphi; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \frac{\varphi(t)}{t-x} dt, \quad (2.4.2)$$

$$-1 < x < 1, \quad \alpha, \beta > -1,$$

где $\varphi(t) \in H_r(\lambda)$, $0 < \lambda \leq 1$.

Начнем с первого случая и будем считать, что отрезок интегрирования есть $[-1, 1]$.

Возьмем узлы $x_1, x_2, \dots, x_n, -1$, где x_k ($k = 1, \dots, n$) — корни многочлена Якоби степени n , и построим для функции $\varphi(t)$ интерполяционный многочлен Лагранжа степени n :

$$L_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi; x) = \frac{\omega(x)}{\omega(-1)} \varphi(-1) + \sum_{k=1}^n \frac{(x+1)\omega(x)}{(x-x_k)(x_k+1)\omega'(x_k)} \varphi(x_k), \quad (2.4.3)$$

где

$$\omega(x) = \frac{2^n n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)} P_n^{(\alpha, \beta)}(x);$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n})$$

— многочлен Якоби, $\Gamma(x)$ — функция Эйлера.

Подставляя вместо $\varphi(t)$ построенный многочлен Лагранжа в (2.4.2), после некоторых упрощений получим следующую квадратурную формулу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \frac{\varphi(t)}{t-x} dt &\approx S_n(\varphi; x) = \\ &= A(x) \varphi(-1) + \sum_{k=1}^n A_k(x) \varphi(x_k), \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

где

$$A(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \frac{\omega(t)}{\omega(-1)} \cdot \frac{dt}{t-x}, \quad (2.4.5)$$

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \frac{(t+1)\omega(t)}{(t-x_k)(x_k+1)\omega'(x_k)} \cdot \frac{dt}{t-x},$$

$$k = 1, \dots, n.$$

Вводя обозначение $R_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi; x) = \varphi(x) - L_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi; x)$, для погрешности получим выражение

$$S(\varphi; x) - S_n(\varphi; x) = \gamma^{(\alpha, \beta)}(x) R_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi; x) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \frac{R_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t) - R_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi; x)}{t-x} dt,$$

где

$$\gamma^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \frac{dt}{t-x}, \quad -1 < x < 1.$$

Для погрешности при $-1 < \alpha, \beta < 0$ справедлива оценка

$$|S(\varphi; x) - S_n(\varphi; x)| \leq$$

$$\leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |\gamma^{(\alpha, \beta)}(x)| O\left(\frac{1}{n^{r+\lambda-p}}\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\lambda-p}}\right), \quad (2.4.6)$$

где $p > 0$ — некоторое число.

Для второго случая (т. е. $m = 1$ и фиксирован узел $a_1 = 1$) аналогично строится квадратурная формула

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx S_n(\varphi; x) =$$

$$= B(x)\varphi(1) + \sum_{k=1}^n A_k(x) \varphi(x_k), \quad (2.4.7)$$

где

$$B(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \frac{\omega(t)}{\omega(1)} \cdot \frac{dt}{t-x},$$

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \frac{(t-1)\omega(t)}{(t-x_k)(x_k-1)\omega'(x_k)} \cdot \frac{dt}{t-x},$$

$$k = 1, \dots, n.$$

Для погрешности также справедлива оценка (2.4.6).

В третьем случае возьмем узлы $1, x_1, x_2, \dots, x_n, -1$ и построим для функции $\varphi(x)$ интерполяционный многочлен Лагранжа степени $n+1$:

$$L_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(\varphi; x) = \frac{(x-1)\omega(x)}{(-2)\omega(-1)} \varphi(-1) + \frac{(x+1)\omega(x)}{2\omega(1)} \varphi(1) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{(x-1)(x+1)\omega(x)}{(x-x_k)(x_k-1)(x_k+1)\omega'(x_k)} \varphi(x_k).$$

Подставляя вместо $\varphi(t)$ построенный многочлен Лагранжа в формулу (2.4.2), после некоторых упрощений получаем следующую квадратурную формулу:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx S_n(\varphi; x) =$$

$$= A(x)\varphi(-1) + B(x)\varphi(1) + \sum_{k=1}^n A_k(x) \varphi(x_k), \quad (2.4.8)$$

где

$$A(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \frac{(t-1)\omega(t)}{-2\omega(-1)} \cdot \frac{dt}{t-x},$$

$$B(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \frac{(t+1)\omega(t)}{2\omega(1)} \cdot \frac{dt}{t-x}, \quad (2.4.9)$$

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \frac{(t^2-1)\omega(t)}{(t-x_k)(x_k^2-1)\omega'(x_k)} \cdot \frac{dt}{t-x},$$

$$k = 1, \dots, n.$$

Для погрешности здесь также справедлива оценка (2.4.6), где вместо n нужно подставить $n+1$.

В механике и прикладных задачах важное место занимают случаи $\alpha = \pm 1/2$ и $\beta = \pm 1/2$, $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Рассмотрим более подробно каждый из указанных случаев.

1. Пусть $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Это означает, что весовая функция $p(x) = 1$. Тогда

$$S(\varphi; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt,$$

$$S_n(\varphi; x) = A(x) \varphi(-1) + B(x) \varphi(1) + \sum_{k=1}^n A_k(x) \varphi(x_k), \quad (2.4.10)$$

где

$$A(x) = \frac{1}{-2\omega(-1)} \left((x-1) \frac{\omega(x)}{\pi} \ln \frac{1-x}{1+x} + \sum_{k=1}^n A_k \frac{(x-1)\omega(x)}{x-x_k} \right),$$

$$B(x) = \frac{1}{2\omega(1)} \left((x+1) \frac{\omega(x)}{\pi} \ln \frac{1-x}{1+x} + \sum_{k=1}^n A_k \frac{(x+1)\omega(x)}{x-x_k} \right),$$

$$A_k(x) = \frac{1}{(x_k^2-1)\omega'(x_k)} \cdot \frac{1}{x-x_k} \left((x^2-1) \frac{\omega(x)}{\pi} \ln \frac{1-x}{1+x} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{(x^2-1)\omega(x)}{x-x_j} - A_k(x_k^2-1)\omega'(x_k) \right).$$

$$A_k = \frac{2}{\pi n} \left(1 - 2 \sum_{r=1}^{m/2} \frac{1}{4r^2-1} \cos \frac{r(2k-1)}{n} \pi \right),$$

$$m = \begin{cases} n-1, & n - \text{нечетное}, \\ n-2, & n - \text{четное}. \end{cases}$$

2. Пусть $\alpha = 1/2$, $\beta = -1/2$. Это означает, что весовая функция $p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Тогда для формулы (2.4.8)

$$A(x) = \frac{1}{-2\omega(-1)} \left(-(x-1)\omega(x) + \sum_{k=1}^n A_k \frac{(x-1)\omega(x)}{x-x_k} \right),$$

$$B(x) = \frac{1}{2\omega(1)} \left(-(x+1)\omega(x) + \sum_{k=1}^n A_k \frac{(x+1)\omega(x)}{x-x_k} \right),$$

$$A_k(x) = \frac{1}{(x_k^2 - 1)\omega'(x_k)} \cdot \frac{1}{x - x_k} \left(- (x^2 - 1)\omega(x) + \sum_{j=1}^n A_j \frac{(x^2 - 1)\omega(x)}{x - x_j} - A_k(x_k^2 - 1)\omega'(x_k) \right),$$

где

$$\begin{aligned} x_k &= \cos \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad A_k = \frac{4}{2n+1} \sin \frac{2k\pi}{2n+1}, \\ \omega(x) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} \arccos x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \arccos x\right)}, \\ \omega(-1) &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}, \quad \omega(1) = (2n+1) \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}, \\ \omega'(x_k) &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{(-1)^k(2n+1)}{\sqrt{2}(1-x_k)\sqrt{1+x_k}}. \end{aligned}$$

3. Пусть $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$. Это означает, что весовая функция $p(x) = \sqrt{1-x^2}$. Тогда для формулы (2.4.8)

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{-2\omega(-1)} \left(x(x-1)\omega(x) + \sum_{k=1}^n A_k \frac{(x-1)\omega(x)}{x-x_k} \right), \\ B(x) &= \frac{1}{2\omega(1)} \left(x(x+1)\omega(x) + \sum_{k=1}^n A_k \frac{(x+1)\omega(x)}{x-x_k} \right), \\ A_k(x) &= \frac{1}{(x_k^2 - 1)\omega'(x_k)} \cdot \frac{1}{x - x_k} \left(x(x^2 - 1)\omega(x) + \sum_{j=1}^n A_j \frac{(x^2 - 1)\omega(x)}{x - x_j} - A_k(x_k^2 - 1)\omega'(x_k) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} x_k &= \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad A_k = \frac{1}{n+1} \sin^2 \frac{k\pi}{n+1}, \\ \omega(x) &= \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \omega'(x_k) = \frac{(-1)^{k-1}(n+1)}{1-x_k^2}, \\ \omega(1) &= n+1, \quad \omega(-1) = (-1)^n(n+1). \end{aligned}$$

4. Пусть $\alpha = -1/2$, $\beta = -1/2$. Это означает, что весовая функция $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Тогда для формулы (2.4.8)

$$A(x) = \frac{(x-1)T_n(x)}{(-2)(-1)^n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{x-x_k} + \frac{B}{x-1} + \frac{A}{x+1} \right) - \frac{A}{x+1},$$

$$B(x) = \frac{(x+1)T_n(x)}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{x-x_k} + \frac{B}{x-1} + \frac{A}{x+1} \right) - \frac{B}{x-1},$$

$$A_k(x) = \frac{(x^2-1)T_n(x)}{n(-1)^k \sqrt{1-x_k^2}(x-x_k)} \times \\ \times \left(\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{x-x_j} + \frac{B}{x-1} + \frac{A}{x+1} \right) - \frac{A_k}{x-x_k},$$

где

$$A = \begin{cases} 0, & n > 1, \\ \frac{1}{4}, & n = 1, \end{cases} \quad B = \begin{cases} 0, & n > 1, \\ \frac{1}{4}, & n = 1, \end{cases} \quad A_k = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n > 1, \\ \frac{1}{2}, & n = 1, \end{cases}$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi.$$

2.5. Равномерные оценки погрешности для сингулярных интегралов с весами Якоби

Рассмотрим сингулярные интегралы следующего вида [72]:

$$S^{(p,q)}(\varphi; x) \equiv \int_{-1}^1 (1-t)^p (1+t)^q \frac{\varphi(t)}{t-x} dt, \quad (2.5.1)$$

$$-1 < x < 1, \quad p, q > -1,$$

считая, что их плотность $\varphi(t)$ принадлежит классу достаточно гладких на $[-1, 1]$ функций (это обеспечивает существование $S^{(p,q)}$ во всех точках данного интервала). Кроме того, положим

$$S^{(p,q)}(\varphi; \pm 1) = \lim_{x \rightarrow \pm 1} S^{(p,q)}(\varphi; x). \quad (2.5.2)$$

В частности, в случае $p = q = -1/2$, несмотря на неограниченность соответствующей весовой функции вблизи концов ± 1 , при условии,

что функция φ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем больше $1/2$, указанные предельные значения существуют (см. [46, § 22]) и конечны.

В заметке [65] изучается вопрос о приближении оператор-функции вида (2.3.1) при $p, q \geq -1/2$ в любой заданной точке $x \in (-1; 1)$ суммами, построенными путем аппроксимации функции φ интерполяционными многочленами по узлам Якоби, соответствующим заданным p, q . Отметим, что данная в [65] оценка погрешности даже в случае положительных p, q , при которых указанные в (2.5.2) предельные значения конечны, не дает возможности судить о поведении погрешности аппроксимации при сколь угодно приближении параметра x к концам ± 1 . Лишь в случае чебышевского веса ($p = q = -1/2$) в [65] указана оценка погрешности аппроксимации соответствующего сингулярного интеграла, равномерная на всем отрезке $[-1; 1]$.

При других (отличных от $-1/2$) неположительных значениях p, q интегралы $S^{(p,q)}(\varphi; c)$ ($c = \pm 1$) не оказываются конечными при какой бы ни было гладкой функции φ , если только $\varphi(c)$ не равняется нулю. Тем не менее, если построение аппроксимирующих квадратурных выражений возможно так, что соответствующий остаточный член имеет смысл при любом $x \in [-1; 1]$, то может быть поставлен вопрос о равномерной на всем отрезке $[-1; 1]$ оценке аппроксимации соответствующих сингулярных операторов.

В настоящем параграфе дается решение этого вопроса при любых $p, q > -1$. Такие оценки позволяют быть уверенными в надежности результатов вычисления сингулярных интегралов вида $S^{(p,q)}(\varphi; x)$ при значениях x , сколь угодно близких к концам отрезка интегрирования $[-1; 1]$. Отметим, что, в частности, в практических задачах (связанных с применением таких интегралов) это обстоятельство является существенным.

Всюду в дальнейшем будем считать, что $-1 < p, q \leq 0$, если не оговорено противное.

Нули полинома Якоби $P_n^{(p,q)}(x)$, соответствующего данным p, q , обозначим через $x_k^{(n)}$ ($k = 1, \dots, n$), считая их расположенными в убывающем порядке. Будем, как обычно принято (см. [78]), считать, что многочлены $P_n^{(p,q)}(x)$ нормированы по условию $P_n^{(p,q)}(1) = \binom{n+p}{n}$.

Полагая $x_n^{(n)} < x < x_1^{(n)}$, приблизим сингулярный оператор (2.5.1) выражением, полученным на основе замены функции $\varphi(t)$ через

$L_{n-1}^{(p,q)}(\varphi; t)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по значениям φ в узлах $x_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Обозначив при этом

$$R_n^{(p,q)}(\varphi; t) \equiv \varphi(t) - L_{n-1}^{(p,q)}(\varphi; t), \quad S_n^{(p,q)}(\varphi; t) \equiv S^{(p,q)}(L_{n-1}, t),$$

будем иметь

$$\begin{aligned} S^{(p,q)}(\varphi; x) - S_n^{(p,q)}(\varphi; x) &= \gamma_{p,q}(x) R_n^{(p,q)}(\varphi; x) + \\ &+ \int_{-1}^1 (1-t)^p (1+t)^q \frac{R_n^{(p,q)}(\varphi; t) - R_n^{(p,q)}(\varphi; x)}{t-x} dt, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_{p,q}(x) \equiv \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^p (1+t)^q}{t-x} dt, \quad -1 < x < 1.$$

При этом (см. [65]) выражение $S_n^{(p,q)}(\varphi; x)$ вычисляется в явном виде по значениям функции φ в узлах $x_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, n$.

Пусть теперь $x \in (-1, x_n^{(n)}] \cup [x_1^{(n)}, 1)$. Представляя (2.5.1) в виде

$$\varphi(x) \gamma_{p,q}(x) + \int_{-1}^1 (1-t)^p (1+t)^q \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t-x} dt,$$

воспользуемся в интегральном члене той же аппроксимацией $\varphi(t)$ и $\varphi(x)$, что и выше (соответственно по переменным t и x). Что касается значения $\varphi(x)$ при множителе $\gamma_{p,q}(x)$, заменим его интерполяционным многочленом $\tilde{L}_{n-1}^{(p,q)}(\varphi; x)$, построенным по значениям $\varphi(x)$ в узлах $\pm 1, x_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, n$. В результате заданный сингулярный интеграл приближается выражением

$$\begin{aligned} &\tilde{L}_{n-1}^{(p,q)}(\varphi; x) \gamma_{p,q}(x) + \int_{-1}^1 (1-t)^p (1+t)^q \frac{L_{n-1}^{(p,q)}(\varphi; t) - L_{n-1}^{(p,q)}(\varphi; x)}{t-x} dt = \\ &= \tilde{L}_{n-1}^{(p,q)}(\varphi; x) \gamma_{p,q}(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_n(x) - A_k^{(n)} P_n^{(p,q)'}(x_k^{(n)})}{P_n^{(p,q)'}(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})} \varphi(x_k^{(n)}) = \tilde{S}_n^{(p,q)}(\varphi; x), \end{aligned}$$

где $P_n^{(p,q)}(x)$ — многочлен Якоби степени n , а $A_k^{(n)}$ — квадратурные

коэффициенты Гаусса, соответствующие данному весу

$$\lambda_n(x) = \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} \frac{P_n^{(p,q)}(x)}{x - x_j^{(n)}}.$$

Таким образом, принято

$$S^{(p,q)}(\varphi; x) \approx \begin{cases} S_n^{(p,q)}(\varphi; x), & x_n^{(n)} < x < x_1^{(n)}; \\ \tilde{S}_n^{(p,q)}(\varphi; x), & x \in (-1, x_n^{(n)}] \cup [x_1^{(n)}, 1). \end{cases}$$

Соответствующий остаточный член $r_n^{(p,q)}(\varphi, x)$ будет равен

$$\begin{cases} \gamma_{p,q}(x) R_n^{(p,q)}(\varphi; x) + \int_{-1}^1 (1-t)^p (1+t)^q \frac{R_n^{(p,q)}(\varphi; t) - R_n^{(p,q)}(\varphi; x)}{t-x} dt, \\ \quad x_n^{(n)} < x < x_1^{(n)}, \\ \gamma_{p,q}(x) \tilde{R}_n^{(p,q)}(\varphi; x) + \int_{-1}^1 (1-t)^p (1+t)^q \frac{R_n^{(p,q)}(\varphi; t) - R_n^{(p,q)}(\varphi; x)}{t-x} dt, \\ \quad x \in (-1, x_n^{(n)}] \cup [x_1^{(n)}, 1), \end{cases}$$

где $\tilde{R}_n^{(p,q)}(\varphi; t) \equiv \varphi(t) - \tilde{L}_{n-1}^{(p,q)}(\varphi; t)$.

Будем аналогично [70] считать, что функция $\varphi \in H_r(\alpha)$ ($r \geq 1$) имеет на отрезке $[-1; 1]$ непрерывные производные вплоть до r -го порядка, причем для r -й производной $\varphi^{(r)}$ на данном отрезке выполняется условие Гёльдера с показателем α , $0 < \alpha \leq 1$. Учитывая это, дадим, прежде всего, оценки выражений

$$\gamma_{p,q}(x) R_n^{(p,q)}(\varphi; x), \quad \gamma_{p,q}(x) \tilde{R}_n^{(p,q)}(\varphi; x) \quad (2.5.3)$$

при соответствующих значениях x , считая пока $-1 < p, q < 0$.

Воспользуемся для $R_n^{(p,q)}$ известной в теории интерполяции оценкой

$$|R_n^{(p,q)}(\varphi; x)| \leq \lambda_n^{(p,q)} E_{n-1}(\varphi), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

где $\lambda_n^{(p,q)}$ — константа Лебега, соответствующая данной системе узлов $x_k^{(n)}$ ($k = 1, \dots, n$), а $E_{n-1}(\varphi)$ — наилучшее приближение на $[-1; 1]$ функции φ в равномерной метрике алгебраическими многочленами степени $n-1$. При этом (см. [78, § 14, с. 344])

$$\lambda_n^{(p,q)} = \begin{cases} O(n^{\gamma+1/2}), & \gamma > -\frac{1}{2}, \\ O(\ln n), & \gamma \leq -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \gamma = \max(p, q),$$

равномерно относительно $x \in [-1; 1]$ (хотя, как уже отмечено выше, соответствующей оценкой мы пользуемся при $x \in (x_n^{(n)}, x_1^{(n)})$).

Как следует из известных результатов (см. [46, §22]), в случае $p, q \neq 0$ характер поведения главного члена в представлении $\gamma_{p,q}(x)$ при $x \rightarrow \pm 1$ определяется поведением выражения $(1-x)^p(1+x)^q$ вблизи ± 1 . В результате, учитывая предыдущую оценку, можно написать, что при $-1 < p, q < 0$ и $x_n^{(n)} < x < x_1^{(n)}$.

$$\max |\gamma_{p,q}(x) R_n^{(p,q)}(\varphi; x)| = \begin{cases} O(n^{-r-\alpha+\gamma-2\gamma_0+1/2}), & \gamma > -\frac{1}{2}, \\ O(n^{-r-\alpha-2\gamma_0} \ln n), & \gamma \leq -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad (2.5.4)$$

где $\gamma_0 = \min(p, q)$, $n > 1$.

В оценке выражения (2.5.3), учитывая $-1 < p, q < 0$ и предполагая при этом возможность сколь угодно близости параметра x к концам ± 1 , существенное значение имеют условия $\tilde{R}_n^{(p,q)}(\varphi; \pm 1) = 0$ (выполняющиеся вследствие того, что точки ± 1 в данном случае являются узлами интерполяции). Учитывать это обстоятельство в оценке $\tilde{R}_n^{(p,q)}(\varphi; x)$ через константу Лебега затруднительно. Поэтому мы здесь воспользуемся другим представлением $\tilde{R}_n^{(p,q)}(\varphi; x)$, построенным следующим образом.

В выражении

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n^{(p,q)}(\varphi; x) = & -\frac{(x-1)P_n^{(p,q)}(x)}{2P_n^{(p,q)}(-1)}(\varphi(x) - \varphi(-1)) + \\ & + \sum_{k=1}^n \frac{P_n^{(p,q)}(x)(x^2-1)}{(x-x_k^{(n)})P_n^{(p,q)'}(x_k^{(n)})(x_k^{(n)2}-1)} \times \\ & \times (\varphi(x) - \varphi(x_k^{(n)})) + \frac{(x+1)P_n^{(p,q)}(x)}{2P_n^{(p,q)}(1)}(\varphi(x) - \varphi(1)), \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

учитывая то, что $\tilde{R}_n^{(p,q)}(\pm 1; x) \equiv 0$, заменим разности $\varphi(x) - \varphi(x_k^{(n)})$, $k = 0, 1, \dots, n+1$, ($x_0^{(n)} = -1$; $x_{n+1}^{(n)} = 1$) через $\int_{x_k^{(n)}}^x \varphi'(u) du$. Очевидно, при этом можно вместо $\varphi'(u)$ брать $\varphi'(u) - P_n(u)$, где $P_n(u)$ — любой (алгебраический) полином степени не больше n .

Это возможно из-за того, что $\tilde{R}_n^{(p,q)}(\varphi; x) \equiv 0$, когда φ произвольный многочлен степени не больше $n+1$. Принимая последний за

многочлен наилучшего равномерного приближения функции $\varphi'(u)$ на отрезке $[-1; 1]$, в конечном счете приходим к оценке

$$|\tilde{R}_n^{(p,q)}(\varphi; x)| \leq (1-x)^2 |P_n^{(p,q)}(x)| \left(\frac{1}{2|P_n^{(p,q)}(-1)|} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-x_k^{(n)2})|P_n^{(p,q)'}(x_k^{(n)})|} + \frac{1}{2|P_n^{(p,q)}(1)|} \right) E_n(\varphi'). \quad (2.5.6)$$

Воспользуемся теперь оценкой (см. [78, §§ 8, 9])

$$|P_n^{(p,q)'}(x_k^{(n)})| > C_0 k^{-p-\frac{3}{2}} n^{p+2}, \quad 0 \leq x_k < 1,$$

где C_0 — независимая от k и n положительная постоянная. Аналогичная оценка с заменой p на q справедлива и при $-1 < x_k^{(n)} < 0$. К тому же

$$1 - x_k^{(n)} > C_1 \frac{k^2}{n^2}, \quad C_1 = \text{const} > 0.$$

Учитывая эти оценки, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-x_k^{(n)2})|P_n^{(p,q)'}(x_k^{(n)})|} &= \sum_{0 \leq x_k^{(n)} < 1} \frac{1}{(1-x_k^{(n)2})|P_n^{(p,q)'}(x_k^{(n)})|} + \\ &+ \sum_{-1 < x_k^{(n)} < 0} \frac{1}{(1-x_k^{(n)2})|P_n^{(p,q)'}(x_k^{(n)})|} = O(n^{1/2}). \end{aligned}$$

Далее, имеем (см. [78, §§ 7, 32, 41])

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |P_n^{(p,q)}(x)| = \begin{cases} O(n^p), & p > -\frac{1}{2}; \\ O(n^{-1/2}), & p \leq -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.5.7)$$

Аналогичные неравенства с заменой p на q справедливы при $-1 < x < 0$. Кроме того

$$\max_{-1 < x < 1} \left\{ |P_n^{(p,q)}(-1)|, |P_n^{(p,q)}(1)| \right\} > C_2 n^{\gamma_0}, \quad C_2 = \text{const} > 0.$$

Тем самым, выражение в фигурных скобках в (2.5.6) не превосходит $n^{1/2}$ при $\gamma_0 > -1/2$ и $n^{-\gamma_0}$ при $\gamma_0 \leq -1/2$.

Далее заметим, что (см. [78, § 14.4])

$$1 - x_1^{(n)} < C_3 n^{-2}, \quad 1 + x_n^{(n)} > C_4 n^{-2}, \quad C_3, C_4 > 0,$$

вследствие чего и очевидных неравенств

$$1 - x \leq 1 - x_1^{(n)}, \quad x_1^{(n)} < x < 1,$$

$$1 + x \leq 1 + x_n^{(n)}, \quad -1 < x < x_n^{(n)}$$

имеем (учитывая $p, q < 0$, $x_1^{(n)} > 0$, $x_n^{(n)} < 0$)

$$\begin{aligned} (1 - x)^{1+p} &= \begin{cases} O(n^{-2(1+p)}), & x_1^{(n)} < x < 1, \\ O(1), & -1 < x < x_n^{(n)}, \end{cases} \\ (1 + x)^{1+q} &= \begin{cases} O(n^{-2(1+q)}), & -1 < x < x_n^{(n)}, \\ O(1), & x_1^{(n)} < x < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Так как

$$\begin{aligned} &(1 - x^2)|\gamma_{p,q}(x)P_n^{(p,q)}(x)| = \\ &= (1 - x)^{p+1}(1 + x)^{q+1}[1 + O(1 - x^2)]|P_n^{(p,q)}(x)|, \end{aligned}$$

то оценки вида (2.5.7) вместе с (2.5.8) дают

$$\max_{x \in (-1, x_n^{(n)}) \cup [x_1^{(n)}, 1)} (1 - x^2)|\gamma_{p,q}(x)P_n^{(p,q)}(x)| = \begin{cases} O(n^{-\gamma_0-2}), & \gamma_0 > -\frac{1}{2}, \\ O(n^{-2\gamma_0-5/2}), & \gamma_0 \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Учитывая это и неравенство (2.5.6) с применением указанной выше оценки множителя при $(1 - x^2)|P_n^{(p,q)}(x)|$ в правой части этого неравенства, получаем оценку

$$\max_{x \in (-1, x_n^{(n)}) \cup [x_1^{(n)}, 1)} |\tilde{R}_n^{(p,q)}(\varphi; x)| = \begin{cases} O(n^{-\gamma_0-3/2})E_n(\varphi'), & \gamma_0 > -\frac{1}{2}, \\ O(n^{-3\gamma_0-5/2})E_n(\varphi'), & \gamma_0 \leq -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

или при условии $\varphi \in H_r(\alpha)$,

$$\max_{x \in (-1, x_n^{(n)}) \cup [x_1^{(n)}, 1)} |\tilde{R}_n^{(p,q)}(\varphi; x)| = \begin{cases} O(n^{-r-\alpha-\gamma_0-1/2}), & \gamma_0 > -\frac{1}{2}, \\ O(n^{-r-\alpha-3\gamma_0-3/2}), & \gamma_0 \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Найдем теперь оценку выражения

$$\rho_n^{(p,q)}(\varphi; x) = \int_{-1}^1 (1-t)^p (1+t)^q \frac{R_n^{(p,q)}(\varphi; t) - R_n^{(p,q)}(\varphi; x)}{t-x} dt$$

при $-1 \leq x \leq 1$. Для этого заметим, что при любом $\beta \in (0, 1)$, удовлетворяющем условию $\gamma + \beta > 0$, можно написать

$$|\rho_n^{(p,q)}(\varphi; x)| \leq H_n^{(p,q)}(\varphi; \beta) \int_{-1}^1 \frac{(1-t)^p (1+t)^q}{|t-x|^{1-\beta}} dt, \quad (2.5.9)$$

где

$$H_n^{(p,q)}(\varphi; \beta) = \sup_{t, x \in [-1, 1]} \frac{|R_n^{(p,q)}(\varphi; t) - R_n^{(p,q)}(\varphi; x)|}{|t-x|^\beta}.$$

Для оценки $H_n^{(p,q)}$ заметим, прежде всего, что согласно указанной выше оценке $\lambda_n^{(p,q)}$ и известному неравенству Маркова [47, с. 178]

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |L_{n-1}^{(p,q)'}(\varphi; x)| = \begin{cases} O(n^{\gamma+5/2}), & \gamma > -\frac{1}{2}, \\ O(n^2 \ln n), & \gamma \leq -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.5.10)$$

Полагая в доказательстве леммы в [63] $m = r > 1$, взяв вместо P_n полином $L_{n-1}^{(p,q)}(\varphi; x)$, в результате применения в этом доказательстве оценки (2.5.10) вместе с указанной выше оценкой $|R_n^{(p,q)}(\varphi; x)|$ получаем

$$H_n^{(p,q)}(\varphi; \beta) = \begin{cases} O(n^{-r-\alpha+\beta+2\gamma+2}), & \gamma > -\frac{1}{2}, \\ O(n^{-r-\alpha+\beta+1} \ln^2 n), & \gamma \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Далее, учитывая $p, q < 0$, заметим, что интеграл в правой части неравенства (2.5.9) не превосходит

$$\int_{-1}^0 \frac{(1+t)^q}{|t-x|^{1-\beta}} dt + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{|t-x|^{1-\beta}} dt. \quad (2.5.11)$$

Представляя первый интеграл в выражении (2.5.11) в виде суммы интегралов по отрезкам $[-1, \frac{-1+x}{2}]$, $[\frac{-1+x}{2}, x]$, $[x, 0]$ с учетом $q + \beta > 0$, получаем, что независимо от положения параметра $x \in [-1, 1]$ соответствующее выражение не превосходит некоторого

фиксированного числа. Аналогично оценивается второй интеграл в (2.5.11). Таким образом,

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\rho_n^{(p,q)}(\varphi; x)| = \begin{cases} O(n^{-r-\alpha+\beta+2\gamma+2}), & \gamma > -\frac{1}{2}, \\ O(n^{-r-\alpha+\beta+1} \ln^2 n), & \gamma \leq -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

где β — любое такое число, что $1 > \beta > -\gamma$.

Объединяя полученные результаты, мы получаем, что при условии $\varphi \in H_r(\alpha)$ ($r \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$) для остаточного члена

$$r_n^{(p,q)}(\varphi; x) = \begin{cases} S^{(p,q)}(\varphi; x) - S_n^{(p,q)}(\varphi; x), & x_n^{(n)} < x < x_1^{(n)}, \\ S^{(p,q)}(\varphi; x) - \tilde{S}_n^{(p,q)}(\varphi; x), & x \in (-1, x_n^{(n)}) \cup [x_1^{(n)}, 1), \end{cases}$$

при любых $p, q \in (-1, 0)$ справедлива следующая оценка:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |r_n^{(p,q)}(\varphi; x)| = \begin{cases} O(n^{-r-\alpha+\beta+2\gamma+2}), & \gamma > -\frac{1}{2}, \\ O(n^{-r-\alpha+\beta+1} \ln^2 n), & \gamma \leq -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.5.12)$$

Рассмотрим теперь отдельно случай $p = q = 0$. В этом случае узлы $x_k^{(n)}$ ($k = 1, \dots, n$) представляют нули полинома Лежандра (степени n), а $\gamma_{0,0}(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$. Оценка соответствующего остаточного члена получается на основе аналогичных приведенным выше рассуждений, которые для данного случая дают

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |r_n^{(0,0)}(\varphi; x)| = O(n^{-r-\alpha+\beta+2}). \quad (2.5.13)$$

Аналогично могут быть получены оценки при любом $x \in [-1; 1]$, когда лишь одно из чисел p, q равно нулю.

При $p = -1/2$, $q = 1/2$ получается

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |r_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\varphi; x)| = O(n^{-r-\alpha+\beta+3}).$$

При $p = -1/2$, $q = -1/2$ имеем оценку

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |r_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\varphi; x)| = O(n^{-r-\alpha+\beta+1} \ln^2 n).$$

В некоторых приложениях достаточно воспользоваться оценкой $r_n^{(p,q)}(\varphi; x)$ на множестве значений из отрезка $[x_n^{(n)}, x_1^{(n)}]$. В принятых выше предложениях относительно φ в этом случае имеем

$$\begin{aligned} & \max_{x_n^{(n)} \leq x \leq x_1^{(n)}} |r_n^{(p,q)}(\varphi; x)| = \\ & = \begin{cases} O(n^{-r-\alpha+\gamma-2\gamma_0+1/2} + n^{-r-\alpha+\beta+2\gamma+2}), & \gamma > -\frac{1}{2}, \\ O(n^{-r-\alpha-2\gamma_0} \ln n + n^{-r-\alpha+\beta+1} \ln^2 n), & \gamma \leq -\frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

при любых $p, q \in (-1, 0)$.

При $p = q = 0$ у нас будет

$$\max_{x_n^{(n)} \leq x \leq x_1^{(n)}} |r_n^{(0,0)}(\varphi; x)| = O(n^{-r-\alpha+1/2} + n^{-r-\alpha+\beta+2}).$$

При $p = -1/2, q = 1/2$ получаем

$$\max_{x_n^{(n)} \leq x \leq x_1^{(n)}} |r_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\varphi; x)| = O(n^{-r-\alpha+2} + n^{-r-\alpha+\beta+3}).$$

При $p = -1/2, q = -1/2$ —

$$\max_{x_n^{(n)} \leq x \leq x_1^{(n)}} |r_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\varphi; x)| = O(n^{-r-\alpha+1} \ln n + n^{-r-\alpha+\beta+1} \ln^2 n).$$

Случай $p, q > 0$ отличается от предыдущих по существу, ибо в этом случае предельные значения $\gamma_{p,q}(x)$ при $x \rightarrow \pm 1$ являются конечными. Используя применяемые выше к выражению (2.5.9) оценки, убеждаемся, что для функций классов $H_r(\alpha)$ ($r \geq 1$) равномерная аппроксимация сингулярных операторов $S^{(p,q)}$ при $p, q > 0$ может быть осуществлена через упомянутые выше суммы $S_n^{(p,q)}$.

2.6. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с применением внешних узлов

В начале отметим, что приведенные в данном параграфе формулы по их эффективности применительно к численному решению определенных классов сингулярных интегральных уравнений и по существу отличаются от других, рассматриваемых в данной монографии.

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$S(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt, \quad t_0 \in L, \quad (2.6.1)$$

где L — замкнутый ляпуновский контур на плоскости и $\varphi(t)$ — заданная на L (достаточно гладкая) функция. Под $t = t(s) = x(s) + iy(s)$ ($0 \leq s \leq l$), как и выше, будем подразумевать уравнение L относительно дуговой абсциссы s . Введем на L систему равноотстоящих (по длине L) узлов $\{\tau_j\}_{j=1}^{2n}$, $\tau_j = t(s_j)$. Подобно классическому методу дискретных особенностей (см. [1], [35]), ниже мы применим приближенную схему для интегралов вида (2.6.1) на основе двоякого разбиения контура L .

Заменим на каждой дуге $\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}$ ($\sigma = 0, 1, \dots, n-1$) выражение $\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}$ линейным интерполянтom по схеме

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} &\approx \frac{t - \tau_{2\sigma+1}}{\tau_{2\sigma-1} - \tau_{2\sigma+1}} \cdot \frac{\varphi(\tau_{2\sigma-1}) - \varphi(t_0)}{\tau_{2\sigma-1} - t_0} + \\ &+ \frac{t - \tau_{2\sigma-1}}{\tau_{2\sigma+1} - \tau_{2\sigma-1}} \cdot \frac{\varphi(\tau_{2\sigma+1}) - \varphi(t_0)}{\tau_{2\sigma+1} - t_0}, \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

где $t \in \tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}$, $t_0 \in \{\tau_{2p}\}_{p=1}^n$.

Тогда получается следующая квадратурная формула:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt &\approx \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} (p_{2\sigma-1} + p_{2\sigma+1}) \frac{\varphi(\tau_{2\sigma+1}) - \varphi(t_0)}{\tau_{2\sigma+1} - t_0}, \\ t_0 &\in \{\tau_{2p}\}_{p=1}^n. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Аналогично, заменяя на дугах $\tau_{2\sigma}\tau_{2\sigma+2}$ ($\sigma = 0, 1, \dots, n-1$) $\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}$ на соответствующий линейный интерполянт, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt &\approx \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} (p_{2\sigma} + p_{2\sigma+2}) \frac{\varphi(\tau_{2\sigma+2}) - \varphi(t_0)}{\tau_{2\sigma+2} - t_0}, \\ t_0 &\in \{\tau_{2p-1}\}_{p=1}^n, \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

где $p_j = \frac{1}{2\pi i}(\tau_{j+2} - \tau_j)$, $j = 1, \dots, 2n$.

Заметим, что в формулах (2.6.3), (2.6.4) подразумевается, что $\tau_0 = \tau_{2n}$, $\tau_{-1} = \tau_{2n-1}$, $\tau_{2n+1} = \tau_1$. Можно убедиться, что в обоих этих приближениях для погрешности справедлива оценка

$$|S(\varphi; t_0) - S_n(\varphi; t_0)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{2+\delta}}\right), \quad (2.6.5)$$

подразумевая существование ограниченной производной φ''' на L , где δ — показатель ляпуновости контура L . Построенные формулы принадлежат классу формул типа дискретных особенностей, так как t_0 принимает значения в серединных точках дуги $\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}$ или $\tau_{2\sigma}\tau_{2\sigma+2}$ и узлы $\{\tau_j\}_{j=1}^{2n}$ осуществляют каноническое разбиение контура L на множествах $E = \{\tau_1, \tau_3, \dots, \tau_{2n-1}\}$ и $E_0 = \{\tau_2, \tau_4, \dots, \tau_{2n}\}$, которые как расчетные и контрольные сменяют друг друга. В формулах (2.6.3) точки E_0 — контрольные, а точки, принадлежащие E , — расчетные, а в формулах (2.6.4) наоборот.

Очевидно, применением более точных квадратурных формул может быть всегда увеличена точность приближения самого интеграла (2.6.1). Однако, что касается численного решения сингулярных интегральных уравнений, то обоснование построенных на таких квадратурных формулах схем не всегда укладывается в общие принципы схем метода дискретных вихрей, как это имеет место для формул типа Симпсона и аналогичных и оказывается в значительной степени затруднительным.

Тем не менее, оказывается, если вместо класса замкнутых квадратурных формул рассматривать формулы, содержащие узлы вне множества интегрирования, можно указать конкретную квадратурную формулу довольно высокой степени точности, для которой получение интересующих нас утверждений оказывается возможным [75].

В начале мы приведем соответствующую квадратурную формулу в существующем ее виде [39] для случая промежутков $[s_j; s_{j+2}]$ действительной оси:

$$\int_{s_j}^{s_{j+2}} \psi(s) ds \approx \frac{s_{j+2} - s_j}{24} (-\psi(s_{j-2}) + \quad (2.6.6)$$

$$+ 13(\psi(s_j) + \psi(s_{j+2})) - \psi(s_{j+4})).$$

Остаточный член (в известных положениях относительно ψ) имеет вид

$$R = -\frac{11}{720}(2h)^5 \psi^{(4)}(\xi).$$

Ниже мы применим соответствующий комплексный аналог (подынтегральную функцию комплексной переменной t мы обозначаем также через ψ). Такую формулу можно записать в виде

$$\int_{\tau_j \tau_{j+2}} \psi(t) dt \approx q_{j,j-2} \psi(\tau_{j-2}) + q_{j,j} \psi(\tau_j) + q_{j,j+2} \psi(\tau_{j+2}) + q_{j,j+4} \psi(\tau_{j+4}), \quad (2.6.7)$$

где $\tau_j \tau_{j+2}$ — кратчайшая дуга с концами τ_j, τ_{j+2} расположенными в положительном направлении на L ,

$$q_{j,j+2\mu} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_j \tau_{j+2}} \prod_{\substack{k=-1, \\ k \neq \mu}}^2 \frac{t - \tau_{j+2k}}{\tau_{j+2\mu} - \tau_{j+2k}} dt, \quad \mu = -1, 0, 1, 2.$$

Нетрудно получить, что

$$q_{j,j+2\mu} = \frac{1}{\pi i} \int_{s_j}^{s_{j+2}} \prod_{\substack{k=-1, \\ k \neq \mu}}^2 \frac{s - s_{j+2k}}{s_{j+2\mu} - s_{j+2k}} (1 + O(h^\delta)) t'(s) ds,$$

где $\delta, 0 < \delta \leq 1$, — показатель ляпуновости контура L .

На основании этого можно (с учетом тождества $t'(s) = t'(s_j) + (t'(s) - t'(s_j))$) написать

$$q_{j,j+2\mu} = 2h A_{j+2\mu} \frac{t'(s_j)}{\pi i} + O(h^{1+\delta}) \quad (2.6.8)$$

$$(n \rightarrow \infty), \quad \mu = -1, 0, 1,$$

где входящие в главную часть числа

$$A_{j-2} = A_{j+4} = -\frac{1}{24}, \quad A_j = A_{j+2} = \frac{13}{24}$$

представляют собой коэффициенты формулы (2.6.6).

Теперь, фиксируя $t_0 = \tau_\nu$ в одной из систем узлов $E = \{\tau_{2p-1}\}_{p=1}^n$, $E_0 = \{\tau_{2p}\}_{p=1}^n$, к интегралу от функции $\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}$ на каждой из дуг $\tau_j \tau_{j+2}$ с принадлежащей к другой системе концами применим указанную выше квадратурную формулу (2.6.7) (при изменении четности указанные две системы узлов взаимозаменяются):

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - \tau_\nu} dt \approx \varphi(\tau_\nu) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} C_\sigma(\nu) \frac{\varphi(\tau_{\nu+2\sigma+1}) - \varphi(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+2\sigma+1} - \tau_\nu}, \quad (2.6.9)$$

$$C_\sigma(\nu) = l_{\nu+2\sigma-3} + l_{\nu+2\sigma-1} + l_{\nu+2\sigma+1} + l_{\nu+2\sigma+3},$$

где l_j обозначает то же самое, что и $q_{j,j+2\mu}$ при $\mu=0$. При этом для l_j имеют место представления (2.6.8) соответственно с коэффициентами

$$A_{\nu+2\sigma-3} = A_{\nu+2\sigma+3} = -\frac{1}{24}, \quad A_{\nu+2\sigma-1} = A_{\nu+2\sigma+1} = \frac{13}{24}.$$

В результате можно убедиться в справедливости асимптотической формулы

$$C_\sigma(\nu) = \frac{2h}{\pi i} t'(s_{\nu\sigma}^*) + O(h^{1+\delta}),$$

где $s_{\nu\sigma}^*$ — произвольным образом фиксированная точка из сегмента $[s_{\nu+2\sigma-3}, s_{\nu+2\sigma+3}]$.

Для погрешности формулы (2.6.9) справедлива

Теорема 2.6.1. *Если существует ограниченная производная $\varphi^{(5)}$ и L — замкнутый ляпуновский контур, то для погрешности верно неравенство*

$$|S(\varphi; t_0) - S_n(\varphi; t_0)| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{4+\delta}}\right).$$

Забегая немного вперед, ставится вопрос: можно ли построить квадратурные формулы с применением внешних узлов более высокой точности, которые можно было бы использовать для вычисления сингулярных интегралов на замкнутых контурах L , так чтобы было возможно обоснование аналогичной схемы модифицированного метода дискретных вихрей? По крайней мере с точки зрения практического использования представляет интерес рассмотрение таких формул с шестью узлами, т. е. нужно ввести дополнительно еще два внешних узла. Обозначим (учитывая предыдущие обозначения) эти узлы через τ_{j-4} , τ_{j+6} . Тогда соответствующая квадратурная формула для отрезка $[s_j, s_{j+2}]$ примет вид

$$\int_{s_j}^{s_{j+2}} \psi(s) ds \approx \frac{2h}{7200} (55(\psi(s_{j-4}) + \psi(s_{j+6})) - 465(\psi(s_{j-2}) + \psi(s_{j+2})) + 4010(\psi(s_j) + \psi(s_{j+2}))).$$

Остаточный член при соответствующей гладкости функции ψ есть $O(h^7)$.

Соответствующий комплексный аналог этой формулы имеет вид

$$\int_{\tau_j \tau_{j+2}} \psi(t) dt \approx q_{j,j-4} \psi(\tau_{j-4}) + q_{j,j-2} \psi(\tau_{j-2}) + q_{j,j} \psi(\tau_j) + \\ + q_{j,j+2} \psi(\tau_{j+2}) + q_{j,j+4} \psi(\tau_{j+4}) + q_{j,j+6} \psi(\tau_{j+6}), \quad (2.6.10)$$

где

$$q_{j,j+2\mu} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_j \tau_{j+2}} \prod_{\substack{k=-2, \\ k \neq \mu}}^3 \frac{t - \tau_{j+2k}}{\tau_{j+2\mu} - \tau_{j+2k}} dt, \quad \mu = -2, -1, 0, 1, 2, 3.$$

В этом случае справедливы представления вида (2.6.8), в которых

$$A_{j-4} = A_{j+6} = \frac{55}{7200}, \quad A_{j-2} = A_{j+4} = -\frac{465}{7200}, \\ A_j = A_{j+2} = \frac{4010}{7200}. \quad (2.6.11)$$

Теперь, применяя на каждой из дуг $\tau_j \tau_{j+2}$ квадратурную формулу (2.6.10), получаем

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - \tau_\nu} dt \approx \varphi(\tau_\nu) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} C_\sigma(\nu) \frac{\varphi(\tau_{\nu+2\sigma+1}) - \varphi(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+2\sigma+1} - \tau_\nu}, \quad (2.6.12)$$

$$C_\sigma(\nu) = l_{\nu+2\sigma-5} + l_{\nu+2\sigma-3} + l_{\nu+2\sigma-1} + l_{\nu+2\sigma+1} + l_{\nu+2\sigma+3} + l_{\nu+2\sigma+5}.$$

Здесь l_j обозначает то же самое, что и $q_{j,j+2\mu}$ при $\mu = 0$. При этом для l_j имеют место представления вида (2.6.9) соответственно с коэффициентами (2.6.11). Для погрешности в определенных условиях справедливо представление $O\left(\frac{\ln n}{n^{6+\delta}}\right)$.

2.7. О квадратурных формулах для некоторых сингулярных интегралов с негладкими плотностями

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$S(\varphi; t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt, \quad t_0 \in L, \quad (2.7.1)$$

где L — кусочно-гладкий контур на комплексной плоскости, который для определенности в данном параграфе будем предполагать

замкнутым. Как известно (см. [27], [45], [46]), к таким интегралам (более точно, к уравнениям с такими интегралами) приводят задачи теории гармонических функций, плоской теории упругости и др. В таких случаях плотность $\varphi(t)$ обычно представляет искомое (на определенном этапе) решение того или иного граничного интегрального уравнения. При этом следует учитывать, что обычно при наличии угловых точек контура L сама функция $\varphi(t)$ оказывается непрерывной (принадлежащей некоторому классу Гёльдера), однако уже ее первая производная может оказаться разрывной — иметь степенные особенности вблизи угловых точек контура L . В таких случаях непосредственное применение тех или иных квадратурных формул к таким интегралам может оказаться менее эффективным в смысле точности.

В этом параграфе предлагается один подход к приближенному вычислению таких интегралов, позволяющий в определенной мере повысить точность вычислительных процессов, если только гладкие части контура и заданные на них функции достаточное число раз дифференцируемы за исключением соответствующих угловых точек.

Иными словами, L_c представляет гладкую дугу, концы которой соединяются некоторым углом в точке c .

Для определенности рассмотрим случай, когда $L = L_c$ имеет одну угловую точку $t = c$, и плотность $\varphi(t)$ дифференцируема до некоторого порядка $r \geq 1$ всюду на L_c , кроме точки $t = c$, в окрестности которой для производных $\varphi^{(s)}(t)$ имеют место оценки вида

$$|\varphi^{(s)}(t)| < \frac{\text{const}}{|t - c|^{s+\sigma-1}}, \quad 0 < \sigma < 1.$$

В дальнейшем класс функций с указанным свойством будем обозначать через $H_r^\sigma(L_c)$.

Естественно, аппроксимация функций классов $H_r^\sigma(L_c)$ вблизи точки c , как правило, возможна лишь с небольшой степенью точности. Поэтому, как уже отмечено, при непосредственном применении в рассматриваемом случае изложенных в [1], [35], [67] схем вычисления сингулярных интегралов, не может быть гарантирована удовлетворительная (по скорости) сходимости процесса. Тем не менее, эффективное применение упомянутых способов все же оказывается возможным, если сингулярный интеграл предварительно преобразовать к надлежащему виду. Преобразование это, по сути

дела, заключается в подходящей замене переменной интегрирования в данном интеграле и позволяет при построении соответствующего вычислительного процесса вместо аппроксимации функции φ (в интеграле (2.7.1)) исходить из аппроксимации другой, более гладкой вблизи точки c функции, известным образом связанной с плотностью данного интеграла.

Будем принимать за $(t - c)^{1/\rho}$, где ρ — целое положительное число, граничное значение слева на L_c функции $(z - c)^{1/\rho}$, однозначной в конечной области, ограниченной данным контуром (как обычно, считается, что при обходе L_c в положительном направлении указанная область остается слева). Тогда функция $\tau = (t - c)^{1/\rho}$ отображает контур L_c взаимно однозначно и непрерывно в некоторый контур L^0 . На основе указанного преобразования переменного t сингулярный интеграл (2.7.1) может быть сведен к интегралу с аналогичным сингулярным ядром по контуру L^0 относительно функции $\tau^{\rho-1}\varphi(\tau^\rho + c)$.

Итак, интеграл (2.7.1) сводится к интегралу

$$S(\psi; \tau_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{L^0} \frac{\rho \tau^{\rho-1} \varphi(\tau^\rho + c)}{\tau^\rho - \tau_0^\rho} d\tau, \quad (2.7.2)$$

где $\psi = \tau^{\rho-1}\varphi(\tau^\rho + c)$, а L^0 — образ контура L_c .

Обычно, полагая $\varphi \in H_r^\sigma(L_c)$, мы будем всегда считать $\rho \leq r$. Непосредственным образом убеждаемся, что при этом функция $\tau^{\rho-1}\varphi(\tau^\rho + c)$ имеет в окрестности $\tau = 0$ непрерывные производные вплоть до порядка ρ , если $\rho \leq r - 1$, принадлежащие классу H на L^0 . Производная порядка r также будет непрерывной при условии $\sigma < (r - 1)/r$. Для большей наглядности и простоты изложения мы всюду ниже будем рассматривать случай $\rho = 2$.

Таким образом, пусть $\tau = \sqrt{t - c}$. Полагая в интеграле (2.7.1) также $\tau_0 = \sqrt{t_0 - c}$, после несложного преобразования соответствующего сингулярного интеграла получаем

$$S(\psi; \tau_0) = \frac{1}{\tau_0 \pi i} \int_{L^0} \frac{\psi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau - \frac{1}{\tau_0 \pi i} \int_{L^0} \frac{\psi(\tau)}{\tau + \tau_0} d\tau. \quad (2.7.3)$$

Остановимся теперь на вопросе приближенного вычисления интегралов (2.7.3). Основное различие данного случая с известными в классической литературе состоит в том, что производная $\frac{d\tau}{ds}$ не оказывается ограниченной в окрестности $s = s_c$, где s_c — дуговая

абсцисса точки s . Ввиду этого, при разбиении контура L^0 узлами по указанному в [67] способу не оказывается возможным доказательство сходимости соответствующих квадратурных процессов.

В связи со сказанным, мы в данном случае будем поступать следующим образом. Выделим на L^0 некоторую окрестность точки $\tau = 0$, соответствующую дуге с концами $\tau^- = \tau(s_-)$, $\tau^+ = \tau(s_+)$, представляющей часть L^0 , содержащую точку $\tau = 0$. Для определенности будем считать $s_- < s_c < s_+$. Далее, пусть

$$s_{qk}^- = s_c - (s_c - s_-) \left(1 - \frac{q + x_k}{N}\right)^2,$$

$$s_{qk}^+ = s_c + (s_+ - s_c) \left(\frac{q + x_k}{N}\right)^2,$$

где система точек $\{x_k\}_{k=0}^{m-1}$ считается заданной на интервале $(0, 1)$. Как видим, точки s_{qk}^- , s_{qk}^+ расположены соответственно на интервалах (s_-, s_c) , (s_c, s_+) в порядке возрастания индексов q , k , однако, неравномерно, сгущаясь вблизи s_c .

Полагая

$$\tau_{qk}^- = \tau(s_{qk}^-), \quad \tau_{qk}^+ = \tau(s_{qk}^+),$$

мы приходим к вполне определенному разбиению указанной окрестности точки $\tau = 0$ узлами $\tau_{qk}^\pm$ ($q = 0, 1, \dots, N-1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$). К остальной части контура L^0 можно применить равномерное разбиение точками $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$, а каждая дуга $\tau_k \tau_{k+1}$ по принципу $t_{\sigma k} = t(s_\sigma + x_k h)$, $\sigma = 1, \dots, n$, $h = \frac{s_b - s_a}{n}$, $x_k \in [0; 1]$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Теперь, для аппроксимации первого сингулярного интеграла в (2.7.3) воспользуемся аналогичной указанной в [64] аппроксимацией, представляя при этом интеграл по дуге $\tau^- \tau^+$ (содержащей точку $\tau = 0$) суммой интегралов по дугам

$$\tau_0^- \tau_1^-, \dots, \tau_{N-2}^- \tau_{N-1}^-, \tau_{N-1}^- 0, 0 \tau_1^+, \dots, \tau_{N-2}^+ \tau_{N-1}^+,$$

где $\tau_q^\pm = \tau_{q0}^\pm$ ($q = 0, 1, \dots, N-2$), $\tau_{N-1}^\pm = \tau_{N-2, m-1}^\pm$.

Можно показать, что при указанном выше выборе узлов τ_{qk}^+ , τ_{qk}^- скорости сходимости соответствующих квадратурных формул в известном смысле не отличаются от случая гладких контуров.

Что касается второго интеграла в (2.7.3), то хотя этот интеграл и не содержит сингулярности типа Коши, тем не менее его

ядро становится неограниченным, когда переменные τ и τ_0 стремятся одновременно к нулю. С этой точки зрения указанный интеграл удобнее всего вычислять аналогично тому, как предыдущий (сингулярный). Чтобы пояснить это более подробно, заметим, что всякая функция вида $\psi(\tau) = \tau\varphi(\tau^2 + c)$, определенная в точках контура L^0 , определена и на множестве точек $-\tau$, $\tau \in L^0$, причем имеем $\psi(-\tau) = -\psi(\tau)$. Учитывая это, преобразуем аппроксимирующие $\psi(\tau)$ выражения (см. [60]) заменой τ_0 на $-\tau_0$, причем узлы $\tau_{\nu k}$ в соответствующем выражении $L_{m-1}(\psi; \tau_0)$ заменим на числа с обратным знаком. При этом, как нетрудно убедиться, для соответствующего квадратурного процесса имеются те же оценки, что и в случае аппроксимации интегралов с ядром $(\tau - \tau_0)^{-1}$.

Итак мы имеем следующие квадратурные формулы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{L^0} \frac{\psi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau &\approx \psi(\tau_0) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p_{\sigma k}}{\tau_0 - \tau_{\sigma k}} (L_{\nu}(\psi; \tau_0) - \psi(\tau_{\sigma k})), \\ \frac{1}{\pi i} \int_{L^0} \frac{\psi(\tau)}{\tau + \tau_0} d\tau &\approx \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p_{\sigma k}}{\tau_0 + \tau_{\sigma k}} (L_{\nu}(\psi; \tau_0) + \psi(\tau_{\sigma k})), \end{aligned}$$

где при $m = 4$

$$\begin{aligned} p_{\sigma k} = & \frac{1}{\pi i \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 (\tau_{\sigma k} - \tau_{\sigma j})} \left(\frac{\tau_{\sigma+1}^4 - \tau_{\sigma}^4}{4} - \frac{\tau_{\sigma+1}^3 - \tau_{\sigma}^3}{3} \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 \tau_{\sigma j} + \right. \\ & \left. + \frac{\tau_{\sigma+1}^2 - \tau_{\sigma}^2}{2} \sum_{\substack{k \neq j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 \tau_{\sigma j} \tau_{\sigma j_0} - (\tau_{\sigma+1} - \tau_{\sigma}) \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 \tau_{\sigma j} \right), \end{aligned}$$

$L_{\nu}(\psi; \tau_0)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа на отрезке $\tau_{\nu} \tau_{\nu+1}$, с точками $\tau_{\nu k}$, $k = 0, 1, 2, 3$. В точках $\tau = \tau_{\nu j}$ получаются более подробные формулы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{L^0} \frac{\psi(\tau)}{\tau - \tau_{\nu j}} d\tau &\approx \left(1 + \sum_{\substack{\sigma=0, \\ \sigma \neq \nu}}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \frac{p_{\sigma k}^*}{\tau_{\nu j} - \tau_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^2 \frac{p_{\nu k}^*}{\tau_{\nu j} - \tau_{\nu k}} + \right. \\ & \left. + p_{\nu j}^* \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^3 \frac{1}{\tau_{\nu j} - \tau_{\nu k}} \right) \psi(\tau_{\nu j}) - \sum_{\substack{\sigma=0, \\ \sigma \neq \nu}}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \frac{p_{\sigma k}^*}{\tau_{\nu j} - \tau_{\sigma k}} \psi(\tau_{\sigma k}) - \end{aligned}$$

$$- \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^2 \frac{p_{\nu k}^*}{\tau_{\nu j} - \tau_{\nu k}} \psi(\tau_{\nu k}) + p_{\nu j}^* \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^3 d_{\nu k}(\tau_{\nu j}) \psi(\tau_{\nu k}),$$

$$d_{\nu k}(\tau_{\nu j}) = \prod_{\substack{j_0=0, \\ j_0 \neq j, k}}^3 (\tau_{\nu j} - \tau_{\nu j_0}) / \prod_{\substack{j_0=0, \\ j_0 \neq k}}^3 (\tau_{\nu k} - \tau_{\nu j_0}).$$

Для второго интеграла имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{L^0} \frac{\psi(\tau)}{\tau + \tau_{\nu j}} d\tau &\approx \left(\sum_{\substack{\sigma=0, \\ \sigma \neq \nu}}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \frac{p_{\sigma k}^*}{\tau_{\nu j} + \tau_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^2 \frac{p_{\nu k}^*}{\tau_{\nu j} + \tau_{\nu k}} + \right. \\ &+ \left. p_{\nu j}^* \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^3 \frac{1}{\tau_{\nu j} + \tau_{\nu k}} \right) \psi(\tau_{\nu j}) + \sum_{\substack{\sigma=0, \\ \sigma \neq \nu}}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \frac{p_{\sigma k}^*}{\tau_{\nu j} + \tau_{\sigma k}} \psi(\tau_{\sigma k}) + \\ &+ \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^2 \frac{p_{\nu k}^*}{\tau_{\nu j} + \tau_{\nu k}} \psi(\tau_{\nu k}) - p_{\nu j}^* \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^3 d_{\nu k}(\tau_{\nu j}) \psi(\tau_{\nu k}), \\ d_{\nu k}(\tau_{\nu j}) &= \prod_{\substack{j_0=0, \\ j_0 \neq j, k}}^3 (\tau_{\nu j} + \tau_{\nu j_0}) / \prod_{\substack{j_0=0, \\ j_0 \neq k}}^3 (\tau_{\nu k} + \tau_{\nu j_0}), \\ \nu &= 0, 1, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

$$p_{\sigma k}^* = \begin{cases} p_{\sigma k}, & \sigma = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 1, 2; \\ p_{\sigma-1,3} + p_{\sigma 0}, & \sigma = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0. \end{cases}$$

При надлежащих предположениях относительно гладкой части контура L_c и функции φ изложенная выше схема гарантирует аппроксимации степени точности $O\left(\frac{\ln n_0}{n_0^{r+\gamma}}\right)$ ($0 < \gamma \leq 1$), где $n_0 = \min\{n, N\}$.

2.8. О приближенном вычислении некоторых криволинейных интегралов с ядром Коши

Пусть область S ограничена одним или несколькими простыми непересекающимися замкнутыми контурами $L_1, L_2, \dots, L_{m+1}$, из которых последний содержит внутри все остальные, и пусть $L = L_1 +$

$L_2 + \dots + L_{m+1}$ обозначает полную границу области. Кроме того, мы будем считать, что начало координат принадлежит области S .

Тогда, как известно (см. [45, с. 373]), первая основная задача плоской теории упругости приводится к определению двух аналитических в области S функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ по совокупности граничных условий:

$$\begin{aligned} \varphi(t) + t\varphi'(t) + \psi(t) &= f(t) + C_j, \\ t &\in L_j, \quad j = 1, \dots, m+1, \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

где $f(t)$ — заданная функция (однозначная и непрерывная на каждом из контуров L_j), а $C_1, C_2, \dots, C_m, C_{m+1}$ — неизвестные заранее постоянные, лишь одну из которых можно произвольно зафиксировать. Мы будем считать что $C_{m+1} = 0$; $\varphi(t), \psi(t)$ — граничные значения соответствующих функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, которые обычно ищутся в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{t-z} dt + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{z-z_j}, \quad (2.8.2)$$

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega(t)}}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{t-z} d\bar{t} - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\omega(t)}{(t-z)^2} dt + \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{z-z_j}, \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

где $\omega(t)$ — искомая функция точки контура L , z_j — произвольные фиксированные точки областей S_j ($j = 1, \dots, m$), а b_j — действительные постоянные, связанные с $\omega(t)$ следующим образом:

$$b_j = i \int_{L_j} (\omega(t) d\bar{t} - \overline{\omega(t)} dt), \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.8.4)$$

Подставляя граничные значения функций $\varphi(z), \varphi'(z), \psi(z)$, определяемых равенствами (2.8.2), (2.8.3) в (2.8.1) и воспользовавшись формулами Сохоцкого — Племеля, для определения функции ω получается вполне определенное интегральное уравнение. Однако мы здесь приведем несколько измененное уравнение, получаемое от упомянутого (исходного) слагаемыми (в левой части) вида [45]:

$$\frac{b_{m+1}}{\bar{t}_0} + \frac{\overline{b_{m+1}}}{\bar{t}_0} \left(1 - \frac{t}{\bar{t}_0}\right), \quad b_{m+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\omega(t)}{t^2} dt + \frac{\overline{\omega(t)}}{\bar{t}^2} d\bar{t} \right).$$

Соответствующее уравнение (в отличие от исходного) однозначно разрешимо и его решение является и решением исходного уравнения, когда последнее разрешимо (выполнено известное условие разрешимости задачи теории упругости). Упомянутое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} & \omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(t) d \ln \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(t)} d \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \\ & + \sum_{j=1}^{m+1} \left(\frac{b_j}{t_0 - z_j} + \frac{\bar{b}_j}{\bar{t}_0 - \bar{z}_j} \left(1 - \frac{t_0}{\bar{t}_0 - \bar{z}_j} \right) \right) - C_k = f(t_0), \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

$$t_0 \in L_k.$$

Здесь

$$z_{m+1} = 0, \quad C_k = - \int_{L_k} \omega(t) ds, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.8.6)$$

$$f(t_0) = f_1(t_0) + i f_2(t_0) = i \int_{t_0}^t (X_n + i Y_n) ds,$$

где X_n и Y_n — компоненты вектора усилия на L , приложенного со стороны (внешней) нормали.

Если в левой части уравнения (2.8.5) подставить значения b_j и C_j , то оно примет следующий вид (подразумевается в данном случае еще $m = 1$):

$$\begin{aligned} & \omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{t-t_0} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{\bar{t}-\bar{t}_0} d\bar{t} - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(t)} d \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} - \left(\frac{1}{t_0 - z_1} + \frac{1}{\bar{t}_0 - \bar{z}_1} \times \right. \\ & \times \left. \left(1 - \frac{t_0}{\bar{t}_0 - \bar{z}_1} \right) \right) 2 \operatorname{Im} \int_{L_1} \omega(t) d\bar{t} + \left(\frac{1}{t_0} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\bar{t}_0} \left(1 - \frac{t_0}{\bar{t}_0} \right) \right) \frac{1}{\pi i} \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega(t)}{t^2} dt - C_k = f(t_0), \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

где $C_1 = - \int_L \omega(t) ds$ при $t_0 \in L_1$, $C_2 = 0$ при $t_0 \in L_2$.

Аналогично для второй основной задачи теории упругости получается интегральное уравнение вида

$$\begin{aligned} & \varkappa \omega(t_0) + \frac{\varkappa}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{t - t_0} dt - \frac{\varkappa}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{\bar{t} - \bar{t}_0} d\bar{t} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(t)} d\frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} + 2\varkappa \ln |t - z_1| \int_{L_1} \omega(t) ds = g(t_0), \end{aligned} \quad (2.8.8)$$

$$t_0 \in L,$$

где $g(t_0) = 2\mu(g_1 + ig_2) = 2\mu(u + iv)$; u, v — компоненты вектора смещения на границе L .

В некоторых рассмотрениях были предложены схемы численного решения уравнений (2.8.7), (2.8.8), основанные на определенном специальном способе аппроксимации входящих в эти уравнения сингулярных интегралов.

При этом интеграл

$$\int_L \omega(t) d\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} \quad (2.8.9)$$

вычисляется на основе представления

$$\int_L \frac{\omega(t)}{t - t_0} \left(\frac{d\bar{t}}{dt} - \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} \right) dt$$

также как сингулярный с ядром $(t - t_0)^{-1}$ по значениям искомой функции $\omega(t)$ и функции

$$h(t_0, t) = \frac{d\bar{t}}{dt} - \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} \quad (2.8.10)$$

по узлам определенного разбиения контура L . Однако такой способ вычисления интегралов указанного вида не достаточно удобен, особенно в тех случаях, когда граница L не задается ее точным аналитическим (параметрическим) уравнением, и приходится пользоваться графическими данными. В таких случаях для табулирования функции $h(t_0, t)$ вообще необходимо пользоваться формулами численного дифференцирования. Но важно, как показывает структура соответствующей функции, что обычно в вычислениях может иметь место значительная потеря точности, обусловленная вычитанием близких величин и делением соответствующих результатов на малое число.

В данном параграфе предлагается иная схема вычисления указанного интеграла, аналогичная схеме вычисления самих сингулярных интегралов

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt.$$

Упомянутая схема, приводящая сама по себе к более простому вычислительному алгоритму, свободна от указанных недостатков и, к тому же, обеспечивает такую же степень точности, что и упомянутая выше схема, однако при несколько менее жестких требованиях относительно контура L (хотя в I-й основной задаче и вообще в случае многосвязных областей требования относительно дифференциальных свойств L остаются прежними из-за необходимости приближенного вычисления других интегралов).

Определенные неудобства возникают также при аппроксимации интегралов вида

$$\int_L \omega(t) ds, \quad (2.8.11)$$

так как интегрирование производится не по комплексной переменной t , а по параметру s — дуговой абсциссы. В частности это приводит, когда границы области задаются неаналитическими методами.

Займемся вычислением интеграла (2.8.9). Для этого разделим контур L на n частей точками τ_σ , $\sigma = 0, 1, \dots, n-1$. Далее, разделим дуги $\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$ на m частей точками $t_{\sigma k}$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) так, что $t_{\sigma 0} = \tau_\sigma$, $t_{\sigma, m-1} = \tau_{\sigma+1}$. Кроме того, введем обозначения

$$\omega_\sigma(t) = \prod_{k=0}^{m-1} (t - t_{\sigma k}), \quad \omega'_\sigma(t_{\sigma k}) = \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^{m-1} (t_{\sigma k} - t_{\sigma j});$$

$$L_\sigma(\omega; t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\sigma(t)}{(t - t_{\sigma k})\omega'_\sigma(t_{\sigma k})} \omega(t_{\sigma k}), \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1; \quad (2.8.12)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\omega; t, t_0) &= \omega(t_0) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\sigma(t)}{(t - t_{\sigma k})\omega'_\sigma(t_{\sigma k})} \times \\ &\times \frac{t - t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} (L_\nu(\omega; t_0) - \omega(t_{\sigma k})). \end{aligned}$$

Подставляя $\Phi(\omega; t, t_0)$ в (2.8.9) вместо $\omega(t)$ и применяя равенство

$$\int_L d\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_L \omega(t) d\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} &\approx \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\omega_\sigma(t)}{(t - t_{\sigma k}) \omega'_\sigma(t_{\sigma k})} \times \\ &\times \frac{t - t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} (L_\nu(\omega; t_0) - \omega(t_{\sigma k})) d\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} = \\ &= \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{L_\nu(\omega; t_0) - \omega(t_{\sigma k})}{(t_0 - t_{\sigma k}) \omega'_\sigma(t_{\sigma k})} \times \\ &\times \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\omega_\sigma(t)}{t - t_{\sigma k}} (t - t_0) d\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}. \end{aligned} \quad (2.8.13)$$

При $m = 4$ имеем

$$\frac{\omega_\sigma(t)}{t - t_{\sigma k}} = t^3 - t^2 \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} + t \sum_{\substack{k \neq j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 t_{\sigma j} t_{\sigma j_0} - \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j}.$$

Очевидно, что вычисление интеграла (2.8.9) сводится к вычислению интегралов следующего типа:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} t^3(t - t_0) d\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}, \quad \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} t^2(t - t_0) d\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}, \\ \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} t(t - t_0) d\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}, \quad \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} (t - t_0) d\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}. \end{aligned} \quad (2.8.14)$$

Для вычисления указанных интегралов применим метод интегрирования по частям, а потом для функции $\bar{t}$ построим формулу $\Phi(\bar{t}, t, t_0)$ (см. 2.8.12). После этого получаем

$$\begin{aligned} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} t^3(t - t_0) d\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} &= t^3(\bar{t} - \bar{t}_0) \Big|_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} - \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} (4t^3 - 3t^2 t_0) dt \approx \\ &\approx \tau_{\sigma+1}^3 (\bar{\tau}_{\sigma+1} - \bar{t}_0) - \tau_\sigma^3 (\bar{\tau}_\sigma - \bar{t}_0) - \sum_{k_0=0}^3 \frac{L_\nu(\bar{t}, t_0) - \bar{t}_{\sigma k_0}}{t_0 - t_{\sigma k_0}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\omega_\sigma(t)}{(t - t_{\sigma k_0})\omega'_\sigma(t_{\sigma k_0})} (4t^3 - 3t^2 t_0) dt &= \tau_{\sigma+1}^3 (\bar{\tau}_{\sigma+1} - \bar{t}_0) - \\ &- \tau_\sigma^3 (\bar{\tau}_\sigma - \bar{t}_0) - \sum_{k_0=0}^3 p_{\sigma k_0}(t_0) \frac{L_\nu(\bar{t}, t_0) - \bar{t}_{\sigma k_0}}{t_0 - t_{\sigma k_0}}, \end{aligned}$$

где

$$p_{\sigma k_0}(t_0) = \frac{1}{\omega'_\sigma(t_{\sigma k_0})} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\omega_\sigma(t)}{t - t_{\sigma k_0}} (4t^3 - 3t^2 t_0) dt.$$

Аналогично вычисляются остальные три интеграла. Таким образом, для интеграла (2.8.9) получается следующая приближенная формула:

$$\begin{aligned} \int_L \omega(t) d \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} &\approx \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^3 \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{(t - t_0)\omega_\sigma(t)}{(t - t_{\sigma k})\omega'_\sigma(t_{\sigma k})} \times \\ &\times \frac{L_\nu(\omega, t_0) - \omega(t_{\sigma k})}{t_0 - t_{\sigma k}} d \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^3 \frac{L_\nu(\omega, t_0) - \omega(t_{\sigma k})}{t_0 - t_{\sigma k}} \times \\ &\times \left[\int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{(t - t_0)}{\omega'_\sigma(t_{\sigma k})} \left(t^3 - t^2 \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} + t \sum_{\substack{k \neq j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 t_{\sigma j} t_{\sigma j_0} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} \right) d \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} \right] = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^3 \frac{L_\nu(\omega, t_0) - \omega(t_{\sigma k})}{(t_0 - t_{\sigma k})\omega'_\sigma(t_{\sigma k})} \times \\ &\times \left[\left(t^3 - t^2 \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} + t \sum_{\substack{k \neq j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 t_{\sigma j} t_{\sigma j_0} - \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} \right) (\bar{t} - \bar{t}_0) \right]_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} - \\ &- \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} \left(\left(t^3 - t^2 \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} + t \sum_{\substack{k \neq j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 t_{\sigma j} t_{\sigma j_0} - \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} \right) + \right. \\ &\left. + (t - t_0) \left(3t^2 - 2t \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} + \sum_{\substack{k \neq j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 t_{\sigma j} t_{\sigma j_0} \right) \right) dt = \\ &= \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^3 \frac{L_\nu(\omega, t_0) - \omega(t_{\sigma k})}{(t_0 - t_{\sigma k})\omega'_\sigma(t_{\sigma k})} \left\{ \left(\left(t^3 - t^2 \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + t \sum_{\substack{k \neq j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 t_{\sigma j} t_{\sigma-j_0} - \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} \Big) (\bar{t} - \bar{t}_0) \Big) \Big|_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} - \\
& - \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sum_{k=0}^3 \frac{\omega_\sigma(t)}{(t - t_{\sigma k_0}) \omega'_\sigma(t_{\sigma k_0})} \cdot \frac{L_\nu(\bar{t}, t_0) - \bar{t}_{\sigma k_0}}{t_0 - t_{\sigma k_0}} \times \\
& \times \left[4t^3 - t^2 \left(3 \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} + 3t_0 \right) + t \left(2 \sum_{\substack{k \neq j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 t_{\sigma j} t_{\sigma j_0} + 2t_0 \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} \right) - \right. \\
& \left. - \left(\prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} + t_0 \sum_{\substack{k \neq j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 t_{\sigma j} t_{\sigma j_0} \right) \right] dt \Big\}.
\end{aligned}$$

Итак, получили

$$\begin{aligned}
& \int_L \omega(t) d \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} \approx \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^3 \frac{L_\nu(\omega; t_0) - \omega(t_{\sigma k})}{(t_0 - t_{\sigma k}) \omega'_\sigma(t_{\sigma k})} \times \\
& \times \left\{ \left(\tau_{\sigma+1}^3 - \tau_{\sigma+1}^2 \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} + \tau_{\sigma+1} \sum_{\substack{k \neq j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 t_{\sigma j} t_{\sigma j_0} - \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} \right) \times \right. \\
& \times (\bar{\tau}_{\sigma+1} - \bar{t}_0) - \left(\tau_\sigma^3 - \tau_\sigma^2 \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} + \tau_\sigma \sum_{\substack{k \neq j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 t_{\sigma j} t_{\sigma j_0} - \right. \\
& \left. \left. - \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} \right) (\bar{\tau}_\sigma - \bar{t}_0) - \sum_{k_0=0}^3 \frac{L_\nu(\bar{t}, t_0) - \bar{t}_{\sigma k_0}}{t_0 - t_{\sigma k_0}} p_{\sigma k k_0}(t_0) \right\}, \tag{2.8.15}
\end{aligned}$$

где $p_{\sigma k k_0}(t_0)$ также вычисляются точно.

Для оценки остаточного члена разложим функции $\omega(t)$ и $\bar{t}$ в ряд Тейлора в окрестности точки τ_σ , $\sigma = 0, 1, \dots, n-1$ (подразумевая, что $\omega(t)$ непрерывно дифференцируема до r -го порядка включительно). Подставим полученные разложения как в интеграл, так и в приближенную формулу (2.8.15) и, учитывая свойства интеграла и интегральной суммы, получим

$$\left| \int_L \omega(t) d \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} - S_n(\omega, t_0) \right| = O \left(\frac{\ln n}{n^r} \right).$$

Перейдем теперь к интегралу (2.8.11). Представим рассматриваемый интеграл в виде

$$\int_L \omega(t) ds = \int \frac{\omega(t)}{t'(s)} dt = \int_L \bar{t}'(s) \omega(t) dt = \int \sqrt{T} \omega(t) dt,$$

где $T = \frac{d\bar{t}}{dt} = (\bar{t}'(s))^2$, $\bar{t}'(s) = \pm\sqrt{T}$.

Применим к последнему интегралу квадратурную формулу усложненного типа [48] (полагая $m = 4$):

$$\int_L \sqrt{T} \omega(t) dt \approx \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^3 p_{\sigma k} \sqrt{T_{\sigma k}} \omega(t_{\sigma k}), \quad (2.8.16)$$

где

$$p_{\sigma k} = \frac{1}{\omega'_{\sigma}(t_{\sigma k})} \left(\frac{\tau_{\sigma+1}^4 - \tau_{\sigma}^4}{4} - \frac{\tau_{\sigma+1}^3 - \tau_{\sigma}^3}{3} \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} + \right. \\ \left. + \frac{\tau_{\sigma+1}^2 - \tau_{\sigma}^2}{2} \sum_{\substack{k \neq j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 t_{\sigma j} t_{\sigma j_0} - (\tau_{\sigma+1} - \tau_{\sigma}) \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} \right).$$

Значения $T_{\sigma k}$ будем вычислять приближенно с помощью следующей формулы численного дифференцирования [39]:

$$T_{\sigma k} = \left(\frac{d\bar{t}}{dt} \right)_{t=t_{\sigma k}} = \sum_{\substack{p=k-2, \\ p \neq k}}^{k+2} \frac{\prod_{\substack{q=k-2, \\ q \neq k}}^{k+2} (t_{\sigma k} - t_{\sigma q})}{\prod_{\substack{q=k-2, \\ q \neq k, p}}^{k+2} (t_{\sigma p} - t_{\sigma q})} \cdot \frac{\bar{t}_{\sigma k} - \bar{t}_{\sigma p}}{(t_{\sigma k} - t_{\sigma p})^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

где

$$t_{\sigma, k-2} = \begin{cases} t_{\sigma-1,1}, & k=0, \\ t_{\sigma-1,2}, & k=1, \\ t_{\sigma 0}, & k=2, \\ t_{\sigma 1}, & k=3; \end{cases} \quad t_{\sigma, k+1} = \begin{cases} t_{\sigma 1}, & k=0, \\ t_{\sigma 2}, & k=1, \\ t_{\sigma+1,0}, & k=2, \\ t_{\sigma+1,1}, & k=3; \end{cases}$$

$$t_{\sigma, k-1} = \begin{cases} t_{\sigma-1,2}, & k=0, \\ t_{\sigma 0}, & k=1, \\ t_{\sigma 1}, & k=2, \\ t_{\sigma 2}, & k=3; \end{cases} \quad t_{\sigma, k+2} = \begin{cases} t_{\sigma 2}, & k=0, \\ t_{\sigma+1,0}, & k=1, \\ t_{\sigma+1,1}, & k=2, \\ t_{\sigma+1,2}, & k=3; \end{cases}$$

$$t_{\sigma-1,3} = t_{\sigma 0}, \quad t_{-1,1} = t_{n-1,1}, \quad t_{-1,2} = t_{n-1,2},$$

$$t_{n0} = t_{00}, \quad t_{n1} = t_{01}, \quad t_{n2} = t_{02}.$$

Для выбора ветви квадратного корня поступим следующим образом. Рассмотрим

$$I_{\nu k_0} = \operatorname{Re} t_{\nu k_0} - \operatorname{Re} t_{\nu k_0-1}, \quad I_{\nu k_0+1} = \operatorname{Re} t_{\nu k_0+1} - \operatorname{Re} t_{\nu k_0},$$

$$I'_{\nu k_0} = \operatorname{Im} t_{\nu k_0} - \operatorname{Im} t_{\nu k_0-1}, \quad I'_{\nu k_0+1} = \operatorname{Im} t_{\nu k_0+1} - \operatorname{Im} t_{\nu k_0}.$$

Далее, если $I_{\nu k_0} > 0$, $I_{\nu k_0+1} > 0$, то

$$\sqrt{T_{\nu k_0}} = \sqrt{\hat{T}_{\nu k_0}} \operatorname{sign} \operatorname{Re} \sqrt{\hat{T}_{\nu k_0}}.$$

Если же $I_{\nu k_0} < 0$, $I_{\nu k_0+1} < 0$, то

$$\sqrt{T_{\nu k_0}} = -\sqrt{\hat{T}_{\nu k_0}} \operatorname{sign} \operatorname{Re} \sqrt{\hat{T}_{\nu k_0}}.$$

Далее, если $I_{\nu k_0} \geq 0$, $I_{\nu k_0+1} \leq 0$, или $I_{\nu k_0} \leq 0$, $I_{\nu k_0+1} \geq 0$, то при $I'_{\nu k_0} > 0$ имеем

$$\sqrt{T_{\nu k_0}} = -\sqrt{\hat{T}_{\nu k_0}} \operatorname{sign} \operatorname{Im} \sqrt{\hat{T}_{\nu k_0}},$$

а при $I'_{\nu k_0} < 0$ получим

$$\sqrt{T_{\nu k_0}} = \sqrt{\hat{T}_{\nu k_0}} \operatorname{sign} \operatorname{Im} \sqrt{\hat{T}_{\nu k_0}},$$

где $\sqrt{\hat{T}_{\nu k_0}}$ — главное значение радикала.

Применяя известные приемы (см. [39], [48]) оценки погрешности усложненных квадратурных формул и формул численного дифференцирования, можно убедиться, что при достаточной гладкости функций ω и $\bar{t}$ указанный прием дает достаточно высокий порядок приближения.

При изложенном способе аппроксимации интегралов указанного вида в явном виде не участвуют значения параметра s . Поэтому соответствующие формулы с достаточным удобством применимы и при графическом задании контура L , что часто бывает на практике.

2.9. Квадратурные формулы Гаусса для сингулярного интеграла

Пусть имеется сингулярный интеграл с весом $p(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ вида

$$S(\varphi; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{\varphi(t)}{t-x} dt. \quad (2.9.1)$$

В § 2.3 построены квадратурные формулы, которые имеют алгебраическую степень точности n . Это означает, что указанные формулы точны для любых многочленов степени, не превосходящей n . Представляет интерес задача: как построить квадратурные формулы, аналогичные квадратурным формулам для регулярных интегралов, чтобы точность стала больше.

Как известно, из теории квадратурных формул [24], этого можно достичь, если в качестве узлов $t_1, t_2, \dots, t_n$ возьмем корни многочлена $\omega(t) = (t - t_1) \dots (t - t_n)$, ортогонального по весу $p(t)$ ко всем многочленам меньшей степени. Необходимо и достаточно условие

$$\int_{-1}^1 p(t) \omega(t) Q(t) dt = 0,$$

где $Q(t)$ — многочлен степени меньше n .

Пусть для данной весовой функции $p(x)$, от которой требуется, чтобы $p(x) \geq 0$ и существовали $\int_{-1}^1 p(x) x^k dx$ ($k = 1, 2, \dots$), нашли ортогональные многочлены $P_n(x)$ и их корни $\{t_k\}$, $k = 1, \dots, n$. Составим интерполяционный многочлен Лагранжа $L_{n-1}(\varphi; t)$ по узлам t_k и по значениям $\varphi(t_k)$, $k = 1, \dots, n$. Он имеет вид

$$L_{n-1}(\varphi; t) = \sum_{k=1}^n \frac{P_n(t)}{(t - t_k) P'_n(t_k)} \varphi(t_k). \quad (2.9.2)$$

Подставляя его в интеграл (2.9.1) вместо $\varphi(t)$, после некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{1}{t-x} \sum_{k=1}^n \frac{P_n(t)}{(t - t_k) P'_n(t_k)} \varphi(t_k) dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k)}{P'_n(t_k)} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{P_n(t)}{(t - t_k)(t - x)} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k)}{P'_n(t_k)} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{1}{-x+t_k} \left(\frac{P_n(t)}{t-t_k} - \frac{P_n(t)}{t-x} \right) dt = \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k)}{P'_n(t_k)(t_k-x)} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{P_n(t)}{t-t_k} dt - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{P_n(t)}{t-x} dt \right) = \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k)}{P'_n(t_k)(t_k-x)} (I - Q(x)).
\end{aligned}$$

Здесь первый из интегралов можно переписать так:

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{P_n(t)}{t-t_k} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{P_n(t) - P_n(t_k)}{t-t_k} dt, \quad P_n(t_k) = 0.$$

Что касается выражения $\frac{P_n(t) - P_n(t_k)}{t-t_k}$, то оно представляет многочлен степени $n-1$. Воспользовавшись квадратурной формулой Гаусса по весовой функции $p(t)$ [24], получаем

$$I = A_k P'_n(t_k),$$

где A_k — коэффициент, соответствующий данному k .

Пусть теперь x такое число, что

$$Q(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{P_n(t)}{t-x} dt = 0. \quad (2.9.3)$$

В литературе эта функция называется *присоединенной функцией Лежандра второго рода* [78]. Тогда, для сингулярного интеграла имеем формулу

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{P_n(t)}{t-x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k)}{t_k-x} dt, \quad x \neq t_k, \quad (2.9.4)$$

где t_k и A_k — узлы и коэффициенты соответствующей квадратурной формулы Гаусса.

Очевидно, что формула (2.9.4) имеет алгебраическую точность не больше $2n$, поэтому что она точна для всех многочленов степени не выше $2n$, т. е. и для многочленов $1, x, x^2, \dots, x^{2n}$.

Таким образом, доказана

Теорема 2.9.1. Пусть $\varphi(t)$ — регулярная функция, $p(t)$ — положительная, интегрирующая функция, точки t_k ($k = 1, \dots, n$) являются нулями полинома $P_n(t)$ степени n из системы ортогональных многочленов $\{P_n(t)\}$ с весом $p(t)$ на отрезке $[-1; 1]$, а x — нуль функции

$$Q(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{P_n(t)}{t-x} dt, \quad x \neq t_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда квадратурная формула (2.9.4) точна для всех многочленов степени не больше $2n$.

Остаточный член формулы (2.9.4) имеет оценку

$$R_n(\varphi) \leq \frac{1}{(2n)!} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{\omega^2(t) \varphi^{(2n)}(t)}{t-x} dt \right|.$$

Для полноты заметим, что условия $x \neq t_k$ ($k = 1, \dots, n$) выполняются, так как нули функции $Q(x)$ расположены в интервалах $(-1, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_n, 1)$ [78].

2.10. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и формулы обращения

Рассмотрим сингулярный интеграл с весовой функцией

$$S(\varphi, x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{\varphi(t)}{t-x} dt, \quad x \in (-1, 1), \quad (2.10.1)$$

где $\varphi(t)$ — плотность, удовлетворяющая условию Гёльдера, а $p(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ ($\alpha, \beta > -1$) — весовая функция.

Как известно (см. [24], [78]), многочлены Якоби

$$P_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \times \\ \times \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}) \quad (2.10.2)$$

являются ортогональными с весом $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ на отрезке $[-1, 1]$ и широко применяются в теории приближений.

Кроме сингулярного интеграла (2.10.1) рассмотрим несобственный интеграл

$$I(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(x) f(x) dx. \quad (2.10.3)$$

Для таких интегралов построены квадратурные формулы (см. [24]) наивысшей алгебраической степени точности вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f), \quad (2.10.4)$$

где в роли узлов x_k ($k = 1, \dots, n$) используются нули многочлена Якоби, коэффициенты A_k ($k = 1, \dots, n$) вычисляются по формуле

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(x) \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{(x - x_k) P_n'^{(\alpha, \beta)}(x_k)} dx.$$

В классической литературе для $p(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$ рассматриваются случаи $(\alpha = -1/2, \beta = 1/2)$, $(\alpha = -1/2, \beta = -1/2)$, $(\alpha = 0, \beta = 0)$, $(\alpha = 1/2, \beta = -1/2)$. Они встречаются чаще всего на практике. Для последнего случая $\alpha = 1/2, \beta = -1/2$ получена квадратурная формула

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x) dx = \frac{4}{2n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} f(x_k) + R_n(f), \quad (2.10.5)$$

где

$$R_n(f) = \frac{1}{2^{2n}(2n)!} f^{(2n)}(\eta), \quad -1 < \eta < 1.$$

$x_k = \cos \frac{2k\pi}{2n+1}$ ($k = 1, \dots, n$) — корни ортогонального многочлена

$$P_n^{(0,5;-0,5)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} \arccos x\right)}{\sin \frac{\arccos x}{2}}.$$

Для случая $\alpha = -1/2, \beta = 1/2$, т. е. для интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} f(x) dx \quad (2.10.6)$$

таких формул нет, но рекомендована подстановка $x = -t$, после чего интеграл приводится к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(-x) dx, \quad (2.10.7)$$

и его можно вычислить по формуле (2.10.5).

Далее мы решаем следующую задачу: для интеграла (2.10.6) построить квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности. Сначала построим ортогональные многочлены на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией $p(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Наш многочлен обозначим через $P_n^{(-0,5;0,5)}(x)$. Тогда по условию справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} P_n^{(-0,5;0,5)}(x) Q(x) dx = \\ & = \int_{-1}^1 (1+x) P_n^{(-0,5;0,5)}(x) Q(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \end{aligned}$$

где $Q(x)$ — многочлен степени меньше n .

Рассмотрим многочлен $S(x) = (1+x)P_n^{(-0,5;0,5)}(x)$. Степень его равна $(n+1)$ и он ортогонален на $[-1, 1]$ с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ всякому многочлену $Q(x)$ степени меньше n . Если его разложить по многочленам Чебышева первого рода $T_k(x)$ ($k = 1, \dots, n$), то в разложении, ввиду указанной ортогональности, должны обратиться в нуль все коэффициенты при многочленах $T_k(x)$ до степени $(n-1)$ включительно, и разложение должно иметь форму $S(x) = C_n T_n(x) + C_{n+1} T_{n+1}(x)$. Кроме того, так как $S(x)$ должно нацело делиться на $1+x$, при $x = -1$ должно быть $S(-1) = C_n T_n(-1) + C_{n+1} T_{n+1}(-1) = (-1)^n (C_n - C_{n+1}) = 0$. Поэтому $C_{n+1} = C_n$ и

$$P_n^{(-0,5;0,5)}(x) = C_n \frac{T_{n+1}(x) + T_n(x)}{x+1}.$$

Из свойств старших коэффициентов ортогональных многочленов имеем

$$C_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Если положить $x = \cos \vartheta$ и воспользоваться тем, что $T_k(x) = \cos(k \arccos x) = \cos k\vartheta$, то для изучаемого полинома Якоби получаем

$$P_n^{(-0,5;0,5)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\cos \frac{2n+1}{2}\vartheta}{\cos \frac{\vartheta}{2}}. \quad (2.10.8)$$

Корни его есть

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+1}\pi, \quad k = 1, \dots, n.$$

Используя многочлены (2.10.8), получим следующую квадратурную формулу наивысшей алгебраической степени точности:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} f(x) dx = \\ & = \frac{4}{2n+1} \sum_{k=1}^n \cos^2 \frac{2k-1}{2(2n+1)} \pi f(x_k) + R_n(f), \end{aligned} \quad (2.10.9)$$

где

$$R_n(f) = \frac{1}{2^{2n}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 < \xi < 1.$$

Введем обозначения

$$C_n(x) = \frac{\cos \frac{2n+1}{2}\vartheta}{\cos \frac{\vartheta}{2}}, \quad S_n(x) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\vartheta}{\sin \frac{\vartheta}{2}}, \quad (2.10.10)$$

где $\vartheta = \arccos x$.

Ниже приводятся многочлены $C_n(x)$, $S_n(x)$ при $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} C_0(x) &= 1; \\ C_1(x) &= 2x - 1; \\ C_2(x) &= 4x^2 - 2x - 1; \\ C_3(x) &= 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1; \\ C_4(x) &= 16x^4 - 8x^2 - 12x^2 + 4x + 1; \\ C_5(x) &= 32x^5 - 16x^4 - 32x^3 + 12x^2 + 6x - 1; \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0(x) &= 1; \\ S_1(x) &= 2x + 1; \\ S_2(x) &= 4x^2 + 2x - 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3(x) &= 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1; \\ S_4(x) &= 16x^4 + 8x^2 - 12x^2 - 4x + 1; \\ S_5(x) &= 32x^5 + 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

В классической литературе (см. [19], [35]), широко используются следующие формулы обращения:

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{T_n(t)}{t-x} dt = U_{n-1}(x), & n = 1, 2, \dots, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)}{t-x} dt = -T_{n+1}(x), & n = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (2.10.11)$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ — ортогональные многочлены Чебышева I-го и II-го родов [78].

Теорема 2.10.1. Для многочленов $S_n(x)$ и $C_n(x)$ справедливы следующие формулы обращения:

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{C_n(t)}{t-x} dt = S_n(x); \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{S_n(t)}{t-x} dt = -C_n(x), \end{cases} \quad (2.10.12)$$

$-1 < x < 1$, $n = 0, 1, \dots$

◁ Применим вышеупомянутое представление

$$C_n(x) = \frac{T_n(x) + T_{n+1}(x)}{1+x},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{1}{t-x} \cdot \frac{T_n(t) + T_{n+1}(t)}{1+t} dt &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{T_n(t) + T_{n+1}(t)}{t-x} dt. \end{aligned}$$

Отсюда, используя формулы (2.10.11), имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{C_n(t)}{t-x} dt = U_{n-1}(x) + U_n(x),$$

и после некоторого упрощения с учетом $x = \cos \theta$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{C_n(t)}{t-x} dt &= \frac{\sin n\vartheta + \sin(n+1)\vartheta}{\sqrt{1-\cos^2 \vartheta}} = \\ &= \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} \arccos x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} \arccos x\right)} = S_n(x). \end{aligned}$$

Аналогично, после представления многочлена $S_n(x)$ в виде

$$S_n(x) = \frac{T_n(x) - T_{n+1}(x)}{1-x}$$

с учетом (2.10.11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{S_n(x)}{t-x} dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{T_n(t) - T_{n+1}(t)}{t-x} dt = U_{n-1}(x) - \\ - U_{n+1}(x) &= \frac{\sin n\vartheta - \sin(n+1)\vartheta}{\sin \vartheta} = -\frac{\cos \frac{2n+1}{2} \vartheta}{\cos \frac{\vartheta}{2}} = -C_n(x). \triangleright \end{aligned}$$

Далее, для сингулярных интегралов с весовыми функциями $p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ и $p(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ построены следующие квадратурные формулы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{\varphi(t)}{t-x} dt &= \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \sqrt{1-x_k^2}}{x-x_k} \times \\ &\times \cos \frac{2k-1}{2(2n+1)} \pi (C_n(x) + \mu_k(x)) \varphi(x_k) + R_n(\varphi; x), \end{aligned} \quad (2.10.13)$$

где

$$\mu_k(x) = \sum_{\sigma=1}^n A_\sigma \frac{C_n(x)}{x-x_\sigma} - A_k C'_n(x_k),$$

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+1} \pi, \quad A_k = \frac{4}{2n+1} \cos^2 \frac{2k-1}{2(2n+1)} \pi$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{\varphi(t)}{t-x} dt &= \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \sqrt{1-x_k^2}}{x-x_k} \times \\ &\times \sin \frac{k\pi}{2n+1} (-S_n(x) + \bar{\mu}_k(x)) \varphi(x_k) + R_n(\varphi; x), \end{aligned} \quad (2.10.14)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_k(x) &= \sum_{\sigma=1}^n A_\sigma \frac{S_n(x)}{x-x_\sigma} - A_k S'_n(x_k), \\ x_k &= \cos \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad A_k = \frac{4}{2n+1} \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}. \end{aligned}$$

Теорема 2.10.2. Если плотность $\varphi(t)$ имеет производные до r -го порядка включительно ($r > 1$) и $\varphi^{(r)}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера $H(\alpha)$ ($0 < \alpha \leq 1$), то для квадратурных формул (2.10.13) и (2.10.14) справедлива оценка

$$|S(\varphi, x) - S_n(\varphi, x)| \leq O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1}}\right)$$

равномерная для всех $-1 \leq x \leq 1$, где $S_n(\varphi, x)$ — соответствующая квадратурная сумма.

◁ Пусть $\varphi(t) \in H_r(\alpha)$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(x_k) + \frac{(t-x_k)}{1!} \varphi'(x_k) + \dots + \frac{(t-x_k)^{r-1}}{(r-1)!} \varphi^{(r-1)}(x_k) + \\ &+ \frac{(t-x_k)^r}{r!} \varphi^{(r)}(x_k) + \frac{1}{(r-1)!} \int_{x_k}^t (t-u)^{r-1} (\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(x_k)) du. \end{aligned}$$

Отсюда для остатка квадратурных формул (2.10.13) и (2.10.14) получаем

$$\begin{aligned} R(\varphi, x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{p(t)}{t-x} \cdot \frac{1}{(r-1)!} \times \\ &\times \int_{x_k}^t (t-u)^{r-1} (\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(x_k)) du dt, \end{aligned}$$

где $x_0 = -1$, $x_{n+1} = 1$ и $|\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(x_k)| \leq A|u - x_k|^\alpha$.

А это при $p(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ или $p(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ дает оценку

$$|R(\varphi, x)| \leq O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha-1}}\right).$$

Компоненты напряжений и смещений обычно выражаются с помощью интегралов типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 p(t) \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad z \notin [-1; 1].$$

Следовательно, нужно вычислить интегралы типа Коши с весовыми функциями $p(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$, $p(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$. Для указанных интегралов от ортогональных многочленов $S_n(x)$ и $C_n(x)$ получены следующие формулы [57]:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{C_n(t)}{t-z} dt = \frac{i(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} (1 + z - \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{S_n(t)}{t-z} dt = \frac{i(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} (1 + z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

где под $\sqrt{z^2 - 1}$ подразумевается фиксированная ветвь, однозначная в плоскости с разрезом вдоль отрезка $[-1, 1]$ действительной оси и принимающая на $(1, \infty)$ действительные значения.

ГЛАВА 3

ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

3.1. Точное вычисление некоторых интегралов типа Коши

Пусть дан замкнутый или разомкнутый контур, и на нем задана функция комплексной координаты этого контура. Тогда, как уже отметили выше (см. § 1.2), криволинейный интеграл

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad z \notin L, \quad (3.1.1)$$

где $z = x + iy$ — комплексная координата, называется *интегралом типа Коши*, а $\varphi(t)$ — его *плотностью*. Существование и свойства интеграла типа Коши зависят как от свойств контура L , так и от свойств его плотности. Относительно контура L мы будем всюду предполагать, что он представляет собой простую, т. е. без точек самопересечения, линию (замкнутую или незамкнутую) с непрерывно меняющейся касательной и не имеющую точек возврата. Такой контур принято называть гладким. Когда контур L гладкий, а плотность $\varphi(t)$ непрерывна, интеграл типа Коши (3.1.1) будет функцией, аналитической во всей плоскости комплексной переменной $z = x + iy$, за исключением точек самого контура L .

Рассмотрим наряду с интегралом типа Коши (3.1.1) сингулярный интеграл

$$S(\varphi; t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt, \quad t_0 \in L, \quad (3.1.2)$$

предполагая, что точка t_0 не совпадает с концами L , если контур L разомкнутый. Этот интеграл, вообще говоря, не существует в обычном смысле, и он понимается в смысле главного значения по Коши (см. § 1.3). После того, как введено понятие главного значения интеграла типа Коши, естественно придать определенный смысл пределу интеграла (3.1.1), когда точка $z \notin L$ стремится к некоторой точке

контура L . В связи с этим введем понятие предельных значений интеграла типа Коши. Предварительно остановимся на вспомогательных определениях.

Условимся выбирать положительное направление обхода контура, если он замкнутый так, чтобы область, ограниченная данным контуром, оставалась слева. Когда контур разомкнутый, один из его концов будем принимать за начальный и положительным направлением будем считать то, по которому возрастает длина дуги, отсчитываемая от начального конца. Замкнутый контур делит всю плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю. Данные области обозначим соответственно D^+ и D^- . Для разомкнутого контура введем понятие левой и правой окрестности, которые также обозначим D^+ и D^- . Пусть на разомкнутом контуре дана точка t_0 и построен круг с центром в этой точке настолько малого радиуса, что контур пересекает границу круга только в двух точках. Тогда внутренность круга, лежащая слева от контура при его обходе в положительном направлении, будем называть *левой окрестностью точки t_0* , а оставшуюся часть — *правой окрестностью точки t_0* (см. рис. 2). Очевидно, понятие левой и правой окрестности точки t_0 имеет смысл вводить только для такого контура, который обладает тем свойством, что в каждой его точке можно построить указанный выше круг, пересекающий контур только в двух точках. Доказано [46], что гладкие контуры обладают этим свойством.

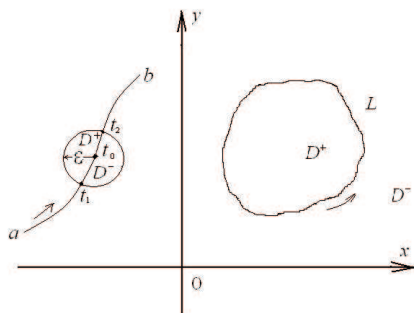


Рис. 2.

Пусть t_0 — точка контура L и точка z стремится к t_0 , оставаясь все время в D^+ . Если при этом интеграл $\phi(z)$ стремится к определенному пределу $\phi^+(t_0)$ независимо от того, каким образом z стремится

к t_0 , то этот предел мы будем называть *предельным значением интеграла типа Коши слева*. Аналогично, если $\phi(z)$ стремится к определенному пределу $\phi^-(t_0)$, когда z любым образом стремится к t_0 , оставаясь все время в D^- , то последний предел мы будем называть *предельным значением интеграла типа Коши справа*.

Таким образом, если предельные значения интеграла типа Коши $\phi^+(t_0)$ и $\phi^-(t_0)$ существуют, то по определению

$$\phi^+(t_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow t_0, \\ z \in D^+}} \phi(z), \quad \phi^-(t_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow t_0, \\ z \in D^-}} \phi(z),$$

и как уже доказано в § 1.3, справедливы формулы Племелья — Сохоцкого

$$\phi^+(t_0) = \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt,$$

$$\phi^-(t_0) = -\frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt.$$

Интегралы типа Коши (3.1.1) и его главное значение (3.1.2) точно вычисляются очень редко. Однако можно указать случай, когда оба интеграла вычисляются точно. Это бывает, когда интегралы имеют первообразные.

Пусть дифференцируемая функция двух переменных $F(t_0, z)$ удовлетворяет условию $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\varphi(t)}{t-z}$. Тогда эту функцию будем называть первообразной интеграла (3.1.1). Аналогично дифференцируемую функцию двух переменных $H(t, t_0)$, удовлетворяющую условию $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\varphi(t)}{t-t_0}$, будем называть первообразной интеграла (3.1.2). При существовании первообразной у интегралов (3.1.1) и (3.1.2) их можно весьма просто вычислить точно, если воспользоваться известной в математическом анализе формулой Ньютона — Лейбница, которая справедлива и для криволинейных интегралов [55]. Затруднение при этом представляет лишь то обстоятельство, что первообразная интегралов (3.1.1) и (3.1.2) является многозначной функцией. Поэтому при вычислении мы обязаны внимательно выбрать соответствующие значения.

Первообразная интегралов (3.1.1) и (3.1.2), как уже указывалось, существует очень редко, и, кроме того, она является многозначной функцией, что вызывает затруднения при вычислении интегралов

типа Коши с поиском первообразной. Однако иногда удается применить для интеграла типа Коши или его главного значения (сингулярного интеграла) с данной конкретной плотностью некоторый прием, использующий какое-нибудь специфическое свойство данного конкретного интеграла, которое дает возможность вычислить этот интеграл точно. Таковыми могут являться элементарное свойство криволинейного интеграла, удачная замена переменных, известное свойство аналитических функций и тому подобное.

В связи со сказанным, рассмотрим некоторые примеры.

ПРИМЕР 1. Вычислим интеграл типа Коши и сингулярный интеграл

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{t-z} dt, \quad z \notin L, \quad (3.1.3)$$

$$S(1, t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{1}{t-t_0} dt, \quad t_0 \in L. \quad (3.1.4)$$

Первообразная для интеграла (3.1.3) есть логарифмическая функция $F(t, z) = \text{Ln}(t-z)$, которая, как известно [55], многозначна и состоит из бесконечного числа ветвей $\ln(t-z)$, однозначных в плоскости с разрезом вдоль любой гладкой кривой, соединяющей точки разветвления t и ∞ . Очевидно, любая из ветвей $\ln(t-z)$ может быть взята в качестве первообразной. Под $\ln(t-z)$, где $t \in L$, будем понимать ветвь, однозначную в плоскости с разрезом, проведенным вдоль контура L от точки t до точки b в бесконечно удаленную точку. Применяя к интегралу (3.1.3) формулу Ньютона — Лейбница, имеем

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} (\ln(b-z) - \ln(a-z)),$$

где каждый из логарифмов представляет собой введенную нами ветвь $\ln(t-z)$ при $t=a$ или $t=b$. Но легко видеть, что при обходе контура L по любому замкнутому пути L' (см. рис. 3) аргументы величин $(b-z)$ и $(a-z)$ получают одинаковое приращение $\pm 2\pi$, поэтому функции $\ln(b-z)$ и $\ln(a-z)$ получают при обходе по L' одинаковое приращение $\pm 2\pi i$.

Следовательно, функция, стоящая в правой части последнего равенства, при переходе через разрез по линии, соединяющая точку b и бесконечно удаленную точку, ведет себя как функция непрерывная,

и точное значение интеграла $\Phi_0(z)$ можно записать в виде

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{b-z}{a-z} = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z-b}{z-a}, \quad (3.1.5)$$

где под $\ln \frac{b-z}{a-z} = \ln \frac{z-b}{z-a}$ подразумевается ветвь, однозначная на разрезанной вдоль контура L плоскости и исчезающая в бесконечности.

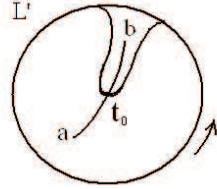


Рис. 3.

Для вычисления интеграла (3.1.4) (см. § 1.4) опишем около точки $t_0 \in L$ окружность радиуса ε . Тогда справедливо представление

$$S(1, t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_\varepsilon + \gamma} \frac{1}{t - t_0} dt - \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{t - t_0} dt,$$

где γ — часть окружности радиуса ε с центром в точке t_0 , лежащая справа от L , а $L_\varepsilon + \gamma$ — контур, представляющий собой сплошную линию, состоящую из L_ε и дуги окружности γ (на чертеже $L_\varepsilon + \gamma = at_1 + \gamma + t_2b$, $\gamma = t_1t_2$).

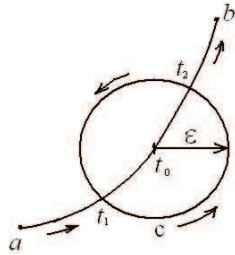


Рис. 4.

Так как $t_0 \notin L_\varepsilon + \gamma$, то для вычисления первого интеграла можно воспользоваться формулой (3.1.5), согласно которой

$$\frac{1}{\pi i} \int_{L_\varepsilon + \gamma} \frac{1}{t - t_0} dt = \frac{1}{\pi i} \ln \frac{b - t_0}{a - t_0},$$

где в правой части подразумевается значение, принимаемое слева от L в точке t_0 ветвью функции $\frac{1}{\pi i} \ln \frac{b-z}{a-z}$, аналитической в плоскости с разрезом вдоль $L_\varepsilon + \gamma$ и исчезающей на бесконечности.

Будем понимать под $\ln(t - t_0)$ предельное значение на L слева ветви $\ln(z - t_0)$ логарифмической функции, однозначной в плоскости с разрезом вдоль контура L от точки t_0 до точки b и далее вдоль любой кривой до бесконечности. Тогда

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{t - t_0} dt = \frac{1}{\pi i} (\ln(t_2 - t_0) - \ln(t_1 - t_0)),$$

и так как $|t_2 - t| = |t_1 - t| = \varepsilon$, то

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{t - t_0} dt = \frac{\alpha}{\pi},$$

где α показывает изменение аргумента $t - t_0$ при перемещении из точки t_1 в точку t_2 .

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая, что при этом $\alpha \rightarrow \pi$ и $L_\varepsilon \rightarrow L$, найдем

$$S(1, \varepsilon_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{1}{t - t_0} dt = \frac{1}{\pi i} \ln \frac{b - t_0}{a - t_0} - 1. \quad (3.1.6)$$

Аналогичными рассуждениями при замкнутом контуре получаем

$$\Phi_0(z) = \begin{cases} 1, & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-, \end{cases}$$

$$S(1, t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{1}{t - t_0} dt = 1.$$

Отметим, что в [46] аналогичные интегралы вычислены.

ПРИМЕР 2. Пусть a — некоторая конечная точка на плоскости z и пусть в окрестности этой точки функция $f(z)$ имеет следующий вид:

$$f(z) = G(z) + f_0(z), \quad (3.1.7)$$

где $f_0(z)$ — функция, голоморфная в окрестности точки a , т. е. ее можно разложить в окрестности этой точки в ряд Тейлора, а функция

$$G(z) = \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(z-a)^k}, \quad (3.1.8)$$

где $A_1, A_2, \dots, A_k$ — некоторые, вообще говоря, комплексные постоянные.

В таком случае говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке a полюс порядка k с главной частью $G(z)$.

Аналогично, если в окрестности точки $z = \infty$, т. е. при достаточно больших $|z|$ имеет место формула (3.1.7), но на этот раз функция $f_0(z)$ голоморфная в окрестности точки $z = \infty$ исчезающая при $z = 0$, а функция

$$G(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_k z^k, \quad (3.1.9)$$

где $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$ — постоянные, то говорят, что $f(z)$ имеет в точке $z = \infty$ полюс порядка k с главной частью $G(z)$.

Пусть L — простой замкнутый гладкий контур в плоскости комплексного переменного z , разделяющий ее на области (как это сделали выше) D^+ и D^- . Тогда, если функция $f(z)$ голоморфна в D^+ и непрерывна в $D^+ \cup L$, за исключением, быть может, точек $a_1, a_2, \dots, a_m$ области D^- , где она имеет полюсы с главными частями $G_1(z), G_2(z), \dots, G_m(z)$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f_0(z) - \sum_{n=1}^m G_n(z), & z \in D^+, \\ - \sum_{n=1}^m G_n(z), & z \in D^-. \end{cases} \quad (3.1.10)$$

Если же функция $f(z)$ голоморфна в D^- и непрерывна в $D^- \cup L$, за исключением, быть может, точек $a_1, a_2, \dots, a_m$ (в том числе и точки $z = \infty$) этой области, где она имеет полюсы с главными частями

$G_1(z), G_2(z), \dots, G_m(z)$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} \sum_{n=1}^m G_n(z), & z \in D^+, \\ -f_0(z) + \sum_{n=1}^m G_n(z), & z \in D^-. \end{cases}$$

ПРИМЕР 3. Справедлива формула

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{dt}{\sqrt{l^2 - t^2}(t-x)} = \begin{cases} 0, & |x| < l, \\ -\frac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{x^2 - l^2}}, & |x| > l. \end{cases} \quad (3.1.11)$$

3.2. Квадратурные формулы интерполяционного типа

В задачах аналитических функций комплексной переменной особое место занимают интегралы типа Коши, которые как отмечено выше, редко вычисляются точно. В этом параграфе мы изложим несколько методов их приближенного вычисления. Итак, рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad z \notin L, \quad (3.2.1)$$

где L — замкнутый или разомкнутый гладкий контур, а $\varphi(t)$ — заданная функция на L .

1. Разделим контур L на n частей равномерно относительно длины точками $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$, т. е. $\tau_\sigma = t(s_\sigma)$, где $s_\sigma = \sigma \frac{l}{n}$, l — длина контура, имеющего уравнение $t = t(s) = x(s) + iy(s)$, s — дуговая абсцисса. Далее, задав фиксированное натуральное число m , каждый из сегментов $[s_\sigma, s_{\sigma+1}]$ разделим на m частей точками $s_{\sigma k} = s_\sigma + h x_k$, $\sigma = 0, 1, \dots, n-1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $h = l/n$, где $\{x_k\}_{k=0}^{m-1}$ — некоторая система точек, заданных на отрезке $[0, 1]$, и обозначим

$$t_{\sigma k} = t(s_{\sigma k}), \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Очевидно при этом, что если одновременно $x_0 = 0$, $x_{m-1} = 1$, то $t_{\sigma, m-1} = t_{\sigma+1, 0} = \tau_{\sigma+1}$, $\sigma = 0, 1, \dots, m-1$.

Далее, $\omega_\sigma(t) = \prod_{k=0}^{m-1} (t - t_{\sigma k})$, $\sigma = 0, 1, \dots, n-1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$;

$$L_\sigma(\varphi; t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\sigma(t)}{(t - t_{\sigma k}) \omega'_\sigma(t_{\sigma k})} \varphi(t_{\sigma k}), \quad (3.2.2)$$

$$\sigma = 0, 1, \dots, n-1.$$

Интеграл (3.2.1) представим в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \quad (3.2.3)$$

и, подставляя в (3.2.3) вместо $\varphi(t)$ ее приближенное значение (3.2.2), получим

$$\begin{aligned} \Phi(z) \approx & \sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{1}{t-z} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\sigma(t)}{(t-t_{\sigma k})\omega'_\sigma(t_{\sigma k})} \times \\ & \times \varphi(t_{\sigma k}) dt = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} A_{\sigma k}(z) \varphi(t_{\sigma k}), \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

где

$$A_{\sigma k}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\omega'_\sigma(t_{\sigma k})} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\omega_\sigma(t)}{(t-z)(t-t_{\sigma k})} dt.$$

При $m = 4$ получаем формулу

$$\Phi(z) = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^3 A_{\sigma k}(z) \varphi(t_{\sigma k}),$$

где

$$\begin{aligned} A_{\sigma k}(z) = & \frac{1}{2\pi i \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 (t_{\sigma k} - t_{\sigma j})(z - t_{\sigma k})} \left\{ \frac{\tau_{\sigma+1}^4 - \tau_\sigma^4}{4} + z \frac{\tau_{\sigma+1}^3 - \tau_\sigma^3}{3} + \right. \\ & + z^2 \frac{\tau_{\sigma+1}^2 - \tau_\sigma^2}{2} + z^3 (\tau_{\sigma+1} - \tau_\sigma) - a_\sigma \left(\frac{\tau_{\sigma+1}^3 - \tau_\sigma^3}{3} + z \frac{\tau_{\sigma+1}^2 - \tau_\sigma^2}{2} + \right. \\ & + z^2 (\tau_{\sigma+1} - \tau_\sigma) \Big) + b_\sigma \left(\frac{\tau_{\sigma+1}^2 - \tau_\sigma^2}{2} + z (\tau_{\sigma+1} - \tau_\sigma) \right) - \\ & - c_\sigma (\tau_{\sigma+1} - \tau_\sigma) + (z^4 - z^3 a_\sigma + z^2 b_\sigma - z c_\sigma + d_\sigma) \times \\ & \times \ln \frac{\tau_{\sigma+1} - z}{\tau_\sigma - z} - \frac{\tau_{\sigma+1}^4 - \tau_\sigma^4}{4} + \frac{\tau_{\sigma+1}^3 - \tau_\sigma^3}{3} \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} - \\ & \left. - \frac{\tau_{\sigma+1}^2 - \tau_\sigma^2}{2} \sum_{\substack{k \neq j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 t_{\sigma j} t_{\sigma j_0} + (\tau_{\sigma+1} - \tau_\sigma) \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} \right\}, \end{aligned}$$

$$a_\sigma = \sum_{j=0}^3 t_{\sigma j}, \quad b_\sigma = \sum_{\substack{j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 t_{\sigma j} t_{\sigma j_0},$$

$$c_\sigma = \sum_{\substack{j, j_0, j_1=0, \\ j < j_0 < j_1}}^3 t_{\sigma j} t_{\sigma j_0} t_{\sigma j_1}, \quad d_\sigma = \prod_{j=0}^3 t_{\sigma j}.$$

2. Более простую формулу получаем, когда L — замкнутый гладкий контур, и если $\varphi(t)$ будем аппроксимировать по узлам $\{\tau_k\}_{k=0}^{n-1}$ по формуле Лагранжа

$$L_n(\varphi; t) = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{\omega(t)}{(t - \tau_\sigma)\omega'(\tau_\sigma)} \varphi(\tau_\sigma), \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1,$$

где

$$\omega(t) = \prod_{\sigma=0}^{n-1} (t - \tau_\sigma), \quad \omega'(\tau_\sigma) = \prod_{\substack{k=0, \\ k \neq \sigma}}^{n-1} (\tau_\sigma - \tau_k).$$

Тогда, подставляя последнее выражение вместо $\varphi(t)$ в (3.2.1), получим

$$\Phi(z) \approx \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_L \frac{\omega(t)}{(t - \tau_\sigma)\omega'(\tau_\sigma)} \cdot \frac{1}{t - z} \varphi(\tau_\sigma) dt. \quad (3.2.5)$$

Используя представление

$$\frac{1}{(t - \tau_\sigma)(t - z)} = \frac{1}{z - \tau_\sigma} \left(-\frac{1}{t - \tau_\sigma} + \frac{1}{t - z} \right),$$

формулу (3.2.5) можно записать в следующем виде:

$$\Phi(z) \approx \sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{\varphi(\tau_\sigma)}{(z - \tau_\sigma)\omega'(\tau_\sigma)} \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{t - \tau_\sigma} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{t - z} dt \right).$$

Из полученных интегралов один является интегралом типа Коши, а другой сингулярным. При этом их плотности являются многочленами. Указанные интегралы вычисляются по известным форму-

лам Коши и Племяля — Сохоцкого. Воспользовавшись этими формулами, получим

$$\Phi(z) \approx \sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{\varphi(\tau_\sigma)}{(z - \tau_\sigma)\omega'(\tau_\sigma)} \left(\omega(z) - \frac{1}{2} \omega(\tau_\sigma) \right)$$

или

$$\Phi(z) \approx \sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{\omega(z)}{(z - \tau_\sigma)\omega'(\tau_\sigma)} \varphi(\tau_\sigma). \quad (3.2.6)$$

3. Пусть теперь γ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат и пусть на γ определена достаточно гладкая функция $\varphi(t)$. Построим интерполяционный многочлен $u_n(\varphi; t) = \sum_{k=-n}^n a_k t^k$, где

$$a_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \varphi(\tau_j) \tau_j^{-k}, \quad \tau_j = e^{\frac{2\pi i}{2n+1} j}. \quad (3.2.7)$$

Нетрудно проверить, что

$$u_n(\varphi; t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \varphi(\tau_j) \left(\frac{t}{\tau_j} \right)^{-n} \frac{1 - \left(\frac{t}{\tau_j} \right)^{2n+1}}{1 - \frac{t}{\tau_j}} \quad (3.2.8)$$

и $u_n(\varphi; \tau_j) = \varphi(\tau_j)$.

Теорема 3.2.1 [19]. *Справедлива оценка*

$$|u_n(\varphi; t)| \leq \left(\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\pi} (2n+1) \right) \max_j |\varphi(\tau_j)|. \quad (3.2.9)$$

Подставляя (3.2.7) в (3.2.1), получим

$$\Phi(z) \simeq \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{t-z} \left(\frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n a_k t^k \right) dt.$$

На основании свойства интеграла типа Коши находим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} \Phi^+(z) \simeq \sum_{k=0}^n a_k z^k, & |z| \leq 1, \\ \Phi^-(z) \simeq - \sum_{k=-n}^{-1} a_k z^k, & |z| \geq 1, \end{cases} \quad (3.2.10)$$

где a_k определяются формулой (3.2.7).

Теорема 3.2.2 [19]. *Справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \max_{|z| \leq 1} \left| \Phi^+(z) - \sum_{k=0}^n a_k z^k \right| + \max_{|z| \geq 1} \left| \Phi^-(z) - \sum_{k=-n}^{-1} a_k z^k \right| &\leq \\ &\leq \left(2 + \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} \ln \frac{2}{\pi} (2n+1) \right) \rho_n(\varphi), \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

где $\rho_n(\varphi) = \inf_{H_n} \|\varphi - T_n\|_W$.

Пусть H_n — совокупность всех многочленов вида $\sum_{k=-n}^n a_k t^k$, $T_n \in H_n$, а W — пространство функции $\varphi(t)$, для которых Φ^+ и Φ^- непрерывны, причем

$$\|\varphi\|_{W(\Gamma)} = \max_{t \in L} |\Phi^+(t)| + \max_{t \in L} |\Phi^-(t)|,$$

$\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ — суть предельные значения интеграла типа Коши.

При аппроксимации $\varphi(t)$ отрезком ряда Фурье — Лорана,

$$\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k t^k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^{k+1}} d\tau,$$

получаем следующий результат.

Теорема 3.2.3 [19]. *Справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \left| \Phi^+(z) - \sum_0^{\infty} c_k z^k \right| &\leq r^{n+1} \max \left| \Phi^+(t) - \sum_0^n c_k t^k \right|, \quad |z| \leq r \leq 1, \\ \left| \Phi^-(z) - \sum_{-n}^{-1} c_k z^k \right| &\leq r^{n+1} \max \left| \Phi^-(t) - \sum_{-n}^{-1} c_k t^k \right|, \quad |z| \geq \frac{1}{r} \geq 1. \end{aligned}$$

3.3. Квадратурные формулы для интегралов типа Коши с применением свободных параметров

Численная реализация тех или иных задач с применением метода граничных интегральных уравнений на завершающем этапе обычно требует приближенного вычисления интегралов типа Коши вида

$$S(\varphi; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$$

и их производных различных порядков для значения z из некоторой конечной или бесконечной области D комплексной плоскости, ограниченной контуром L .

Так, например, обстоит дело при определении напряжений и смещений методом комплексных потенциалов в задачах плоской теории упругости после решения соответствующих граничных интегральных уравнений [45].

Такие интегралы могут быть приближенно вычислены в фиксированных точках $z \in D$ обычными квадратурными формулами. Однако точность таких формул может существенно понижаться при сколь угодно близком приближении z к границе области.

В данном параграфе предлагается приближенная схема для интегралов типа Коши, основанная на определенном процессе аппроксимации их плотностей. Такие схемы приводят к довольно удобно реализуемым процессам и позволяют получать равномерные оценки погрешностей во всей области вплоть до ее границы.

Будем считать контур L гладким и замкнутым. Введем систему точек (узлов) $\{\tau_\sigma\}_{\sigma=1}^n$, разбивающих L на равные части, причем возрастание индексов соответствует положительному направлению обхода с учетом периодичности. Пусть $L_\nu(\varphi; t) = l_{\nu 0}(t)\varphi(\tau_\nu) + l_{\nu 1}(t)\varphi(\tau_{\nu+1})$ ($\nu = 1, \dots, n$) — Лагранжев линейный интерполянт. Полагая, что t_0 — произвольная точка L , а ν ($1 \leq \nu \leq n$) — номер, для которого $t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}$, будем приближать функцию $\varphi(t)$, $t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$ ($1 \leq \sigma \leq n$) следующим образом:

$$\varphi(t) \approx L_\nu(\varphi; t_0) + (t - t_0) \sum_{k=0}^1 l_{\sigma k}(t) \frac{\varphi(\tau_{\sigma+k}) - L_{nk}(\varphi; t_0)}{\tau_{\sigma+k} - t_0}, \quad (3.3.1)$$

$$t_0 \neq \tau_{\sigma+k},$$

где $L_{nk}(\varphi; t_0) = \varphi(t_0)$ при $\sigma + k \neq \nu, \nu + 1$; $L_{nk}(\varphi; t_0) = L_n(\varphi; t_0)$ при $\sigma + k = \nu, \nu + 1$, $\sigma = 1, \dots, n$, $k = 0, 1$.

Выражения в правой части (3.3.1) имеют смысл при $t_0 = \tau_{\sigma+k}$, если рассматривать их в этих точках как соответствующие предельные значения.

На основе замены $\varphi(t)$ в $S(\varphi; z)$ выражением (3.3.1) имеем

$$S(\varphi; z) \approx S(1, z)L_\nu(\varphi; t_0) + \sum_{\sigma=1}^n p_{\sigma k}(t_0, z) \frac{\varphi(\tau_{\sigma+k}) - L_{nk}(\varphi; t_0)}{\tau_{\sigma+k} - t_0}, \quad (3.3.2)$$

где

$$p_{\sigma k}(t_0, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} l_{\sigma k}(t) dt + \frac{z - t_0}{2\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{l_{\sigma k}(t)}{t - z} dt.$$

Таким образом, правая часть формулы (3.3.2) определена для любого $t_0 \in L$.

Исследование точности приближения по формуле (3.3.2) может быть основано на оценке погрешности приближенной формулы (3.3.1) полагая, что $\varphi(t)$ представляет непрерывную, дважды дифференцируемую функцию с ограниченной второй производной $\varphi''(t)$, $t \in L$. Остаточный член этой формулы при любом $t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$ ($\sigma = 1, \dots, n$) можно представить в виде

$$\varphi(t_0) - L_n(\varphi; t_0) + (t - t_0)r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0),$$

где

$$r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0) = \varphi(t, t_0) - \sum_{k=0}^1 l_{\sigma k}(t) \frac{\varphi(\tau_{\sigma+k}) - L_{nk}(\varphi; t_0)}{\tau_{\sigma+k} - t_0},$$

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}.$$

На основе тейлоровского представления $\varphi(t)$ с учетом предположений относительно $\varphi''(t)$ и гладкости L для $\varphi(t_0) - L_\nu(\varphi; t_0)$ имеет оценку $O(1/n^2)$, равномерную относительно $t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}$, $1 \leq \nu \leq n$.

Оценка $r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0)$ основывается на разложении

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \lambda_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0) + (t - t_0) \times \\ &\times \left(2 \int_{\tau_\sigma t} \frac{(\tau - t)}{(\tau - t_0)^3} d\tau \int_{\tau t_0} (t_0 - u) \varphi''(u) du - \int_{\tau_\sigma t} \frac{\tau - t}{\tau - t_0} \varphi''(\tau) d\tau \right), \\ t &\in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}, \quad t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}, \quad \sigma \neq \nu \pm 1, \nu, \end{aligned}$$

где выражение

$$\begin{aligned} \lambda_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0) &= \varphi(t_0) + \frac{t - t_0}{\tau_\sigma - t_0} [\varphi(\tau_\sigma) - \varphi(t_0)] + \\ &+ \frac{(t - t_0)(t - \tau_\sigma)}{(t_0 - \tau_\sigma)^2} \int_{\tau_\sigma t_0} (t_0 - u) \varphi''(u) du \end{aligned}$$

при любом σ представляет собой многочлен степени не больше двух относительно t , принимающий значение $\varphi(t_0)$ при $t = t_0$. Учитывая, что $r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0)$ обращается в нуль на таких многочленах, получаем

$$\begin{aligned} r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0) = & (t - t_0) \left(2 \int_{\tau_{\sigma} t} \frac{(\tau - t)}{(\tau - t_0)^3} d\tau \times \right. \\ & \times \int_{\tau t_0} (t_0 - u) \varphi''(u) du - \int_{\tau_{\sigma} t} \frac{\tau - t}{\tau - t_0} \varphi''(\tau) d\tau \Big) - \\ & - l_{\sigma 1}(t) \left(2 \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \frac{(\tau_{\sigma+1} - \tau)}{(t_0 - \tau)^3} d\tau \int_{\tau t_0} (t_0 - u) \varphi''(u) du - \right. \\ & \left. - \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \frac{(\tau_{\sigma+1} - \tau)}{(t_0 - \tau)} \varphi''(\tau) d\tau \right), \quad \sigma \neq \nu \pm 1, \nu. \end{aligned} \quad (3.3.3.)$$

Заметив, что окончательная оценка погрешности сводится к оценке суммы

$$\sum_{\sigma=1}^n \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \frac{(t - t_0) r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0)}{t - z} dt.$$

Представим эту сумму в следующем виде:

$$\sum_{\sigma=1}^n \left(\int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0) dt + (z - t_0) \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \frac{r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0)}{t - z} dt \right), \quad (3.3.4)$$

где под $r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0)$ подразумевается полученное выше интегральное представление (3.3.3). Сумма независимых от z интегралов (3.3.4) с учетом принятого предположения относительно ограниченности $\varphi''(t)$ имеет оценку $O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$, независимо от значения $t_0 \in L$. Для оценки же оставшейся части представления (3.3.4) в качестве являющегося до сих пор свободным параметра t_0 будем подразумевать ближайшую к z точку контура L . Тогда получаем равномерную относительно z оценку $O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$.

Приближенное вычисление продифференцированного интеграла типа Коши

$$S'(\varphi; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t - z)^2} dt, \quad z \in L \quad (3.3.5)$$

осуществляется на основе приближения плотности $\varphi(t)$ по формуле

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\approx \varphi(t_0) + (t - t_0) \frac{L_\nu(\varphi; t_1) - L_\nu(\varphi; t_0)}{t_1 - t_0} + (t - t_0)(t - t_1) \times \\ &\times \sum_{k=0}^1 \frac{l_{\sigma k}(t)}{\tau_{\sigma+k} - t_0} \left(\frac{\varphi(\tau_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}(\varphi; t_1)}{\tau_{\sigma+k} - t_1} - \frac{L_\nu(\varphi; t_1) - L_\nu(\varphi; t_0)}{t_1 - t_0} \right), \\ t &\in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}, \quad t_1 \neq t_0, \quad \tau_{\sigma+k} \neq t_0, t_1, \end{aligned}$$

содержащей в данном случае два (также подлежащих дальнейшему выбору) параметра $t_0, t_1 \in L$. Это приводит к приближенной формуле

$$\begin{aligned} S'(\varphi; z) &\approx S(\varphi; z) (L_\nu(\varphi; t_1) - L_\nu(\varphi; t_0)) \frac{1}{t_1 - t_0} + \\ &+ \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=0}^1 \frac{p_{\sigma k}^{(1)}(t_0, t_1, z)}{\tau_{\sigma+k} - t_0} \left(\frac{\varphi(\tau_{\sigma+k}) - L_{\sigma k}(\varphi; t_0)}{\tau_{\sigma+k} - t_1} - \frac{L_\nu(\varphi; t_1) - L_\nu(\varphi; t_0)}{t_1 - t_0} \right). \end{aligned}$$

При этом смысл выражений (коэффициентов) $p_{\sigma k}^{(1)}$ здесь заведомо ясен. К тому же, можно убедиться, что правая часть приведенной формулы имеет конечные значения при $t_0, t_1 \rightarrow \tau_{\sigma+k}$ (при значениях σ, k таких, что t_0 и t_1 могут оказаться равными $\tau_{\sigma+k}$). Допущение $t_1 - t_0 \rightarrow 0$, которое принято в дальнейшем, также оказывается возможным и определяет выбор общего значения этих параметров в зависимости от положения z в области D таким же образом, как и при изложенной выше аппроксимации $S(\varphi; z)$. При таком подходе к выбору параметров $t_0, t_1 \in L$ определение коэффициентов $p_{\sigma k}^{(1)}$ сводится к вычислению интегралов вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{(t - t_0)^2 l_{\sigma k}(t)}{(t - z)^2} dt, \quad \sigma = 1, \dots, n.$$

Предложенный путь к построению приближенного алгоритма для $S'(\varphi; z)$ при сделанном выше предположении относительно плотности $\varphi(t)$ позволяет получить для погрешности схемы оценку $O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ (равномерно относительно z по области D).

3.4. Квадратурные формулы для интегралов типа Коши встречающихся в формулах для напряжений и смещений в задачах плоской теории упругости

В задачах плоской теории упругости [45] широко используются интегралы типа Коши вида

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, & u_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} d\bar{t}, \\ u_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\varphi(t)}{(t-z)^2} dt, & u_3(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\varphi(t)}{(t-z)^3} dt, \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

где L — замкнутый гладкий контур, $\varphi(t)$ — заданная функция на L , $z \in D$ — внутренняя точка области D , ограниченной контуром L . Обычно такие интегралы вычисляются методом аппроксимации функции $\varphi(t)$ многочленами на дугах $\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$ ($\sigma = 0, 1, \dots, n-1$), где точки $\tau_\sigma \in L$ равномерно распределены на контуре L , т. е. интегрируются с помощью обыкновенных квадратурных формул. Однако точность таких формул может существенно понижаться при приближении z к границе области.

В предыдущем параграфе мы изложили новый метод приближенного вычисления интегралов типа Коши, основанный на выборе свободных параметров. Построенная вычислительная схема легко реализуема и позволяет получать равномерные оценки погрешности по всей области вплоть до границы. Но она пригодна в основном для первого интеграла из (3.4.1). Мы обобщаем и уточняем указанный метод до такой степени, чтобы можно было вычислять все интегралы в (3.4.1).

Будем считать контур L гладким и замкнутым. Введем систему точек (узлов) τ_σ ($\sigma = 0, 1, \dots, n-1$), разбивающих L на равные части, причем возрастанию индексов соответствует положительное направление обхода с учетом периодичности. Полагая, что t_0, t_1, t_2 — произвольные точки контура L , а ν ($0 \leq \nu \leq n-1$) — номер, для которого $t_0, t_1, t_2 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}$, будем представлять функцию $\varphi(t)$, $t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$ ($0 \leq \sigma \leq n-1$), следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(t_0) + (t-t_0)\varphi(t_0, t_1) + (t-t_0)(t-t_1)\varphi(t_0, t_1, t_2) + \\ &\quad + (t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)\varphi(t, t_0, t_1, t_2), \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

т. е. по интерполяционной формуле Ньютона, где $\varphi(t_0, t_1)$, $\varphi(t_0, t_1, t_2)$, $\varphi(t, t_0, t_1, t_2)$ — разделенные разности соответственно первого, второго и третьего порядков. Они вычисляются по формуле

$$\varphi(t_0, t_1, \dots, t_n) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi(t_k)}{\prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^n (t_k - t_j)}.$$

Приближенную формулу для $\varphi(t)$ можно записать так:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t) = & \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi(t_0, t_1) + (t - t_0)(t - t_1)\varphi(t_0, t_1, t_2) + \\ & + (t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) \sum_{k=0}^2 l_{\sigma k}(t) \varphi(\tau_{\sigma+k}, t_0, t_1, t_2), \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

где $l_{\sigma k}(t) = \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^2 \frac{t - \tau_{\sigma+j}}{\tau_{\sigma+k} - \tau_{\sigma+j}}$ — фундаментальные многочлены Лагранжа.

Из формул (3.4.2) и (3.4.3) следует, что погрешность имеет вид

$$r_n(t) = \varphi(t) - \tilde{\varphi}(t) = (t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)r_n(\varphi; t, t_0, t_1, t_2), \quad (3.4.4)$$

где

$$r_n(\varphi; t, t_0, t_1, t_2) = \varphi(t, t_0, t_1, t_2) - \sum_{k=0}^2 l_{\sigma k}(t) \varphi(\tau_{\sigma+k}, t_0, t_1, t_2). \quad (3.4.5)$$

С учетом структуры остаточного члена интерполяционного многочлена Лагранжа получаем

$$r_n(\varphi; t, t_0, t_1, t_2) = \frac{(t - t_\sigma)(t - t_{\sigma+1})(t - t_{\sigma+2})}{3!} \varphi'''(t^*, t_0, t_1, t_2),$$

$$t^* \in t_\sigma t_{\sigma+2}.$$

Справедливы формулы

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(t, t_0, t_1, t_2) &= \frac{(-1)^{n-1} \int_{t_2} (t_2 - u)^n \varphi^{(n+1)}(u, t_0, t_1)}{(t - t_2)^{n+1}} du, \\ \varphi^{(n)}(t, t_0, t_1) &= \frac{(-1)^{n-1} \int_{t_1} (t_1 - u)^n \varphi^{(n+1)}(u, t_0)}{(t - t_1)^{n+1}} du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(t, t_0) &= \frac{(-1)^{n-1} \int_{tt_0} (t_0 - u)^n \varphi^{(n+1)}(u)}{(t - t_0)^{n+1}} du, \\ \frac{d}{da} \left(\frac{1}{(x - a)^n} \int_a^x (x - u)^{n-1} \varphi^{(n)}(u) du \right) &= \\ &= \frac{1}{(x - a)^{n+1}} \int_a^x (x - u)^n \varphi^{(n+1)}(u) du.\end{aligned}$$

Они доказываются методом индукции.

Тогда нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned}\varphi'''(t, t_0, t_1, t_2) &= \frac{1}{(t - t_2)^4} \int_{tt_2} \frac{(t_2 - u)^3}{(t_1 - u)^5} du \times \\ &\times \int_{ut_1} \frac{(t_1 - v)^4}{(t_0 - v)^6} dv \int_{vt_0} (t_0 - \tau)^5 \varphi^{(6)}(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что в предположении существования ограниченной 6-й производной на L функции φ справедлива оценка

$$|r_n(\varphi; t, t_0, t_1, t_2)| \leq O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Теперь возьмем первый интеграл в (3.4.1) и представим его так:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt.$$

Заменив функцию $\varphi(t)$ через $\tilde{\varphi}(t)$ и выполнив соответствующие выкладки, получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - z} dt &\approx \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\tilde{\varphi}(t)}{t - z} dt = \\ &= \varphi(t_0) + (z - t_0)\varphi(t_0, t_1) + (z - t_0)(z - t_1)\varphi(t_0, t_1, t_2) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int \frac{(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) \sum_{\sigma=0}^2 l_{\sigma k}(t) \varphi(\tau_{\sigma+k}, t_0, t_1, t_2)}{t - z} dt.\end{aligned}$$

Итак, получили

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt &\approx \varphi(t_0) + (z-t_0)\varphi(t_0, t_1) + \\ &+ (z-t_0)(z-t_1)\varphi(t_0, t_1, t_2) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \left(A_\sigma(z)\varphi(\tau_\sigma, t_0, t_1, t_2) + \right. \\ &\left. + A_{\sigma+1}(z)\varphi(\tau_{\sigma+1}, t_0, t_1, t_2) + A_{\sigma+2}(z)\varphi(\tau_{\sigma+2}, t_0, t_1, t_2) \right), \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

где

$$\begin{aligned} A_\sigma(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)l_{\sigma_0}(t)}{t-z} dt, \\ A_{\sigma+1}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)l_{\sigma_1}(t)}{t-z} dt, \\ A_{\sigma+2}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)l_{\sigma_2}(t)}{t-z} dt. \end{aligned}$$

Все перечисленные интегралы вычисляются точно. Для них получаем:

$$\begin{aligned} A_\sigma(z) &= \frac{1}{2\pi i(\tau_\sigma - \tau_{\sigma+1})(\tau_\sigma - \tau_{\sigma+2})} \left\{ \frac{1}{5} \left((\tau_{\sigma+1} - z)^5 - (\tau_\sigma - z)^5 \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{4} \left((\tau_{\sigma+1} - z)^4 - (\tau_\sigma - z)^4 \right) (z-t_0 + z-t_1 + z-t_2 + z-\tau_{\sigma+1} + \\ &+ z-\tau_{\sigma+2}) + \frac{1}{3} \left((\tau_{\sigma+1} - z)^3 - (\tau_\sigma - z)^3 \right) \left[(z-t_1)(z-t_2) + \right. \\ &+ (z-t_0)(z-t_2) + (z-t_0)(z-t_1) + (z-\tau_{\sigma+1} + z-\tau_{\sigma+2}) \times \\ &\times (z-t_0 + z-t_1 + z-t_2)(z-\tau_{\sigma+1})(z-\tau_{\sigma+2}) \left. \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left((\tau_{\sigma+1} - z)^2 - (\tau_\sigma - z)^2 \right) \left[(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2) + \right. \\ &+ (z-\tau_{\sigma+1} + z-\tau_{\sigma+2}) \left((z-t_1)(z-t_2) + (z-t_0)(z-t_2) + \right. \\ &+ (z-t_0)(z-t_1) \left. \right) + (z-t_0 + z-t_1 + z-t_2)(z-\tau_{\sigma+1})(z-\tau_{\sigma+2}) \left. \right] + \\ &+ (\tau_{\sigma+1} - \tau_\sigma) \left[(z-\tau_{\sigma+1} + z-\tau_{\sigma+2})(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2) + \right. \\ &+ \left. \left((z-t_1)(z-t_2) + (z-t_0)(z-t_2) + (z-t_0)(z-t_1) \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times (z - \tau_{\sigma+1})(z - \tau_{\sigma+2})] + (z - t_0)(z - t_1) \times \\ \times (z - t_2)(z - \tau_{\sigma+1})(z - \tau_{\sigma+2}) \ln \frac{\tau_{\sigma+1} - z}{\tau_{\sigma} - z} \Big\};$$

$$A_{\sigma+1}(z) = \frac{1}{2\pi i(\tau_{\sigma+1} - \tau_{\sigma})(\tau_{\sigma+1} - \tau_{\sigma+2})} \left\{ \frac{1}{5} \left((\tau_{\sigma+1} - z)^5 - \right. \right. \\ \left. - (\tau_{\sigma} - z)^5 \right) + \frac{1}{4} \left((\tau_{\sigma+1} - z)^4 - (\tau_{\sigma} - z)^4 \right) (z - t_0 + z - t_1 + z - \\ - t_2 + z - \tau_{\sigma+1} + z - \tau_{\sigma+2}) + \frac{1}{3} \left((\tau_{\sigma+1} - z)^3 - (\tau_{\sigma} - z)^3 \right) + \\ + \left[(z - t_1)(z - t_2) + (z - t_0)(z - t_2) + (z - t_0)(z - t_1) + (z - \tau_{\sigma} + \right. \\ \left. + z - \tau_{\sigma+2})(z - t_0 + z - t_1 + z - t_2) + (z - \tau_{\sigma})(z - \tau_{\sigma+2}) \right] + \\ + \frac{1}{2} \left((\tau_{\sigma+1} - z)^2 - (\tau_{\sigma} - z)^2 \right) \left[(z - t_0)(z - t_1)(z - t_2) + \right. \\ \left. + (z - \tau_{\sigma} + z - \tau_{\sigma+2}) \left((z - t_1)(z - t_2) + (z - t_0)(z - t_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + (z - t_0)(z - t_1) \right) \right] + (z - t_0 + z - t_1 + z - t_2)(z - \tau_{\sigma}) \times \\ \times (z - \tau_{\sigma+2}) \Big] + (\tau_{\sigma+1} - \tau_{\sigma}) \left[(z - \tau_{\sigma} + z - \tau_{\sigma+2})(z - t_0) \times \right. \\ \left. \times (z - t_1)(z - t_2) + \left((z - t_1)(z - t_2) + (z - t_0)(z - t_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + (z - t_0)(z - t_1) \right) (z - \tau_{\sigma})(z - \tau_{\sigma+2}) \right] + \\ \left. + (z - t_0)(z - t_1)(z - t_2)(z - \tau_{\sigma})(z - \tau_{\sigma+2}) \ln \frac{\tau_{\sigma+1} - z}{\tau_{\sigma} - z} \right\};$$

$$A_{\sigma+2}(z) = \frac{1}{2\pi i(\tau_{\sigma+2} - \tau_{\sigma})(\tau_{\sigma+2} - \tau_{\sigma+1})} \left\{ \frac{1}{5} \left((\tau_{\sigma+1} - z)^5 - \right. \right. \\ \left. - (\tau_{\sigma} - z)^5 \right) + \frac{1}{4} \left((\tau_{\sigma+1} - z)^4 - (\tau_{\sigma} - z)^4 \right) (z - t_0 + z - t_1 + z - \\ - t_2 + z - \tau_{\sigma+1} + z - \tau_{\sigma}) + \frac{1}{3} \left((\tau_{\sigma+1} - z)^3 - (\tau_{\sigma} - z)^3 \right) \left[(z - t_1) \times \right. \\ \left. \times (z - t_2) + (z - t_0)(z - t_2) + (z - t_0)(z - t_1) + (z - \tau_{\sigma+1} + z - \tau_{\sigma}) \times \right. \\ \left. \times (z - t_0 + z - t_1 + z - t_2) + (z - \tau_{\sigma})(z - \tau_{\sigma+1}) \right] + \\ \left. + \frac{1}{2} \left((\tau_{\sigma+1} - z)^2 - (\tau_{\sigma} - z)^2 \right) \left[(z - t_0)(z - t_1)(z - t_2) + (z - \tau_{\sigma} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + z - \tau_{\sigma+1}) \left((z - t_1)(z - t_2) + (z - t_0)(z - t_2) + (z - t_0)(z - t_1) \right) + \\
& + (z - t_0 + z - t_1 + z - t_2)(z - \tau_{\sigma})(z - \tau_{\sigma+1}) \Big] + (\tau_{\sigma+1} - \tau_{\sigma}) \times \\
& \times \left[(z - \tau_{\sigma} + z - \tau_{\sigma+1})(z - t_0)(z - t_1)(z - t_2) + \left((z - t_1)(z - t_2) + \right. \right. \\
& \left. \left. + (z - t_0)(z - t_2) + (z - t_0)(z - t_1) \right) (z - \tau_{\sigma})(z - \tau_{\sigma+1}) \right] + \\
& \left. + (z - t_0)(z - t_1)(z - t_2)(z - \tau_{\sigma})(z - \tau_{\sigma+1}) \ln \frac{\tau_{\sigma+1} - z}{\tau_{\sigma} - z} \right\}.
\end{aligned}$$

При этом везде подразумевается периодичность, т. е. $\tau_{n+\sigma} = \tau_{\sigma}$, $\tau_{\sigma-n} = \tau_{\sigma}$. Отсюда получаем равенства

$$A_{\sigma+n}(z) = A_{\sigma}(z), \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1.$$

Таким образом, формула (3.4.6) для вычисления первого интеграла типа Коши описана.

Оценим теперь погрешность построенной квадратурной формулы (3.4.6). Она представляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
R_n(\varphi; z) & \equiv \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \frac{\tilde{\varphi}(t)}{t-z} dt = \\
& = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0, t_1, t_2)}{t-z} dt.
\end{aligned}$$

После упрощения получаем

$$\begin{aligned}
R_n(\varphi; z) & = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \left((t-z)^2 + (t-z)(z-t_0+z- \right. \\
& - t_1+z-t_2) + (z-t_1)(z-t_2) + (z-t_0)(z-t_2) + (z-t_0) \times \\
& \times (z-t_1) + \left. \frac{(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)}{t-z} \right) r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0, t_1, t_2) dt = \\
& = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} P_2(t, z) r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0, t_1, t_2) dt + (z-t_0) \times \\
& \times (z-t_1)(z-t_2) \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \frac{r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0, t_1, t_2)}{t-z} dt.
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

С учетом (3.4.5) первый интеграл в (3.4.7) дает оценку $O(1/n^3)$. Второй интеграл дает такую же оценку, если $|z - t| > C$, $C = \text{const}$. При z , стремящемся к контуру L , следует одну из параметров t_0 , t_1 , t_2 брать по возможности близким к z по сравнению с остальными точками L . На самой границе можно, в частности, положить $t_0 = t_1 = t_2$, что приводит к относительно простой формуле для соответствующего сингулярного интеграла с сохранением указанного порядка приближения.

Анализируя формулу (3.4.7), очевидно, что если z находится в бесконечно малой окрестности контура L , то параметр t_0 можно взять равным z и тогда погрешность тоже будет бесконечно малой, т. е. справедлива оценка (при надлежащей гладкости φ)

$$|R_n(\varphi; z)| = O\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (3.4.8)$$

Переходим в формулах (3.4.1) к второму интегралу. Для него, аналогично, используя представление (3.4.3) и полученную формулу (3.4.6), имеем

$$\begin{aligned} u_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\varphi(t)}{t-z} \frac{d\bar{t}}{dt} dt = \Phi(t_0) + (z - t_0)\Phi(t_0, t_1) + \\ &+ (z - t_0)(z - t_1)\Phi(t_0, t_1, t_2) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \left(A_\sigma(z)\Phi(\tau_\sigma, t_0, t_1, t_2) + \right. \\ &\left. + A_{\sigma+1}(z)\Phi(\tau_{\sigma+1}, t_0, t_1, t_2) + A_{\sigma+2}(z)\Phi(\tau_{\sigma+2}, t_0, t_1, t_2) \right), \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

где $A_{\sigma+k}$ ($k = 0, 1, 2$) — те же вычисленные выше коэффициенты, а функция $\Phi(t) \equiv \varphi(t) \frac{d\bar{t}}{dt}$. В этом случае функцию $\frac{d\bar{t}}{dt}$ можно вычислять с применением формул численного дифференцирования. Для сохранения высокой точности будем использовать формулы Микеладзе [39] с оценкой

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = \sum_{\substack{k=-2, \\ k \neq 0}}^2 \frac{\prod_{\substack{j=-2, \\ j \neq 0}}^2 (t - \tau_{\sigma+j})}{\prod_{\substack{j=-2, \\ j \neq 0, k}}^2 (\tau_{\sigma+k} - \tau_{\sigma+j})} \cdot \frac{\bar{t} - \bar{\tau}_{\sigma+k}}{(t - \tau_{\sigma+k})^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (3.4.10)$$

при достаточной гладкости контура L .

Для погрешности формулы (3.4.9) справедлива следующая оценка:

$$|R_{n1}(\varphi; z)| = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Рассмотрим теперь третий интеграл в формулах (3.4.1). Используя разложение (3.4.3) и формулу (3.4.6), получаем

$$\begin{aligned} u_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\bar{t}\varphi(t)}{(t-z)^2} dt \approx \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{1}{(t-z)^2} \times \\ &\times \left(\Phi(t_0) + (t-t_0)\Phi(t_0, t_1) + (t-t_0)(t-t_1)\Phi(t_0, t_1, t_2) + \right. \\ &\left. + (t-t_0)(t-t_1)(t-t_2) \sum_{k=0}^2 l_{\sigma k}(t)\Phi(\tau_{\sigma+k}, t_0, t_1, t_2) \right) dt. \end{aligned}$$

После вычисления элементарных интегралов имеем

$$\begin{aligned} u_2(z) &\approx \Phi(t_0, t_1) + (z-t_0 + z-t_1)\Phi(t_0, t_1, t_2) + \\ &+ \sum_{\sigma=0}^{n-1} \left(A_\sigma^*(z)\Phi(\tau_\sigma, t_0, t_1, t_2) + A_{\sigma+1}^*(z) \times \right. \\ &\times \Phi(\tau_{\sigma+1}, t_0, t_1, t_2) + A_{\sigma+2}^*(z)\Phi(\tau_{\sigma+2}, t_0, t_1, t_2) \left. \right). \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

В формуле (3.4.11) $\Phi(t) = \bar{t}\varphi(t)$. Коэффициенты $A_{\sigma+k}^*(z)$ ($k = 0, 1, 2$) легко вычисляются. Они аналогичны коэффициентам предыдущих интегралов.

В этом случае для погрешности также справедливо представление

$$|R_{n2}(\varphi; z)| = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Аналогично предыдущему погрешность квадратурной формулы (3.4.11) (вплоть до границы L относительно z) имеет вид

$$|R_{n2}(\varphi; z)| = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Аналогично строятся квадратурные формулы и для четвертого интеграла в формулах (3.4.1).

Так, имеем

$$u_3(z) \approx \Phi(t_0, t_1, t_2) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \left(A_{\sigma}^{**}(z) \Phi(\tau_{\sigma}, t_0, t_1, t_2) + \right. \\ \left. + A_{\sigma+1}^{**}(z) \Phi(\tau_{\sigma+1}, t_0, t_1, t_2) + A_{\sigma+2}^{**}(z) \Phi(\tau_{\sigma+2}, t_0, t_1, t_2) \right). \quad (3.4.12)$$

При этом $A_{\sigma}^{**}(z)$ ($\sigma = 0, 1, 2$) вычисляются точно [90], $\phi(t) = \bar{t}\varphi(t)$.

Для остаточного члена имеем

$$R_{n3}(\varphi; z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0, t_1, t_2)}{(t-z)^3} dt = \\ = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_{\sigma}\tau_{\sigma+1}} r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0, t_1, t_2) dt + \frac{1}{2\pi i} (z-t_0+z-t_1+z-t_2) \times \\ \times \sum_{\sigma=0}^{n+1} \int_{\tau_{\sigma}\tau_{\sigma+1}0} \frac{r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0, t_1, t_2)}{t-z} dt + \left((z-t_0)(z-t_1) + (z-t_0)(z-t_2) + \right. \\ \left. + (z-t_1)(z-t_2) \right) \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_{\sigma}\tau_{\sigma+1}} \frac{r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0, t_1, t_2)}{(t-z)^2} dt + \\ + (z-t_0)(z-t_1)(z-t_2) \frac{1}{2\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_{\sigma}\tau_{\sigma+1}} \frac{r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0, t_1, t_2)}{(t-z)^3} dt.$$

Относительно оценки погрешности рассуждений в оценках для первого интеграла в (3.4.1) получаем

$$|R_{n3}(\varphi; z)| = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Отметим, однако, что в данном случае возникают некоторые вычислительные трудности: разделенные разности переходят в производные:

$$\varphi(t_0, t_1) = \varphi'(t_0), \quad t_1 = t_0; \\ \varphi(t_0, t_1, t_2) = \frac{\varphi''(t_0)}{2!}, \quad t_2 = t_1 = t_0; \\ \varphi(t, t_0, t_1, t_2) = \frac{\varphi''(t_0)}{2!(t_0-t)} - \frac{\varphi'(t_0)}{(t_0-t)^2} + \frac{\varphi(t, t_0)}{(t_0-t)^2}, \quad t \neq t_2 = t_1 = t_0.$$

Полученные выражения удобно вычислять с помощью следующих (см. [39]) формул:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t_0) &= \sum_{\substack{k=-2 \\ k \neq 0}}^2 \frac{\prod_{\substack{j=-2, \\ j \neq 0}}^2 (t_0 - \tau_{\nu+j})}{\prod_{\substack{j=-2, \\ j \neq 0, k}}^2 (\tau_{\nu+k} - \tau_{\nu+j})} \cdot \frac{\varphi(t_0) - \varphi(\tau_{\nu+k})}{(t_0 - \tau_{\nu+k})^2} + \\
&\quad + \frac{\varphi^{(5)}(\xi)}{5!} \prod_{\substack{j=-2, \\ j \neq 0}}^2 (t_0 - \tau_{\nu+j}), \\
\varphi''(t_0) &= 2 \sum_{\substack{k=-2 \\ k \neq 0}}^2 \frac{\prod_{\substack{j=-2, \\ j \neq 0}}^2 (t_0 - \tau_{\nu+j})}{(t_0 - \tau_{\nu+k})^2 \prod_{\substack{j=-2, \\ j \neq 0, k}}^2 (\tau_{\nu+k} - \tau_{\nu+j})} \varphi'(t_0) - \\
&\quad - 2 \sum_{\substack{k=-2, \\ k \neq 0}}^2 \frac{\prod_{\substack{j=-2, \\ j \neq 0}}^2 (t_0 - \tau_{\nu+j})}{\prod_{\substack{j=-2, \\ j \neq 0, k}}^2 (\tau_{\nu+k} - \tau_{\nu+j})} \cdot \frac{\varphi(t_0) - \varphi(\tau_{\nu+k})}{(t_0 - \tau_{\nu+k})^3} + \\
&\quad + 2 \frac{\varphi^{(6)}(\xi)}{6!} \prod_{\substack{j=-2, \\ j \neq 0}}^2 (t_0 - \tau_{\nu+j}), \quad t_0 \in \tau_{\nu} \tau_{\nu+1}.
\end{aligned}$$

После использования указанных формул степень точности сохраняется при требовании наличия у φ 6-ой ограниченной производной.

3.5. Квадратурные формулы для интегралов типа Коши с весовыми функциями

В этом параграфе мы будем рассматривать интегралы типа Коши определенного конкретного вида на разомкнутых контурах интегрирования.

В работах Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили (см. [45], [46]) показано, что компоненты напряжения X_x , X_y , Y_y и смещения u , v

в декартовой системе координат выражаются через две функции (комплексные потенциалы) $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ от одного комплексного аргумента $z = x + iy$ по формулам

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad Y_y - X_x + ziX_y = 2(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)), \quad (3.5.1)$$

$$2\mu(u + iv) = k\varphi(z) - z\bar{\Phi}(z) - \bar{\Psi}(z),$$

$$\Psi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \Psi'(z), \quad \Phi'(z) = \varphi''(z),$$

где

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{t-z} dt,$$

$$\Psi(z) = -\frac{k}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{\omega}(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t) d\bar{t}}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\omega(t) dt}{(t-z)^2}, \quad (3.5.2)$$

где L — замкнутый или разомкнутый гладкий контур, $k = 3 - 4\sigma$, $0 < \sigma < 1/2$.

Функция $\omega(t)$ в задачах теории трещин чаще всего является решением следующего сингулярного интегрального уравнения первого рода на разомкнутых контурах интегрирования:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x,t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (3.5.3)$$

где $k(x, t)$ и $f(x)$ — заданные функции $H_r(\alpha)$, $r \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$.

Решение уравнения (3.5.3) могут задаваться формулами (см. [35], [50]):

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi_0(t), & \varphi(t) &= \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \varphi_0(t), \\ \varphi(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \varphi_0(t), & \varphi(t) &= \sqrt{1-t^2} \varphi_0(t). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в расчетах компонентов напряжений и смещений важное место занимают интегралы вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{\varphi_0(t)}{t-z} dt, & \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{\varphi_0(t)}{t-z} dt, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\varphi_0(t)}{t-z} dt, & \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi_0(t)}{t-z} dt. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Сперва выпишем некоторые формулы из теории интегралов типа Коши (см. [57]):

1. $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{dt}{t-z} = 1 - \sqrt{\frac{z+1}{z-1}};$
2. $\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{1}{t-z} dt = i(z - \sqrt{z^2-1});$
3. $\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)}{t-z} dt = i(z - \sqrt{z^2-1})^{n+1};$
4. $\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{T_n(t)}{t-z} dt = i \frac{(z - \sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}};$
5. $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_n(t)}{t-x} dt = -T_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, \dots;$
6. $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{T_n(t)}{t-x} dt = U_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots;$
7. $\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{dt}{t-z} = i + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}};$
8. $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{dt}{t-x} = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ -\frac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{x^2-1}}, & |x| > 1. \end{cases}$

где $x \in (-1, 1)$, $z \notin [-1, 1]$, $\sqrt{z^2-1}$ — однозначная в плоскости с разрезом $[-1, 1]$ и принимающая на отрезке $(1, \infty)$ действительные положительные значения ветвь этой функции, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ — ортогональные многочлены Чебышева I-го и II-го родов соответственно.

Теперь займемся построением квадратурных формул для интегралов типа Коши с весовыми функциями $p(t) = (1-t)^{\pm \frac{1}{2}}(1+t)^{\pm \frac{1}{2}}$ (вида (3.5.4)). Для этого приблизим функцию $\varphi_0(t)$ в интегралах ти-

па Коши ее интерполяционным многочленом по узлам Чебышева

$$L_{n-1}(\varphi_0, t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} T_n(t)}{t - x_j} \sqrt{1 - x_j^2} \varphi_0(x_j), \quad (3.5.5)$$

где $x_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi$ ($j = 1, \dots, n$) — корни многочлена $T_n(t)$. Тогда в качестве приближенного выражения интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi_0(t)}{t-z} dt$ мы имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{1}{t-z} \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} T_n(t)}{t - x_j} \sqrt{1 - x_j^2} \varphi_0(x_j) dt = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sqrt{1 - x_j^2} \varphi_0(x_j) \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{t-z} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{T_n(t)}{t - x_j} dt = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{1 - x_j^2} \varphi_0(x_j)}{z - x_j} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \times \\ & \times \left(\frac{T_n(t)}{t-z} - \frac{T_n(t)}{t-x_j} \right) dt = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{1 - x_j^2} \varphi_0(x_j)}{z - x_j} \times \\ & \times \left(\frac{i}{2} \cdot \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} - \frac{1}{2i} U_{n-1}(x_j) \right). \end{aligned}$$

Так что, получается приближенная формула

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\varphi_0(t)}{t-z} dt \approx \\ & \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{1 - x_j^2} \varphi_0(x_j)}{z - x_j} \cdot \frac{i}{2} \left(\frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} + U_{n-1}(x_j) \right). \end{aligned}$$

Аналогично можно построить квадратурные формулы и для других интегралов типа Коши из (3.5.4). В частности, для интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{\varphi_0(t)}{t-z} dt.$$

После приближения $\varphi_0(t)$ интерполяционным многочленом Лагранжа $\varphi_0(t) \approx L_n(\varphi_0; t)$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{L_n(\varphi; t)}{t-z} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{L_n(\varphi; t) - L_n(\varphi; z)}{t-z} dt + \\ &+ L_n(\varphi_0; z) \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{dt}{t-z}. \end{aligned}$$

Выражение $\frac{L_n(\varphi; t) - L_n(\varphi; z)}{t-z}$ является многочленом степени $n-1$ относительно t . Для таких многочленов квадратурные формулы типа Гаусса по весу $p(x) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ точны. Что касается второго интеграла, то нам известно его точное значение (см. выше перечень точных формул для интегралов типа Коши). Тем самым справедлива формула

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{\varphi_0(t)}{t-z} dt &\approx \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^n \frac{4}{2n+1} \cos^2 \frac{2k-1}{2(2n+1)} \pi \times \\ &\times \frac{L_n\left(\varphi_0; \cos \frac{2k-1}{2n+1} \pi\right) - L_n(\varphi_0; z)}{\cos \frac{2k-1}{2n+1} \pi - z} + L_n(\varphi_0; z) \left(1 - \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right). \end{aligned}$$

Таким же способом получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi_0(t)}{t-z} dt &\approx \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{L_n(\varphi_0; t)}{t-z} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{L_n(\varphi_0; t) - L_n(\varphi_0; z)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} L_n(\varphi_0; z) \times \\ &\times \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{1}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} \times \\ &\times \frac{L_n\left(\varphi_n; \cos \frac{k\pi}{n+1}\right) - L_n(\varphi_0; z)}{\cos \frac{k\pi}{n+1} - z} + L_n(\varphi; z) \frac{i}{2} (z - \sqrt{z^2 - 1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{\varphi_0(t)}{t-z} dt \approx \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{L_n(\varphi_0(t); t)}{t-z} dt = \\
& = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{L_n(\varphi_0; t) - L_n(\varphi_0; z)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} L_n(\varphi_0; z) \times \\
& \quad \times \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{4\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} \times \\
& \quad \times \frac{L_n\left(\varphi_n; \cos \frac{2k\pi}{2n+1}\right) - L_n(\varphi_0; z)}{\cos \frac{2k\pi}{2n+1} - z} + \frac{1}{2\pi i} L_n(\varphi; z) \left(-1 - i \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \right).
\end{aligned}$$

Здесь всюду

$$\begin{aligned}
L_n(\varphi_0, t) &= \sum_{j=0}^n \frac{\omega(t)}{(t-t_j)\omega'(t_j)} \varphi_0(t_j), \quad t_j = -1 + \frac{2j}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, n; \\
\omega(t) &= (t-t_0)(t-t_1) \dots (t-t_n), \quad \omega'(t_j) = \prod_{\substack{j_0=0, \\ j_0 \neq j}}^n (t_j - t_{j_0}).
\end{aligned}$$

3.6. О приближенном вычислении компонентов напряжений и смещений в задачах плоской теории упругости

Основной целью решения задач плоской теории упругости является определение *компонентов векторов напряжений* X_x , Y_y , X_y и *смещений* u , v в любой точке заданного тела. Как известно [45], соответствующие величины определяются по формулам

$$\begin{aligned}
X_x &= 2 \operatorname{Re} \phi_1'(z) - \operatorname{Re} (\bar{z} \phi_1''(z) + \phi_2'(z)), \\
Y_y &= 2 \operatorname{Re} \phi_1'(z) + \operatorname{Re} (\bar{z} \phi_1''(z) + \phi_2'(z)), \\
X_y &= \operatorname{Im} (\bar{z} \phi_1''(z) + \phi_2'(z)), \\
u &= \frac{1}{2\mu} \operatorname{Re} (\kappa \phi_1(z) - z \bar{\phi}_1'(z) - \bar{\phi}_2(z)), \\
v &= \frac{1}{2\mu} \operatorname{Im} (\kappa \phi_1(z) - z \bar{\phi}_1'(z) - \bar{\phi}_2(z)),
\end{aligned} \tag{3.6.1}$$

где

$$\begin{aligned}\phi_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \\ \phi_2(z) &= \frac{-\varkappa}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{\varphi}(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} d\bar{t} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\varphi(t)}{(t-z)^2} dt\end{aligned}\quad (3.6.2)$$

известны как потенциалы Колосова — Мусхелишвили.

Подставляя значения функции $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$ из (3.6.2) в (3.6.1), получается

$$\begin{aligned}X_x &= 2 \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt - \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_L \frac{2\varphi(t)}{(t-z)^3} dt + \right. \\ &+ \left. \frac{-\varkappa}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{\varphi}(t)}{(t-z)^2} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} d\bar{t} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\bar{t}\varphi(t)}{(t-z)^3} dt \right), \\ Y_y &= 2 \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt + \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_L \frac{2\varphi(t)}{(t-z)^3} dt + \right. \\ &+ \left. \frac{-\varkappa}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{\varphi}(t)}{(t-z)^2} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} d\bar{t} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\bar{t}\varphi(t)}{(t-z)^3} dt \right), \\ X_y &= \operatorname{Im} \left(\bar{z} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\varphi(t)}{(t-z)^3} dt + \frac{-\varkappa}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{\varphi}(t)}{(t-z)^2} dt + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} d\bar{t} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2\bar{t}\varphi(t)}{(t-z)^3} dt \right).\end{aligned}\quad (3.6.3)$$

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{2\mu} \operatorname{Re} \left(\frac{\varkappa}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt + \frac{z}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt + \right. \\ &+ \left. \frac{-\varkappa}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{\varphi}(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} d\bar{t} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\varphi(t)}{(t-z)^2} dt \right), \\ v &= \frac{1}{2\mu} \operatorname{Im} \left(\frac{\varkappa}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt + \frac{z}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt + \right. \\ &+ \left. \frac{-\varkappa}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{\varphi}(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} d\bar{t} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\varphi(t)}{(t-z)^2} dt \right).\end{aligned}$$

В выражениях для X_x, Y_y, X_y, u, v присутствуют интегралы вида

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad u_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} d\bar{t},$$

$$u_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\varphi(t)}{(t-z)^2} dt, \quad u_3(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\varphi(t)}{(t-z)^3} dt,$$

для которых в §3.3 построены квадратурные формулы (см. §§3.3, 3.4):

$$u(z) \approx \varphi(t_0) + (z-t_0)\varphi(t_0, t_1) + (z-t_0)(z-t_1)\varphi(t_0, t_1, t_2) +$$

$$+ \sum_{\sigma=0}^{n-1} \left(A_{\sigma}(z)\varphi(\tau_{\sigma}, t_0, t_1, t_2) + A_{\sigma+1}(z)\varphi(\tau_{\sigma+1}, t_0, t_1, t_2) + \right.$$

$$\left. + A_{\sigma+2}(z)\varphi(\tau_{\sigma+2}, t_0, t_1, t_2) \right),$$

и формулы (3.4.9), (3.4.11), (3.4.12) для интегралов $u_1(z)$, $u_2(z)$ и $u_3(z)$, где t_0, t_1, t_2 — произвольные фиксированные точки контура L ; z принадлежит данной области; $A_{\sigma+k}(z)$, $A_{\sigma+k}^*(z)$, $A_{\sigma+k}^{**}(z)$ вычисляются явно и даны в §3.4. Точки τ_{σ} ($\sigma = 0, 1, \dots, n-1$) принадлежат контуру L и делят его равномерно относительно дуги s .

Полученные формулы позволяют получить приближенные значения искомых величин, когда тем или иным способом найдены (приближенно) значения плотности $\varphi(t)$.

ГЛАВА 4

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Общие принципы численного решения сингулярных интегральных уравнений. Некоторые результаты

Уже в § 1.5 первой главы говорилось об общей теории сингулярных интегральных уравнений. А именно о задачах, приводящих к тем или иным уравнениям, содержащим сингулярные интегралы с ядром Коши. К таким уравнениям в первую очередь следует отнести общее сингулярное интегральное уравнение вида

$$a(t_0)\varphi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt + \frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0), \quad (4.1.1)$$

где $t_0 \in L$; $a(t_0)$, $b(t_0)$, $k(t_0, t)$, $f(t_0)$ — заданные на контуре L функции, относительно которых обычно будем предполагать, что они принадлежат некоторому гёльдеровскому классу на L , а L — гладкий замкнутый контур.

Естественно, к численному решению сингулярных интегральных уравнений чисто формально могут быть применены те же методы, которые обычно применяются в случае интегральных уравнений Фредгольма второго рода (например, метод квадратур, метод замены исходного ядра на вырожденное, метод наименьших квадратов, метод моментов и другие). Но это только формально. На самом же деле, при численном решении таких уравнений возникают принципиальные трудности. В частности, это относится к методу механических квадратур, основанному на кусочно-полиномиальном приближении искомого решения. По этому методу приближенное решение уравнения (4.1.1) ищется в виде полигона (см. [19])

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_k \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} + \varphi_{k+1} \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}, \quad t \in t_k t_{k+1}, \\ t_k &\in e^{i \frac{2\pi}{n} k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \varphi_{n+s} = \varphi_{\pm s} \end{aligned}$$

для уравнения

$$E\varphi \equiv a\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad t \in \gamma,$$

где $a = \text{const}$, γ — единичная окружность с центром в начале координат.

Предполагается, что φ_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) можно найти из уравнений

$$(E'\varphi)(t_j) = f(t_j), \quad (4.1.2)$$

где

$$E'\varphi \equiv a'\varphi + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi'(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

В работе [19] доказывается, что в замкнутой области значений a , для которых оператор E имеет обратный ($a \neq \pm 1$), операторы E_n , $E'_n\varphi \equiv (E'\varphi)$ не обязательно имеют обратные для всех $n > n_0$. Существуют такие значения a , для которых определитель системы (4.1.2) Δ_n равен нулю всегда для любого натурального числа n .

Отсюда следует, что формальное применение без обоснования известных приближенных методов из теории интегральных уравнений Фредгольма II-го рода в случае сингулярных интегральных уравнений обычно малоэффективно.

Теперь отметим некоторые результаты, полученные в настоящее время по численному решению сингулярных интегральных уравнений. Первые важные результаты в этом направлении были получены в работе М. А. Лаврентьева [26] в 1932 г. В предисловии академика С. А. Чаплыгина к этой работе было отмечено важное значение результатов указанного характера и было выражено пожелание, чтобы эти исследования были продолжены, в частности, в направлении упрощения приема и увеличения его сходимости. Отмечая важность указанной работы, академик Н. И. Мусхелишвили во всех изданиях своей монографии «Сингулярные интегральные уравнения» отмечает большое значение дальнейшей разработки аналогичных методов, считая задачу приближенного решения сингулярных уравнений одной из важнейших задач теории таких уравнений.

В 1948 г. в работе [40] на основе одного приема регуляризации сингулярных интегральных уравнений был указан приближенный

метод решения таких уравнений с замкнутыми контурами интегрирования, аналогичный методу замены ядра интегрального уравнения Фредгольма на вырожденное ядро. Этот метод был использован и дополнен в работе [82].

Важным направлением в развитии численных методов решения сингулярных интегральных уравнений является разработка и обоснование так называемых прямых приближенных методов. Здесь надо отметить работы Д. Г. Саникидзе (см. [67–69], [70], [73], [74]), в которых предлагаются численные схемы высокой степени точности без регуляризации и отображения контура L на более простой контур (обычно на окружность или отрезок). Для многих случаев обосновываются построенные вычислительные схемы.

В работе [20] для уравнения первого рода

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 k(x,t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in (-1; 1)$$

предлагается (без обоснования) приближенная схема, основанная на применении указанных там же квадратурных формул для сингулярных интегралов. Эти формулы используются и в другой работе того же автора для решения сингулярных уравнений вида

$$a(x)\varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x,t) \varphi(t) dt = f(x),$$

где $\varphi(x)$ ищется в виде $\sqrt{1-x^2}\varphi_0(x)$, $\varphi_0 \in H$.

Определенный этап развития теории приближенных методов решения сингулярных интегральных уравнений в значительной мере связан с работами В. В. Иванова (см. [18], [19]). Он предлагает обоснование ряда методов квадратур, моментов, совпадения и другие.

В работах [14], [15] исследуется приближенное решение сингулярных интегральных уравнений I-го и II-го родов, когда линия интегрирования есть отрезок. Сужением области определения или области значений оператора устанавливается взаимная однозначность отображения. Для приближенного решения применяются варианты метода Бубнова — Галеркина и коллокационные схемы. В качестве координатных элементов берутся полиномы Чебышева и Якоби. Доказываются существование и единственность решения алгебраиче-

ской системы для достаточно больших n и сходимости приближенных решений к точному в пространствах L_2 с весом.

Следует отдельно отметить результаты И. К. Лифанова [1], [35]. Он вместе со своими учениками разработал «метод дискретных вихрей» (предложенный С. М. Белоцерковским в 1955 г.), дал его полное обоснование для широких классов сингулярных интегральных уравнений.

В дальнейшем этот метод был развит в различных направлениях как в теоретическом, так и в плане его приложений ко многим важным задачам. Соответствующие результаты отражены в хорошо известных в настоящее время монографиях [1], [35]. Важный вклад в развитие этих методов наряду с И. К. Лифановым принадлежит его ученикам А. Ф. Матвееву [36–38], Ю. В. Ганделью [11], [12] и ряду их последователей.

Изложим вкратце основную суть метода дискретных вихрей (дискретных особенностей) на примере обтекания тонкого профиля.

Рассматриваются и обосновываются и различные аналогичные схемы для ряда классов довольно общих сингулярных интегральных уравнений, в частности, и в многомерных случаях.

Как известно (см. [1], [35]), уравнение тонкого слабоизогнутого профиля имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t)}{t_0 - t} dt = f(t_0), \quad t_0 \in (-1; 1),$$

индекс которого принимает значения $\varkappa = 0, 1, -1$.

Пусть множества $E = \{t_k, k = 1, \dots, n\}$, $E_0 = \{t_{0j}, j = 0, 1, \dots, n\}$ образуют так называемое каноническое разбиение отрезка $[-1, 1]$ с шагом $h = 2/(n+1)$.

Теорема 4.1.1. Пусть функция $f(t)$ принадлежит классу $H(\alpha)$ на $[-1, 1]$. Тогда между решениями систем линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \varphi_n(t_k) h = C, \quad j = n,$$

$$\frac{1}{\pi} \gamma_{0n} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k) h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

и решениями $\varphi(t)$ индекса $\varkappa = 0, 1, -1$, соответственно, выполняются неравенства $|\varphi(t_k) - \varphi_n(t_k)| \leq \Theta_n(t_k)$, $k = 1, \dots, n$, в котором величины $\Theta_n(t_k)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) для всех точек $t_k \in [-1 + \delta, 1 - \delta]$, где $\delta > 0$ сколь угодно мало,

$$\Theta_n(t_k) \leq O_\delta(h^{l_1}), \quad l_1 > 0;$$

2) для всех точек $t_k \in [-1, 1]$

$$\sum_{k=1}^n \Theta_n(t_k) h \leq O_\delta(h^{l_2}), \quad l_2 > 0.$$

В последние годы в развитие теории дискретных особенностей существенный вклад был внесен Д. Г. Саникидзе в работах [73], [74], [77]. В этих работах он рассматривает произвольные контуры интегрирования и строит квадратурные формулы повышенной точности, родственные с классическим методом дискретных вихрей. Далее указанные формулы были применены к численному решению определенных классов интегральных уравнений с сингулярным ядром.

Отметим еще результаты М. А. Шешко [84]. Пусть дано уравнение

$$a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau)\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad a^2(t) - b^2(t) \neq 0, \quad t \in L,$$

где L — единичная окружность.

Решение этого уравнения ищется в виде

$$\varphi(t) = \frac{z(t)}{a^2(t) - b^2(t)} u(t),$$

где $z(t) = [a(t) + b(t)]x^+(t) = [a(t) - b(t)]x^-(t)$. Тогда предыдущее уравнение сводится к виду

$$A(t)z(t)u(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L B(\tau)z(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad (4.1.3)$$

где

$$A(t) = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)}, \quad B(t) = \frac{b(t)}{a^2(t) - b^2(t)}. \quad (4.1.4)$$

Теорема 4.1.2. Любое решение уравнения (4.1.3) представимо в виде

$$u_n(t) = \sum_{k=-n}^{n+\infty} C_k t^k, \quad C_k = \text{const}. \quad (4.1.5)$$

Теорема 4.1.3. Пусть функция $f(t)$ является правой частью уравнения, принадлежит классу $H_r(\alpha)$ ($r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$). Пусть $u(t)$ и $u_n(t)$ — точное и приближенное решения, определяемые формулами (4.1.3) и (4.1.5) соответственно. Тогда

$$\|u(t) - u_n(t)\|_C \leq k \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}},$$

где константа k не зависит от n .

4.2. О численном решении некоторых задач методом обобщенных сингулярных интегральных уравнений

Пусть L — некоторый гладкий или кусочно-гладкий контур на комплексной плоскости и

$$S(\varphi; t_0) \equiv V.P. \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt, \quad t_0 \in L. \quad (4.2.1)$$

Уравнение

$$a(t_0)\varphi(t_0) + R_1 S(\varphi, t_0) + R_2 S(\bar{\varphi}, t_0) + K\varphi(t_0) = f(t_0), \quad (4.2.2)$$

где $a(t_0)$, $f(t_0)$, $k(t_0, t)$ — заданные на L функции (класса Гёльдера), $K\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t)\varphi(t)dt$, а R_1 , R_2 — некоторые известные операторы, мы условимся называть *обобщенным сингулярным уравнением*. Указанное уравнение является обобщенным в том смысле, что в общем случае это уравнение, несмотря на присутствие в нем сингулярных интегралов от искомой функции (и сопряженной ей), не всегда является обычным сингулярным интегральным уравнением по общепринятой (см. [46]) терминологии.

К уравнениям вида (4.2.2) приводят различные граничные задачи теории аналитических функций, к которым, в свою очередь, сводятся многие важные задачи математической физики и механики.

Так, например, задача Дирихле для уравнения Лапласа, если ее решение $u(x, y)$ в конечной односвязной области, ограниченной контуром L , искать в виде потенциала двойного слоя, приводит (см. [46]) к уравнению (в предположении $\text{Im } \varphi \equiv 0$) вида (4.2.2)

$$\varphi(t_0) + \text{Re } S(\varphi; t_0) = f(t_0), \quad f(t_0) = u(x, y)|_L. \quad (4.2.3)$$

К уравнениям вида (4.2.2) могут быть также приведены задачи плоской теории упругости.

Рассматриваемый здесь численный метод (метод обобщенных сингулярных интегральных уравнений) решения граничных задач в случае гладких границ основывается на замене соответствующего граничного уравнения (4.2.2) приближенным

$$a(t_0)\varphi_n(t_0) + R_1 S_n(\varphi_n, t_0) + R_2 S_n(\bar{\varphi}_n, t_0) + K_n \varphi_n(t_0) = f(t_0). \quad (4.2.4)$$

По указанному в § 2.1 (см. (2.1.7)) способу аппроксимации сингулярных интегралов $S_n(\varphi; t_0)$ в точках $t_{\nu j}$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots, m-1$) при $m = 4$ аппроксимирующее выражение имеет вид

$$\begin{aligned} S_n(\varphi_n; t_{\nu j}) = & \left(1 + \sum_{\substack{\sigma=0, \\ \sigma \neq \nu}}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \frac{p_{\sigma k}^*}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^2 \frac{p_{\nu k}^*}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} + \right. \\ & \left. + p_{\nu j}^* \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^3 \frac{1}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} \right) \varphi_n(t_{\nu j}) - \sum_{\substack{\sigma=0, \\ \sigma \neq \nu}}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \frac{p_{\sigma k}^*}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} \varphi_n(t_{\sigma k}) - \\ & - \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^2 \frac{p_{\nu k}^*}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} \varphi_n(t_{\nu k}) + p_{\nu j}^* \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^3 d_{\nu k}(t_{\nu j}) \varphi_n(t_{\nu k}), \\ p_{\sigma k} = & \frac{1}{\pi i \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 (t_{\sigma k} - t_{\sigma j})} \left(\frac{\tau_{\sigma+1}^4 - \tau_{\sigma}^4}{4} - \frac{\tau_{\sigma+1}^3 - \tau_{\sigma}^3}{3} \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^2 t_{\sigma j} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\tau_{\sigma+1}^2 - \tau_{\sigma}^2}{2} \sum_{\substack{k \neq j_0, j=0, \\ j < j_0}}^3 t_{\sigma j_0} t_{\sigma j} - (\tau_{\sigma+1} - \tau_{\sigma}) \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^3 t_{\sigma j} \Big),$$

$$d_{\nu k}(t_{\nu j}) = \prod_{\substack{j_0=0, \\ j_0 \neq k, j}}^3 (t_{\nu j} - t_{\nu j_0}) \Big/ \prod_{\substack{j_0=0, \\ j_0 \neq k}}^3 (t_{\nu k} - t_{\nu j_0}),$$

$$\tau_{\sigma} = t_{\sigma 0}, \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, 2, 3;$$

$$K_n \varphi_n(t_{\nu j}) = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^3 p_{\sigma k} k(t_{\nu j}, t_{\sigma k}) \varphi_n(t_{\sigma k}).$$

При этом выбор узлов τ_{σ} ($\sigma = 0, 1, \dots, n-1$) можно осуществить разбиением L по дугам эквивалентной длины. В случае многих важных задач доказываются однозначная разрешимость соответствующих приближенных уравнений и сходимость процесса (с оценкой скорости сходимости). Соответствующие утверждения имеют место, например, в случае упомянутой выше задачи Дирихле. В данном случае применение изложенной схемы заключается в аппроксимации входящего в уравнение (4.2.2) сингулярного интеграла по одной из квадратурных формул из [62], после чего отделяется соответствующая действительная часть. Подробное доказательство дано в [73].

Как пример применения одной из таких схем рассматривается область с границей L , состоящей из линии $y = x^{4/3}$ при $-1 \leq x < 0$, $y = 0$ при $0 \leq x \leq 1$ и некоторой произвольно заданной (графически) гладкой дуги, гладко примыкающей к указанной линии в точках $t = -1 + i$, $t = 1 + 0 \cdot i$ (и целиком расположенной в полуплоскости $y \geq 0$, см. рис. 5).

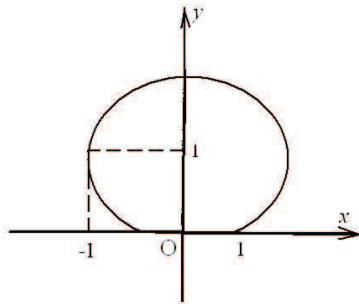


Рис. 5.

Вторая производная L здесь разрывна в точке $t = 0$, однако при $f = x + y$ схема, основанная на замене соответствующего уравнения (4.2.3) приближенным

$$\varphi_n(t_0) + \operatorname{Re} S_n(\varphi_n, t_0) = f(t_0) \quad (4.2.5)$$

при $m = 4$ (см. § 2.3), практически сходится довольно хорошо.

Ниже приводятся некоторые результаты вычислений на ЭВМ при $n = 17$: $u(0.5; 0.5) \approx 0.9996$, $u(0.9; 0.1) \approx 0.9994$, $u(0.1; 0.9) \approx 1.0023$. Значения эти вычислены на основе представления

$$u(x, y) \simeq \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\psi_n(t)}{t - z} dt, \quad z = x + iy,$$

где ψ_n — кусочно-интерполяционные выражения, построенные по значениям φ_n , найденным из соответствующей (4.2.5) системы. Точное значение решения в каждой из точек области равно 1.

В общем случае наличие у L точек разрыва производных невысоких порядков (какой, например, является точка $t = 0$ в предыдущем примере) способствует снижению скорости сходимости схемы. Однако в тех случаях, когда число таких точек конечно, несложным преобразованием сингулярных интегралов исходное граничное уравнение может быть приведено к другому уравнению того же вида (4.2.2), но с заведомо более гладкими аппроксимируемыми данными (см. § 2.7). При этом аналогично преобразовывается интегральное представление решения (потенциал) соответствующей граничной задачи. На основании этого нередко метод обобщенных сингулярных уравнений приводит к достаточно хорошим результатам в тех случаях, когда применение интегральных уравнений Фредгольма или метода сеток заведомо не эффективно.

Аналогичное преобразование применимо и в случае контуров с угловыми точками (подразумевается, что имеется конечное число угловых точек, отличных от точек возврата). Соответствующий метод в данном случае дает возможность в достаточно полной мере использовать дифференциальные свойства гладких частей границы области и граничной функции f . Тем самым он позволяет построить достаточно быстро сходящиеся вычислительные схемы для ряда задач, численное решение которых другими методами затруднительно ввиду расходимости или слишком медленной сходимости процесса.

Заметим, что так же, как метод интегральных уравнений Фредгольма, метод сингулярных уравнений в равной мере применим и в случае бесконечных (в общем случае многосвязных) областей.

4.3. Обоснование модифицированного метода дискретных особенностей с применением внешних узлов к решению сингулярных интегральных уравнений I-го рода

В данном параграфе мы рассматриваем одну схему высокого порядка точности численного решения сингулярных интегральных уравнений вида

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt + \frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0), \quad (4.3.1)$$

где L — замкнутый гладкий контур Ляпунова; $k(t_0, t)$, $f(t_0)$ — функции класса $H_r(\alpha)$ ($r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$). Схема эта, являющаяся схемой типа дискретных особенностей, основана на применении конкретной квадратурной формулы с внешними узлами [75].

Рассмотрение этого вопроса представляет значительный интерес в связи с тем, что соответствующие квадратурные формулы сохраняют тот же порядок точности, что и формулы замкнутого типа, однако в отличие от них приводят к обосновываемому вычислительному процессу типа дискретных особенностей. В основном, здесь реализуется схема, имеющая порядок точности $O\left(\frac{\ln n}{n^4}\right)$. Отметим, что аналогичная схема (модифицированная схема дискретных вихрей) точности $O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$, основанная на определенной квадратурной формуле замкнутого типа, обоснована Д. Г. Саникидзе [74]. Им же соответствующая схема была использована для численного решения некоторых задач конформного отображения [77]. Введение внешних узлов оказывается очень эффективным с точки зрения существенной возможности обоснования соответствующих схем для уравнения вида (4.3.1), в отличие от применения квадратурных формул замкнутого типа более высокой, чем $O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ точности. Наши дальнейшие рассмотрения относятся к выяснению специфики упомянутых формул. Предложенные формулы также могут быть применены к численному решению конкретных задач конформного отображения с более высокой точностью.

Считая натуральное n ($n > 2$) заданным, введем на L систему точек $\{\tau_p\}_{p=1}^{2n}$, разбивающую L на $2n$ равных (по длине) частей. Усло-

вися при этом под $\tau_m \tau_q$ ($m < q$) понимать, как обычно, кратчайшую дугу контура L с концами τ_m и τ_q , расположенными на нем в положительном направлении. Ниже в обозначениях τ_μ будут встречаться случаи неположительных μ , а также $\mu > 2n$. В таких случаях под τ_μ будем подразумевать, соответственно, точки разбиения с индексами $\mu \pm 2n$.

В этих условиях в [75, § 2.6] построена квадратурная формула вида

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt \approx \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=1}^n c_\sigma(\nu) \frac{\varphi(\tau_{\nu+2\sigma-1}) - \varphi(t_0)}{\tau_{\nu+2\sigma-1} - t_0}, \quad (4.3.2)$$

ν — такой номер, что при заданных n и t_0 имеет место $t_0 \in \tau_{\nu-1} \tau_{\nu+1}$ и $t_0 \neq \tau_{\nu-1}, \tau_{\nu+1}$, а

$$c_\sigma(\nu) = p_{\nu+2\sigma-5} + p_{\nu+2\sigma-3} + p_{\nu+2\sigma-1} + p_{\nu+2\sigma+1}.$$

Для p_j справедливо асимптотическое представление

$$p_j = 2h A_j \frac{t'(s_j)}{\pi i} + O(h^{1+\delta}) \quad (n \rightarrow \infty),$$

где

$$A_{\nu+2\sigma-5} = A_{\nu+2\sigma+1} = -\frac{1}{24}, \quad A_{\nu+2\sigma-3} = A_{\nu+2\sigma-1} = \frac{13}{24}.$$

Тогда и для $c_\sigma(\nu)$ справедлива асимптотическая формула

$$c_\sigma(\nu) = \frac{2h}{\pi i} t'(s_{\nu\sigma}^*) + O(h^{1+\delta}),$$

где $s_{\nu\sigma}^*$ — произвольным образом фиксированная точка из сегмента $[s_{\nu+2\sigma-5}, s_{\nu+2\sigma+1}]$.

В работе [74] обоснован один метод, подобный методу дискретных особенностей для сингулярного интегрального уравнения I-го рода вида (4.3.1). Мы ниже будем обосновывать указанную вычислительную схему для уравнений (4.3.1).

Придавая в (4.3.2) параметру t_0 значения τ_ν ($\nu = 1, \dots, 2n$), мы получим вполне определенную аппроксимацию рассматриваемого в (4.3.1) сингулярного интеграла во всех узлах разбиения контура L , но в отличие от схемы метода дискретных особенностей системы

расчетных и контрольных узлов (см. [1], [35]) не разделяются раз и навсегда, а взаимозаменяются при переходе от любого значения $t_0 \in \{\tau_p\}_{p=1}^{2n}$ к ближайшему по данному контуру узлу. При этом любой из контрольных узлов входит одновременно в число расчетных. Отметим также, что изложенный здесь процесс аппроксимации сингулярного интеграла основан на приближении функций, являющихся достаточно гладкими при условии надлежащей гладкости исходных плотностей.

Зафиксировав произвольно номер ν_0 ($1 \leq \nu_0 \leq 2n$), рассмотрим определенную на L непрерывную (периодическую) функцию $(G_n \varphi)(t_0)$, получаемую применением к значениям (в узлах) суммы $\sum_{k=1}^n$ в формуле (4.3.2) кусочно-полиномиального интерполанта L_n , построенного по дугам $\tau_{\nu_0+2\sigma-5} \tau_{\nu_0+2\sigma+1}$ ($\sigma = 1, \dots, n$) через значения в четырех последующих узлах $\tau_{\nu_0+2\sigma-5}$, $\tau_{\nu_0+2\sigma-3}$, $\tau_{\nu_0+2\sigma-1}$, $\tau_{\nu_0+2\sigma+1}$. В результате, полагая $t_0 \in \tau_{\nu_0+2\sigma-5} \tau_{\nu_0+2\sigma+1}$ ($\sigma = 1, \dots, n$), мы получим аппроксимацию соответствующего сингулярного интеграла при любом значении $t_0 \in L$ с помощью выражения вида $\varphi(t_0) + (G_n \varphi)(t_0)$.

В пространстве (подпространстве) непрерывных на L кусочно-полиномиальных функций ψ_n , представляющих при соответствующем выборе ν_0 многочлены степени не больше четырех на дугах $\tau_{\nu_0+2\sigma-5} \tau_{\nu_0+2\sigma+1}$, рассмотрим

$$S_n \psi_n(t_0) \equiv \psi_n(t_0) + (G_n \psi_n)(t_0), \quad t_0 \in L.$$

Покажем, что при достаточно больших n операторы S_n непрерывно обратимы в соответствующих подпространствах. Для этого рассмотрим значения $(G_n \psi_n)(\tau_\nu)$ ($\nu = 1, \dots, 2n$). Считая n четным (нечетный случай рассматривается аналогично), после соответствующей группировки слагаемых выражение $(G_n \psi_n)(\tau_\nu)$ при любом ν можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} (G_n \psi_n)(\tau_\nu) &= \sum_{\sigma=1}^{n/2} (p_{\nu+2\sigma-5} + p_{\nu+2\sigma-3} + p_{\nu+2\sigma-1} + p_{\nu+2\sigma+1}) \times \\ &\times \frac{\psi_n(\tau_{\nu+2\sigma+1}) - \psi_n(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+2\sigma+1} - \tau_\nu} + \sum_{\sigma=1}^{n/2} (p_{\nu-2\sigma-5} + p_{\nu-2\sigma-3} + \\ &+ p_{\nu-2\sigma-1} + p_{\nu-2\sigma+1}) \frac{\psi_n(\tau_{\nu-2\sigma+1}) - \psi_n(\tau_\nu)}{\tau_{\nu-2\sigma+1} - \tau_\nu}. \end{aligned}$$

Итак, получили

$$\begin{aligned} (G_n \psi_n)(\tau_\nu) &= \sum_{\sigma=1}^{n/2} \left((p_{\nu-2\sigma-5} + p_{\nu-2\sigma-3} + p_{\nu-2\sigma-1} + \right. \\ &+ p_{\nu-2\sigma+1}) \frac{\psi_n(\tau_{\nu-2\sigma-1}) - \psi_n(\tau_\nu)}{\tau_{\nu-2\sigma+1} - \tau_\nu} + (p_{\nu+2\sigma-5} + p_{\nu+2\sigma-3} + \\ &\left. + p_{\nu+2\sigma-1} + p_{\nu+2\sigma+1}) \frac{\psi_n(\tau_{\nu+2\sigma-1}) - \psi_n(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+2\sigma-1} - \tau_\nu} \right). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Из выражения (4.3.3) выделим сумму $\sum_\nu$ с множителем $\psi_n(\tau_\nu)$:

$$\begin{aligned} \sum_\nu &= -\psi_n(\tau_\nu) \sum_{\sigma=1}^{n/2} \left(\frac{p_{\nu-2\sigma-5} + p_{\nu-2\sigma-3} + p_{\nu-2\sigma-1} + p_{\nu-2\sigma+1}}{\tau_{\nu-2\sigma+1} - \tau_\nu} + \right. \\ &\left. + \frac{p_{\nu+2\sigma-5} + p_{\nu+2\sigma-3} + p_{\nu+2\sigma-1} + p_{\nu+2\sigma+1}}{\tau_{\nu+2\sigma-1} - \tau_\nu} \right). \end{aligned}$$

Пусть δ ($0 < \delta \leq 1$) — показатель в условии Ляпунова для контура L . Считая подпоследовательность j_n ($j_n \uparrow \infty$) подобранной по условию $\left(\frac{j_n}{n}\right)^\delta \ln j_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), сумму $\sum_\nu$ представим в виде

$$\sum_\nu = -\psi_n(\tau_\nu) \left(\sum_{\sigma=1}^{j_n} + \sum_{\sigma=j_n+1}^{n/2} \right).$$

Для $\sigma \leq j_n$ справедливо

$$\begin{aligned} \frac{p_{\nu-2\sigma-5} + p_{\nu-2\sigma-3} + p_{\nu-2\sigma-1} + p_{\nu-2\sigma+1}}{\tau_{\nu-2\sigma+1} - \tau_\nu} &= \\ &= \frac{8}{-(2\sigma-1)\pi i} (1 + O(n^{-\delta} j_n^\delta)), \\ \frac{p_{\nu+2\sigma-5} + p_{\nu+2\sigma-3} + p_{\nu+2\sigma-1} + p_{\nu+2\sigma+1}}{\tau_{\nu+2\sigma-1} - \tau_\nu} &= \\ &= \frac{8}{(2\sigma-1)\pi i} (1 + O(n^{-\delta} j_n^\delta)) \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

при достаточно большом n (см. [73]). На основании (4.3.4) при указанном подборе $\{j_n\}$ имеем

$$\sum_{\sigma=1}^{j_n} \nu = O(n^{-\delta} j_n^\delta) \ln j_n \rightarrow 0.$$

Можно утверждать (см. [73]), что

$$\sum_{\sigma=j_n+1}^{n/2} \nu = 1 + \varepsilon_{n\nu} \quad (\max |\varepsilon_{n\nu}| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty).$$

Тем самым, при любом ν ($1 \leq \nu \leq 2n$)

$$(G_n \psi_n)(\tau_\nu) = (\tilde{G}_n \psi_n)(\tau_\nu) - (1 + \tilde{\varepsilon}_{n\nu}) \psi_n(\tau_\nu),$$

где

$$\begin{aligned} (\tilde{G}_n \psi_n)(\tau_\nu) = & \sum_{\sigma=1}^{n/2} \left\{ (p_{\nu-2\sigma-5} + p_{\nu-2\sigma-3} + p_{\nu-2\sigma-1} + \right. \\ & + p_{\nu-2\sigma+1}) \frac{\psi_n(\tau_{\nu-2\sigma+1})}{\tau_{\nu-2\sigma+1} - \tau_\nu} + (p_{\nu+2\sigma-5} + p_{\nu+2\sigma-3} + \\ & \left. + p_{\nu+2\sigma-1} + p_{\nu+2\sigma+1}) \frac{\psi_n(\tau_{\nu+2\sigma-1})}{\tau_{\nu+2\sigma-1} - \tau_\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

а $\max_\nu |\tilde{\varepsilon}_{n\nu}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, подразумевая под $(\tilde{G}_n \psi_n)(t_0)$ кусочно-интеполяционное выражение, получаемое применением оператора L_n к значениям $(\tilde{G}_n \psi_n)(\tau_\nu)$, можно написать

$$(S_n \psi_n)(t_0) = (\tilde{G}_n \psi_n)(t_0) + \delta_n(\psi_n; t_0) \quad (4.3.6)$$

с выполнением при этом $\max_{t_0} |\delta_n(\psi_n; t_0)| \leq \varepsilon_n \max_t |\psi_n(t)|$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. При заданном n в соответствующем подпространстве рассмотрим однородное уравнение

$$(\tilde{G}_n \psi_n)(t_0) = 0. \quad (4.3.7)$$

Учитывая структуру выражения (4.3.5), мы видим, что (4.3.7) эквивалентно двум независимым друг от друга системам линейных алгебраических уравнений (с n неизвестными). Далее, на основе элементарным образом получаемого асимптотического представления коэффициентов p_j (в условии гладкости L) убеждаемся, что все эти коэффициенты отличны от нуля. Учитывая это и известные результаты [1], [35], по структуре коэффициентов упомянутых систем можно увидеть, что к обеим системам применима схема метода дискретных вихрей. Таким образом, приходим к утверждению, что уравнение (4.3.7) имеет лишь тривиальное решение. Следовательно, оператор $\tilde{G}_n$ в соответствующем подпространстве непрерывно обратим.

Отсюда на основании (4.3.6) получаем, что при достаточно больших n и операторы S_n имеют непрерывные обратные.

Воспользовавшись известными подходами к изучению обратных матриц в схемах дискретных вихрей (см. [1], [35]), можно убедиться, что нормы обратных к S_n операторов в соответствующих пространствах имеют оценку $O(\ln n)$ ($n \rightarrow \infty$). На основании этого, заметив, что соответствующие обратные операторы могут быть определены и на множестве гёльдеровых функций, можно указать оценку их норм в пространствах Гёльдера с заданным показателем. В дальнейшем сообразно с этим мы будем рассматривать гёльдеровы пространства H_β (при обычном определении нормы) с произвольным показателем $\beta < \alpha$. При этом, принимая для соответствующих норм обозначения $\|S_n^{-1}\|_{H_\beta}$, можно убедиться в справедливости оценки $\|S_n^{-1}\|_{H_\beta} = O(n^\beta \ln^2 n)$ ($n \rightarrow \infty$). Такое утверждение, главным образом, основывается на оценке выражения

$$\sup_{t_0, t_1 \in L} \frac{|(G_n \varphi)(t_0) - (G_n \varphi)(t_1)|}{|t_0 - t_1|^\beta} \quad (4.3.8)$$

через $\max_p |\varphi(\tau_p)|$. Полагая вначале $|t_0 - t_1| > \min_j |\tau_{j+1} - \tau_j|$, имеем

$$\frac{|(G_n \varphi)(t_0) - (G_n \varphi)(t_1)|}{|t_0 - t_1|^\beta} \leq \frac{2 \max_j |(G_n \varphi)(\tau_j)|}{\min_j |\tau_{j+1} - \tau_j|^\beta}.$$

Для $\max_j |(G_n \varphi)(\tau_j)|$, учитывая гладкость контура L и $\max_j |p_j| = O(n^{-1})$, нетрудно получить оценку $O(\ln n) \max_p |\varphi(\tau_p)|$, что для рассматриваемого выражения приводит к оценке $O(n^\beta \ln n) \max_p |\varphi(\tau_p)|$. Рассмотрение значений t_0 и t_1 , определяемых условием $|t_0 - t_1| < \min_j |\tau_{j+1} - \tau_j|$, очевидным образом сводится к оценке содержащегося в (4.3.8) отношения с предположением, что соответствующие точки t_0 и t_1 находятся на одной и той же дуге разбиения контура L . В таком случае, используя структуру Лагранжевых интерполяционных коэффициентов в выражении $(G_n \varphi)(t_0)$ и очевидным образом получаемое на этой основе неравенство

$$|(G_n \varphi)(t_0) - (G_n \varphi)(t_1)| \leq c_0 |t_0 - t_1| n \max_\nu |(G_n \varphi)(\tau_\nu)|$$

($c_0 = \text{const}$), для соответствующих выражений получаем вновь оценку вида $O(n^\beta \ln n) \max_p |\varphi(\tau_p)|$. После этого установление требуемой оценки осуществляется уже элементарным образом.

Займемся теперь рассмотрением вычислительной схемы для исходного уравнения (4.3.1). К приближенному вычислению сингулярного оператора

$$(S\varphi)(t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt$$

применим указанную выше схему (4.3.2). Что же касается слагаемого

$$(H\varphi)(t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t) \varphi(t) dt,$$

то поступим следующим образом. Применим формулы вида (4.3.2) для регулярных интегралов, т. е. квадратурные формулы с внешними узлами. Тогда имеем

$$\frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t) \varphi(t) dt \approx \sum_{\sigma=1}^n c_{\sigma}(\nu) k(t_0, \tau_{\nu+2\sigma-1}) \varphi(\tau_{\nu+2\sigma-1}). \quad (4.3.9)$$

Погрешность такой аппроксимации — $O(1/n^4)$.

Применение после этого к сумме (4.3.9) оператора L_n (при принятом ранее выборе ν_0) приводит, в конечном счете, к аппроксимации $(H\varphi)(t_0)$ определенными оператор-функциями $(Q_n\varphi)(t_0)$ аналогичного $\tilde{G}_n$ вида. Сообразно с этим, при заданном n и в пространстве H_{β} рассмотрим уравнение

$$(S_n\varphi_n)(t_0) + (Q_n\varphi_n)(t_0) = f(t_0). \quad (4.3.10)$$

Предлагаемая схема приближенного решения уравнения (4.3.1) основана на рассмотрении системы линейных алгебраических уравнений (относительно значений $\{\varphi_n(\tau_p)\}_{p=1}^{2n}$), получаемой из (4.3.10) путем надлежащей дискретизации параметра t_0 . Следующие наши рассмотрения относятся к обоснованию соответствующего процесса. Более точно, нам предстоит показать, что по изложенной здесь схеме аппроксимации уравнения (4.3.1) обоснование соответствующего процесса при указанном представлении оператор-функции $(H\varphi)(t_0)$ возможно в принятых в начале предположениях относительно функций $k(t_0, t)$ и $f(t_0)$. При этом на основании применяемых для этого рассуждений в определенной мере выясняется вопрос о влиянии гладкости указанных функций на порядок сходимости процесса.

Из предыдущих результатов следует, что уравнение (4.3.10) эквивалентно

$$(K_n \varphi_n)(t_0) \equiv \varphi_n(t_0) + S_n^{-1}(Q_n \varphi_n)(t_0) = S_n^{-1} f(t_0). \quad (4.3.11)$$

Наряду с (4.3.11) в пространстве H_β будем рассматривать эквивалентное (4.3.1) уравнение

$$(K\varphi)(t_0) \equiv \varphi(t_0) + S^{-1}(H\varphi)(t_0) = S^{-1} f(t_0), \quad (4.3.12)$$

предположив при этом, что оператор K имеет (непрерывный) обратный. Дальнейшие рассмотрения, связанные с уравнениями (4.3.11), (4.3.12), существенным образом зависят от оценки разности

$$(R_n \varphi)(t_0) \equiv S^{-1}(H\varphi)(t_0) - S_n^{-1}(Q_n \varphi)(t_0)$$

по норме пространства H_β .

Имеем

$$(R_n \varphi)(t_0) = S^{-1} L_n(H\varphi)(t_0) - S_n^{-1}(Q_n \varphi)(t_0) + S^{-1}(H\varphi - L_n H\varphi)(t_0).$$

Далее, очевидно, что

$$\begin{aligned} \|S^{-1} L_n(H\varphi) - S_n^{-1}(Q_n \varphi)\| &\leq \|S_n^{-1}[L_n(H\varphi) - (Q_n \varphi)]\| + \\ &+ \|(S^{-1} - S_n^{-1})L_n(H\varphi)\|, \quad (\|\cdot\| := \|\cdot\|_{H_\beta}). \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Заметив, что $L_n(Q_n \varphi)(t_0) = (Q_n \varphi)(t_0)$, можно написать

$$\|L_n(H\varphi) - (Q_n \varphi)\| = \|L_n[(L_n H\varphi) - (Q_n \varphi)]\|.$$

Что касается оценки $\|L_n[(L_n H\varphi) - (Q_n \varphi)]\|$, то обозначив

$$(R_n^* \varphi)(t_0) = L_n(H\varphi)(t_0) - (Q_n \varphi)(t_0),$$

воспользуемся неравенством

$$\max_{t_0} |L_n(R_n^*)(t_0)| \leq c_1 \max_{\nu} |(R_n^* \varphi)(\tau_\nu)|, \quad c_1 = \text{const}.$$

Далее, представим $(R_n^* \varphi)(\tau_\nu)$ ($1 \leq \nu \leq 2n$) в виде

$$\begin{aligned} (R_n^* \varphi)(\tau_\nu) &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \int_{\tau_{\nu+2\sigma-1}}^{\tau_{\nu+2\sigma+1}} L_n(\varphi) k(\tau_\nu, t) dt - \right. \\ &- l_{\nu+2\sigma-3} k(\tau_\nu, \tau_{\nu+2\sigma-3}) \varphi(\tau_{\nu+2\sigma-3}) - l_{\nu+2\sigma-1} k(\tau_\nu, \tau_{\nu+2\sigma-1}) \times \\ &\times \varphi(\tau_{\nu+2\sigma-1}) l_{\nu+2\sigma+1} k(\tau_\nu, \tau_{\nu+2\sigma+1}) - l_{\nu+2\sigma+3} k(\tau_\nu, \tau_{\nu+2\sigma+3}) \left. \right\}. \end{aligned}$$

Итак, получили

$$\begin{aligned}
 (R_n^* \varphi)(\tau_\nu) = & \int_{\tau_{\nu-1} \tau_{\nu+1}} (L_n \varphi)(t) k(\tau_\nu t) dt - l_{\nu-3} k(\tau_\nu, \tau_{\nu-3}) - \\
 & - l_{\nu-1} k(\tau_\nu, \tau_{\nu-1}) \varphi(\tau_{\nu-1}) - l_{\nu+1} k(\tau_\nu, \tau_{\nu+1}) \varphi(\tau_{\nu+1}) - \\
 & - l_{\nu+3} k(\tau_\nu, \tau_{\nu+3}) \varphi(\tau_{\nu+3}) + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \left\{ \int_{\tau_{\nu+2\sigma-1} \tau_{\nu+2\sigma+1}} (L_n \varphi)(t) \times \right. \\
 & \times k(\tau_\nu, t) \varphi(t) dt - l_{\nu+2\sigma-3} k(\tau_\nu, \tau_{\nu+2\sigma-3}) \varphi(\tau_{\nu+2\sigma-3}) - \\
 & - l_{\nu+2\sigma-1} k(\tau_\nu, \tau_{\nu+2\sigma-1}) \varphi(\tau_{\nu+2\sigma-1}) - \\
 & - l_{\nu+2\sigma+1} k(\tau_\nu, \tau_{\nu+2\sigma+1}) \varphi(\tau_{\nu+2\sigma+1}) - \\
 & \left. - l_{\nu+2\sigma+3} k(\tau_\nu, \tau_{\nu+2\sigma+3}) \varphi(\tau_{\nu+2\sigma+3}) \right\}, \quad (4.3.14)
 \end{aligned}$$

где коэффициенты l_j определены в § 2.6.

Из указанных выражений для l_j непосредственным образом следует оценка $\max_j |l_j| = O(n^{-1})$, и так как $k(t_0, t) \in H(\alpha)$, то

$$k(\tau_\nu, t) - k(\tau_\nu, \tau_{\nu+2\sigma+1}) = O(n^{-\alpha}) \quad (4.3.15)$$

и, аналогично, при $t = \{\tau_{\nu+2\sigma-5}, \tau_{\nu+2\sigma-3}, \tau_{\nu+2\sigma-1}\}$. На основании этих оценок с учетом теории интерполирования функций, в конечном счете можно написать

$$\max_{t_0} |L_n(R_n^* \varphi)(t_0)| = O\left(\frac{1}{n^{4+\alpha}}\right). \quad (4.3.16)$$

Далее, рассмотрим

$$\frac{|L_n(R_n^* \varphi)(t_0) - L_n(R_n^* \varphi)(t_1)|}{|t_0 - t_1|^\beta}, \quad t_0 \neq t_1$$

с разделением множества точек $t_0, t_1 \in L$ на $|t_0 - t_1| > \min_j |\tau_{j+1} - \tau_j|$ и остальные. На основании неравенства

$$\frac{|L_n(R_n^* \varphi)(t_0) - L_n(R_n^* \varphi)(t_1)|}{|t_0 - t_1|^\beta} \leq O(n^\beta) \max_\nu |(R_n \varphi)(\tau_\nu)|$$

при $|t_0 - t_1| > \min_j |\tau_{j+1} - \tau_j| = O(1/n)$ и неравенства

$$\begin{aligned}
 & |L_n(R_n^* \varphi)(t_0) - L_n(R_n^* \varphi)(t_1)| \leq \\
 & \leq c_2 n^\beta |t_0 - t_1|^\beta \max_\nu |(R_n \varphi)(\tau_\nu)|, \quad c_2 = \text{const}
 \end{aligned}$$

при $|t_0 - t_1| \leq \min_j |\tau_{j+1} - \tau_j| = O(1/n)$, с учетом $\|S_n^{-1}\|_{H_\beta} = O(n^\beta \ln^2 n)$, получаем

$$\|S_n^{-1}[L_n(H\varphi) - (Q_n\varphi)]\| = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{4+\alpha-2\beta}}\right). \quad (4.3.17)$$

Оценка второго слагаемого в (4.3.13) очевидным образом сводится к оценке $\|S_n^{-1}(S - S_n)S^{-1}L_n(H\varphi)\|$, причем $(S - S_n)S^{-1}L_n(H\varphi)(t_0)$ представляет собой остаток квадратурной формулы по изложенной в начале схеме для сингулярного оператора S с плотностью $S^{-1}L_n(H\varphi)(t_0)$. Так как в данном случае $S^{-1} = S$, то согласно замеченному выше относительно оператора H имеем

$$\|S^{-1}L_n(H\varphi)\|_{H_\alpha} \leq c_3 \max_p |\varphi(\tau_p)|, \quad c_3 = \text{const}.$$

Таким образом, при любом n функция $S^{-1}L_n(H\varphi)(t_0)$ удовлетворяет (равномерно относительно n) условию H_α с указанной оценкой ее нормы в соответствующем пространстве. С учетом этого (см. [74]), исходя из структуры аппроксимирующего оператора S_n , нетрудно проследить, что оценка разности $(S - S_n)S^{-1}L_n(H\varphi)(t_0)$ в пространстве H_β по существу не отличается от предыдущих рассмотрений. Именно, достаточно заметить, что в силу $L_n G_n S^{-1}L_n(H\varphi)(t_0) = G_n S^{-1}L_n(H\varphi)(t_0)$ имеет место тождество

$$\begin{aligned} (S - S_n)S^{-1}L_n(H\varphi)(t_0) &= S_0(S^{-1}L_n(H\varphi))(t_0) - \\ &- L_n S_0(S^{-1}L_n(H\varphi))(t_0) + L_n(S_0 - G_n)S^{-1}L_n(H\varphi)(t_0), \end{aligned}$$

где G_n — указанный выше оператор, а S_0 — оператор, определяемый по предположению

$$(S_0\psi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} dt.$$

Тем самым, для соответствующей величины мы получаем также оценку вида (4.3.17).

Для окончательной оценки $(R_n\varphi)(t_0)$ остается указать еще оценку выражения $S^{-1}(H\varphi - L_n(H\varphi))(t_0)$ в пространстве H_β , что осуществляется элементарно, учитывая упомянутые выше свойства операторов S^{-1} и H . В частности, мы имеем

$$\begin{aligned} \|S^{-1}(H\varphi - L_n(H\varphi))(t_0)\| &\leq c_4 \max_{t_0} |\varphi(t_0) - L_n(\varphi)(t_0)| = \\ &= O\left(\frac{1}{n^{4+\beta}}\right) \|\varphi\|, \quad c_4 = \text{const}, \quad \|\varphi\| = \max_t |\varphi^{(4)}(t)|. \end{aligned}$$

В результате, сопоставляя полученные оценки, можно написать

$$\|R_n \varphi\| \leq \eta_n \|\varphi\|,$$

где $\eta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда, на основе известных утверждений [21, V, XIV] следует, что операторы K_n , начиная с некоторого n , имеют непрерывные обратные. А это равносильно тому, что (4.3.11) и тем самым (4.3.10) имеют единственные решения, начиная с некоторого n .

4.4. К вопросу эффективной оценки погрешности численного решения сингулярных интегральных уравнений методом квадратур

В §2.3 был указан определенный процесс аппроксимации сингулярных интегралов по произвольному гладкому контуру,

$$S(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt, \quad t_0 \in L. \quad (4.4.0)$$

Контур L может быть как разомкнутым, так и замкнутым. Для конкретности мы всюду ниже будем считать L замкнутым и гладким.

В случае интегральных уравнений Фредгольма на отрезке действительной оси в монографии [22] указаны эффективные оценки погрешности решения таких уравнений методом квадратур. В принятых относительно исходного интегрального уравнения предположениях, полученные в [22] результаты гарантируют апостериорные оценки погрешности разрешающей схемы через известные величины, вычисляемые в самом процессе решения задачи (кроме того, естественно, в упомянутые оценки входят данные исходного интегрального уравнения).

Возникает вопрос о возможности получения аналогичных оценок при численном решении сингулярных интегральных уравнений вида

$$a(t_0)\varphi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt + \frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0) \quad (4.4.1)$$

по тому или иному квадратурному процессу.

Забегаая вперед, отметим, что в отличие от фредгольмовского уравнения, в этом случае существенную роль играет структура выбираемой квадратурной формулы для сингулярных интегралов. Ниже мы с этой целью воспользуемся указанной в начале данного параграфа квадратурной формулой. При этом, как уже было отмечено, ради конкретности ограничиваемся рассмотрением замкнутого контура, хотя построение аналогичной квадратурной формулы и получение соответствующих результатов возможно и в случае разомкнутых контуров интегрирования в определенных конкретных случаях.

С целью упрощения дальнейших рассуждений мы здесь более подробно, чем в § 2.3, изложим конкретные детали, связанные с конструированием упомянутого в § 2.3 квадратурного процесса.

Считая натуральное n произвольно заданным, разделим отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками

$$s_\sigma = a + \frac{b-a}{n} \sigma, \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1.$$

Далее, задаваясь фиксированным натуральным числом m , каждый из сегментов $[s_\sigma, s_{\sigma+1}]$ разделим на m частей точками

$$s_{\sigma k} = s_\sigma + h x_k, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

где $\{x_k\}_{k=0}^{m-1}$ — некоторая система точек, заданных на отрезке $[0, 1]$, и обозначим

$$\tau_\sigma = t(s_\sigma), \quad t_{\sigma k} = t(s_{\sigma k}), \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

При этом очевидно, что если одновременно $x_0 = 0$, $x_{m-1} = 1$, то

$$t_{\sigma m-1} = t_{\sigma+1,0} = \tau_{\sigma+1}, \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1.$$

Так как L — замкнутый контур, то очевидно также, что $t_{n-1,m-1} = t_{n0} = \tau_n = \tau_0$. Таким образом, любой сетке точек $s_{\sigma k}$ на отрезке $[a, b]$ (или, иначе, любой заданной системе точек $\{x_k\}_{k=0}^{m-1}$ на отрезке $[0, 1]$) отображение $t = t(s)$ ставит в соответствие вполне определенную сетку точек $\{t_{\sigma k}\}$ на контуре L .

Далее,

$$\omega_\sigma(t) = \prod_{k=0}^{m-1} (t - t_{\sigma k}), \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1;$$

$$L_\sigma(\varphi; t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\sigma(t)}{(t - t_{\sigma k}) \omega'_\sigma(t_{\sigma k})} \varphi(t_{\sigma k}), \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$p_{\sigma k} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\omega_\sigma(t)}{(t - t_{\sigma k})\omega'_\sigma(t_{\sigma k})} dt,$$

$$\sigma = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Полагая $t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}$ ($0 \leq \nu \leq n-1$) и $t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$, имеем

$$\begin{aligned} \Phi_n(\varphi; t, t_0) &= \varphi(t_0) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\sigma(t)}{(t - t_{\sigma k})\omega'_\sigma(t_{\sigma k})} \times \\ &\times \frac{t - t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} (L_\nu(\varphi; t_0) - \varphi(t_{\sigma k})), \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

на основании чего мы получаем указанную в § 2.1 формулу

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt \approx S_n(\varphi; t_0),$$

где

$$\begin{aligned} S_n(\varphi; t_0) &= \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\left(\frac{\frac{1}{n} + \lambda_\sigma(t_0)}{(t_0 - t_{\nu k})\omega'_\nu(t_{\nu k})} \omega_\nu(t_0) \varphi(t_{\nu k}) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{p_{\sigma k}}{t_0 - t_{\sigma k}} \varphi(t_{\sigma k}) \right), \quad \lambda_\sigma(t_0) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p_{\sigma k}}{t_0 - t_{\sigma k}}. \right. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

При этом в надлежащих предположениях относительно $\varphi(t)$ справедлива оценка [67]:

$$|S(\varphi; t_0) - S_n(\varphi; t_0)| \leq (c_1 \ln n + c_2) \frac{1}{n^{r+\alpha}}, \quad (4.4.4)$$

где α ($0 < \alpha \leq 1$) — показатель Гёльдера функции $\varphi^{(r)}$; c_1, c_2 — некоторые постоянные, не зависящие от n . В первую очередь, мы поставим цель оценить коэффициенты c_1, c_2 эффективно через известные величины.

Для этого представим разность $S(\varphi; t_0) - S_n(\varphi; t_0)$ в виде

$$\begin{aligned} S(\varphi; t_0) - S_n(\varphi; t_0) &= \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \tilde{\Phi}_n(\varphi; t, t_0)}{t - t_0} dt = \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{L-\gamma} \frac{\delta_n(\varphi; t, t_0)}{t - t_0} dt + \sum_{\sigma=\nu \pm 1, \nu} \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\varphi(t) - \tilde{\Phi}_n(\varphi; t, t_0)}{t - t_0} dt. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\Phi}_n(\varphi; t, t_0)$ отличается от $\Phi_n(\varphi; t, t_0)$ тем, что вместо $\varphi(t_0)$ имеется соответствующий многочлен Лагранжа, построенный по значениям в узлах $\{t_{\nu k}\}$, а $\delta_n(\varphi, t, t_0)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta_n(\varphi; t, t_0) = & \varphi(t) - \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \varphi(t_0) + \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} R_\nu(\varphi; t_0) - \\ & - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\sigma(t)(t-t_0)}{(t-t_{\sigma k})\omega'_\sigma(t_{\sigma k})(t_{\sigma k}-t_0)} \varphi(t_{\sigma k}), \end{aligned}$$

где $R_\nu(\varphi; t_0)$ обозначает остаток указанного интерполирования [24].

Последнее выражение равно нулю, если $\varphi(t)$ — многочлен степени не больше $m-1$. Но и $R_n(\varphi; t_0)$ равно нулю для таких функций. Поэтому, если разложить $\varphi(t)$ в ряд Тейлора (см. [24]) и учесть свойства $\delta_n(\varphi; t, t_0)$, получим

$$\begin{aligned} \delta_n(\varphi; t, t_0) = & \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \int_{\tau_\sigma t} (t-u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\sigma)] du - \right. \\ & - \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \int_{\tau_\sigma t_0} (t_0-u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\sigma)] du + \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \times \\ & \times \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\nu(t_0)}{(t_0-t_{\nu k})\omega'_\nu(t_{\nu k})} \left(\int_{\tau_\nu t_0} (t_0-u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\nu)] du - \right. \\ & - \int_{\tau_\nu t_{\nu k}} (t_{\nu k}-u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\nu)] du \Big) - \\ & - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\sigma(t)(t-t_0)}{(t-t_{\sigma k})\omega'_\sigma(t_{\sigma k})(t_{\sigma k}-t_0)} \times \\ & \times \left. \int_{\tau_\sigma t_{\sigma k}} (t_{\sigma k}-u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\sigma)] du \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое указанного выражения. Предварительно введем величину

$$p = \max_{t, t_0 \in L} \left| \frac{s-s_0}{t-t_0} \right|,$$

где под $s - s_0$ понимается длина наименьшей дуги между точками t и t_0 . Известно, что [46]

$$0 < \frac{1}{p} < \frac{|t - t_0|}{|s - s_0|} \leq 1.$$

Теперь оценим выражение $\frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)}$ ($\sigma \neq \nu \pm 1, \nu$) по модулю:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \right| &= \left| \frac{(t - t_{\sigma 0})(t - t_{\sigma 1}) \dots (t - t_{\sigma m-1})}{(t_0 - t_{\sigma 0})(t_0 - t_{\sigma 1}) \dots (t_0 - t_{\sigma m-1})} \right| = \\ &= \left| \frac{\frac{t-t_{\sigma 0}}{s-s_{\sigma 0}} \frac{t-t_{\sigma 1}}{s-s_{\sigma 1}} \dots \frac{t-t_{\sigma m-1}}{s-s_{\sigma m-1}} (s - s_{\sigma 0})(s - s_{\sigma 1}) \dots (s - s_{\sigma m-1})}{\frac{t_0-t_{\sigma 0}}{s_0-s_{\sigma 0}} \frac{t_0-t_{\sigma 1}}{s_0-s_{\sigma 1}} \dots \frac{t_0-t_{\sigma m-1}}{s_0-s_{\sigma m-1}} (s_0 - s_{\sigma 0})(s_0 - s_{\sigma 1}) \dots (s_0 - s_{\sigma m-1})} \right|. \end{aligned}$$

Учитывая очевидные неравенства

$$\begin{aligned} |s - s_{\sigma k}| &\leq h, \quad |s_0 - s_{\sigma k}| \geq |\nu - \sigma - 1|h, \\ |s_0 - s| &\leq |\nu + 1 - \sigma|h \quad \text{или} \quad |s_0 - s| \leq |\sigma + 1 - \nu|h, \end{aligned}$$

получим

$$\left| \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \right| \leq \begin{cases} \frac{p^m}{|\nu - \sigma - 1|}, & \sigma < \nu; \\ \frac{p^m}{|\sigma - \nu - 1|}, & \sigma > \nu. \end{cases}$$

Таким образом, можно написать

$$\begin{aligned} \left| \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \right| \cdot \left| \int_{\tau_\sigma t_0} (t_0 - u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\sigma)] du \right| &\leq \\ &\leq \begin{cases} \frac{|\nu+1-\sigma|^{r+\alpha}}{|\nu-\sigma-1|^m} p^m H_\varphi^{(r)} h^{r+\alpha}, & \sigma < \nu; \\ \frac{|\sigma+1-\nu|^{r+\alpha}}{|\sigma-\nu-1|^m} p^m H_\varphi^{(r)} h^{r+\alpha}, & \sigma > \nu. \end{cases} \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\frac{|\nu + 1 - \sigma|^{r+\alpha}}{|\nu - \sigma - 1|^m} \leq 3^{r+\alpha}, \quad \frac{|\sigma + 1 - \nu|^{r+\alpha}}{|\sigma - \nu - 1|^m} \leq 3^{r+\alpha}.$$

Окончательно получаем оценку

$$\left| \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \right| \cdot \left| \int_{\tau_\sigma t_0} (t_0 - u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\sigma)] du \right| \leq 3^{r+\alpha} H_\varphi^{(r)} p^m h^{r+\alpha},$$

где $H_\varphi^{(r)}$ — постоянная в условии Гёльдера для функции $\varphi^{(r)}$.

Теперь рассмотрим

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\nu(t_0)}{(t_0 - t_{\nu k})\omega'_\nu(t_{\nu k})} \int_{\tau_\nu t_0} (t_0 - u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\nu)] du.$$

Воспользовавшись оценкой

$$|s_{\nu k} - s_{\nu j}| = |a_\nu + x_k h - a_\nu - x_j h| = |x_k - x_j| h \geq \min_k |x_{k+1} - x_k| h,$$

получим

$$\left| \frac{\omega_\nu(t_0)}{(t_0 - t_{\nu k})\omega'_\nu(t_{\nu k})} \right| \leq \frac{p^{m-1}}{\min_k |x_{k+1} - x_k|^{m-1}}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \right| \cdot \left| \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\nu(t_0)}{(t_0 - t_{\nu k})\omega'_\nu(t_{\nu k})} \left(\int_{\tau_\nu t_0} (t_0 - u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \varphi^{(r)}(\tau_\nu)] du - \int_{\tau_\nu t_{\nu k}} (t_{\nu k} - u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\nu)] du \right) \right| \leq \\ & \leq \frac{2mp^{m-1}}{\min_k |x_{k+1} - x_k|^{m-1}} h^{r+\alpha} H_\varphi^{(r)} \frac{p^m}{|\nu - \sigma - 1|^m} \leq \frac{2mp^{2m-1} h^{r+\alpha} H_\varphi^{(r)}}{\min_k |x_{k+1} - x_k|^{m-1}}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_\sigma(t)(t-t_0)}{(t-t_{\sigma k})\omega'_\sigma(t_{\sigma k})(t_{\sigma k}-t_0)} \int_{\tau_\sigma t_{\sigma k}} (t_{\sigma k} - u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_\sigma)] du \right| \leq \\ & \leq \frac{mp^m h^{r+\alpha} H_\varphi^{(r)}}{\min_k |x_{k+1} - x_k|^{m-1}} \left| \frac{\nu + 1 - \sigma}{\nu - \sigma - 1} \right| \leq \frac{3mp^m h^{r+\alpha} H_\varphi^{(r)}}{\min_k |x_{k+1} - x_k|^{m-1}}. \end{aligned}$$

Следовательно, окончательно можно написать

$$\begin{aligned} & |\delta_n(\varphi; t, t_0)| \leq \frac{1}{(r-1)!} h^{r+\alpha} H_\varphi^{(r)} \left(1 + 3^{r+\alpha} p^m + \right. \\ & \quad \left. \frac{2mp^{2m-1}}{\min_k |x_{k+1} - x_k|^{m-1}} + \frac{3mp^m}{\min_k |x_{k+1} - x_k|^{m-1}} \right) = \frac{c_1}{n^{r+\alpha}}. \end{aligned}$$

Подставляя это значение в рассматриваемый сингулярный интеграл, получим

$$\begin{aligned} \int_{L-\gamma} \left| \frac{\delta_n(\varphi, t, t_0)}{t-t_0} \right| |dt| &\leq \max_{t, t_0 \in L} |\delta_n(\varphi; t, t_0)| \int_{L-\gamma} \left| \frac{dt}{t-t_0} \right| \leq \\ &\leq \frac{c_1 p}{n^{r+\alpha}} \int_{L-\gamma} \frac{ds}{|s-s_0|} = \frac{c_1 p}{n^{r+\alpha}} \ln \frac{(s_0-a)(b-s_0)}{(s_0-s_{\nu-1})(s_{\nu+2}-s_0)}. \end{aligned}$$

Оценим теперь логарифмический член. Для этого используем очевидные неравенства

$$\nu h \leq s_0 - a \leq (\nu+1)h, \quad (n-\nu-1)h \leq b - s_0 \leq h(n-\nu),$$

$$h \leq s_0 - s_{\nu-1} \leq 2h, \quad h \leq s_{\nu+2} - s_0 \leq 2h.$$

Откуда

$$\frac{\nu(n-\nu-1)}{4} \leq \frac{(s-a)(b-s)}{(s_0-s_{\nu-1})(s_{\nu+2}-s_0)} \leq (\nu+1)(n-\nu),$$

$$(\nu+1)(n-\nu) \leq \frac{(n+1)^2}{4}, \quad \frac{\nu(n-\nu+1)}{4} \leq \frac{(n+1)^2}{4}.$$

Таким образом,

$$\left| \ln \frac{(s_0-a)(b-s_0)}{(s_0-s_{\nu-1})(s_{\nu+2}-s_0)} \right| \leq \left| \ln \frac{(n+1)^2}{4} \right| = 2 \ln \frac{n+1}{2}, \quad n \geq 2.$$

Далее, в равенстве

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t) - \tilde{\Phi}_n(\varphi; t, t_0)}{t-t_0} dt &= \sum_{\sigma=\nu\pm 1, \nu} \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt - \\ &- L_{\nu}(\varphi; t_0) \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\nu-1} \tau_{\nu+2}} \frac{dt}{t-t_0} - \sum_{\sigma=\nu\pm 1, \nu} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p_{\sigma k}}{t_0 - t_{\sigma k}} \times \\ &\times \sum_{\substack{k=0, \\ k_0 \neq k}}^{m-1} \frac{\omega_{\nu}(t_0)}{(t_0 - t_{\sigma k_0}) \omega'_{\nu}(t_{\nu k_0})} (\varphi(t_{\nu k_0}) - \varphi(t_{\nu k})) \end{aligned}$$

разложим $\varphi(t)$ в ряд Тейлора в окрестности t_0 . Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t) - \tilde{\Phi}(\varphi; t, t_0)}{t - t_0} dt = \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \sum_{\sigma=\nu\pm 1, \nu} \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \frac{dt}{t - t_0} \times \right. \\ & \times \int_{t_0 t} (t-u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_{\nu})] du - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega_{\nu}(t_0)}{(t_0 - t_{\sigma k}) \omega'_{\nu}(t_{\nu k})} \times \\ & \times \int_{t_0 t_{\nu k}} (t_{\nu k} - u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_{\nu})] du \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\nu-1} \tau_{\nu+2}} \frac{dt}{t - t_0} - \\ & - \sum_{\sigma=\nu\pm 1, \nu} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p_{\sigma k}}{t_0 - t_{\sigma k}} \sum_{\substack{k_0=0, \\ k_0 \neq k}}^{m-1} \frac{\omega_{\nu}(t_0)}{(t_0 - t_{\sigma k_0}) \omega'_{\nu}(t_{\nu k_0})} \left(\int_{t_0 t_{\nu k_0}} (t_{\nu k_0} - u)^{r-1} \times \right. \\ & \times [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_{\nu})] du - \int_{t_0 t_{\nu k}} (t_{\nu k} - u)^{r-1} [\varphi^{(r)}(u) - \varphi^{(r)}(\tau_{\nu})] du \Big) \Big\}. \end{aligned}$$

Используя неравенства

$$\begin{aligned} |p_{\sigma k}| &\leq \frac{p^{m-1} h}{\pi \min_k |x_{k+1} - x_k|^{m-1}}, \quad |t_0 - t_{\nu-1, k}| \geq \frac{h}{p} \min_k |x_{k+1} - x_k|, \\ |t_0 - t_{\nu+1, k}| &\geq \frac{h}{p} \min_k |x_{k+1} - x_k|, \quad \left| \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{dt}{t - t_0} \right| \leq 1 + \frac{1}{\pi} \ln 2p^2, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t) - \tilde{\Phi}(\varphi; t, t_0)}{t - t_0} dt \right| \leq \frac{1}{n^{r+\alpha}} \frac{(b-a)^{r+\alpha}}{(r-1)!} \times \\ & \times H_{\varphi}^{(r)} \left[\frac{3}{\pi} + \frac{mp^{m-1}}{\min_k |x_{k+1} - x_k|^{m-1}} \left(1 + \frac{1}{\pi} \ln 2p^2 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{6m(m-1)p^{2m-1}2^{r+\alpha}}{\pi \min_k |x_{k+1} - x_k|^{2m-2}} \right] = \frac{c_2}{n^{r+\alpha}}. \end{aligned}$$

Таким образом, можно написать

$$|S(\varphi; t_0) - S_n(\varphi; t_0)| \leq \frac{1}{n^{r+\alpha}} (c_1 \ln n + c_2),$$

где

$$c_1 = \frac{(b-a)^{r+\alpha} H_\varphi^{(r)} p}{\pi(r-1)!} \left(1 + 3^{r+\alpha} p^m + \frac{2mp^{2m-1}}{\min_k |x_{k+1} - x_k|^{m-1}} + \frac{3mp^{2m}}{\min_k |x_{k+1} - x_k|^{m-1}} \right), \quad (4.4.5)$$

$$c_2 = \frac{(b-a)^{r+\alpha} H_\varphi^{(r)}}{\pi(r-1)!} \left(3 + \frac{mp^{m-1}(\pi + \ln 2p^2)}{\min_k |x_{k+1} - x_k|^{m-1}} + \frac{6m(m-1)p^{2m-1}2^{r+\alpha}}{\min_k |x_{k+1} - x_k|^{2m-2}} \right). \quad (4.4.6)$$

Переходим к уравнению (4.4.1), где L — замкнутый гладкий контур; $a(t_0)$, $b(t_0)$, $k(t_0, t)$, $f(t_0)$ — заданные на L функции класса Гёльдера; $a^2(t_0) - b^2(t_0) \neq 0$ на L . Применив к сингулярной части данного уравнения квадратурную формулу (4.4.3), а к регулярной части обычную квадратурную формулу

$$\frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t) \varphi(t) dt \approx \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} p_{\sigma k} k(t_0, t_{\sigma k}) \varphi(t_{\sigma k}), \quad (4.4.7)$$

получим приближенное уравнение

$$a(t_0)\varphi_n(t_0) + b(t_0)S_n(\varphi_n, t_0) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} p_{\sigma k} k(t_0, t_{\sigma k}) \varphi(t_{\sigma k}) = f(t_0). \quad (4.4.8)$$

Это уравнение, если придавать параметру t_0 значения из множества $\{t_{\nu j}\}$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots, m-1$), порождает следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно φ_n в точках $t_{\nu j}$:

$$a(t_{\nu j})\varphi_n(t_{\nu j}) + b(t_{\nu j})S_n(\varphi_n, t_{\nu j}) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} p_{\sigma k} k(t_{\nu j}, t_{\sigma k}) \varphi(t_{\sigma k}) = f(t_{\nu j}). \quad (4.4.9)$$

Отметим, что эту задачу нам пока не удалось решить в общем случае. Мы здесь приводим ее решение в предположении, что коэф-

фициенты $a(t_0)$, $b(t_0)$ данного уравнения постоянны. При этом можно считать $a(t_0) + b(t_0) = 1$. Тогда систему (4.4.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \varphi_n(t_{ij}) + b(t_{ij})S_n(\varphi_n - \varphi_n(t_{ij}); t_{ij}) + \\ & + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} p_{\sigma k} k(t_{ij}, t_{\sigma k}) \varphi(t_{\sigma k}) = f(t_{ij}), \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots, m-1$.

Согласно формуле Крамера

$$\begin{aligned} \varphi_n(t_{ij}) &= \frac{\sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_{ij\sigma k} f(t_{\sigma k})}{\Delta_n}, \\ i &= 0, 1, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

где Δ_n — определитель системы (4.4.10), который будем считать отличным от нуля.

Для нахождения точного решения в формуле (4.4.11) следует $f(t_{ij})$ заменить на $f(t_{ij}) + \rho(t_{ij})$. Тогда

$$\varphi(t_{ij}) = \frac{\sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_{ij\sigma k} (f(t_{\sigma k}) + \rho(t_{\sigma k}))}{\Delta_n}. \quad (4.4.12)$$

Сравнивая с (4.4.11), получаем

$$|\varphi(t_{ij}) - \varphi_n(t_{ij})| = \frac{\left| \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_{ij\sigma k} \rho_n(t_{\sigma k}) \right|}{|\Delta_n|} \leq \rho B, \quad (4.4.13)$$

где через B обозначена верхняя грань отношения

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|\Delta_{ij\sigma k}|}{|\Delta_n|}.$$

Оценка (4.4.13) является довольно удобной, так как требующиеся для этой оценки величины $\Delta_{ij\sigma k}$ и Δ_n должны определяться, когда производится фактическое решение системы уравнений (4.4.10). Остается еще указать предел погрешности, которую мы допускаем

в остальных точках, пользуясь интерполяционной формулой (4.4.8). Для этого заметим, что

$$\varphi_n(t_0) = f(t_0) - b(t_0)S_n(\varphi_n - \varphi_n(t_0); t_0) - \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} p_{\sigma k} k(t_0, t_{\sigma k}) \varphi_n(t_{\sigma k}).$$

С другой стороны, точное значение $\varphi(t_0)$ есть

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= f(t_0) - b(t_0)S_n(\varphi - \varphi(t_0); t_0) - \\ &- \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} p_{\sigma k} k(t_0, t_{\sigma k}) \varphi(t_{\sigma k}) + \rho_n(t_0), \end{aligned}$$

где $|\rho_n(t_0)| \leq \rho$.

Вычитая из предыдущего равенства последнее и воспользовавшись (2.4.13), получим

$$\begin{aligned} |\varphi(t_0) - \varphi_n(t_0)| &\leq |b(t)| |S_n(\varphi - \varphi(t_0), t_0) - \\ &- S_n(\varphi_n - \varphi_n(t_0); t_0)| + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} |p_{\sigma k}| |k(t_0, t_{\sigma k})| \times \\ &\times |\varphi(t_{\sigma k}) - \varphi_n(t_{\sigma k})| + |\rho_n(t_0)|. \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

В формуле (4.4.14) $\rho_n(t)$ оценивается через $\varphi(t_0)$ и ее производные. От этого недостатка оценки (4.4.14) можно избавиться следующим путем. Воспользуемся методом регуляризации Карлемана — Векуа (см. [46]):

$$\varphi(t_0) = Rf - RK\varphi,$$

$$Rf = \frac{a(t_0)}{a^2(t_0) - b^2(t_0)} f(t_0) - \frac{b(t_0)}{a^2(t_0) - b^2(t_0)} \cdot \frac{z(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{z(t)(t - t_0)} dt.$$

Так как $a(t_0)$ и $b(t_0)$ — постоянные, то функция $z(t)$ тоже постоянна и $\rho_n(t) = S\varphi - S_n\varphi + K\varphi - K_n\varphi$ оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} |\rho_n(t_0)| &\leq B_1 \|\varphi^{(r)}(t)\| + B_2 \| [k(t_0, t)\varphi(t)]_t^{(r)} \| = \\ &= B_1 \|\varphi^{(r)}\| + B_2 \| k_t^{(r)}(t_0, t)\varphi(t) + C_r^1 k_t^{(r-1)}(t_0, t)\varphi'(t) + \\ &+ \dots + C_r^{r-1} k_t'(t_0, t)\varphi^{(r-1)}(t) + k(t_0, t)\varphi^{(r)}(t) \|, \end{aligned}$$

где B_1, B_2 — постоянные.

Дифференцируя r -раз равенство

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= \frac{a(t_0)}{a^2(t_0) - b^2(t_0)} f(t_0) - \frac{b(t_0)}{a^2(t_0) - b^2(t_0)} \times \\ &\times \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{t - t_0} dt - \frac{1}{\pi i} \int_L \left(\frac{a(t)}{a^2(t_0) - b^2(t_0)} k(t_0, t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b(t)}{a^2(t) - b^2(t)} \cdot \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{k(t_1, t)}{t_1 - t_0} dt_1 \right) \varphi(t) dt, \end{aligned}$$

получаем

$$\varphi^{(r)}(t_0) = (Rf)^{(r)} - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{d^r}{dt_0^r} N(t_0, t) \varphi(t) dt,$$

где $N(t_0, t)$ — выражение, зависящее от $k(t_0, t)$.

Отсюда имеем

$$|\varphi^{(r)}(t_0)| \leq C_{1r} + C_{2r} H^0(b - a),$$

где

$$\begin{aligned} C_{1r} &= \max |(Rf(t_0))^{(r)}|, \quad C_{2r} = \max \left| \frac{d^r}{dt_0^r} N(t_0, t) \right| \frac{b - a}{\pi}, \\ M^{(r)} &= \max \left| \frac{d^r}{dt_0^r} k(t_0, t) \right|. \end{aligned}$$

Окончательно для $\rho(t_0)$ можно написать

$$\begin{aligned} |\rho_n(t_0)| &\leq B_1 \left\{ C_{1r} + C_{2r} H^{(0)}(b - a) \right\} + B_2 \left\{ M^{(r)} H^{(0)} + \right. \\ &+ C_r^1 M^{(r-1)} (C_{11} + C_{21} H^{(0)}(b - a)) + \dots + C_r^{r-1} M^{(1)} (C_{1r-1} + \\ &\quad \left. + C_{2r-1} H^{(0)}(b - a)) + M^{(0)} (C_{1r} + C_{2r} H^{(0)}(b - a)) \right\} = \\ &= B_1 C_{1r} + B_2 C_r^1 M^{(r-1)} C_{11} + \dots + B_2 C_r^{r-1} M^{(1)} C_{1r-1} + \\ &+ B_2 M^{(0)} C_{1r} + (B_1 C_{2r} + B_2 M^{(r)} + B_2 C_r^1 C_{21} M^{(r-1)} + \dots + \\ &+ B_2 C_r^{r-1} M^{(1)} C_{2r-1} + B_2 M^{(0)} C_{2r}) H^{(0)}(b - a) = P_r + Q_r H^{(0)}. \end{aligned}$$

Пользуясь полученным неравенством, оценку (4.4.14) можно переписать так:

$$|\varphi(t_0) - \varphi_n(t_0)| \leq |b(t_0)| |S_n| B\rho + M^{(0)}(b - a) B\rho + (P_r + Q_r H^{(0)}).$$

Обозначим через S верхнюю границу модуля приближенного решения $\varphi_n(t_0)$. Тогда

$$|\varphi(t_0)| \leq S + (|b(t_0)||S_n|B + BM^{(0)}(b-a) + 1)(P_r + Q_r H^{(0)}), \quad (4.4.15)$$

$$H^{(0)} \leq \frac{S + P_r(|b(t_0)||S_n|B + M^{(0)}(b-a)B + 1)}{1 - (|b(t_0)||S_n|B + BM^{(0)}(b-a) + 1)Q_r}. \quad (4.4.16)$$

Воспользовавшись полученной оценкой для $H^{(0)}$, из неравенств (4.4.15) и (4.4.16) можем получить окончательную оценку $|\varphi(t_0) - \varphi_n(t_0)|$ точности приближения, в которой участвуют лишь известные величины.

Здесь осталось еще оценить $|S_n|$. Как нетрудно убедиться

$$|S_n| \leq 1 + \frac{8nm^2p^m}{\min |x_{k+1} - x_k|^{m-1}}. \quad (4.4.17)$$

Следовательно, с помощью последних неравенств получаем оценку для погрешности $|\varphi(t_0) - \varphi_n(t_0)|$, в которой соответствующие постоянные выражены через исходные данные.

4.5. Применение некоторых прямых схем интерполяционной степени точности к численному решению некоторых классов сингулярных интегральных уравнений

В этом параграфе рассматривается вопрос о численном решении уравнений вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x,t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in (-1; 1), \quad (4.5.1)$$

на основе определенной аппроксимации входящих в данное уравнение сингулярного и регулярного интегралов (см. [70]). Именно, применяются приближенные формулы типа квадратур, алгебраическая степень точности которых при n узлах равна $n-1$. При этом предполагается, что решение рассматриваемого уравнения ищется в классе функций, ограниченных на одном из концов отрезка $[-1; 1]$ и неограниченных на другом (см. [46, § 105]).

Отметим, что к численному решению уравнений указанного вида могут быть применены схемы, обоснованные в известной работе М. А. Лаврентьева [26]. Иная схема, основанная на аппроксимации сингулярных интегралов квадратурной суммой, могущей дать в узлах из вложенных в $[-1; 1]$ отрезков порядок точности, равный $O(n^{-1/2} \ln n)$, рассматривается в работе И. К. Лифанова и Я. Е. Полонского [29]. Тем не менее схемы интерполяционной точности представляют известный интерес, обусловленный тем, что с увеличением гладкости функций $k(x, t)$ и $f(x)$ порядок сходимости таких схем обычно автоматически увеличивается.

Для определенности будем считать, что искомое решение уравнения (4.5.1) ограничено на конце $x = -1$ и неограничено на конце $x = 1$. Если при этом считать функции $k(x, t)$, $f(x)$ достаточно гладкими на заданном отрезке, то всякое решение уравнения (3.5.1) представимо в виде (см. [46, § 105])

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi_0(t), \quad (4.5.2)$$

где функция $\varphi_0(t)$ является достаточно гладкой на отрезке $[-1; +1]$. В частности, мы будем считать, что функции $k(x, t)$ и $f(x)$ принадлежат $H_r(\alpha)$ ($r > 1$), т. е. имеют на данном отрезке непрерывные вплоть до порядка r производные, причем производная r -го порядка удовлетворяет на этом отрезке условию Гёльдера с показателем α ($0 < \alpha \leq 1$).

Учитывая представление (4.5.2), запишем (4.5.1) в виде

$$S^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\varphi_0, x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} k(x, t) \varphi_0(t) dt = f(x), \quad (4.5.3)$$

считая при этом

$$S^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\varphi_0, x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \cdot \frac{\varphi_0(t)}{t-x} dt.$$

Используя квадратурную формулу (2.3.7) (см. § 2.3) в сингулярном интеграле, регулярную часть можно аппроксимировать выражением

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} L_{n-1}(k\varphi_0; t) dt,$$

где

$$L_{n-1}(k\varphi_0, t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} T_n(t)}{t - x_j} \sqrt{1 - x_j^2} k(x, x_j) \varphi_0(x_j),$$

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t); \quad x_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi, \quad j = 1, \dots, n,$$

и, воспользовавшись при этом свойством ортогональности на отрезке $[-1; 1]$ многочленов Чебышева $T_n(t)$ по весу $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, несложными вычислениями приходим к следующим приближенным формулам:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{x - x_j} \left(\sqrt{1 - x_j^2} T_n(x) + \lambda_j(x) \right) \varphi_0(x_j) + \\ + \sum_{j=1}^n B_j k(x, x_j) \varphi_0(x_j) = f(x). \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Здесь

$$\lambda_j(x) = \sqrt{1 - x_j^2} \sum_{\sigma=1}^n B_\sigma \frac{T_n(x)}{x - x_\sigma} + (-1)^j B_j n,$$

$$B_\sigma = \frac{2}{n} \cos^2 \frac{2\sigma-1}{4n} \pi, \quad \sigma = 1, \dots, n,$$

причем $\lambda_j(x_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$.

В результате, выражение в левой части (4.5.3) заменится суммой вида

$$L_{n-1}(\varphi_0; x) + P_{n-2}(\varphi_0; x) + \sum_{j=1}^n B_j k(x, x_j) \varphi_0(x_j), \quad (4.5.5)$$

где $P_{n-2}(\varphi_0; x)$ — многочлен степени не больше $n-2$ относительно x , известным образом определяемый через значения $\{\varphi_0(x_k)\}$, $k = 1, \dots, n$.

Приравнявая выражение (4.5.5) в узлах $x = x_j$ ($k = 1, \dots, n$), как обычно, соответствующим значениям $f(x_k)$, для определения приближенных значений $\varphi_0(x_k)$ получим определенную систему линейных алгебраических уравнений. Дадим обоснование этой схемы, предполагая, что исходное уравнение однозначно разрешимо в рассматриваемом классе функций. Будем писать $\psi \in H(\gamma)$, если заданная на отрезке $[-1; +1]$ функция ψ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем γ .

Пусть

$$\|\psi\|_{H(\gamma)} = \max_{t \in [-1;1]} |\psi(t)| + \sup_{t_1, t_2 \in [-1,1]} \frac{|\psi(t_1) - \psi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\gamma}.$$

Далее, обозначим

$$S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\varphi_0, x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{\varphi_0(t)}{t-x} dt.$$

В дальнейших рассуждениях мы воспользуемся предложениями 4.5.1–4.5.3, приведенными ниже.

Предложение 4.5.1. Если $\psi \in H(\gamma)$, $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1]$, то ¹

$$\|S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}\psi\|_{H(\gamma-1/2)} \leq M \|\psi\|_{H(\gamma)}, \quad M = \text{const}. \quad (4.5.6)$$

◁ Заметив прежде всего, что

$$\begin{aligned} |S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}\psi| &\leq \max_{t \in [-1;1]} |\psi(t)| + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sup_{t \in [-1;1]} \frac{|\psi(t) - \psi(x)|}{|t-x|^\gamma} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}|t-x|^{1-\gamma}}, \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

с учетом $\gamma > \frac{1}{2}$ получаем

$$\max_{t \in [-1;1]} |S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}\psi| \leq M_0 \|\psi\|_{H(\gamma)}, \quad M_0 = \text{const},$$

причем постоянную M_0 можно брать не зависящей от x (интеграл в правой части (4.5.7) оценивается непосредственно, а именно, разбивая его на интегралы по отрезкам $[-1, \frac{-1+x}{2}]$, $[\frac{-1+x}{2}, x]$, $[x, 1]$ и учитывая $\gamma > \frac{1}{2}$). Таким образом, дальнейшее доказательство (4.5.6) сводится к проверке справедливости неравенства

$$\sup_{x_1, x_2 \in [-1;1]} \frac{|S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\psi, x_1) - S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\psi, x_2)|}{|x_1 - x_2|^{\gamma-1/2}} \leq M_1 \|\psi\|_{H(\gamma)}, \quad M_1 = \text{const}.$$

¹ За значения сингулярных интегралов $S^{(-1/2, 1/2)}\psi$, $S^{(1/2, -1/2)}\psi$ в точках $x = \pm 1$ принимаются соответствующие пределы при $x \rightarrow \pm 1$, которые, согласно известным результатам (см. [46, § 22]) существуют и являются конечными при $\psi \in H(\gamma)$, $\gamma > 1/2$.

Очевидно, что достаточно доказательство соответствующего утверждения проводить для интеграла $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x} dt$ при x_1, x_2 — сколь угодно близких к -1 . Сообразно с этим, рассматривая

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \left(\frac{\psi(t)-\psi(x_1)}{t-x_1} - \frac{\psi(t)-\psi(x_2)}{t-x_2} \right) dt,$$

примем $x_2 = -1 + h$ ($h > 0$), считая, что h — достаточно малая величина. Далее, полагая для определенности $x_1 > x_2$, обозначим $h_1 = x_1 - x_2$. Разберем отдельно случаи $h \leq h_1$ и $h > h_1$.

Пусть $h \leq h_1$. Считая h_1 настолько малым, что $x_2 + 2h_1 < 1$, представим

$$I = \int_{-1}^{x_2+2h_1} + \int_{x_2+2h_1}^1.$$

Воспользовавшись в первом интеграле условием $\psi \in H(\gamma)$, получаем

$$\left| \int_{-1}^{x_2+2h_1} \right| \leq \sqrt{2} \|\psi\|_{H(\gamma)} \int_{-1}^{x_2+2h_1} \left(\frac{1}{|t-x_2|^{1-\gamma}} + \frac{1}{|t-x_1|^{1-\gamma}} \right) \frac{dt}{\sqrt{1+t}}. \quad (4.5.8)$$

Последний интеграл легко оценивается сверху (с учетом $h \leq h_1$) величиной вида $c_0 h_1^{\gamma-1/2}$, где c_0 — некоторая фиксированная постоянная. Что касается интеграла по промежутку $[x_2 + 2h, 1]$, то представляя его в виде

$$\begin{aligned} & [\psi(x_2) - \psi(x_1)] \int_{x_2+2h_1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{dt}{t-x_2} + \\ & + (x_1 - x_2) \int_{x_2+2h_1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{\psi(t)-\psi(x_1)}{(t-x_2)(t-x_1)} dt \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

и, воспользовавшись вновь условием $\psi \in H(\gamma)$, применением ряда элементарных оценок убеждаемся, что выражение (4.5.9) по модулю не превосходит $c_1 h_1^{\gamma-1/2} \|\psi\|_{H(\gamma)}$, $c_1 = \text{const}$.

Так, при $h \leq h_1$ (и достаточной малости h_1) имеем

$$|I| \leq \text{const } h_1^{\gamma-1/2} \|\psi\|_{H(\gamma)}. \quad (4.5.10)$$

Полагая теперь $h_1 < h$, воспользуемся представлением

$$I = \int_{-1}^{x_2-h_1/2} + \int_{x_2-h_1/2}^{x_2+h_1/2} + \int_{x_2+h_1/2}^1. \quad (4.5.11)$$

Первый интеграл в (4.5.11) разобьем на сумму интегралов по отрезкам $[-1, -1 + \frac{h_1}{2}]$, $[-1 + \frac{h_1}{2}, x_2 - \frac{h_1}{2}]$. Это возможно, так как в силу предположения $h_1 < h$, то, очевидно, $-1 + h_1/2 < x_2 - h_1/2$ ($x_2 = -1 + h$). Интеграл по промежутку $[-1, -1 + \frac{h_1}{2}]$ оценивается довольно элементарно, и в силу $\gamma > 1/2$, для него получаем оценку $c_2 h_1^{\gamma-1/2} \|\psi\|_{H(\gamma)}$, $c_2 = \text{const}$. Аналогичную оценку можно получить для интегралов по отрезку $[-1 + \frac{h_1}{2}, x_2 - \frac{h_1}{2}]$, если воспользоваться аналогичным (4.5.9) представлением (и условием $h_1 < h$). В конечном счете при $h_1 < h$ имеем

$$\left| \int_{-1}^{x_2-h_1/2} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \left(\frac{\psi(t) - \psi(x_1)}{t - x_1} - \frac{\psi(t) - \psi(x_2)}{t - x_2} \right) dt \right| \leq \quad (4.5.12)$$

$$\leq c_3 h_1^{\gamma-1/2} \|\psi\|_{H(\gamma)}, \quad c_3 = \text{const}.$$

Далее, применяя для второго интеграла в (4.5.11) аналогичную (4.5.8) оценку и, учитывая, что на отрезке $[x_2 - \frac{h_1}{2}, x_2 + \frac{h_1}{2}]$ (при условии $h_1 < h$) имеет место неравенство $1+t > h_1/2$, в результате несложных выкладок получаем оценку вида (4.5.12).

Для оценки третьего интеграла в (4.5.11) представим его в виде

$$\int_{x_2+h_1/2}^{x_2+2h_1} + \int_{x_2+2h_1}^1.$$

Заметим, что первый из этих интегралов оценивается аналогично предыдущему. Что касается второго интеграла, то его оценка в данном случае, как нетрудно видеть, не отличается от оценки соответствующего интеграла в случае $h \leq h_1$. Таким образом, оценка (4.5.10) справедлива при любых (достаточно малых) h, h_1 ($h, h_1 > 0$), что в конечном счете убеждает нас в справедливости (4.5.6). $\triangleright$

Предложение 4.5.2. При условии $\psi \in H_r(\alpha)$ ($r > 1$, $0 < \alpha \leq 1$) и $\gamma \in (1/2; 1]$ справедливо

$$\begin{aligned} & \|S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\psi, x) - S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(L_{n-1}\psi, x)\|_{H(\gamma-1/2)} \leq \\ & \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\gamma-1}}\right). \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

◁ Очевидно, что

$$S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\psi, x) - S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(L_{n-1}\psi, x) = S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\psi - L_{n-1}\psi, x).$$

Тогда согласно (4.5.6) имеем

$$\begin{aligned} & \|S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\psi, x) - S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(L_{n-1}\psi, x)\|_{H(\gamma-1/2)} \leq \\ & \leq M\|\psi - L_{n-1}\psi\|_{H(\gamma)}. \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

Для оценки $\|\psi - L_{n-1}\psi\|_{H(\gamma)}$ заметим, прежде всего, что (см. [47, ч. 1, гл. VI; ч. II, гл. III])

$$\|\psi - L_{n-1}\psi\|_C \leq \left(8 + \frac{4}{\pi} \ln n\right) \frac{M_1}{n^{r+\alpha}}, \quad \|\cdot\|_C := \max_{-1 \leq t \leq 1} |\cdot|, \quad (4.5.15)$$

где M_1 — независимая от n постоянная. Далее, для оценки

$$H_n(\psi) = \sup_{t_1, t_2 \in [-1, 1]} \frac{|(\psi - L_{n-1}\psi)_{t_1} - (\psi - L_{n-1}\psi)_{t_2}|}{|t_1 - t_2|^\gamma}$$

воспользуемся рассуждениями из доказательства леммы 2 из [63] (в предположении $m = r > 1$, $n > 1$). Заменяя в этих рассуждениях полином P_n через $L_{n-1}\psi$, вместо неравенства С. Н. Бернштейна применим неравенство А. А. Маркова (см. [47, ч. I, гл. IV]) для многочлена $L_{n-1}\psi$:

$$\left\| \frac{d}{dt} L_{n-1}\psi \right\|_C \leq n^2 \|L_{n-1}\psi\|_C. \quad (4.5.16)$$

Заметим, что на основе упомянутых из [47] результатов имеем

$$\|L_{n-1}\psi\|_C \leq \left(8 + \frac{4}{\pi} \ln n\right) \max_{1 \leq j \leq n} |\psi(x_{jn})|. \quad (4.5.17)$$

Исходя из указанных неравенств, нетрудно получить, что

$$H_n(\psi) = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\gamma-1}}\right), \quad n > 1.$$

Последнее, с учетом (4.5.14) и (4.5.15), дает (4.5.13). ▷

ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношение (4.5.13) дает оценку сверху порядка приближения сингулярных интегралов вида $S^{(-1/2, 1/2)}(\varphi; x)$ суммами $S^{(-1/2, 1/2)}(L_{n-1}\varphi; x)$ в гёльдеровских пространствах. Тем самым, оно может представлять и самостоятельный интерес.

Предложение 4.5.3. При любом $\beta \in (0, 1]$ и $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\|L_{n-1}\psi\|_{H(\beta)} \leq 2n^{1+\beta} \left(8 + \frac{4}{\pi} \ln n\right) \max_{1 \leq j \leq n} |\psi(x_{jn})|. \quad (4.5.18)$$

Действительно, если $t_1, t_2 \in [-1; 1]$ такие, что $|t_1 - t_2| > n^{-1}$, то

$$\begin{aligned} \frac{|(L_{n-1}\psi)_{t_1} - (L_{n-1}\psi)_{t_2}|}{|t_1 - t_2|^\beta} &\leq 2n^\beta \|L_{n-1}\psi\|_C \leq \\ &\leq 2n^\beta \left(8 + \frac{4}{\pi} \ln n\right) \max_{1 \leq j \leq n} |\psi(x_{jn})| \end{aligned}$$

(в силу (4.5.17)). Если же $|t_1 - t_2| \leq n^{-1}$, то для получения соответствующей оценки достаточно воспользоваться неравенством

$$|(L_{n-1}\psi)_{t_1} - (L_{n-1}\psi)_{t_2}| \leq |t_1 - t_2| \max_{t \in [-1; 1]} \left| \frac{d}{dt} L_{n-1}\psi \right|$$

и оценками (4.5.16), (4.5.17). Объединение этих оценок убеждает нас в справедливости (4.5.18). $\triangleright$

Переходим к обоснованию построенной вычислительной схемы для уравнения (4.5.3). Для этого наряду с уравнением (4.5.3) будем в классе X_n — функций $\xi_{n-1}(t)$, представляющих многочлены степени не больше $n-1$, рассматривать уравнение

$$\begin{aligned} S^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\xi_{n-1}, x) + \\ + \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \tilde{k}_n(x, t) \xi_{n-1}(t) dt = L_{n-1}(f; x), \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

где через $\tilde{k}_n(x, t)$ обозначен многочлен $L_{n-1}(k_n, x)$, интерполирующий функцию $k_n(x, t)$ по x в узлах $x = x_{jn}$, $j = 1, \dots, n$. Учитывая, что согласно построению выражения (4.5.5) $S^{(1/2, -1/2)}(\xi_{n-1}, x) = \xi_{n-1}(x) + \xi_{n-2}^*(x)$, где $\xi_{n-2}^*(x)$ — многочлен степени не больше $n-2$, имеем

$$S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\xi_{n-1}, x) + \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \tilde{k}_n(x, t) \xi_{n-1}(t) dt \in X_n.$$

Вместе с уравнениями (4.5.3) и (4.5.19) рассмотрим эквивалентные (см. [46, § 105]) им уравнения

$$\varphi_0 + S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t_1}{1-t_1}} k(t, t_1) \varphi_0(t_1) dt_1 = -S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} f, \quad (4.5.20)$$

$$\begin{aligned} \xi_{n-1} + S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t_1}{1-t_1}} \tilde{k}_n(t, t_1) \xi_{n-1}(t_1) dt_1 = \\ = -S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} (L_{n-1} f, t). \end{aligned} \quad (4.5.21)$$

При этом имеет место $S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \xi_{n-1} \in X_n$. Будем представлять (4.5.20) и (4.5.21) как линейные операторные уравнения соответственно в пространстве $H(\beta)$ ($0 < \beta < 1/2$) и подпространстве X_n .

Обозначая через $k_n^*(x, t)$ многочлен $L_{n-1}(k, x)$ — интерполирующий $k(x, t)$ по x в узлах $x = x_{jn}$ ($j = 1, \dots, n$), положим

$$K_n^* \varphi_0 \equiv S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t_1}{1-t_1}} k_n^*(t, t_1) \varphi_0(t_1) dt_1.$$

Пусть, кроме того,

$$\begin{aligned} K \varphi_0 &\equiv S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t_1}{1-t_1}} k(t, t_1) \varphi_0(t_1) dt_1, \\ \tilde{K}_n \xi_{n-1} &\equiv S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t_1}{1-t_1}} \tilde{k}_n(t, t_1) \xi_{n-1}(t_1) dt_1. \end{aligned}$$

Найдем оценку нормы разности:

$$(K_n^* - \tilde{K}_n) \xi_{n-1} = S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t_1}{1-t_1}} [k_n^*(t, t_1) - \tilde{k}_n(t, t_1)] \xi_{n-1}(t_1) dt_1.$$

Очевидно¹, что

$$\begin{aligned} k_n^*(t, t_1) - \tilde{k}_n(t, t_1) &= L_{n-1}(\delta_n; t), \\ \delta_n(t, t_1) &= k(t, t_1) - k_n(t, t_1). \end{aligned}$$

¹Согласно принятым обозначениям $L_{n-1}(\delta_n; t)$ представляет интерполяционный многочлен относительно переменной t по значениям $\delta_n(x_{jn}, t_1)$.

Тогда в силу (4.5.6) и (4.5.18) имеем

$$\begin{aligned} \|(K_n^* - \tilde{K}_n)\xi_{n-1}\| &\leq M_1 n^{3/2+\beta} \left(8 + \frac{4}{\pi} \ln n\right) \times \\ &\times \max_{\substack{t_1 \in [-1;1], \\ 1 \leq j \leq n}} |\delta_n(x_{jn}, t_1)| \|\xi_{n-1}\|, \quad M_1 = \text{const}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая условие $k(x, t) \in H_r(\alpha)$ ($r > 1$) и применяя для соответствующей функции неравенство вида (4.5.15) (по переменной x), убеждаемся, что

$$\|(K_n^* - \tilde{K}_n)\xi_{n-1}\| \leq \varepsilon_n \|\xi_{n-1}\|,$$

причем $\varepsilon_n = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{r+\alpha-\beta-3/2}}\right)$, и тем самым, в силу $r > 1$ ($r \geq 2$) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Далее, на основании (4.5.13) нетрудно получить, что

$$\|(K - K_n^*)\varphi_0\| \leq \varepsilon'_n \|\varphi_0\|, \quad \varepsilon'_n = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta-3/2}}\right),$$

а также (учитывая $f \in H_r(\alpha)$),

$$\|S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(f - L_{n-1}f)\| \leq \varepsilon''_n \|f\|, \quad \varepsilon''_n = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta-3/2}}\right),$$

причем константа в оценке ε''_n зависит вообще от $\|f\|$.

Полученные оценки, с учетом $K_n^* \xi_{n-1} \in X_n$, показывают, что выполняются известные условия общей теории приближенных методов [21]. Вследствие этого можно утверждать, что в предположении однозначной разрешимости исходного уравнения соответствующее (4.5.21) однородное уравнение при достаточно большом n имеет только нулевое решение. Это предположение, как следует из теории уравнений вида (4.5.1) (см. [46]), в рассматриваемом здесь классе решений равносильно непрерывной обратимости оператора K . Тем самым, аналогичное утверждение справедливо относительно уравнения (4.5.19). Учитывая структуру левой части последнего уравнения, убеждаемся, что при соответствующих n это уравнение разрешимо при любой правой части вида $L_{n-1}f$, что, в свою очередь, означает однозначную разрешимость упомянутой выше линейной алгебраической системы (порожденной уравнением (4.5.19)). При этом, указанные для ε_n , ε'_n , ε''_n оценки убеждают нас в том, что при достаточной

гладкости исходных функций k и f построенные на основе применяемой схемы приближенные решения сходятся к искомому (по норме пространстве H_β) с достаточной быстротой.

4.6. Численное решение сингулярных интегральных уравнений I-го рода на отрезках при $\varkappa = \pm 1$

Пусть индекс $\varkappa = 1$, т. е. рассматривается случай, когда решение уравнения (4.5.1) неограничено на обоих концах. Это означает (см. [46, § 105]), что решение уравнения (4.5.1) представимо в виде

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_0(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (4.6.1)$$

где функция $\varphi_0(t)$ является достаточно гладкой на отрезке $[-1, 1]$. Учитывая представление (4.5.3), запишем уравнение в виде

$$S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\varphi_0, x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} k(x, t) \varphi_0(t) dt = f(x), \quad (4.6.2)$$

считая при этом

$$S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\varphi_0, x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(t)}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} dt.$$

В этом случае приблизим функцию $\varphi_0(t)$ в сингулярном интеграле $S^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\varphi_0; x)$ снова интерполяционным многочленом Чебышева следующего вида:

$$L_{n-1}(\varphi_0, t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} T_n(t)}{t - x_j} \sqrt{1-x_j^2} \varphi_0(x_j), \quad (4.6.3)$$

а для регулярной части (4.6.2) будем использовать квадратурные формулы Мелера [24]. Тогда получается следующее дискретное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{1-x_j^2}}{x - x_j} (U_{n-1}(x) - U_{n-1}(x_j)) \varphi_0(x_j) + \\ + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n k(x, x_j) \varphi_0(x_j) = f(x), \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

$$x_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi, \quad j = 1, \dots, n.$$

Здесь использована формула (см. § 1.4)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} dt = U_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x \in (-1, 1),$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ — многочлены Чебышева I-го, II-го родов соответственно.

Но в этом случае решение не единственно, и оно зависит от произвольной постоянной, которая фиксируется следующим образом:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = C.$$

Для численного решения задачи получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{(-1)^{j-1} \sqrt{1-x_j^2}}{x_k - x_j} (U_{n-1}(x_k) - U_{n-1}(x_j)) + \right. \\ \quad \left. + k(x_k, x_j) \right) \varphi_0(x_j) = f(x_k), \\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi_0(x_j) = C, \quad k = 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (4.6.5)$$

При $k = j$ имеется в виду соответствующий предел. Аналогично предыдущему параграфу доказываются существование и единственность решения системы (4.6.5), а также сходимость процесса.

Теперь рассмотрим случай $\varkappa = -1$, т. е. случай, когда решение уравнения (4.5.1) ограничено на обоих концах. Это означает (см. [46, § 105]), что всякое решение уравнения (4.5.1) представимо в виде

$$\varphi(t) = \sqrt{1-t^2} \varphi_0(t). \quad (4.6.6)$$

Приближим $\varphi_0(t)$ в сингулярном интеграле $S^{(1/2, 1/2)}(\varphi_0, x)$ ее интерполяционным многочленом по узлам Чебышева II-го рода. Тогда имеем

$$L_{n-1}(\varphi_0, t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} (1-x_j^2) U_n(t)}{t-x_j} \varphi_0(x_j).$$

Подставляя построенный многочлен в (4.5.1), после соответствующих преобразований и некоторого упрощения получается следующее дискретное уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}(1-x_j^2)}{x-x_j} (-T_{n+1}(x) + T_{n+1}(x_j)) \varphi_0(x_j) + \\ & + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n \sin^2 \frac{j\pi}{n+1} k(x, x_j) \varphi_0(x_j) = f(x), \quad x_j = \cos \frac{j\pi}{n+1}. \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

Здесь мы воспользовались второй формулой обращения (см. § 1.4).

Но при $\varkappa = -1$ решение уравнения (4.5.1) существует и единственно при условии

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(f(t) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(t, t_1) \sqrt{1-t_1^2} \varphi_0(t_1) dt_1 \right) dt = 0. \quad (4.6.8)$$

Дискретный аналог последнего равенства имеет вид

$$\sum_{j=1}^n \left(f(\bar{x}_j) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} k(\bar{x}_j, x_k) \varphi_0(x_k) \right) = 0, \quad (4.6.9)$$

где $\bar{x}_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi$, $x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $j, k = 1, \dots, n$.

Из равенства (4.6.7) получается система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\varphi_0(x_1), \varphi_0(x_2), \dots, \varphi_0(x_n)$. Они будут решениями (4.5.1), если дополнительно удовлетворяется равенство (4.6.9).

ЗАМЕЧАНИЕ. При условии, что $k(x, t)$ и $f(x)$ ортогональны единичной функции с весом $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т. е.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} k(x, t) dx = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx = 0,$$

условие (4.6.8) автоматически выполняется и разумеется разрешимость уравнения (4.5.1) гарантирована.

Подобно тому, как в [35], для разрешимости уравнения (4.5.1) в этом случае также вводится дополнительное неизвестное и соответствующая система принимает вид

$$\begin{aligned} \gamma_{0n} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}(1-x_j^2)}{x_k - x_j} (-T_{n+1}(x_k) + T_{n+1}(x_j)) \times \\ \times \varphi_0(x_j) + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} k(x_k, x_j) \varphi_0(x_j) = f(x_k) \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

($k = 0, 1, \dots, n$), при $k = 0$, $x_0 = \cos 0 = 1$. Обычно, на концах отрезка сингулярный интеграл не ограничен. Но в нашем случае, когда весовая функция имеет вид

$$p(x) = (1-x)^{\pm\frac{1}{2}}(1+x)^{\pm\frac{1}{2}},$$

сингулярный интеграл всегда существует для всех значений параметра сингулярности, включая концы $x = \pm 1$. Очевидно $x_0 = \cos 0 = 1$ не создает никаких неудобств при построении системы (4.6.10).

Система (4.6.10) без γ_{0n} не совместна (без нее число уравнений больше числа неизвестных). Следовательно, если эта система с γ_{0n} совместна, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{0n} = 0$. Таким образом, γ_{0n} делает определенной систему (4.6.10), и поэтому будем называть ее регуляризующим фактором. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{0n} = 0$ тогда и только тогда, когда решение индекса $\varkappa = -1$ для уравнения (4.5.1) существует. Следовательно, поведение γ_{0n} при расчетах является индикатором наличия решения индекса $\varkappa = -1$.

ГЛАВА 5

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГРАНИЧНЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

5.1. О граничных задачах теории функций и математической физики

В настоящей главе указываются применения результатов предыдущих глав к численному решению ряда граничных задач математической физики и механики. Основным направлением в применяемом здесь подходе к решению таких задач является приведение их к одному из конкретных уравнений вида (4.2.2), для численного решения которых привлекаются изложенные в предыдущих главах вычислительные схемы. В последующих параграфах поясняется, что положенный в основу таких схем метод полигонально-рациональной аппроксимации сингулярных интегралов может быть относительно успешно применен к численному решению ряда важных прикладных задач, решение которых другими методами обычно оказывается в определенной мере затруднительным.

В данной работе наряду с некоторыми специальными задачами рассматриваются также примеры из числа хорошо изученных задач. Несмотря на то, что методы численного решения таких задач разработаны с определенной полнотой, в ряде случаев применение к ним метода аппроксимации сингулярных интегралов может оказаться в некоторой степени полезным. Отметим, кроме того, что предложенные в данной работе схемы решения граничных задач (также, как и схемы решения интегральных уравнений Фредгольма) в равной мере применимы как в случае конечных, так и бесконечных областей.

С целью более детального пояснения применяемых в данной главе подходов к численному решению различных граничных задач, приведем примеры сведения ряда таких задач к интегральным уравнениям, содержащим сингулярные интегралы с ядром Коши. Хотя отметим, что решение некоторых такого рода задач уже известно.

В настоящей главе имеется попытка уточнения ряда связанных с такими задачами деталей, в том числе с точки зрения вопросов их приложений.

5.2. К численному решению уравнения Липпмана — Швингера

Задача рассеяния в квантовой теории поля сводится к так называемому *уравнению Липпмана — Швингера* (см. [4]), которое после так называемого парциального разложения может быть записано в виде

$$T(x, x_0) + \lambda \int_0^\infty \frac{K(x, y)}{y^2 - x_0^2} T(y, x_0) dy = K(x, x_0), \quad x \geq 0, \quad (5.2.1)$$

где λ и $x_0 \in (0, \infty)$ — параметры, а сингулярный интеграл с фиксированной особенностью понимается в смысле главного значения, $K(x, y)$ — заданная функция, определяемая потенциалом взаимодействия частиц. Через решение $T(x, x_0)$ известным образом определяется искомая физическая фаза нуклон-нуклонного рассеяния. Ее вычисляют по формуле

$$\Theta_0 = -\operatorname{arctg} \left(\frac{T(x_0, x_0)}{x_0} \right). \quad (5.2.2)$$

В частности, определенный интерес представляет случай, когда

$$K(x, y) = \ln \frac{(x + y)^2 + \eta^2}{(x - y)^2 + \eta^2}, \quad (5.2.3)$$

$\lambda = 2/\pi$, $\eta = 0, 7$. Этот случай соответствует однопионно-обменному потенциалу Юкавы [4].

В [71], [92] излагаются некоторые результаты конструирования и обоснования определенных вычислительных схем для численного решения уравнения вида (5.2.1).

Трудности задачи обоснования таких схем обуславливаются, главным образом, характером поведения рассматриваемых в задачах рассеяния ядер (потенциалов) $K(x, y)$ в окрестности бесконечно удаленной точки, что затрудняет получение нужных оценок точности аппроксимации сингулярного интеграла в (5.2.1).

Настоящая работа посвящается конструированию некоторых аппроксимационных процессов для уравнения (5.2.1) с нахождением соответствующих оценок погрешности [92].

С учетом

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{y^2 - x_0^2} = 0 \quad (5.2.4)$$

уравнение (5.2.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} T(x, x_0) + \lambda \int_0^{\infty} \left(\frac{K(x, y) T(y, x_0)}{y^2 - x_0^2} - \right. \\ \left. - \frac{K(x, x_0) T(x_0, x_0)}{y^2 - x_0^2} \right) dy = K(x, x_0). \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Последняя формула показывает, что при x_0 близких к нулю и y близких к x_0 дробь, находящаяся под знаком интеграла в (5.2.1), имеет слабую особенность.

Подстановкой $y = -1 + \frac{1}{\tau}$, $x = -1 + \frac{1}{t}$, $x_0 = -1 + \frac{1}{t_0}$ уравнение (5.2.1) сводится к виду

$$T_1(t, t_0) + \lambda \int_0^1 p(t_0, \tau) \frac{K_1(t, \tau) T_1(\tau, t_0)}{\tau - t_0} d\tau = K_1(t, t_0), \quad (5.2.6)$$

где

$$p(t_0, \tau) = \frac{t_0^2}{(2t_0 - 1)\tau - t_0}, \quad K_1(t, \tau) = K\left(-1 + \frac{1}{t}, -1 + \frac{1}{\tau}\right),$$

$$T_1(t, t_0) = T\left(-1 + \frac{1}{t}, -1 + \frac{1}{t_0}\right).$$

Уравнение (5.2.6) ниже решается тремя методами. Мы в дальнейшем будем описывать каждый.

5.2.1. Метод квадратур с использованием квадратурных формул, построенных Д. Г. Саникидзе. После введения весовой функции $|\tau|^\alpha$ ($\alpha > -1$) уравнение (5.2.6) переписывается следующим

образом:

$$T_1(t, t_0) + \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 |\tau|^\alpha \left(p(t_0, |\tau|) \times \right. \\ \left. \times \frac{|\tau|^{-\alpha} K_1(t, |\tau|) T_1(|\tau|, t_0)}{|\tau| - t_0} \right) d\tau = K_1(t, t_0). \quad (5.2.7)$$

Функция $|\tau|^{-\alpha} p(t_0, |\tau|) K_1(t, |\tau|)$ относительно τ при $-1 < \alpha < 0$ имеет более высокую степень гладкости. Кроме того, как известно (см. [46]), сингулярные интегралы с весами $|\tau|^\alpha$ при указанных α ограничены вблизи концов отрезка интегрирования $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\alpha = -1/2$. Заметим также, что плотность $p(t_0, |\tau|) K_1(t, |\tau|) T_1(|\tau|, t_0)$, как было установлено в работе [71], в точке $\tau = 1$ равна нулю. Все это дает возможность решить уравнение (5.2.7) с более высокой точностью.

В [60] построены квадратурные формулы для интегралов

$$\int_{-1}^1 |x|^\alpha f(x) dx, \quad \alpha > -1$$

наивысшей степени точности. Они имеют вид

$$\int_{-1}^1 |x|^\alpha f(x) dx = \sum_{\nu=1}^n A_\nu(\alpha) [f(x_\nu) + f(-x_\nu)] + \\ + \sum_{s=0}^{p-1} B_s(\alpha) f^{(2s)}(0) + R_{np}(\alpha), \quad (5.2.8)$$

где

$$A_\nu(\alpha) = \frac{1}{x_\nu^{2p} H_\nu(x_\nu)} \int_0^1 x^{2p+\alpha} H_\nu(x) dx, \quad H_\nu(x) = \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq \nu}}^n (x^2 - x_k^2), \\ B_s(\alpha) = \frac{2}{(2s)!} \left(\frac{1}{2s + \alpha + 1} - \sum_{\nu=1}^n x_\nu^{2s} A_\nu(\alpha) \right), \\ R_{np}(\alpha) = \frac{2f^{(4n+2p)}(\xi)}{(4n+2p)!} \int_0^1 x^{2p+\alpha} \prod_{k=1}^n (x^2 - x_k^2)^2 dx.$$

Но в [60] для указанных формул (5.2.8) не исследовано поведение, свойства узлов x_ν ($\nu = 1, \dots, n$) и коэффициентов $A_\nu(\alpha)$. Там имеются только узлы и коэффициенты для случая $n = 1$, чего явно недостаточно для решения задачи (5.2.1).

Мы здесь для простоты в качестве узлов x_ν ($\nu = 1, \dots, n$) будем пользоваться узлами Чебышева $x_\nu = \cos \frac{2\nu-1}{2n}\pi$. Тогда

$$H_\nu(x) = (-1)^n \frac{1}{2^{2n-2}} \cdot \frac{T_n(x) T_n(-x)}{x^2 - x_\nu^2}, \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

и после этого легко вычисляются коэффициенты $A_\nu(\alpha)$. Формула (5.2.8) содержит производные подынтегральной функции. Если положить $p = 1$, то, как было отмечено выше, $K(x, 0)T(0, x_0) = 0$ и $|\tau|^{-\alpha} K_1(t, |\tau|) = 0$ при $\tau = 0$, $-1 < \alpha < 0$, тем самым значение функции в точке $\tau = 0$ не будет участвовать в полученной ниже системе уравнений.

Таким образом, после применения квадратурных формул (5.2.8) из (5.2.7) мы имеем

$$T_{1n}(t, t_0) + \lambda \sum_{\nu=1}^n A_\nu(\alpha) p(t_0, |\tau_\nu|) \times \\ \times \frac{|\tau_\nu|^{-\alpha} K_1(t, |\tau_\nu|) T_{1n}(|\tau_\nu|, t_0)}{|\tau_\nu| - t_0} = K_1(t, t_0). \quad (5.2.9)$$

Придавая t значение $\tau_\nu = \cos \frac{2\nu-1}{2n}\pi$ ($\nu = 1, \dots, n$), из (5.2.9) известным образом получается система линейных алгебраических уравнений n -го порядка с n неизвестными $T_{1n}(|\tau_\nu|, t_0)$ ($\nu = 1, \dots, n$). Решая эту систему относительно $T_{1n}(|\tau_\nu|, t_0)$ ($\nu = 1, \dots, n$) при фиксированном значении $t_0 \neq |\tau_\nu|$, $T_{1n}(t_0, t_0)$ определяется с помощью формулы (5.2.9) естественным образом:

$$T_{1n}(t_0, t_0) = K_1(t_0, t_0) - \\ - \lambda \sum_{\nu=1}^n A_\nu(\alpha) p(t_0, |\tau_\nu|) \frac{K_1(t_0, |\tau_\nu|) T_{1n}(|\tau_\nu|, t_0)}{|\tau_\nu| - t_0}.$$

Искомую фазу окончательно находим по формуле (5.2.2).

Здесь, по-видимому, наилучшим вариантом с точки зрения степени точности схемы является использование в качестве узлов x_k

($k = 1, \dots, n$) не корней многочлена Чебышева, а корней многочлена, ортогонального по весу $|x|^\alpha x^{2p}$ на отрезке $[-1; 1]$ ко всем многочленам меньшей степени, т. е. они выбираются из условия² (см. [60])

$$\int_0^1 x^{2p+\alpha} \prod_{k=1}^n (x^2 - x_k^2) \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq q}}^n (x^2 - x_k^2) dx = 0, \quad q = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2.10)$$

Заметим также, что так как узлы Чебышева $\tau_\nu = \cos \frac{2\nu-1}{2n}\pi$ расположены симметрично на отрезке $[-1; 1]$, то имеем возможность вместо n в (5.2.9) взять $n/2$, что заметно снизит объем вычислений.

Относительно предложенной схемы аппроксимации уравнения (5.2.1) имеет место

Теорема 5.2.1. Если ядро $K(x, y)$ имеет вид (5.2.3), то при любом фиксированном $x_0 > 0$ и достаточно большом n имеет место оценка

$$\left| \int_0^\infty \frac{K(x, y) T(y, x_0)}{y^2 - x_0^2} dy - \sum_{\nu=1}^n A_\nu(\alpha) p(t_0, |\tau_\nu|) \times \right. \\ \left. \times \frac{|\tau_\nu|^{-\alpha} K_1(t, |\tau_\nu|) T_{1n}(|\tau_\nu|, t_0)}{|\tau_\nu| - t_0} \right| \leq O\left(\frac{\ln n}{n}\right) M(T), \quad (5.2.11)$$

выполняющаяся равномерно относительно $x \geq 0$, где

$$M(T) = \sup_{x \geq 0} |T(x, x_0)| + \sup_{x_1, x_2 \in [0, 2x_0]} \frac{|T(x_1, x_0) - T(x_2, x_0)|}{|x_1 - x_2|^\beta}, \\ 0 < \beta \leq 1, \quad x_1 \neq x_2.$$

Напомним, что $\tau = 1/(y+1)$, $t = 1/(x+1)$, $t_0 = 1/(x_0+1)$.

Доказательство этой и ряда других родственных теорем мы укажем ниже.

5.2.2. Использование представления Д. Г. Саникидзе для плотностей сингулярных интегралов. Пусть отрезок $[0; 1]$ разделен на n равных частей точками $\tau_i = ih$, $h = 1/n$, $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда для любого промежутка $\tau \in [\tau_\sigma, \tau_{\sigma+1}]$, $\sigma = 0, 1, \dots, n-1$

² В работе [52] указаны узлы x_k , и коэффициенты $A_k(\alpha)$ ($k = 1, \dots, n$) вычислены для различных значений n и α .

и $t_0 \in [\tau_\nu, \tau_{\nu+1}]$ можно построить оператор-функции

$$\begin{aligned} \Phi_n(\varphi, \tau, t_0) &= L_\nu(\varphi; t_0) + \\ &+ (\tau - t_0) \sum_{k=0}^1 l_{\sigma k}(t_0) \frac{\varphi(t_{\sigma k}) - L_\nu(\varphi; t_0)}{t_{\sigma k} - t_0}, \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

где $t_{\sigma 0} = \tau_\sigma$, $t_{\sigma 1} = \tau_{\sigma+1}$, $l_{\sigma 0}(t_0) = \frac{t_0 - \tau_{\sigma+1}}{\tau_\sigma - \tau_{\sigma+1}}$, $l_{\sigma 1}(t_0) = \frac{t_0 - \tau_\sigma}{\tau_{\sigma+1} - \tau_\sigma}$, а $L_\nu(\varphi; t_0)$ — соответствующий линейный интерполянт для функции φ при $t_0 \in [\tau_\nu, \tau_{\nu+1}]$.

В формуле (5.2.12) в роли функции φ мы будем брать функцию $K(-1 + 1/t, -1 + 1/\tau)T_1(\tau, t_0)$. Тогда интеграл

$$\int_0^1 p(t_0, \tau) \frac{d\tau}{\tau - t_0} = 0, \quad (5.2.13)$$

так как он совпадает с интегралом (5.2.4).

Подставляя (5.2.12) вместо $K_1(t, \tau)T_1(\tau, t_0)$ в уравнение (5.2.6), имеем

$$\begin{aligned} T_{1n}(t, t_0) &+ \lambda \int_0^1 p(t_0, \tau) \frac{L_\nu(K_1 T_{1n}, t_0)}{\tau - t_0} d\tau + \lambda \sum_{\sigma=0}^{n-1} \int_{\tau_\sigma}^{\tau_{\sigma+1}} p(t_0, \tau) \times \\ &\times \sum_{k=0}^1 l_{\sigma k}(\tau) \frac{(K_1 T_{1n})(\tau_{\sigma+k}) - L_\nu(K_1 T_{1n}, t_0)}{\tau_{\sigma+k} - t_0} d\tau = K_1(t, t_0), \end{aligned}$$

откуда, учитывая (5.2.13), после некоторых выкладок получаем

$$\begin{aligned} T_{1n}(t, t_0) &+ \lambda \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^1 p_{\sigma k} \left(\frac{(K_1 T_{1n})(\tau_{\sigma+k})}{\tau_{\sigma+k} - t_0} - \right. \\ &\left. - \frac{L_\nu(K_1 T_{1n}, t_0)}{\tau_{\sigma+k} - t_0} \right) = K_1(t, t_0), \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

где

$$\begin{aligned} p_{\sigma 0}(t_0) &= \frac{1}{(2t_0 - 1)h} \left(h + \frac{t_0 - \tau_{\sigma+1}(2t_0 - 1)}{2t_0 - 1} \ln \frac{t_0 - \tau_{\sigma+1}(2t_0 - 1)}{t_0 - \tau_\sigma(2t_0 - 1)} \right), \\ p_{\sigma 1}(t_0) &= \frac{1}{(2t_0 - 1)h} \left(h + \frac{t_0 - \tau_\sigma(2t_0 - 1)}{2t_0 - 1} \ln \frac{t_0 - \tau_{\sigma+1}(2t_0 - 1)}{t_0 - \tau_\sigma(2t_0 - 1)} \right). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$p_\sigma(t_0) = \begin{cases} p_{00}(t_0), & \sigma = 0, \\ p_{\sigma-1,1}(t_0) + p_{\sigma 0}(t_0), & \sigma = 1, \dots, n-1, \\ p_{n-1,1}(t_0), & \sigma = n, \end{cases}$$

при $t_0 \neq 1/2$. В точке $t_0 = 1/2$ соответствующие коэффициенты доопределяются как предельные значения при $t_0 \rightarrow 1/2$, поэтому $p_{\sigma 0}(1/2) = p_{\sigma 1}(1/2) = -h/4$.

После соответствующей группировки (5.2.14) можно переписать в виде

$$T_{1n}(t, t_0) + \lambda \sum_{\sigma=0}^n p_\sigma(t_0) \left(\frac{(K_1 T_{1n})(\tau_\sigma)}{\tau_\sigma - t_0} - \frac{L_\nu(K_1 T_{1n}, t_0)}{\tau_\sigma - t_0} \right) = K_1(t, t_0). \quad (5.2.15)$$

Подставляя в (5.2.15) вместо t значения $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$, относительно неизвестных $T_{1n}(\tau_0, t_0), T_{1n}(\tau_1, t_0), \dots, T_{1n}(\tau_n, t_0)$, получается система линейных алгебраических уравнений.

Заметим, что здесь из множества точек $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n)$ надо исключить точки $\tau_0 = 0$ и $\tau_n = 1$, так как первая соответствует бесконечности, а вторая — нулю, где, как заранее известно, значения функции и неизвестных равны нулю. Таким образом, остаются неизвестные

$$T_{1n}(\tau_1, t_0), T_{1n}(\tau_2, t_0), \dots, T_{1n}(\tau_{n-1}, t_0),$$

т. е. для каждого t_0 решается система $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестным. Значение $T_{1n}(t_0, t_0)$, где $t_0 = \frac{\tau_\sigma + \tau_{\sigma+1}}{2}$, $\sigma = 0, 1, \dots, n-1$ можно вычислить с помощью формулы (5.2.15) так называемым естественным интерполированием:

$$T_{1n}(t_0, t_0) = K_1(t_0, t_0) - \lambda \sum_{\sigma=0}^n p_\sigma(t_0) \frac{(K_1 T_{1n})(\tau_\sigma) - L_\nu(K_1 T_{1n}, t_0)}{\tau_\sigma - t_0}. \quad (5.2.16)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 5.2.2. Если ядро $K(x, y)$ имеет вид (5.2.3), то при любом фиксированном $x_0 > 0$ и достаточно большом n имеет место

оценка

$$\left| \int_0^\infty \frac{K(x, y) T(y, x_0)}{y^2 - x_0^2} dy - \sum_{\sigma=0}^n p_\sigma(t_0) \left(\frac{(K_1 T_{1n})(\tau_\sigma)}{\tau_\sigma - t_0} - \frac{L_\nu(K_1 T_{1n}, t_0)}{\tau_\sigma - t_0} \right) \right| \leq O\left(\frac{\ln n}{n}\right) M(T), \quad (5.2.17)$$

выполняющаяся равномерно относительно $x \geq 0$, ($t_0 = 1/(x_0 + 1)$).

5.2.3. Метод дискретных особенностей. Следуя [35], для вычисления сингулярного интеграла в (5.2.6) выбираются два множества точек $E = \{\tau_\sigma, \sigma = 0, 1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{\tau_{0\sigma}, \sigma = 0, 1, \dots, n-1\}$ где $\tau_\sigma = \sigma h$, $h = 1/(n+1)$, $\sigma = 0, 1, \dots, n$, $\tau_{0\sigma} = \frac{\tau_\sigma + \tau_{\sigma+1}}{2}$, $\sigma = 0, 1, \dots, n-1$, т. е. точка $\tau_{0\sigma}$ является серединой отрезка $[\tau_\sigma, \tau_{\sigma+1}]$. Эти две системы точек называются (см. [35]) каноническим разбиением отрезка $[0, 1]$. В этом случае для сингулярного интеграла рассматривается квадратурная формула

$$\int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t - t_{0j}} dt \approx \sum_{k=1}^n \frac{\gamma(t_k)}{t_k - t_{0j}} h, \quad (5.2.18)$$

причем, для погрешности справедлива оценка (см. [35])

$$\left| \int_0^1 \frac{\gamma(t)}{t - t_{0j}} dt - \sum_{k=1}^n \frac{\gamma(t_k)}{t_k - t_{0j}} h \right| \leq \Theta(t_{0j}),$$

где для функции $\Theta(t_{0j})$ имеются разные оценки, зависящие от плотности $\gamma(t)$. Например, если $\gamma(t) \in H(\alpha)$ ($0 < \alpha \leq 1$), то для внутренних точек $t_0 \in (0, 1)$ справедлива оценка $\Theta(t_{0j}) = O(\ln n/n^\alpha)$ (см. [35]). Используя квадратурную формулу (5.2.18) для уравнения (5.2.6), получается следующее уравнение:

$$T_{1n}(t, t_0) + \lambda h \sum_{\sigma=1}^n p(t_0, \tau_\sigma) \frac{K_1(t, \tau_\sigma) T_{1n}(\tau_\sigma, t_0)}{\tau_\sigma - t_0} = K_1(t, t_0). \quad (5.2.19)$$

Придавая t значения $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, получается снова система линейных алгебраических уравнений порядка n относительно неизвестных

$$T_{1n}(\tau_1, t_0), T_{1n}(\tau_2, t_0), \dots, T_{1n}(\tau_n, t_0).$$

Решая эту систему для $t_0 = (\tau_\sigma + \tau_{\sigma+1})/2$, $\sigma = 0, 1, \dots, n-1$, значение $T_{1n}(t_0, t_0)$ определяется из (5.2.19) с помощью естественного интерполирования, т. е.

$$T_{1n}(t_0, t_0) = K_1(t_0, t_0) - \lambda h \sum_{\sigma=1}^n p(t_0, \tau_\sigma) \frac{K_1(t_0, \tau_\sigma) T_1(\tau_\sigma, t_0)}{\tau_\sigma - t_0}. \quad (5.2.20)$$

Теорема 5.2.3. Если ядро $K(x, y)$ имеет вид (5.2.3), то при любом фиксированном $x_0 > 0$ и достаточно большом n имеет место оценка

$$\left| \int_0^\infty \frac{K(x, y) T(y, x_0)}{y^2 - x_0^2} dy - h \sum_{\sigma=1}^n p(t_0, \tau_\sigma) \times \right. \\ \left. \times \frac{K_1(t, \tau_\sigma) T_{1n}(\tau_\sigma, t_0)}{\tau_\sigma - t_0} \right| \leq O\left(\frac{\ln n}{n}\right) M(T), \quad (5.2.21)$$

выполняющаяся равномерно относительно $x \geq 0$ ($t_0 = 1/(x_0 + 1)$).

Очевидно, что метод дискретных особенностей является довольно удобным с точки зрения практических вычислений.

Теперь приступим к исследованию погрешности изложенных схем, о чем упомянуто в теоремах 5.2.1–5.2.3. С этой целью, учитывая аналогичность, для конкретности будем подробно рассматривать указанную в 5.2.3 схему.

Не занимаясь изложением известных результатов (см. [4]) о разрешимости уравнений вида (5.2.1), мы в предположении, что при любом заданном $x_0 > 0$ исходное уравнение имеет решение, приведем ряд свойств этого решения, относящихся к поведению последнего в окрестности бесконечно удаленной точки. Эти свойства существенным образом используются в дальнейшем для получения нужных нам оценок. При этом, всюду под $K(x, y)$ будем подразумевать данное по формуле (5.2.3) выражение.

Считая параметр $x_0 \in (0, \infty)$ произвольно фиксированным, обозначим

$$Q(T; x) \equiv \int_0^\infty \frac{K(x, y) T(y, x_0)}{y^2 - x_0^2} dy,$$

подразумевая под $T = T(x, x_0)$ решение уравнения (5.2.1).

Доказательства интересующих нас свойств функции $T(x, x_0)$ существенным образом основываются на изложенных ниже в леммах 5.2.4, 5.2.5 предположениях. При этом допускается (пока формально), что присутствующие в соответствующих оценках величины являются заведомо конечными.

Лемма 5.2.4. *Справедливы асимптотические оценки*

$$\begin{aligned} |Q(T; x)| &\leq \frac{c_0 M(T) \ln x}{x} \quad (x \rightarrow \infty), \\ \left| \frac{dQ(T; x)}{dx} \right| &\leq \frac{c_1 M(T) + c'_1}{x^2} \quad (x \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

где

$$M(T) = \sup_{x \geq 0} |T(x, x_0)| + \sup_{x_1, x_2 \in [0, 2x_0]} \frac{|T(x_1, x_0) - T(x_2, x_0)|}{|x_1 - x_2|^\beta},$$

$0 < \beta \leq 1$, $x_1 \neq x_2$, а постоянные c_0 , c_1 , c'_1 не зависят от x .

◁ Действительно, разобьем (полагая $x > 4x_0$) входящий в $Q(T; x)$ интеграл по схеме

$$\int_0^\infty = \int_0^{2x_0} + \int_{2x_0}^{x/2} + \int_{x/2}^\infty = I_1 + I_2 + I_3. \quad (5.2.23)$$

Имеем

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{K(x, x_0)|T(x_0, x_0)|}{2x_0} \int_0^{2x_0} \frac{dy}{y + x_0} + \\ &+ \int_0^{2x_0} \frac{K(x, y)|T(y, x_0) - T(x_0, x_0)|}{|y - x_0|(y + x_0)} dy + \\ &+ |T(x_0, x_0)| \int_0^{2x_0} \frac{|K(x, y) - K(x, x_0)|}{|y - x_0|(y + x_0)} dy \leq \left\{ \alpha_1 K(x, x_0) + \right. \\ &\left. + \alpha_2 \max_{0 \leq y \leq 2x_0} K(x, y) + 2x_0 \alpha_1 \max_{0 < y \leq 2x_0} |K'_y(x, y)| \right\} M(T), \end{aligned}$$

где $K(x, y) > 0$; α_1 , α_2 — постоянные.

Воспользовавшись оценками функций $K(x, y)$, $K'_y(x, y)$ на данном интервале, убеждаемся, что выражение в фигурных скобках ограничено при $x \geq 0$ и есть $O(1/x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Далее, имеем оценку

$$|I_2| \leq \frac{4}{3} M(T) \int_{2x_0}^{x/2} \frac{K(x, y)}{y^2} dy. \quad (5.2.24)$$

Применяя интегрирование по частям, получаем

$$\int_{2x_0}^{x/2} \frac{K(x, y)}{y^2} dy = \frac{K(x, 2x_0)}{2x_0} - \frac{2K(x, \frac{x}{2})}{x} + \int_{2x_0}^{x/2} \frac{K'_y(x, y)}{y} dy, \quad (5.2.25)$$

заметив при этом, что внеинтегральные члены ограничены и имеют оценку $O(1/x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Для интеграла правой части (5.2.25), учитывая

$$\max_{2x_0 \leq y \leq x/2} |K'_y(x, y)| = O(1/x) \quad (x \rightarrow +\infty),$$

получаем оценку

$$\int_{2x_0}^{x/2} \frac{K'_y(x, y)}{y} dy = O\left(\frac{\ln x}{x}\right) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Далее, в силу $K(x, y) = O(\ln y)$ ($y \geq x/2$, $x \rightarrow +\infty$) имеем

$$|I_3| \leq \alpha_3 \sup_{y \geq 0} |T(y, x_0)| \int_{x/2}^{\infty} \frac{\ln y}{y^2} dy \leq \alpha_4 M(T) \frac{\ln x}{x},$$

$$\alpha_3, \alpha_4 = \text{const}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

что вместе с предыдущими оценками приводит к первому из неравенств (5.2.22).

Из соответствующего уравнения и полученной оценки следует

$$|T(x, x_0)| \leq \alpha_5 \frac{M(T) \ln x}{x} + O(1/x).$$

Воспользовавшись полученной оценкой $T(x, x_0)$ в интегралах по промежуткам $[2x_0, x/2]$, $[x/2, +\infty)$ после ряда элементарных выкладок, получаем более точную оценку для $T(x, x_0)$:

$$|T(x, x_0)| \leq \frac{c_0 M(T) + c'_0}{x}, \quad x \geq 4x_0, \quad c'_0 = \text{const}. \quad (5.2.26)$$

Доказательство второго неравенства из (5.2.22) основано также на аналогичном разбиении интеграла

$$\int_0^\infty \frac{K'_x(x, y) T(y, x_0)}{y^2 - x_0^2} dy,$$

при этом необходимо убедиться в допустимости дифференцирования под знаком интеграла $Q(T; x)$. $\triangleright$

Отметим также, что для $T(x, x_0)$ и $T'(x, x_0)$ имеет место оценка вида $\alpha_6 M(T) + \alpha_7$ и, кроме того,

$$|T'(x, x_0)| \leq \frac{c_1 M(T) + c'_1}{x^2}, \quad c_1, c'_1 = \text{const}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (5.2.27)$$

Лемма 5.2.5. *Имеет место оценка*

$$|T''(x, x_0)| \leq \frac{c_2 M(T) + c'_2}{x^2},$$

где c_2, c'_2 — постоянные, не зависящие от x .

$\triangleleft$ Доказывается аналогично лемме 5.2.4. $\triangleright$

Перейдем теперь к изложению предлагаемого в данной работе квадратурного процесса для рассматриваемого сингулярного интеграла $Q(T; x)$. Рассмотрим отдельно квадратурную формулу

$$\int_0^\infty \frac{K(x, y) T(y, x_0)}{y^2 - x_0^2} dy \approx h \sum_{\sigma=1}^n p(t_0, \tau_\sigma) \frac{K(x, y_\sigma) T(y_\sigma, x_0)}{\tau_\sigma - t_0}, \quad (5.2.28)$$

где

$$p(t_0, \tau_\sigma) = \frac{t_0^2}{(2t_0 - 1)\tau_\sigma - t_0}, \quad y_\sigma = -1 + \frac{1}{\tau_\sigma},$$

$$x_0 = -1 + \frac{1}{t_0}, \quad x = -1 + \frac{1}{t}, \quad |\tau_\sigma - t_0| > \frac{h}{2}.$$

Так как t_0 принимает значения в серединах $(\tau_\sigma, \tau_{\sigma+1})$, то с учетом (5.2.13) квадратурную формулу (5.2.28) можно переписать так:

$$\int_0^\infty \frac{K(x, y) T(y, x_0)}{y^2 - x_0^2} dy \approx h \sum_{\sigma=1}^n p(t_0, \tau_\sigma) \times \times \frac{K(x, y_\sigma) T(y_\sigma, x_0) - K(x, x_0) T(x_0, x_0)}{\tau_\sigma - t_0}, \quad (5.2.29)$$

где $y_\sigma = -1 + 1/\tau_\sigma$, $\tau_\sigma = \sigma/(n+1)$.

Как мы отметили выше, все рассуждения проводятся для фиксированного x_0 , т. е. в квадратурной формуле (5.2.29) t_0 — фиксированное число. Тогда функция

$$\Phi(T; x, \tau) = p(t_0, \tau) \left(\frac{K(x, y) T(y, x_0)}{\tau - t_0} - \frac{K(x, x_0) T(x_0, x_0)}{\tau - t_0} \right) \quad (5.2.30)$$

имеет ограниченную производную равномерно относительно $x \geq 0$. Это можно доказать непосредственно, используя леммы 5.2.4, 5.2.5 и характер функции $p(t_0, \tau)$.

Далее, с использованием теоремы (см. [35, с. 269]) о квадратурных формулах метода дискретных особенностей получаем (учтено, что $\alpha = 1$)

$$\left| \int_0^\infty \frac{K(x, y) T(y, x_0)}{y^2 - x_0^2} dy - h \sum_{\sigma=1}^n p(t_0, \tau_\sigma) \times \times \frac{K(x, y_\sigma) T(y_\sigma, x_0) - K(x, x_0) T(x_0, x_0)}{\tau_\sigma - t_0} \right| \leq O\left(\frac{\ln n}{n}\right) M(T), \quad (5.2.31)$$

что дает порядок аппроксимации $O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ ($n > 1$) рассматриваемого уравнения (5.2.1) по изложенной схеме (5.2.19) методом дискретных особенностей.

Ниже приводятся некоторые тестовые примеры с расчетом т. н. фазы нуклон-нуклонного рассеяния (что в наших обозначениях соответствует выражению $T(x_0, x_0)/x_0$). Как показали расчеты на ЭВМ, в окрестностях конца отрезка $[0, 1]$ получаются худшие результаты, чем во внутренних точках.

В следующих таблицах приводятся результаты численных расчетов для тестовых примеров, когда функция $K(x, x_0) = 1$. Вычис-

ления проводятся по методу дискретных особенностей и по методу представления плотности Д. Г. Саникидзе.

В этом случае решение интегрального уравнения есть функция $T(x, x_0) = 1$, а фаза Θ нуклон-нуклонного рассеяния в точке $(x; x_0) = (1; 1)$ равняется -0.785398 . Из таблиц следует, что при росте n величина $T_n(x, x_0)$ стремиться к 1, Θ_n тоже стремиться к значению -0.785398 .

Таблица 1

Метод дискретных особенностей

n	T_n	Θ_n
$n = 10$	$T_n(x, x_0) = 1.085613$	$\Theta_n = -0.9249576$
$n = 20$	$T_n(x, x_0) = 1.036593$	$\Theta_n = -0.8532000$
$n = 30$	$T_n(x, x_0) = 1.017028$	$\Theta_n = -0.8301748$
$n = 40$	$T_n(x, x_0) = 1.017028$	$\Theta_n = -0.8188207$
$n = 50$	$T_n(x, x_0) = 1.013437$	$\Theta_n = -0.8120623$

Таблица 2

Метод представления плотности по Д. Г. Саникидзе

n	T_n	Θ_n
$n = 10$	$T_n(x, x_0) = 1.033085$	$\Theta_n = -0.9055561$
$n = 20$	$T_n(x, x_0) = 1.016199$	$\Theta_n = -0.8444361$
$n = 30$	$T_n(x, x_0) = 1.010732$	$\Theta_n = -0.8245056$
$n = 40$	$T_n(x, x_0) = 1.008025$	$\Theta_n = -0.8147054$
$n = 50$	$T_n(x, x_0) = 1.006409$	$\Theta_n = -0.8087543$

5.3. О численном решении задачи Дирихле в случае областей с углами

В работе [73] было дано обоснование одной схемы численного решения задачи Дирихле (в случае конечной односвязной области) методом аппроксимации сингулярных интегралов в предположении, что граница области представляет (замкнутый) ляпуновский контур. В другой заметке [74] рассмотрена аналогичная задача в случае наличия у контура (границы области) угловых точек при предположении ляпуновости гладких частей контура и некоторых дополнительных условий относительно концов этих частей. Согласно полученным в [74] результатам обоснованность схемы (разрешимость аппроксимирующих уравнений и сходимость процесса) гарантируется при определенном условии на величину раствора углов.

В § 2.7 для аналогичной задачи в предположении наличия угла у контура указан возможный подход сглаживания искомого решения соответствующего граничного интегрального уравнения применением замены переменного. В конкретном случае мы приходим к интегральному уравнению вида

$$\begin{aligned} A(\tau_0) \psi(\tau_0) + \frac{B(\tau_0)}{\pi i} \int_{L^0} \frac{\psi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau - \\ - \frac{B(\tau_0)}{\pi i} \int_{L^0} \frac{\psi(\tau)}{\tau + \tau_0} d\tau = F(\tau_0), \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

$$\psi(\tau) = \tau \varphi(\tau^2 + c), \quad F(\tau_0) = \tau_0 f(\tau_0^2 + c),$$

$$a(\tau_0^2 + c) = A(\tau_0), \quad b(\tau_0^2 + c) = B(\tau_0),$$

где c — угловая точка, а φ — искомая (действительная) функция.

Применение изложенной в § 2.7 схемы аппроксимации интегралов в (5.3.1) приводит к довольно удобно реализуемой схеме. Решение ряда конкретных примеров убеждает нас в практической эффективности соответствующей схемы.

Теперь вернемся к задаче Дирихле: найти гармоническую функцию $u(x, y)$ в области D , ограниченной замкнутым контуром L (имеющим угловую точку c), удовлетворяющую на границе условию

$$u|_{L_c} = f(t_0),$$

где $f(t_0)$ — действительная функция.

Решение ищется в виде

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{L_c} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt, \quad z = x + iy \in D,$$

где φ — действительная функция. Граничное условие задачи приводит к уравнению (см. [46, § 61])

$$\varphi(t_0) + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{L_c} \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt = f(t_0).$$

Тогда согласно указанным в § 2.7 преобразованиям исходное уравнение примет вид

$$\tau_0 \varphi(\tau_0^2 + c) + \tau_0 \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i \tau_0} \left(\int_{L^0} \frac{\tau \varphi(\tau^2 + c)}{\tau - \tau_0} d\tau - \int_{L^0} \frac{\tau \varphi(\tau^2 + c)}{\tau + \tau_0} d\tau \right) = \tau_0 f(\tau_0^2 + c),$$

после обозначений $\psi(\tau) := \tau \varphi(\tau^2 + c)$, $F(\tau) := \tau f(\tau^2 + c)$ получаем

$$\psi(\tau_0) + \tau_0 \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i \tau_0} \left(\int_{L^0} \frac{\psi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau - \int_{L^0} \frac{\psi(\tau)}{\tau + \tau_0} d\tau \right) = F(\tau_0).$$

Согласно изложенным в § 2.7 формулам аппроксимации интегралов соответствующая вычислительная схема имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \psi(\tau_{\nu j}) + \tau_{\nu j} \operatorname{Re} \frac{1}{\tau_{\nu j}} \left\{ \left(1 + \sum_{\substack{\sigma=0, \\ \sigma \neq \nu}}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \frac{p_{\sigma k}^*}{\tau_{\nu j} - \tau_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^2 \frac{p_{\nu k}^*}{\tau_{\nu j} - \tau_{\nu k}} + \right. \right. \\ & + p_{\nu j}^* \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^3 \frac{1}{\tau_{\nu j} - \tau_{\nu k}} \Big) \psi(\tau_{\nu j}) - \left(\sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \frac{p_{\sigma k}^*}{\tau_{\nu j} + \tau_{\sigma k}} + \frac{p_{\nu j}^*}{2\tau_{\nu j}} \right) \psi(\tau_{\nu j}) - \\ & - \sum_{\substack{\sigma=0, \\ \sigma \neq \nu}}^{n-1} \sum_{k=0}^2 \left(\frac{p_{\sigma k}^*}{\tau_{\nu j} - \tau_{\sigma k}} + \frac{p_{\sigma k}^*}{\tau_{\nu j} + \tau_{\nu k}} \right) \psi(\tau_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^2 \left(\frac{p_{\nu k}^*}{\tau_{\nu j} - \tau_{\nu k}} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{p_{\nu k}^*}{\tau_{\nu j} + \tau_{\nu k}} \right) \psi(\tau_{\nu k}) + p_{\nu j}^* \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^3 d_{\nu k}(\tau_{\nu j}) \psi(\tau_{\nu k}) \right\} = F(\tau_{\nu j}), \\ & \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

$$p_{\sigma k}^* = \begin{cases} p_{\sigma k}, & \sigma = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 1, 2, \\ p_{\sigma-1,3} + p_{\sigma 0}, & \sigma = 1, \dots, n-1, \quad k = 0 \end{cases}$$

при указанных в § 2.7 $p_{\sigma k}$ и $d_{\nu k}$.

После нахождения плотности $\psi(t)$ решение задачи $u(x, y)$ находится по формуле

$$F_1(z) = u(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{L^0} \frac{\psi(\tau)}{\tau^2 - (z - c)} d\tau.$$

Для аппроксимации последнего интеграла, разбивая контур L^0 на дуги $\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$ ($\sigma = 0, \dots, n-1$), на каждой дуге $\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$ заменим $\psi(\tau)$ интерполяционным многочленом Лагранжа (рассматривается случай $c = 0$).

Получаем

$$\psi(\tau) \approx \sum_{k=0}^3 \frac{\omega_\sigma(\tau)}{(\tau - \tau_{\sigma k})\omega'_\sigma(\tau_{\sigma k})} \psi(\tau_{\sigma k}),$$

где $\tau_{\sigma 0} = \tau_\sigma$, $\tau_{\sigma 3} = \tau_{\sigma+1}$, $\tau_{\sigma 1}, \tau_{\sigma 2} \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$.

Тогда для потенциала после перехода к интегрированию на дугах $\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$ ($\sigma = 0, 1, \dots, n-1$) имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re} \frac{2}{\pi i} \int_{L^0} \frac{\psi(\tau)}{\tau^2 - z} d\tau = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\psi(\tau)}{\tau^2 - z} d\tau \approx \\ &\approx 2 \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^3 \frac{\psi(\tau_{\sigma k})}{\omega'_\sigma(\tau_{\sigma k})} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\omega_\sigma(\tau)}{(\tau^2 - z)(\tau - \tau_{\sigma k})} d\tau = \\ &= 2 \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^3 \frac{\psi(\tau_{\sigma k})}{\omega'_\sigma(\tau_{\sigma k})} \left\{ - \left(z \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 \tau_{\sigma j} + \prod_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 \tau_{\sigma j} \right) \times \right. \\ &\quad \times \frac{1}{2\sqrt{z}} \ln \frac{(\tau_{\sigma+1} - \sqrt{z})(\tau_\sigma + \sqrt{z})}{(\tau_\sigma - \sqrt{z})(\tau_{\sigma+1} + \sqrt{z})} + \frac{1}{2} (\tau_{\sigma+1}^2 - \tau_\sigma^2) - \\ &\quad \left. - (\tau_{\sigma+1} - \tau_\sigma) \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq k}}^3 \tau_{\sigma j} + \frac{1}{2} \left(z + \sum_{\substack{k \neq j, j_0=0, \\ j < j_0}}^3 \tau_{\sigma j} \tau_{\sigma j_0} \right) \ln \frac{(\tau_{\sigma+1}^2 - z)}{(\tau_\sigma^2 - z)} \right\}. \end{aligned}$$

Для иллюстрации приведем здесь численное решение одной задачи о кручении призматического бруса при наличии концентратора напряжений.

Будем считать, что поперечное сечение бруса представляет некоторую нестандартную область с углом большего π раствора (см. рис. 6).

По аналогии с § 5.1 границу данной области обозначим через L_0 ($C = 0$). Согласно известной теории кручения (см. [45, § 132]) и принятым в настоящей работе обозначениям, компоненты искомого вектора напряжения X_z, Y_z в любой точке $z = x + iy$ соответствующей области задаются формулами

$$X_z = \mu k \{ \operatorname{Im} F_1'(z) + y \}, \quad Y_z = -\mu k \{ \operatorname{Re} F_1'(z) - x \},$$

в которых μ обозначает постоянную Ламе (модуль сдвига), k — степень закручивания (крутка), $F_1(z)$ — указанный выше интеграл типа Коши с плотностью $\psi(\tau)$, являющейся решением интегрального уравнения (5.3.1), где в данном случае $F(\tau_0) = \frac{1}{2}\tau_0|\tau_0|^4$, а L^0 представляет образ исходного контура L_0 , соответствующий отображению $\tau = \sqrt{t}$. Под $\sqrt{t}$ понимается ветвь, принимающая отрицательные значения при действительных положительных значениях t .

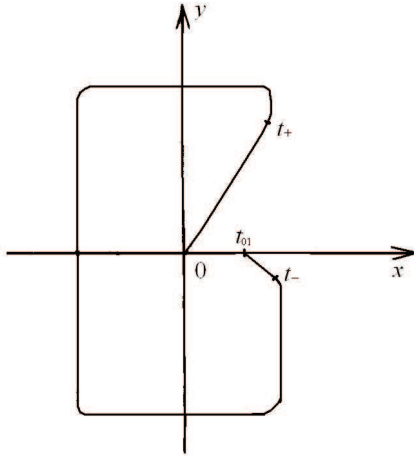


Рис. 6.

Численное решение задачи производилось по изложенной выше схеме при разбиении контура L_0 , соответствующем $N = 11, n = 17, m = 2$. При этом $t_- = 1.420 - 0.080i, t_+ = 0.521 + 0.902i$. Приближенные значения функции ψ , найденные из соответствующей линейной

алгебраической системы, расположены в нижеприведенной таблице по ее строкам в виде комплексных чисел.

Значения плотности в узлах

0.100735 E 01	0.17860 E - 01	0.981452 E 00	-.499110 E - 01
0.107237 E 01	0.188667 E - 02	0.949195 E 00	-.276385 E - 01
0.982428 E 00	-.729671 E - 02	0.984195 E 00	-.100068 E - 01
0.994143 E 00	0.623420 E - 03	0.993602 E 00	-.289802 E - 02
0.994402 E 00	-.143879 E - 02	0.994914 E 00	-.346523 E - 02
0.993500 E 00	-.217801 E - 02	0.995858 E 00	-.223469 E - 02
0.996411 E 00	-.172539 E - 02	0.996631 E 00	-.186851 E - 02
0.996943 E 00	-.188068 E - 02	0.997125 E 00	-.196250 E - 02
0.997381 E 00	-.0198824 E - 02	0.997575 E 00	-.199630 E - 02
0.997775 E 00	-.198873 E - 02	0.997934 E 00	-.194739 E - 02
0.998083 E 00	-.190859 E - 02	0.998219 E 00	-.184625 E - 02
0.998357 E 00	-.179316 E - 02	0.998489 E 00	-.175928 E - 02
0.998602 E 00	-.172630 E - 02	0.998735 E 00	-.172605 E - 02
0.993842 E 00	-.172093 E - 02	0.998953 E 00	-.172267 E - 02
0.999067 E 00	-.172371 E - 02	0.999172 E 00	-.170567 E - 02
0.999266 E 00	-.167933 E - 02	0.999350 E 00	-.162813 E - 02
0.999425 E 00	-.157366 E - 02	0.999492 E 00	-.151423 E - 02
0.999550 E 00	-.145.65 E - 02	0.999608 E 00	-.139603 E - 02
0.999666 E 00	-.135392 E - 02	0.999728 E 00	-.131578 E - 02
0.999784 E 00	-.127822 E - 02	0.999842 E 00	-.125136 E - 02
0.999901 E 00	-.121426 E - 02	0.999942 E 00	-.117344 E - 02
0.999988 E 00	-.113623 E - 02	0.100001 E 01	-.108255 E - 02
0.100003 E 01	-.103818 E - 02	0.100005 E 01	-.980228 E - 03
0.100005 E 01	-.938132 E - 03	0.100007 E 01	-.896957 E - 03
0.100009 E 01	-.862221 E - 03	0.100010 E 01	-.827077 E - 03
0.100012 E 01	-.792625 E - 03	0.100015 E 01	-.776182 E - 03
0.100016 E 01	-.738617 E - 03	0.102016 E 01	-.707139 E - 03
0.100016 E 01	-.660489 E - 03		

Первые две пары — суть приближенные значения искомой плотности в узлах $\sqrt{1.420 - 0.080i}$, $\sqrt{1.260 + 0 \cdot i}$, где $1.260 + 0 \cdot i = t_{01}$ представляет ближайший последующий (по положительному напряжению) за точкой t_- (действительный) узел на L_0 . Последующие 10 пар — это приближенные значения $\psi(\tau)$, отвечающие также вещественным узлам на L_0 (т. е. узлам, расположенным на участке $0t_{01}$ контура L_0 , представляющем отрезок действительной оси). Мнимые части этих чисел, как видим по таблице, малы, что может служить одним из признаков достоверности полученных результатов, ибо соответствующие значения точного решения (функции ψ) очевидно, должны являться действительными. Последующие две пары чисел в таблице (элементы 7-й строки сверху) представляют значения, соответствующие ближайшим к угловой точке $t = 0$ узлам, расположен-

ным на L_0 по разные стороны от указанной точки. Как и следовало ожидать, по модулю эти числа малы по мере близости соответствующих узлов на контуре L^0 к точке $\tau = 0$. Уже указанные обстоятельства дают определенную уверенность в достоверности имеющихся в таблице результатов, хотя для вычислений применялась схема не очень высокой точности и число в соответствующем разбиении также не очень велико.

Следующий этап решения заключается в вычислении значений $F_1(z)$ и $F'_1(z)$ в заданных точках области. С помощью найденных значений $F'_1(z)$ вычисляются компоненты напряжений в соответствующих точках.

Ниже приводятся окончательные численные результаты решения рассматриваемой задачи, соответствующие нескольким заданным значениям z :

$z_1 = 0.5 - i,$	$X_z = 2.3162,$	$Y_z = 1.3826;$
$z_2 = 0.4 + 0.8i,$	$X_z = -1.2266,$	$Y_z = -0.1226;$
$z_3 = -0.1 - 0.09i,$	$X_z = 0.2542,$	$Y_z = -0.3259;$
$z_4 = 0.05 - 0.05i,$	$X_z = 0.9806,$	$Y_z = -1.4390;$
$z_5 = 0.01 - 0.02i,$	$X_z = 0.4063,$	$Y_z = -8.5003;$
$z_6 = 0.005 - 0.003i,$	$X_z = -27.3878,$	$Y_z = -46.5123.$

Как и следовало ожидать, напряжения возрастают при приближении z к угловой точке границы.

Отметим, что описанная в данном параграфе методика численного решения граничных задач для областей с углами позволяет получить достаточно хорошие приближения, в частности, вблизи угловых точек границы. Она почти в равной мере применима как в случае конечных, так и бесконечных областей.

5.4. О применении схемы локально-канонического разбиения к численному решению основных задач теории упругости

Для определенности здесь рассматривается первая основная задача теории упругости, для второй основной задачи рассуждения аналогичны.

В настоящем параграфе излагается метод, подобный методу дискретных особенностей для численного решения первой основной задачи математической теории упругости.

Первая основная задача после известных преобразований [45] записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \omega^{(1)}(t_0) + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_L [\omega^{(1)}(t)(1 - \cos 2\theta) - \\ \quad - \omega^{(2)}(t) \sin 2\theta] \frac{dt}{t-t_0} = f_1(t_0), \\ \omega^{(2)}(t_0) - \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_L [\omega^{(1)}(t) \sin 2\theta - \\ \quad - \omega^{(2)}(t)(1 + \cos 2\theta)] \frac{dt}{t-t_0} = f_2(t_0), \end{cases} \quad (5.4.1)$$

где $t_0 \in L$, $\theta = \theta(t, t_0)$ — аргумент разности $t - t_0$, L — замкнутый гладкий (охватывающий начало координат) контур Ляпунова.

В (5.4.1) сделаем следующее преобразование:

$$\omega^{(1)}(t) = \omega^{(1)}(t_0) + (\omega^{(1)}(t) - \omega^{(1)}(t_0)),$$

$$\omega^{(2)}(t) = \omega^{(2)}(t_0) + (\omega^{(2)}(t) - \omega^{(2)}(t_0)).$$

Учитывая формулы

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\sin 2\theta}{t - t_0} dt = \frac{1}{\pi} \int_L \sin 2\theta d\theta = 0,$$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\cos 2\theta}{t - t_0} dt = \frac{1}{\pi} \int_L \cos 2\theta d\theta = 0,$$

которые справедливы ввиду

$$\frac{dt}{t - t_0} = \frac{dr}{r} + i d\theta, \quad r = |t - t_0|, \quad \theta = \arg(t - t_0),$$

получаем

$$\begin{cases} 2\omega^{(1)}(t_0) + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_L [(\omega^{(1)}(t) - \omega^{(1)}(t_0))(1 - \cos 2\theta) - \\ \quad - (\omega^{(2)}(t) - \omega^{(2)}(t_0)) \sin 2\theta] \frac{dt}{t-t_0} = f_1(t_0), \\ 2\omega^{(2)}(t_0) - \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_L [(\omega^{(1)}(t) - \omega^{(1)}(t_0)) \sin 2\theta - \\ \quad - (\omega^{(2)}(t) - \omega^{(2)}(t_0))(1 + \cos 2\theta)] \frac{dt}{t-t_0} = f_2(t_0). \end{cases} \quad (5.4.2)$$

В таком виде разрешимость системы не гарантируется. Однако, следуя [45], прибавим действительную и мнимую части выражения

$$\frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{\bar{t}_0} + \frac{t_0}{t_0^2} \right) \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega(t)}{t^2} dt, \quad \omega(t) = \omega^{(1)}(t) + i\omega^{(2)}(t)$$

к левым частям соответственно первого и второго уравнений из (5.4.2), имеем

$$\begin{cases} 2\omega^{(1)}(t_0) + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_L [(\omega^{(1)}(t) - \omega^{(1)}(t_0))(1 - \cos 2\theta) - \\ - (\omega^{(2)}(t) - \omega^{(2)}(t_0)) \sin 2\theta] \frac{dt}{t-t_0} + \\ + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{\bar{t}_0} + \frac{t_0}{t_0^2} \right) \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega(t)}{t^2} dt = f_1(t_0), \\ 2\omega^{(2)}(t_0) - \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_L [(\omega^{(1)}(t) - \omega^{(1)}(t_0)) \sin 2\theta - \\ - (\omega^{(2)}(t) - \omega^{(2)}(t_0))(1 + \cos 2\theta)] \frac{dt}{t-t_0} + \\ + \operatorname{Im} \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{\bar{t}_0} + \frac{t_0}{t_0^2} \right) \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega(t)}{t^2} dt = f_2(t_0). \end{cases} \quad (5.4.3)$$

Полученная в результате система (5.4.3) будет иметь единственное решение и ее решение есть в тоже время и решение системы (5.4.2). (Строгое доказательство этого факта см. в [45].) Действительно, если (5.4.3) имеет решение, то для этого решения $\operatorname{Re} \int_L \frac{\omega(t)}{t^2} dt = 0$, отсюда следует, что решение системы (5.4.3) является также решением системы (5.4.2) и тем самым системы (5.4.1). В таком смысле системы (5.4.1) и (5.4.3) эквивалентны.

Переходим к построению вычислительной схемы, считая, что L — замкнутый (ляпуновский) контур на комплексной плоскости. Введем систему точек $\{\tau_j\}_{j=1}^{2n}$, разбивающих L на равные (относительно длины дуги) части. Условимся при этом под $\tau_m \tau_q$ ($m < q$) понимать, как обычно, кратчайшую дугу контура L , с концами τ_m , τ_p , расположенными на нем в положительном направлении. Если $\mu > 2n$, то $\tau_\mu = \tau_{\mu-2n}$, а если $\mu \leq 0$, $\tau_\mu = \tau_{\mu+2n}$.

Зафиксировав произвольно ν ($1 \leq \nu \leq 2n$) и положив $t_0 = \tau_\nu$, рассмотрим интегралы

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega^{(1)}(t) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{t - \tau_\nu} (1 - \cos 2\theta) dt = \\ & = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\nu-1}\tau_{\nu+1}} \frac{\omega^{(1)}(t) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{t - \tau_\nu} (1 - \cos 2\theta) dt + \\ & + \sum_{\sigma=1}^{2n-2} \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\nu+\sigma}\tau_{\nu+\sigma+1}} \frac{\omega^{(1)}(t) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{t - \tau_\nu} (1 - \cos 2\theta) dt. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Далее, исходя из (5.4.4), подынтегральное выражение на каждой дуге $\tau_{\nu+\sigma}\tau_{\nu+\sigma+1}$ ($\sigma = 1, \dots, 2n-2$) будем аппроксимировать линейными интерполантами, соответственно, по узлам $\tau_{\nu+\sigma}$, $\tau_{\nu+\sigma+1}$, т. е. имеем формулу

$$\begin{aligned} & \frac{\omega^{(1)}(t) - \omega^{(1)}(\tau_{\nu})}{t - \tau_{\nu}} (1 - \cos 2\theta) dt \approx \\ & \approx \sum_{k=0}^1 l_{\sigma k}(t) \frac{\omega^{(1)}(\tau_{\sigma+k}) - \omega^{(1)}(\tau_{\nu})}{\tau_{\sigma+k} - \tau_{\nu}} (1 - \cos 2\theta(\tau_{\sigma+k}, \tau_{\nu})), \end{aligned}$$

где

$$l_{\sigma 0}(t) = \frac{t - \tau_{\nu+\sigma+1}}{\tau_{\nu+\sigma} - \tau_{\nu+\sigma+1}}, \quad l_{\sigma 1}(t) = \frac{t - \tau_{\nu+\sigma}}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_{\nu+\sigma}}. \quad (5.4.5)$$

Что касается интеграла по дуге $\tau_{\nu-1}\tau_{\nu+1}$, то в качестве интерполяционных узлов используем $\tau_{\nu-1}$, $\tau_{\nu+1}$, обходя тем самым узел τ_{ν} , который в данном случае будет контрольным (см. [1], [35]). Подставляя (5.4.5) в (5.4.4), получаем следующую приближенную формулу:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega^{(1)}(t) - \omega^{(1)}(\tau_{\nu})}{t - \tau_{\nu}} (1 - \cos 2\theta(t, \tau_{\nu})) dt \approx \\ & \approx (p_{\nu+2n-2} + p_{\nu 0}) \frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu-1}) - \omega^{(1)}(\tau_{\nu})}{\tau_{\nu-1} - \tau_{\nu}} \times \\ & \quad \times (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu-1}, \tau_{\nu})) + (p_{\nu 0} + p_{\nu+1}) \times \\ & \quad \times \frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+1}) - \omega^{(1)}(\tau_{\nu})}{\tau_{\nu+1} - \tau_{\nu}} (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+1}, \tau_{\nu})) + \\ & + \sum_{\sigma=1}^{2n-3} (p_{\nu+\sigma} + p_{\nu+\sigma+1}) \frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_{\nu})}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_{\nu}} \times \\ & \quad \times (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_{\nu})), \quad \nu = 1, \dots, 2n, \end{aligned} \quad (5.4.5)_1$$

где

$$\begin{aligned} p_{\nu 0} &= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\nu-1}\tau_{\nu+1}} \frac{t - \tau_{\nu+1}}{\tau_{\nu-1} - \tau_{\nu+1}} dt = \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\nu-1}\tau_{\nu+1}} \frac{t - \tau_{\nu-1}}{\tau_{\nu+1} - \tau_{\nu-1}} dt = \frac{\tau_{\nu+1} - \tau_{\nu-1}}{2\pi i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{\nu+j} &= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\nu+j}\tau_{\nu+j+1}} \frac{t - \tau_{\nu+j+1}}{\tau_{\nu+j} - \tau_{\nu+j+1}} dt = \\
&= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\nu+j}\tau_{\nu+j+1}} \frac{t - \tau_{\nu+j}}{\tau_{\nu+j+1} - \tau_{\nu+j}} dt = \frac{\tau_{\nu+j+1} - \tau_{\nu+j}}{2\pi i}, \quad (5.4.5)_2 \\
j &= 1, \dots, 2n-2.
\end{aligned}$$

Аналогично аппроксимируются и другие интегралы, а именно:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega^{(1)}(t) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{t - \tau_\nu} \sin 2\theta(t, \tau_\nu) dt, \\
&\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega^{(2)}(t) - \omega^{(2)}(\tau_\nu)}{t - \tau_\nu} \sin 2\theta(t, \tau_\nu) dt, \\
&\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega^{(2)}(t) - \omega^{(2)}(\tau_\nu)}{t - \tau_\nu} (1 + \cos 2\theta(t, \tau_\nu)) dt.
\end{aligned}$$

Для интеграла $\int_L \frac{\omega(t)}{t^2} dt$ можно использовать обычные квадратурные формулы вида

$$\int_L \frac{\omega(t)}{t^2} dt = \pi i \sum_{\sigma=1}^{2n} p_{\sigma+\nu} \frac{\omega(\tau_{\sigma+\nu})}{\tau_{\sigma+\nu}^2}.$$

Подставляя полученные приближенные формулы для интегралов в (5.4.3), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&2\omega^{(1)}(\tau_\nu) + \operatorname{Re} \left\{ (p_{\nu+2n-2} + p_{\nu 0}) \left[\omega^{(1)}(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu) \times (1 - \right. \right. \\
&- \cos 2\theta(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu)) - \omega^{(2)}(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu) \sin 2\theta(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu) \left. \right] + (p_{\nu 0} + p_{\nu+1}) \times \\
&\times \left[\omega^{(1)}(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu) (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu)) - \omega^{(2)}(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu) \times \right. \\
&\times \sin 2\theta(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu) \left. \right] + \sum_{\sigma=1}^{2n-3} (p_{\nu+\sigma} + p_{\nu+\sigma+1}) \left[\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) (1 - \right. \\
&- \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu)) - \omega^{(2)}(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) \sin 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) \left. \right] \left. \right\} + \\
&+ H_1(\tau_\nu) \operatorname{Re} \pi i \sum_{\sigma=1}^{2n} p_{\nu+\sigma} \frac{\omega(\tau_{\nu+\sigma})}{\tau_{\nu+\sigma}^2} = f_1(\tau_\nu), \quad (5.4.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\omega^{(2)}(\tau_\nu) - \operatorname{Re} \left\{ (p_{\nu+2n-2} + p_{\nu 0}) \left[\omega^{(1)}(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu) \sin 2\theta(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \omega^{(2)}(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu) (1 + \cos 2\theta(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu)) \right] + (p_{\nu 0} + p_{\nu+1}) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left[\omega^{(1)}(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu) \sin 2\theta(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu) - \omega^{(2)}(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu) \times (1 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \cos 2\theta(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu)) \right] + \sum_{\sigma=1}^{2n-3} (p_{\nu+\sigma} + p_{\nu+\sigma+1}) \left[\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \sin 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) - \omega^{(2)}(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) (1 + \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu)) \right] \right\} + \\
& \quad + H_2(\tau_\nu) \operatorname{Re} \pi i \sum_{\sigma=1}^{2n} p_{\nu+\sigma} \frac{\omega(\tau_{\nu+\sigma})}{\tau_{\nu+\sigma}^2} = f_2(\tau_\nu),
\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

где

$$\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) = \frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu},$$

$$\omega^{(2)}(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) = \frac{\omega^{(2)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(2)}(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu},$$

$$H_1(\tau_\nu) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{\tau_\nu} - \frac{1}{\bar{\tau}_\nu} + \frac{\tau_\nu}{\bar{\tau}_\nu^2} \right),$$

$$H_2(\tau_\nu) = \operatorname{Im} \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{\tau_\nu} - \frac{1}{\bar{\tau}_\nu} + \frac{\tau_\nu}{\bar{\tau}_\nu^2} \right),$$

$$p_{\nu 0} = \frac{\tau_{\nu+1} - \tau_{\nu-1}}{2\pi i},$$

$$p_{\nu+j} = \frac{\tau_{\nu+j+1} - \tau_{\nu+j}}{2\pi i}, \quad j = 1, \dots, 2n,$$

$f_1 + if_2$ — заданная, а $\omega = \omega^{(1)}(t) + i\omega^{(2)}(t)$ — искомая функция, $\theta = \theta(t, t_0)$ — угол, составляемый вектором $\overrightarrow{t_0 t}$ с осью Ox .

Формулы (5.4.6) и (5.4.7) является системой линейных алгебраических уравнений порядка $4n$ относительно следующих неизвестных:

$$\omega^{(1)}(\tau_1), \omega^{(2)}(\tau_1), \omega^{(1)}(\tau_2), \omega^{(2)}(\tau_2), \dots, \omega^{(1)}(\tau_{2n}), \omega^{(2)}(\tau_{2n}).$$

Теперь положим $\omega = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)})$:

$$\begin{aligned}
 (Q_n^{(1)}\omega)(\tau_\nu) &= (p_{\nu+2n-2} + p_{\nu 0}) \left[\omega^{(1)}(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu) \times \right. \\
 &\times (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu) - \omega^{(2)}(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu) \sin 2\theta(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu)) \Big] + \\
 &+ (p_{\nu 0} + p_{\nu+1}) \left[\omega^{(1)}(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu) (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu)) - \right. \\
 &- \omega^{(2)}(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu) \sin 2\theta(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu) \Big] + \sum_{\sigma=1}^{2n-3} (p_{\nu+\sigma} + p_{\nu+\sigma+1}) \times \\
 &\times \left[\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu)) - \right. \\
 &- \omega^{(2)}(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) \sin 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) \Big], \tag{5.4.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (Q_n^{(2)}\omega)(\tau_\nu) &= (p_{\nu+2n-2} + p_{\nu 0}) \left[\omega^{(1)}(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu) \times \right. \\
 &\times \sin 2\theta(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu) - \omega^{(2)}(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu) (1 + \cos 2\theta(\tau_{\nu-1}, \tau_\nu)) \Big] + \\
 &+ (p_{\nu 0} + p_{\nu+1}) \left[\omega^{(1)}(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu) \sin 2\theta(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu) - \right. \\
 &- \omega^{(2)}(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu) (1 + \cos 2\theta(\tau_{\nu+1}, \tau_\nu)) \Big] + \sum_{\sigma=1}^{2n-3} (p_{\nu+\sigma} + \\
 &+ p_{\nu+\sigma+1}) \left[\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) \sin 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) - \right. \\
 &- \omega^{(2)}(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) (1 + \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu)) \Big]. \tag{5.4.9}
 \end{aligned}$$

Далее, при любом τ_ν ($\nu = 1, \dots, 2n$) определим для $p = 1, 2$ оператор-функции

$$(Q_n^{(p)}\omega)(t_0) = l_{\nu 0}(t_0)(Q_{\nu n}^{(p)}\omega)(\tau_\nu) + l_{\nu 1}(t_0)(Q_{\nu n}^{(p)}\omega)(\tau_{\nu+1}),$$

$t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}$, $\nu = 1, \dots, 2n$, которые примем за приближения (на всем L) к интегралам с ядром Коши в уравнениях (5.4.1) и (5.4.2). При этом, очевидно $(Q_n^{(p)}\omega)(\tau_\nu) = (Q_{\nu n}^{(p)}\omega)$, $p = 1, 2$. Исходные (5.4.3) и соответствующие им аппроксимирующие уравнения (5.4.6), (5.4.7) будем записывать соответственно

$$(K\omega)(t_0) \equiv 2\omega(t_0) + (\operatorname{Re} S\omega)(t_0) + (H\omega)(t_0) = f(t_0), \tag{5.4.10}$$

$$(K_n\omega_n)(t_0) \equiv 2\omega_n(t_0) + (\operatorname{Re} Q_n\omega_n)(t_0) + (H_n\omega_n)(t_0) = f(t_0), \tag{5.4.11}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
S\omega &= (S^{(1)}\omega, S^{(2)}\omega), \quad \omega_n = (\omega_n^{(1)}, \omega_n^{(2)}), \\
H\omega &= (H^{(1)}\omega, H^{(2)}\omega), \quad Q_n\omega_n = (Q_n^{(1)}\omega_n, Q_n^{(2)}\omega_n), \\
H_n\omega_n &= (H_n^{(1)}\omega_n, H_n^{(2)}\omega_n), \quad f = (f_1, f_2), \\
(H^{(1)}\omega)(t_0) &= \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{\bar{t}_0} + \frac{t_0}{t_0^2} \right) \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega(t)}{t^2} dt, \\
(H^{(2)}\omega)(t_0) &= \operatorname{Im} \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{\bar{t}_0} + \frac{t_0}{t_0^2} \right) \operatorname{Re} \int_L \frac{\omega(t)}{t^2} dt, \\
(H_n^{(1)}\omega_n)(t_0) &= \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{\bar{t}_0} + \frac{t_0}{t_0^2} \right) \operatorname{Re} \pi i \sum_{\sigma=1}^{2n} p_{\nu+\sigma} \frac{\omega_n(\tau_{\nu+\sigma})}{\tau_{\nu+\sigma}^2}, \\
(H_n^{(2)}\omega_n)(t_0) &= \operatorname{Im} \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{\bar{t}_0} + \frac{t_0}{t_0^2} \right) \operatorname{Re} \pi i \sum_{\sigma=1}^{2n} p_{\nu+\sigma} \frac{\omega_n(\tau_{\nu+\sigma})}{\tau_{\nu+\sigma}^2}.
\end{aligned}$$

В предположении Ляпуновости контура L функция $\theta(t, t_0)$ удовлетворяет условию Гёльдера по обоим переменным вне любой окрестности каждой из них, а при проходе одной через другую претерпевает конечный разрыв со скачком, равным нечетному кратному π . Тем самым, функции $\cos 2\theta$ и $\sin 2\theta$ удовлетворяют по обоим переменным условию Гёльдера с некоторым показателем δ , $0 < \delta \leq 1$.

На основании этого можно утверждать, что остаток аппроксимации данного (5.4.5) и других аналогичных приближенных формул по рассматриваемой здесь схеме для функции $\omega^{(1)}, \omega^{(2)} \in H_\beta$ имеет оценку $O(n^{-\beta} \ln n) M_\beta(\omega)$, где относительно положительного β считается, что $\beta \leq \min(\alpha, \delta)$.

Согласно данному построению L и указанным выше оценкам в узлах τ_ν , заметив, что погрешность аппроксимации регулярных интегралов в исходных уравнениях не превосходит $O(n^{-\beta}) \|\omega\|_{H_\beta}$, можно убедиться, что для $(r_n\omega)(t_0) = (S\omega)(t_0) - (Q_n\omega)(t_0)$ при указанном относительно β условии справедлива оценка

$$\max_{t_0 \in L} \|(r_n\omega)(t_0)\| = O\left(\frac{\ln n}{n^\beta}\right) \|\omega\|_{H_\beta}, \quad (5.4.12)$$

аналогичная указанной в [73].

Уравнения (5.4.10) и (5.4.11) будем рассматривать в линейном пространстве H_β с нормой $\|\omega\| = \max(\|\omega^{(1)}\|_{H_\beta}, \|\omega^{(2)}\|_{H_\beta})$, где $\|\cdot\|_{H_\beta}$ — обычная Гёльдеровская норма. Обоснование соответствующего процесса основывается как и в [73], на ряде индивидуальных свойств оператор-функций, исследование которых приведено ниже, причем главным образом рассматриваются суммы $(Q_n^{(p)}\omega)(t_0)$. Ввиду полной аналогии $Q_n^{(1)}$ и $Q_n^{(2)}$ подробно рассмотрим суммы вида $Q_n^{(1)}$, разбивая их на $Q_{n1}^{(1)} + Q_{n2}^{(1)}$.

Основной нашей целью является доказательство того, что соответствующее (5.4.11) однородное уравнение

$$(K_n\omega_n)(t_0) = 2\omega_n(t_0) + (\operatorname{Re} Q_n\omega_n)(t_0) + (H_n\omega_n)(t_0) = 0, \quad (5.4.13)$$

начиная с некоторого n , имеет лишь нулевое решение. Выражения для $Q_n^{(1)}\omega$ и $Q_n^{(2)}\omega$, т. е. (5.4.8) и (5.4.9), перепишем таким образом:

$$\begin{aligned} (Q_n^{(1)}\omega)(\tau_\nu) &= \sum_{\substack{\sigma=-n, \\ \sigma \neq -1}}^{n-1} \left\{ (p_{\nu+\sigma} + p_{\nu+\sigma+1}) \times \right. \\ &\times \left(\frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu} (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu)) - \right. \\ &\left. - \frac{\omega^{(2)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(2)}(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu} \sin 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) \right) \Bigg\}, \end{aligned} \quad (5.4.13)_1$$

$$\begin{aligned} (Q_n^{(2)}\omega)(\tau_\nu) &= - \sum_{\substack{\sigma=-n, \\ \sigma \neq -1}}^{n-1} \left\{ (p_{\nu+\sigma} + p_{\nu+\sigma+1}) \times \right. \\ &\times \left(\frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu} \sin 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) - \right. \\ &\left. - \frac{\omega^{(2)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(2)}(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu} (1 + \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu)) \right) \Bigg\}. \end{aligned} \quad (5.4.13)_2$$

Следовательно, указанные выше $Q_{n1}^{(1)}(\omega)$ и $Q_{n2}^{(1)}(\omega)$ имеют вид

$$\begin{aligned} (Q_{n1}^{(1)}\omega)_\nu &= \sum_{\substack{\sigma=-n, \\ \sigma \neq -1}}^{n-1} \left((p_{\nu+\sigma} + p_{\nu+\sigma+1}) \times \right. \\ &\times \left. \frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu} (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu)) \right), \end{aligned} \quad (5.4.13)_3$$

$$(Q_{n2}^{(1)}\omega)_\nu = \sum_{\substack{\sigma=-n, \\ \sigma \neq -1}}^{n-1} \left((p_{\nu+\sigma} + p_{\nu+\sigma+1}) \times \right. \\ \left. \times \frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu} \sin 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu) \right), \quad (5.4.13)_4$$

где

$$p_{\nu+0} = p_{\nu-1} = \frac{\tau_{\nu+1} - \tau_{\nu-1}}{2\pi i}, \quad p_{\nu+j} = \frac{\tau_{\nu+j+1} - \tau_{\nu+j}}{2\pi i}, \\ j = -n, \dots, n-1, j \neq -1, j \neq 0.$$

Всюду в дальнейших рассуждениях, относящихся к доказательству этого утверждения, под ω_n будем понимать решение уравнения (5.4.13).

Введем следующие обозначения:

$$h_{n\beta}(\omega^{(p)}) = \max_{\substack{1 \leq j, \\ \nu \leq n}} \frac{|\omega_n^{(p)}(\tau_j) - \omega_n^{(p)}(\tau_\nu)|}{|\tau_j - \tau_\nu|^\beta}, \\ h_{n\beta}(\omega) = \max_p h_{n\beta}(\omega_n^{(p)}), \quad j \neq \nu.$$

При достаточно большом n справедливо

$$\|\omega_n\|_{H_\beta} = O(\ln n)h_{n\beta}(\omega_n) + O(1)M(\omega_n), \quad (5.4.14)$$

где

$$M(\omega_n) = \max \left\{ \max_{t_0} |\omega_n^{(1)}(t_0)|, \max_{t_0} |\omega_n^{(2)}(t_0)| \right\}.$$

Доказательство этого утверждения сводится к оценке в H_β сумм $(Q_n\omega_n)(t_0)$ и $(H_n\omega_n)(t_0)$. Рассматривая более подробно сумму

$$(Q_n\omega_n)(t_0) = (Q_{n1}\omega_n)(t_0) + (Q_{n2}\omega_n)(t_0),$$

заметим, что по аналогии с [73] имеем

$$\max_{1 \leq \nu \leq n} |(Q_{n1}\omega_n^{(1)})_\nu| = O(1)h_{n\beta}(\omega_n^{(1)}),$$

$$\max_{1 \leq \nu \leq n} |(Q_{n2}\omega_n^{(2)})_\nu| = O(1)h_{n\beta}(\omega_n^{(2)}).$$

Следовательно,

$$\max_{t_0 \in L} |Q_n \omega_n(t_0)| = O(1) h_{n\beta}(\omega_n). \quad (5.4.15)$$

В дальнейшем, учитывая схожесть сумм Q_{n1}, Q_{n2} , более детально остановимся на рассмотрении, Q_{n1} . Полагая $t_0 = \tau_\nu$, $1 \leq \alpha_n < n$, разобьем сумму $(Q_{n1} \omega_n)_\nu = (Q_{n1} \omega_n)(\tau_\nu)$ на $(\sum_{\alpha_n 1} + \sum_{\alpha_n 2})_\nu(\omega_n)$, где

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\alpha_n 1} \right) (\omega_n) &= \sum_{\substack{\sigma = -\alpha_n, \\ \sigma \neq -1}}^{\alpha_n} (p_{\nu+\sigma} + p_{\nu+\sigma+1}) \times \\ &\times \frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu} (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu)), \end{aligned}$$

а $(\sum_{\alpha_n 2})_\nu$ содержит остальные слагаемые от $\pm \alpha_n$ соответственно до $\pm n$. Далее, считая $j = \nu + \alpha_n$, выпишем таким же образом $(Q_{n1} \omega_n)_j = (\sum_{\alpha_n 1} + \sum_{\alpha_n 2})_j(\omega_n)$, где $(\sum_{\alpha_n 1})_j, (\sum_{\alpha_n 2})_j$ — суммы, аналогичные соответственно $(\sum_{\alpha_n 1})_\nu, (\sum_{\alpha_n 2})_\nu$. В результате несложных преобразований (см. [73]) с учетом $\alpha_n < n$ для $(\sum_{\alpha_n 1})_\nu$, $(\sum_{\alpha_n 1})_j$ нетрудно получить оценку $O(h^\beta \alpha_n^\beta) h_{n\beta}(\omega_n^{(1)})$, в силу которой справедливо

$$\frac{|(\sum_{\alpha_n 1})_j - (\sum_{\alpha_n 1})_\nu|}{|\tau_{\nu+\alpha_n} - \tau_\nu|^\beta} \leq \frac{|(\sum_{\alpha_n 1})_j| + |(\sum_{\alpha_n 1})_\nu|}{|\tau_{\nu+\alpha_n} - \tau_\nu|^\beta} = O(1) h_{n\beta}(\omega_n^{(1)}).$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\alpha_n 2} \right)_j - \left(\sum_{\alpha_n 2} \right)_\nu &= \left(\sum_{\sigma=-n}^{-\alpha_n-1} + \sum_{\sigma=\alpha_n+1}^{n-1} \right) (p_{\nu+\sigma} + p_{\nu+\sigma+1}) \times \\ &\times \left(\frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_j)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_j} (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_j)) - \right. \\ &\left. - \frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu} (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu)) \right). \end{aligned}$$

Итак, получили

$$\left(\sum_{\alpha_n 2} \right)_j - \left(\sum_{\alpha_n 2} \right)_\nu = \Delta_{n1}(\omega_n) + \Delta_{n2}(\omega_n), \quad (5.4.16)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{n1}(\omega_n) &= \left(\sum_{\sigma=-n}^{-\alpha_n-1} + \sum_{\sigma=\alpha_n+1}^{n-1} \right) (p_{\nu+\sigma} + p_{\nu+\sigma+1}) \times \\
&\times \left(\frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_j)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_j} - \frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu} \right) \times \\
&\times (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_j)), \\
\Delta_{n2}(\omega_n) &= \left(\sum_{\sigma=-n}^{-\alpha_n-1} + \sum_{\sigma=\alpha_n+1}^{n-1} \right) (p_{\nu+\sigma} + p_{\nu+\sigma+1}) \times \\
&\times \frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu} (\cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_j) - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu)).
\end{aligned}$$

Сумма $\Delta_{n1}(\omega_n)$, если не обращать внимание на ограниченный сомножитель $(1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_j))$, оценивается также, как и аналогичная сумма в доказательстве п. 2 из [73] и есть $O(h^\beta \alpha_n^\beta \ln n) h_{n\beta}(\omega_n^{(1)})$ ($n \rightarrow \infty$). Что касается $\Delta_{n2}(\omega_n)$, то на основании принадлежности контура L классу Ляпунова и замеченного выше относительно угла $\theta(t_0, t)$ заключаем, что рассматриваемая сумма не превосходит по модулю

$$\begin{aligned}
O(h^{\beta+\delta} \alpha_n^\delta) h_{n\beta}(\omega_n^{(1)}) \left(\sum_{\sigma=-n}^{\alpha_n-1} + \sum_{\sigma=\alpha_n+1}^n \right) \frac{1}{|\sigma|^{1-\beta}} = \\
= O(h^{\beta+\delta} \alpha_n^\delta n^\beta) h_{n\beta}(\omega_n^{(1)}).
\end{aligned}$$

При этом считаем, что $\delta > \beta$. Тем самым, с учетом $\alpha_n \geq 1$ можно написать

$$\begin{aligned}
\frac{|(\sum \alpha_{n2})_j - (\sum \alpha_{n2})_\nu|}{|\tau_{\nu+\alpha_n} - \tau_\nu|^\beta} &= [O(\ln n) + O(h^{\delta-\beta} n^{\delta-\beta})] h_{n\beta}(\omega_n^{(1)}) = \\
&= O(\ln n) h_{n\beta}(\omega_n^{(1)}),
\end{aligned}$$

что в конечном счете приводит к оценке

$$\max_{\substack{1 \leq \nu, j < 2n, \\ \nu \neq j}} \frac{|(Q_{n1}\omega_n^{(1)})_j - (Q_{n1}\omega_n^{(1)})_\nu|}{|\tau_{\nu+\alpha_n} - \tau_\nu|^\beta} = O(\ln n) h_{n\beta}(\omega_n^{(1)}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Аналогичная оценка может быть получена для суммы Q_{n2} , что с учетом (5.4.15) и использованием подобных приведенным в [73]

рассуждениям приводит к оценке $O(\ln n)h_{n\beta}(\omega_n)$ для $Q_n\omega_n$. Для $(H_n\omega_n)(t_0)$ элементарным образом получается оценка $O(1)M(\omega_n)$. Тем самым убеждаемся в справедливости (5.4.14).

Теперь, учитывая (5.4.14) и воспользовавшись (5.4.12), мы убеждаемся, что погрешность-оператор функции $(S\omega)(t_0)$ в (5.4.13) можно выразить оценкой

$$O(n^{-\beta} \ln^2 n)h_{n\beta}(\omega_n) + O(n^{-\beta} \ln n)M(\omega_n).$$

Далее, из предложенной выше аппроксимации следует, что порожденный такой аппроксимацией квадратурный процесс является точным в предположении, что приближаемая подынтегральная функция является постоянной на дугах $\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}$ ($\sigma = 1, \dots, 2n$), что дает оценку

$$\begin{aligned} \max_L |(H\omega_n)(t_0) - (H_n\omega_n)(t_0)| &= O(n^{-1})M(\omega_n) + \\ &+ O(n^{-\beta})\|\omega_n\|_{H_\beta} = O(n^{-\beta})\|\omega_n\|_{H_\beta}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношением (5.4.14) и объединяя полученное с предыдущей оценкой, приходим к

$$\begin{aligned} |(K\omega_n)(t_0) - (K_n\omega_n)(t_0)| &= \\ = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^\beta}\right)h_{n\beta}(\omega_n) + O\left(\frac{\ln n}{n^\beta}\right)M(\omega_n). \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

Теперь, принимая во внимание (5.4.13) и аналогичные данным в [73] утверждениям относительно обратного оператора K^{-1} (основанные на предположениях о Ляпуновости контура L), в силу (5.4.17) для ω_n получаем

$$\omega_n(t_0) = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^\beta}\right)h_{n\beta}(\omega_n) + O\left(\frac{\ln n}{n^\beta}\right)M(\omega_n),$$

откуда

$$M(\omega_n) = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^\beta}\right)h_{n\beta}(\omega_n) \quad (5.4.18)$$

при достаточно большом n .

Дальнейшие рассуждения относятся к получению ряда оценок величины $h_{n\beta}(\omega_n)$, приводящих в конечном итоге к интересующему нас утверждению относительно уравнения (5.4.13).

Рассматривая с этой целью выражения

$$\frac{|\omega_n^{(1)}(\tau_j) - \omega_n^{(1)}(\tau_\nu)|}{|\tau_j - \tau_\nu|^\beta}, \quad \frac{|\omega_n^{(2)}(\tau_j) - \omega_n^{(2)}(\tau_\nu)|}{|\tau_j - \tau_\nu|^\beta},$$

Заметим, что

$$\max_{|j-\nu| > j_n} \frac{|\omega_n^{(p)}(\tau_j) - \omega_n^{(p)}(\tau_\nu)|}{|\tau_j - \tau_\nu|^\beta} = O\left(\frac{n^\beta}{j_n^\beta}\right) \max_{\sigma} |\omega_n^{(p)}(\tau_\sigma)| = O\left(\frac{\ln^2 n}{j_n^\beta}\right) h_n^\beta(\omega_n)$$

в силу (5.4.18), причем под $\{j_n\} \uparrow \infty$ ($\frac{j_n}{n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$) подразумевается подпоследовательность натуральных номеров, выбор которой определен ниже.

Рассматривая ν, j , такие, что $|j - \nu| \leq j_n$, без ограничения общности можно считать $j = \nu + \lambda$ ($\lambda = 1, \dots, j_n$). Из формулы (5.4.13) имеем

$$\begin{aligned} \omega_n(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n(\tau_\nu) &= -\frac{1}{2} \{ \operatorname{Re}[(Q_n \omega_n)(\tau_{\nu+\lambda}) - \\ &- (Q_n \omega_n)(\tau_\nu)] + (H_n \omega_n)(\tau_{\nu+\lambda}) - (H_n \omega_n)(\tau_\nu) \} = 0. \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

В первую очередь обратим внимание на сумму в квадратных скобках в (5.4.20). С точки зрения интересующей нас оценки суммы $Q_n^{(1)}$ и $Q_n^{(2)}$ в векторном уравнении (5.4.20) существенно не различаются. Поэтому как и прежде, для определенности будем в (5.4.20) рассматривать сумму $Q_n^{(1)} \omega_n$. При этом, подобно выводу (5.4.12), можно ограничиться рассмотрением сумм вида (5.4.13) для $\omega = \omega_n$. В частности, рассматривая суммы $(Q_{n1} \omega_n)_\nu$, $(Q_{n2} \omega_n)_{\nu+\lambda}$ в виде (5.4.13), разность $(Q_{n1} \omega_n)_{\nu+\lambda} - (Q_{n2} \omega_n)_\nu$ представим исходя из разбиения указанных сумм соответственно на суммы $(\sum_{j_{n1}})_\nu$, $(\sum_{j_{n2}})_\nu$ и $(\sum_{j_{n1}})_j$, $(\sum_{j_{n2}})_j$, отличающиеся от рассматриваемых в доказательстве (4.5.12) заменой α_n и ω соответственно на j_n и ω_n . На основании этого имеем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j_{n1}} \right)_j - \left(\sum_{j_{n1}} \right)_\nu &= \sum_{\substack{\sigma = -j_n, \\ \sigma \neq -1}}^{j_n} (p_{\nu+\sigma} + p_{\nu+\sigma+1}) \frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_j)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_j} \times \\ &\times (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_j)) - \sum_{\substack{\sigma = -j_n, \\ \sigma \neq -1}}^{j_n} (p_{\nu+\sigma} + p_{\nu+\sigma+1}) \times \\ &\times \frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu} (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu)). \end{aligned}$$

Далее, как было показано в [73], при $1 \leq \sigma \leq 2j_n$ имеют место асимптотические представления

$$\frac{p_{\nu+\sigma} + p_{\nu+\sigma+1}}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_{\nu+\mu}} = \frac{2}{\pi i(\sigma - \mu)} (1 + O(j_n^\delta n^{-\delta})),$$

$\mu = 0, 1, \dots, \lambda$, $\sigma = -j_n, -j_n + 1, \dots, j_n$, $\sigma \neq -1$, справедливые в принятом предположении относительно Ляпуновости контура L . Учитывая, что ω_n есть действительная вектор-функция, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\left(\sum_{j_n 1} \right)_j - \left(\sum_{j_n 1} \right)_\nu \right) &= O(j_n^\delta n^{-\delta}) h^\beta h_{n\beta}(\omega_n) \sum_{\sigma=1}^{2j_n} \frac{1}{\sigma^{1-\beta}} = \\ &= O(j_n^\delta n^{-\delta}) h^\beta h_{n\beta}(\omega_n) j_n^\beta = O(j_n^{\delta+\beta} h^{\delta+\beta}) h_{n\beta}(\omega_n). \end{aligned}$$

Займемся теперь выражением $(\sum_{j_n 2})_j - (\sum_{j_n 2})_\nu$, которое по аналогии с (5.4.16) разобьем на две суммы вида Δ_{n1}^* , Δ_{n2}^* (подразумевается, что вместо α_n подставлено j_n). В первую очередь оценим сумму Δ_{n2}^* , соответствующую Δ_{n2} в (5.4.16):

$$\begin{aligned} \Delta_{n2}^*(\omega_n) &= \left(\sum_{\sigma=2j_n+1}^{n-1} + \sum_{\sigma=-n}^{-2j_n-1} \right) \frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu} \times \\ &\times (\cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_j) - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_\nu)). \end{aligned}$$

Принимая во внимание предположение относительно гладкости контура L , получаем

$$|\Delta_{n2}^*| = O(1) h_{n\beta}(\omega_n) \sum_{\sigma=2j_n+1}^{n-1} \frac{\lambda^\delta h^{\beta+\delta}}{\sigma^{1-\beta}} = O(1) \lambda^\delta h^\delta h_{n\beta}(\omega_n).$$

Оценим оставшуюся часть разности:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j_n 2} \right)_j - \left(\sum_{j_n 2} \right)_\nu &= \left(\sum_{\sigma=2j_n+1}^{n-1} + \sum_{\sigma=-n}^{-2j_n-1} \right) \times \\ &\times \left(\frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_j)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_j} - \frac{\omega^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega^{(1)}(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu} \right) \times \\ &\times (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_j)). \end{aligned}$$

Итак, получили

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j_n 2}\right)_j - \left(\sum_{j_n 2}\right)_\nu &= (\tau_j - \tau_\nu) \left(\sum_{\sigma=2j_n+1}^{n-1} + \sum_{\sigma=-n}^{-2j_n-1} \right) \times \\
&\times (p_{\nu+\sigma+1} + p_{\nu+\sigma}) \frac{\omega_n^{(1)}(\tau_{\nu+\sigma+1}) - \omega_n^{(1)}(\tau_\nu)}{(\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu)(\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_j)} \times \\
&\times [1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_j)] - [\omega_n^{(1)}(\tau_j) - \omega_n^{(1)}(\tau_\nu)] \times \\
&\times \left(\sum_{\sigma=2j_n+1}^{n-1} + \sum_{\sigma=-n}^{-2j_n-1} \right) (p_{\nu+\sigma+1} + p_{\nu+\sigma}) \times \\
&\times \frac{1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_j)}{\tau_{\nu+\sigma+1} - \tau_\nu}.
\end{aligned} \tag{5.4.21}$$

Учитывая $j = \nu + \lambda$, заметим, что сумма с множителем $\tau_j - \tau_\nu$ не превосходит по модулю выражения

$$\begin{aligned}
O(\lambda h^2) \max_{\mu} |\omega_n^{(1)}(\tau_\mu)| \sum_{\sigma=2j_n+1}^n \frac{1}{|s_{\nu+\sigma+1} - s_\nu| |s_{\nu+\sigma+1} - s_{\nu+\lambda}|} = \\
= O(1) \lambda \max_{\mu} |\omega_n^{(1)}(\tau_\mu)| \sum_{\sigma=2j_n+1}^n \frac{1}{\sigma(\sigma - \lambda)}, \quad j = \nu + \lambda.
\end{aligned}$$

Последнее, принимая во внимание (5.4.18) и $\lambda \leq j_n$, имеет оценку

$$O(\lambda j_n^{-1} h^\beta \ln^2 n) h_{n\beta}(\omega_n).$$

Переходя к оценке второй суммы в (5.4.21), выделим из нее слабое

$$\begin{aligned}
|\omega_n^{(1)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(1)}(\tau_\nu)| \left(\frac{p_{\nu+2j_n}}{\tau_{\nu+2j_n+1} - \tau_\nu} + \frac{p_{\nu-2j_n-2}}{\tau_{\nu-2j_n-1} - \tau_\nu} \right) \times \\
\times (1 - \cos 2\theta(\tau_{\nu+\sigma+1}, \tau_j)),
\end{aligned}$$

которое по аналогии с [73] имеет оценку $O(\lambda^\beta j_n^{-1} h^\beta) h_{n\beta}(\omega_n)$. Из тех же соображений, что и в [73], для оставшейся суммы при множителе $\omega_n^{(1)}(\tau_j) - \omega_n^{(1)}(\tau_\nu)$ справедливо представление

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi i} \int_{l_n} \frac{1 - \cos 2\theta(t, \tau_j)}{t - \tau_j} dt = O(j_n^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty), \\
l_n = L \setminus \tau_{\nu-2j_n} \tau_{\nu+2j_n}.
\end{aligned}$$

Объединяя полученные оценки и имея в виду $\lambda^\beta < \lambda$, можно написать

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}[(Q_{n1}\omega_n)_{\nu+\lambda} - (Q_{n1}\omega_n)_\nu] = \\ & = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{\pi i} \int_{l_n} \frac{1 - \cos 2\theta(t, \tau_j)}{t - \tau_j} dt + O(j_n^{-1})\right) [\omega_n^{(1)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(1)}(\tau_\nu)] + \\ & \quad + \left(O(n^{-\delta-\beta} j_n^{\beta+\delta}) + O(\lambda n^{-\beta} j_n^{-1} \ln^2 n)\right) h_{n\beta}(\omega_n). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, учитывая разницу между Q_{n1} и Q_{n2} по (5.4.13)₂, получаем

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}[(Q_{n2}\omega_n)_{\nu+\lambda} - (Q_{n2}\omega_n)_\nu] = \\ & = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\pi i} \int_{l_n} \frac{\sin 2\theta(t, \tau_j)}{t - \tau_j} dt + O(j_n^{-1})\right) [\omega_n^{(2)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(2)}(\tau_\nu)] + \\ & \quad + \left(O(n^{-\delta-\beta} j_n^{\beta+\delta}) + O(\lambda n^{-\beta} j_n^{-1} \ln^2 n)\right) h_{n\beta}(\omega_n). \end{aligned}$$

На основании указанных представлений для $(Q_n\omega)_{\nu+\lambda} - (Q_n\omega)_\nu$ (напомним, что $Q_n^{(1)} = Q_{n1} + Q_{n2}$) в результате получаем схожее выражение с интегральным членом вида

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\left([\omega_n^{(1)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(1)}(\tau_\nu)] \frac{1}{\pi i} \int_{l_n} \frac{1 - \cos 2\theta(t, \tau_j)}{t - \tau_j} dt - \right. \\ & \quad \left. - [\omega_n^{(2)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(2)}(\tau_\nu)] \frac{1}{\pi i} \int_{l_n} \frac{\sin 2\theta(t, \tau_j)}{t - \tau_j} dt\right), \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

и аналогично для $Q_n^{(2)}$ —

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\left([\omega_n^{(1)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(1)}(\tau_\nu)] \frac{1}{\pi i} \int_{l_n} \frac{\sin 2\theta(t, \tau_j)}{t - \tau_j} dt + \right. \\ & \quad \left. + [\omega_n^{(2)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(2)}(\tau_\nu)] \frac{1}{\pi i} \int_{l_n} \frac{1 + \cos 2\theta(t, \tau_j)}{t - \tau_j} dt\right). \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

Теперь воспользуемся

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{l_n} \frac{1 - \cos 2\theta(t, \tau_j)}{t - \tau_j} dt = \\
 & \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \left\{ \int_{l_n} \frac{1 - \cos 2\theta(t, \tau_\nu)}{t - \tau_j} dt - \int_{l_n} \left(\frac{\cos 2\theta(t, \tau_j)}{t - \tau_j} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\cos 2\theta(t, \tau_\nu)}{t - \tau_j} \right) dt \right\} = \frac{1}{\pi i} \int_{l_n} (1 - \cos 2\theta(t, \tau_\nu)) d\theta + \\
 & + \frac{1}{\pi i} \int_{l_n} (\cos 2\theta(t, \tau_j) - \cos 2\theta(t, \tau_\nu)) d\theta,
 \end{aligned} \tag{5.4.24}$$

где в $d\theta$ подразумевается $\theta = \theta(t, \tau_\nu)$. Второй интеграл в правой части (5.4.24), очевидно, имеет оценку $O(|\tau_j - \tau_\nu|^\delta) = O(|j - \nu|^\delta h^\delta) = O(\lambda^\delta h^\delta)$ равномерно относительно ν .

Далее,

$$\begin{aligned}
 & \int_{l_n} (1 - \cos 2\theta(t, \tau_\nu)) d\theta = (\theta(\tau_{\nu-2j_n}, \tau_\nu) - \theta(\tau_{\nu+2j_n}, \tau_\nu)) - \\
 & - \frac{1}{2} (\sin 2\theta(\tau_{\nu-2j_n}, \tau_\nu) - \sin 2\theta(\tau_{\nu+2j_n}, \tau_\nu)).
 \end{aligned} \tag{5.4.25}$$

Разность $\theta_{\nu n} = [\theta(\tau_{\nu-2j_n}, \tau_\nu) - \theta(\tau_{\nu+2j_n}, \tau_\nu)]$ в (5.4.25) представляет собой угол, при повороте (в положительном направлении) на который вокруг τ_ν , вектор $\overrightarrow{\tau_\nu \tau_{\nu+2j_n}}$ совместится с вектором $\overrightarrow{\tau_\nu \tau_{\nu-2j_n}}$. Обозначим

$$\theta_{\nu n}^0 = \begin{cases} \theta_{\nu n}, & \theta_{\nu n} \leq \pi, \\ 2\pi - \theta_{\nu n}, & \theta_{\nu n} > \pi. \end{cases}$$

Тогда несложными вычислениями (см. [49]) приходим к

$$\cos \theta_{\nu n}^0 = (-1 + \varepsilon_n^0),$$

где $\varepsilon_n \geq 0$ и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, и следовательно, $\theta_{\nu n}^0 \rightarrow \pi$ при $n \rightarrow \infty$. Тем самым, $\theta_{\nu n} \rightarrow \pi$ при $n \rightarrow \infty$. Для слагаемого с множителем $-1/2$ в (5.4.25) непосредственным образом получаем оценку $O(j_n^\delta h^\delta)$. Такую же оценку имеет интеграл с плотностью $\sin 2\theta(t, \tau_j)$.

Что же касается интеграла с плотностью $1 + \cos 2\theta(t, \tau_j)$, то он, как и первый интеграл в (5.4.23), стремится к π при $n \rightarrow \infty$. Тем самым, интегральные члены в соответствующих разностях для $Q_n^{(1)}$, $Q_n^{(2)}$ имеют, соответственно, асимптотику

$$Q_n^{(1)} = -[\omega_n^{(1)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(1)}(\tau_\nu)](1 + \varepsilon_{n1}^{(1)}) + [\omega_n^{(2)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(2)}(\tau_\nu)]\varepsilon_{n2}^{(1)},$$

$$Q_n^{(2)} = -[\omega_n^{(1)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(1)}(\tau_\nu)]\varepsilon_{n1}^{(2)} - [\omega_n^{(2)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(2)}(\tau_\nu)](1 + \varepsilon_{n2}^{(2)}),$$

где каждое из $\varepsilon_{nj}^{(p)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Исходя из выражения $H_n \omega_n$ и оценки (5.4.18), можно написать

$$|(H_n \omega_n)(\tau_{\nu+\lambda}) - (H_n \omega_n)(\tau_\nu)| = O(\lambda h^{1+\beta} \ln^2 n) h_{n\beta}(\omega_n).$$

Сопоставим полученные оценки с учетом выбора последовательности $\{j_n\}$ и применения ряда несущественных округлений и внесем их в (5.4.20). В результате убеждаемся в справедливости соотношений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\omega_n^{(1)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(1)}(\tau_\nu)](1 - \varepsilon_{n1}^{(1)}) + 2 [\omega_n^{(2)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(2)}(\tau_\nu)]\varepsilon_{n2}^{(1)} + \\ & + \{O(n^{-\delta} j_n^{\beta+\delta}) + O(j_n^{-\beta} \ln^2 n)\} h_{n\beta}(\omega_n) + [\omega_n^{(1)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(1)}(\tau_\nu)](\varepsilon_{n1}^{(2)}) + \\ & + [\omega_n^{(2)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(2)}(\tau_\nu)](1 + \varepsilon_{n2}^{(2)}) + \frac{1}{2} [\omega_n^{(2)}(\tau_{\nu+\lambda}) - \omega_n^{(2)}(\tau_\nu)]\varepsilon_{n1}^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Имея в виду указанное выше утверждение относительно $\varepsilon_{nj}^{(p)}$, а также, потребовав от $\{j_n\}$ дополнительно $\{j_n^{-\beta} \ln^2 n\} \rightarrow 0$, $\{n^{-\delta} j_n^{\beta+\delta}\} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), убеждаемся, что $h_{n\beta}(\omega_n) = 0$, откуда согласно (5.4.18) следует $\omega_n = 0$ начиная с некоторого n . А это означает, что однородное уравнение (5.4.13) имеет лишь нулевое решение, начиная с некоторого n , и, следовательно, неоднородное уравнение (5.4.11) имеет единственное решение при любой правой части.

5.5. О численном решении некоторых задач теории трещин методом дискретных особенностей

5.5.1. Применение обычного метода дискретных особенностей. Сингулярные интегральные уравнения являются весьма удобным аппаратом при исследовании граничных задач. К последним относится и задача теории трещин. Они дают возможность охарактеризовать изучаемую проблему в целом как для односвязных,

так и для многосвязных областей. Кроме того, при использовании современных вычислительных средств они позволяют также довести вычисления до численного результата, а в ряде случаев найти точные или приближенные аналитические решения.

В [50] рассматриваются в основном однородные изотропные тела, ослабленные прямолинейными трещинами. Из этой книги нами рассмотрена одна простая задача — о распределении напряжения около двух параллельных трещин для неограниченной плоскости. Задачи такого класса в общем случае приводят к системе сингулярных интегральных уравнений.

Но если в бесконечной пластине имеются две равные параллельные трещины одинаковой длины, причем их расположение и нагрузка на них удовлетворяют условиям симметрии, то вместо системы сингулярных интегральных уравнений имеем одно уравнение.

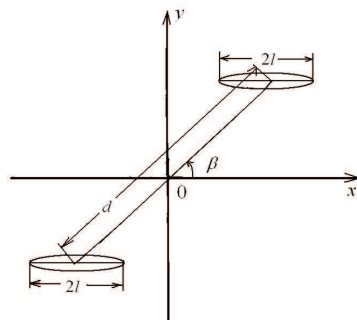


Рис. 7.

Итак, если имеются трещины (см. рис. 7) одинаковой длины и приложена одинаковая нагрузка, то для напряжения имеем сингулярное интегральное уравнение I-го рода (см. [50, с. 278])

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{\varphi_0(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l k(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0), \quad t_0 \in (-l, l), \quad (5.5.1)$$

где

$$k(t_0, t) = \frac{t + t_0 + d \cos \beta}{(t + t_0 + d \cos \beta)^2 + d^2 \sin^2 \beta},$$

а $f(t)$ — функция нагрузки на берегах трещин.

Не ограничивая общности, можно считать, что $l = 1$. Тогда имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0). \quad (5.5.2)$$

Следуя методу дискретных особенностей (см. [35]), рассмотрим три случая.

1. $\varkappa = 0$. В этом случае ищется решение, ограниченное на одном конце и неограниченное на другом. В частности, такого типа

$$\varphi_0(t) = \frac{-1}{\pi} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t_0}{1-t_0}} \cdot \frac{dt_0}{t-t_0} \left(-f(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(t_0, t) \varphi_0(t) dt \right) \right\}.$$

2. $\varkappa = -1$. Тогда ищется решение, ограниченное на обоих концах, вида

$$\varphi_0(t) = \frac{-1}{\pi} \sqrt{1-t^2} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t_0^2}} \cdot \frac{dt_0}{t-t_0} \left(-f(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(t_0, t) \varphi_0(t) dt \right) \right\}$$

с условиями

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t_0^2}} \left(-f(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(t_0, t) \varphi_0(t) dt \right) dt_0 = 0.$$

3. $\varkappa = 1$. В этом случае не существует единственного решения, не ограниченного на обоих концах. Решение зависит от одной произвольной постоянной и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) = & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left\{ \int_{-1}^1 \sqrt{1-t_0^2} \frac{dt_0}{t-t_0} \times \right. \\ & \left. \times \left(f(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(t_0, t) \varphi_0(t) dt \right) - C \right\}, \end{aligned}$$

Постоянная C определяется условием

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt = C.$$

Далее, если учесть теорему из [35], то в нашем случае получим следующие системы линейных алгебраических уравнений:

при $\varkappa = 0$:

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)}{t_{0j} - t_k} h + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n k(t_{0j}, t_k) \varphi(t_k) h = f(t_{0j}), \quad (5.5.3)$$

$$j = 1, \dots, n.$$

при $\varkappa = -1$:

$$\frac{1}{\pi} \gamma_{0n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)}{t_{0j} - t_k} h + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n k(t_{0j}, t_k) \varphi(t_k) h = f(t_{0j}), \quad (5.5.4)$$

$$j = 0, 1, \dots, n$$

Решение этой системы будет решением уравнения (5.5.1), если справедливо равенство

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \left[-f \left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi \right) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n k \left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi, t_j \right) \varphi(t_j) \right] = 0.$$

при $\varkappa = 1$:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)}{t_{0j} - t_k} h + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n k(t_{0j}, t_k) \varphi(t_k) h = f(t_{0j}), \\ j = 1, \dots, n-1, \\ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \varphi_n(t_k) h = C; \end{cases} \quad (5.5.5)$$

где $\{t_k\}$ и t_{0j} — точки канонического разбиения отрезка $[-1; 1]$.

Для погрешности справедлива оценка [35]

$$|\varphi(t_k) - \varphi_n(t_k)| \leq \theta_n(t_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

в которой величина $\theta_n(t_k)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

1) для всех точек $t_k \in [-1 + \delta, 1 - \delta]$, где $\delta > 0$ сколь угодно мало и $1 - \delta > 0$,

$$\theta_n(t_k) \leq O_\delta(h^{\lambda_1}), \quad \lambda_1 > 0;$$

2) для всех точек $t_k \in [-1, 1]$

$$\sum_{k=1}^n \theta_n(t_k) h \leq O(h^{\lambda_2}), \quad \lambda_2 > 0.$$

Для уравнения напряжений (5.5.1) вышеуказанная схема хорошо работает, так как функции $k(t_0, t)$ и $f(t_0)$ можно считать принадлежащими классу H . Таким образом, условия разрешимости систем (5.5.2), (5.5.3) выполняются.

Обоснование изложенных схем может быть осуществлено аналогично тому, как это указано в монографиях [1], [35].

5.5.2. Видоизменение схемы метода дискретных особенностей. Численные результаты. В § 2.6 были построены квадратурные формулы повышенной точности метода дискретных особенностей. В частности,

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt \approx \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=1}^n (p_{2\sigma-1} + p_{2\sigma+1}) \frac{\varphi(\tau_{2\sigma+1}) - \varphi(t_0)}{\tau_{2\sigma+1} - t_0},$$

$t_0 \in \{\tau_{2p}\}_{p=1}^n$ и

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt \approx \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=1}^n (p_{2\sigma} + p_{2\sigma+2}) \frac{\varphi(\tau_{2\sigma+2}) - \varphi(t_0)}{\tau_{2\sigma+2} - t_0},$$

$t_0 \in \{\tau_{2p-1}\}_{p=1}^n$, где

$$p_j = \frac{\tau_{j+2} - \tau_j}{2\pi i}, \quad j = 1, \dots, 2n.$$

Используем указанные квадратурные формулы для численного решения уравнения (5.5.2) в случае $\varkappa = 0$. Для этого, заметив, что последние применимы в случае замкнутых контуров, мы их соответственно видоизменим. В первую очередь, рассматривая отрезок $[-1, 1]$, в случае $\varkappa = 0$ решение будем искать (см. [35]) в виде

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \varphi(t).$$

Следовательно, (5.5.2) примет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} k(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0). \quad (5.5.6)$$

Разделим отрезок $[-1, 1]$ на n частей точками $t_k = -1 + (k-1)h$, $h = 2/n + 1$, $k = 1, \dots, n+1$, где t_k — расчетные точки (см. [35]).

Рассмотрим также $t_{0j} = t_j + h/2$, $j = 1, \dots, n$ — контрольные точки. Т. е. мы имеем две системы точек $E = \{t_k\}_{k=1}^{n+1}$ и $E_0 = \{t_{0j}\}_{j=1}^n$.

Далее, будем аппроксимировать $\varphi(t)$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ линейным интерполянтom. Имеем

$$\varphi(t) \approx \frac{t - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} \varphi(t_k) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \varphi(t_{k+1}). \quad (5.5.7)$$

После указанного разбиения отрезка $[-1, 1]$, подставляя вместо φ в (5.5.6) выражение (5.5.7), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{1}{t - t_0} \left(\frac{t - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} \varphi(t_k) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \varphi(t_{k+1}) \right) dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \left(\frac{t - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} k(t_0, t_k) \varphi(t_k) + \right. \\ & \left. + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} k(t_0, t_{k+1}) \varphi(t_{k+1}) \right) dt = f(t_0), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (p_{0k}(t_0) \varphi(t_k) + p_{1k}(t_0) \varphi(t_{k+1})) + \\ & + \sum_{k=1}^n (p_{0k}^*(k\varphi)(t_k) + p_{1k}^*(k\varphi)(t_{k+1})) = f(t_0), \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

где

$$\begin{aligned} p_{0k}(t_0) &= -\frac{1}{\pi h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{t - t_{k+1}}{t - t_0} dt = -\frac{1}{\pi h} \left\{ \sqrt{1-t^2} + \arcsin t + \right. \\ & + (t_0 - t_{k+1}) \left[\sqrt{\frac{1-t_0}{1+t_0}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} - \sqrt{\frac{1-t_0}{1+t_0}}}{\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \sqrt{\frac{1-t_0}{1+t_0}}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-t_0}{1+t_0}} \right] \Big|_{t_k}^{t_{k+1}}, \\ p_{1k}(t_0) &= \frac{1}{\pi h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{t - t_k}{t - t_0} dt = \frac{1}{\pi h} \left\{ \sqrt{1-t^2} + \arcsin t + \right. \end{aligned}$$

$$+ (t_0 - t_k) \left[\sqrt{\frac{1-t_0}{1+t_0}} \ln \frac{\left| \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} - \sqrt{\frac{1-t_0}{1+t_0}} \right|}{\left| \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \sqrt{\frac{1-t_0}{1+t_0}} \right|} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \right] \Big|_{t_k}^{t_{k+1}},$$

$$p_{0k}^* = \frac{1}{\pi} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{t - t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} dt = -\frac{1}{\pi h} \left\{ -\sqrt{1-t^2} + \right. \\ \left. + \arcsin t + \frac{1}{2} t \sqrt{1-t^2} - t_{k+1} (\arcsin t + \sqrt{1-t^2}) \right\} \Big|_{t_k}^{t_{k+1}},$$

$$p_{1k}^* = \frac{1}{\pi} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} dt = \frac{1}{\pi h} \left\{ -\sqrt{1-t^2} + \right. \\ \left. + \arcsin t + \frac{1}{2} t \sqrt{1-t^2} - t_k (\arcsin t + \sqrt{1-t^2}) \right\} \Big|_{t_k}^{t_{k+1}}.$$

Очевидно, что при $t_0 = -1$ возникают определенные трудности. Но они легко преодолеваются после вычисления соответствующих пределов в $p_{0k}(t_0)$ и в $p_{1k}(t_0)$ при $t_0 \rightarrow -1$.

Подставляя в (5.5.7) вместо t_0 значения $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$, получаем систему линейных алгебраических уравнений $(n+1)$ -го порядка

$$\sum_{k=1}^{n+1} p_k(t_j) \varphi(t_k) + \sum_{k=1}^{n+1} q_k k(t_j, t_k) \varphi(t_k) = f(t_j), \quad j = 1, \dots, n+1,$$

где

$$p_k(t_0) = \begin{cases} p_{01}(t_0), & k = 1, \\ p_{0k}(t_0) + p_{1\ k-1}(t_0), & k = 2, 3, \dots, n, \\ p_{0n}(t_0), & k = n+1; \end{cases}$$

$$q_k = \begin{cases} p_{01}^*, & k = 1, \\ p_{0k}^* + p_{1\ k-1}^*, & k = 2, 3, \dots, n, \\ p_{0n}^*, & k = n+1. \end{cases}$$

Для уравнения (5.5.2) в случае

$$d = 2, \quad \beta = \frac{\pi}{4}, \quad f = -2$$

получены следующие численные результаты.

Таблица 1

Обычная схема метода дискретных особенностей

$n = 10$	
$\varphi_0(t_1) = 11.60959,$	$\varphi_0(t_6) = -1.30986,$
$\varphi_0(t_2) = 5.06967,$	$\varphi_0(t_7) = 0.92652,$
$\varphi_0(t_3) = 3.32664,$	$\varphi_0(t_8) = 0.59255,$
$\varphi_0(t_4) = 2.39873,$	$\varphi_0(t_9) = 0.28501,$
$\varphi_0(t_5) = -1.77828,$	$\varphi_0(t_{10}) = 0.01028;$
$n = 20$	
$\varphi_0(t_1) = 23.51460,$	$\varphi_0(t_{11}) = -1.85464,$
$\varphi_0(t_2) = -11.02644,$	$\varphi_0(t_{12}) = -1.59204,$
$\varphi_0(t_3) = -7.80364,$	$\varphi_0(t_{13}) = -1.34614,$
$\varphi_0(t_4) = -6.14393,$	$\varphi_0(t_{14}) = -1.11205,$
$\varphi_0(t_5) = -5.07525,$	$\varphi_0(t_{15}) = -0.88539,$
$\varphi_0(t_6) = 4.30370,$	$\varphi_0(t_{16}) = -0.66175,$
$\varphi_0(t_7) = 3.70594,$	$\varphi_0(t_{17}) = -0.43617,$
$\varphi_0(t_8) = 2.81008,$	$\varphi_0(t_{18}) = -0.20264,$
$\varphi_0(t_9) = -2.45487,$	$\varphi_0(t_{19}) = -0.04309,$
$\varphi_0(t_{10}) = -2.13976,$	$\varphi_0(t_{20}) = -0.00107.$

Здесь $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\varphi(t)$, откуда следует, что точность результатов между значениями $\varphi(t)$ при различных n невысокая — порядка $\varepsilon = 0.1$.

Таблица 2

Модифицированная схема метода дискретных особенностей

$n = 10$	
$\varphi(t_1) = 3.301255,$	$\varphi(t_7) = 4.464135,$
$\varphi(t_2) = 3.545346,$	$\varphi(t_8) = 4.466503,$
$\varphi(t_3) = 3.797874,$	$\varphi(t_9) = 4.406897,$
$\varphi(t_4) = 4.028697,$	$\varphi(t_{10}) = 4.286225,$
$\varphi(t_5) = 4.234032,$	$\varphi(t_{11}) = 4.138976;$
$\varphi(t_6) = 4.379502,$	
$n = 20$	
$\varphi(t_1) = 3.303535,$	$\varphi(t_{12}) = 4.431933,$
$\varphi(t_2) = 3.425382,$	$\varphi(t_{13}) = 4.463841,$
$\varphi(t_3) = 3.550991,$	$\varphi(t_{14}) = 4.475012,$
$\varphi(t_4) = 3.675045,$	$\varphi(t_{15}) = 4.469471,$
$\varphi(t_5) = 3.799521,$	$\varphi(t_{16}) = 4.444603,$
$\varphi(t_6) = 3.918572,$	$\varphi(t_{17}) = 4.405961,$
$\varphi(t_7) = 4.033726,$	$\varphi(t_{18}) = 4.351917,$
$\varphi(t_8) = 4.138726,$	$\varphi(t_{19}) = 4.288955,$
$\varphi(t_9) = 4.234900,$	$\varphi(t_{20}) = 4.215604,$
$\varphi(t_{10}) = 4.315948,$	$\varphi(t_{21}) = 4.138198.$
$\varphi(t_{11}) = 4.383512,$	

Здесь точность результатов между значениями $\varphi(t)$ при $n = 10$ и $n = 20$ значительно более высокая — порядка $\varepsilon = 0.001$.

5.6. Сингулярные интегральные уравнения в численных конформных отображениях

Изложение этого параграфа соответствует [77].

Применение граничных интегральных уравнений в теории *конформных отображений* областей хорошо известно из классической литературы (см., например, [22], [41]). По-видимому, основанные на этом методе отображения приводят во многих случаях к одним из наиболее эффективных схем для численной реализации таких задач. Тем не менее, применение граничных интегральных уравнений Фредгольма (что обычно и предполагается в упомянутом подходе) иногда связано с определенными неудобствами при осуществлении различных вычислительных процессов. Рассмотрения показывают, что с этой точки зрения более приемлемыми могут быть вычислительные схемы, основанные на использовании сингулярных интегральных уравнений. Приложения таких уравнений к исследованию граничных задач теории гармонических функций (вообще для многосвязных областей) также хорошо известны (см. [41], [46]).

На основе сказанного мы можем представить себе, что одним из наиболее важных шагов на этом пути является решение вопросов конструирования по возможности эффективных схем для численного решения порожденных упомянутой задачей сингулярных интегральных уравнений, их обоснование и оценки погрешности построенных отображающих функций в любой точке рассмотренной области вплоть до ее границы.

Излагая вкратце вывод граничных сингулярных интегральных уравнений для ряда конкретных задач, ради простоты будем рассматривать случай односвязных областей. Не оговаривая каждый раз, рассматриваемые области будем считать ограниченными (замкнутыми) контурами Ляпунова.

Мы знаем (см. [58]), что отображение области G плоскости z на плоскость ζ , выполняемое с помощью функции $\zeta = W(z)$, аналитической в G , будет конформным во всех точках z , где производная $W'(z)$ не равна нулю. Это отображение области G будет взаимно однозначным, если различным точкам z_1 и z_2 области G всегда соответствуют две различные точки ζ_1 и ζ_2 на плоскости ζ . В этом последнем случае

каждой точке z односвязной области G соответствует определенная точка ζ некоторой односвязной области T плоскости ζ и, обратно, каждой точке области T отвечает единственная точка в области G . Другими словами, при взаимно однозначном отображении области G на область T функция, обратная к односвязной аналитической функции $\zeta = W(z)$, будет в свою очередь, однозначной функцией в области T . Естественно, возникает вопрос: может ли в случае взаимно однозначного соответствия производная $W'(z)$ обращаться в нуль, и таким образом, нарушаться конформность отображения? На этот вопрос есть отрицательный ответ: справедливо, что при взаимно однозначном отображении данной области G производная $W'(z)$ нигде в области G не равна нулю (см. [56, гл. II, § 5]).

Следовательно, в случае взаимно однозначного отображения области G на область T производная $W'(z)$ не может обращаться в нуль нигде в области G , а потому отображение будет конформным всюду.

Таким образом, рассматриваемая задача состоит в следующем: даны две односвязные области G и T , соответственно в плоскостях z и ζ . Найти функцию $\zeta = W(z)$, аналитическую в области G , которая осуществляла бы взаимно однозначное (а, следовательно, и конформное) отображение этих областей друг на друга.

При решении этой задачи, как обычно, будем принимать, что одна из данных областей, например T , есть круг с центром в начале координат и радиусом, равным единице, так как, чтобы осуществить взаимно однозначное и конформное отображение двух произвольных односвязных областей друг на друга, достаточно получить взаимно однозначное и конформное отображение каждой из данных областей на такой круг.

Имеет место следующая теорема, известная под названием *предложения Римана*, принадлежащая к важнейшим результатам теории функций комплексного переменного.

Теорема 5.6.1. *Каждая односвязная область G , отличная от полной плоскости или от плоскости с выключенной точкой, может быть с помощью аналитической функции отображена взаимно однозначно и конформно на внутренность единичного круга и притом так, что произвольно заданным в G точке и направлению в этой точке будут соответствовать нулевая точка и направление положительной действительной оси.*

Дополнительно к этому предположению мы заметим, что при поставленных условиях функция, выполняющая искомое отображение, будет единственной [56].

5.6.1. Отображение конечной односвязной области на единичный круг. Итак, пусть D^+ — упомянутая область в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и L — граница. Считая, что начало координат находится в D^+ , требуется найти функцию $\zeta = W(z)$, взаимно однозначно и конформно отображающую данную область на внутренность единичного круга $|\zeta| \leq 1$ при условиях $W(0) = 0$, $W'(0) > 0$. Искомую функцию $W(z)$ представим в виде

$$W(z) = z e^{\phi(z)}, \quad (5.6.1)$$

где $\phi(z)$ — однозначная аналитическая в области D^+ функция, причем $\text{Im } \phi(0) = 0$. Далее, так как

$$|W^+(t)| = 1 \quad \left(W^+(t) = \lim_{\substack{z \rightarrow t, \\ z \in D^+}} W(z), \quad t \in L \right),$$

то в силу (5.6.1) граничное условие задачи можно записать так:

$$\text{Re } \Phi^+(t) = -\ln |t|. \quad (5.6.2)$$

Теперь функцию $\phi(z)$ будем разыскивать в виде (см. [46, § 64])

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - z} dt + c_1 + ic_2,$$

где под $\varphi(t)$ подразумевается действительная функция, удовлетворяющая на L условию Гёльдера, а c_1, c_2 — действительные (не задаваемые заранее) постоянные. Из $\text{Im } \phi(0) = 0$ следует

$$c_2 = -\text{Im} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)}{t} dt.$$

Далее, исходя из (5.6.2), на основании формулы Племелья — Сохоцкого получаем интегральное уравнение

$$\text{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt + c_1 = -\ln |t_0|, \quad t_0 \in L, \quad (5.6.3)$$

где сингулярный интеграл рассматривается в смысле главного значения. Константа c_1 в (5.6.3) может быть выражена одним из указанных в [46] способов. Однако с точки зрения вычислительных целей и

ряда других соображений оказывается значительно более удобным положить

$$c_1 = -\operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_*} dt,$$

где t_* — произвольно зафиксированная точка на L . Тем самым, граничное интегральное уравнение исходной задачи будет рассматриваться в виде:

$$(K\varphi)(t_0) \equiv \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt - \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_*} dt = -\ln |t_0|. \quad (5.6.4)$$

Аналогично тому, как в [46], можно показать, что соответствующее (5.6.4) однородное уравнение не имеет отличных от нуля решений, а это означает, что уравнение (5.6.4) имеет единственное решение.

5.6.2. Отображение бесконечной односвязной области на круг. Пусть D^- представляет внешнюю по отношению D^+ область, g — дополнение единичного круга $|\zeta| \leq 1$ до расширенной плоскости. Задача состоит в нахождении аналитической в D^- функции $\zeta = W(z)$, отображающей D^- взаимнооднозначно и конформно на область g . Если положить, что $W(\infty) = \infty$ и направление действительной оси в бесконечности остается неизменным (см. [22, гл. V]), то функцию W можно искать в виде (полагая, как и в предыдущем случае, что положительный обход L производится против движения часовой стрелки)

$$W(z) = aze^{-\phi(z)}, \quad \Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt,$$

где относительно $\varphi(t)$ приняты те же предположения, а под a подразумевается действительная положительная (не задаваемая заранее) постоянная. Соответствующее граничное условие в данном случае приводит к равенству

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt = \ln |t_0| + \ln a, \quad t_0 \in L$$

или, полагая $a = e^c$, где $c = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_*} dt$, получаем граничное интегральное уравнение задачи в виде

$$(K\varphi)(t_0) \equiv \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt - \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_*} dt = \ln |t_0|. \quad (5.6.5)$$

Решением уравнения (5.6.5) очевидным образом определится и константа a .

5.6.3. Численное решение уравнений (5.6.4) и (5.6.5). Применяя обозначение

$$(A\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt,$$

запишем

$$(K\varphi)(t_0) = \operatorname{Re} \{ (A\varphi)(t_0) + i(A\varphi)(t_*) \}.$$

Заметив ([45, § 64]), что

$$(K\varphi)(t_0) = (A\varphi)(t_0) + (H\varphi)(t_0),$$

где

$$(H\varphi)(t_0) = i \operatorname{Re} i(A\varphi)(t_0) + \operatorname{Re} i(A\varphi)(t_*),$$

увидим, что (5.6.4), (5.6.5) — сингулярные интегральные уравнения первого рода с определенной регулярной частью.

Весьма удобный с различных точек зрения алгоритм для численного решения таких уравнений может быть построен применением модифицированной в § 2.6 схемы дискретных особенностей, основанной на приближениях

$$(A\varphi)(\tau_\nu) \simeq i\varphi(\tau_\nu) + (Q_n\varphi)(\tau_\nu),$$

$$(Q_n\varphi)(\tau_\nu) = i \sum_{\sigma=1}^n p_{\nu+2\sigma-1} \frac{\varphi(\tau_{\nu+2\sigma-1}) - \varphi(\tau_\nu)}{\tau_{\nu+2\sigma-1} - \tau_\nu}, \quad \nu = 1, \dots, 2n,$$

где $\{\tau_j\}_{j=1}^{2n} \in L$ ($\tau_j = \tau_{j+2n}$), $\{p_j\}_{j=1}^n$ — узлы и коэффициенты из § 2.6. На этой основе, полагая, что $\tau_\mu \tau_{\mu+1}$ ($\mu = 1, \dots, 2n$) — наименьшие дуги из L с концами $\tau_\mu, \tau_{\mu+1}$, аппроксимацию сингулярного интеграла $(A\varphi)(t_0)$ при любом $t_0 \in L$ осуществим выражением

$$(A_n\varphi)(t_0) \equiv i\varphi(t_0) + L_{n\mu}(Q_n\varphi)(t_0), \quad t_0 \in \tau_\mu \tau_{\mu+1},$$

где под $L_{n\mu}$ подразумевается линейный интерполянт по значениям $(Q_n\varphi)(\tau_\mu), (Q_n\varphi)(\tau_{\mu+1})$. Исходя из этого и учитывая, что функция $\varphi(t)$ действительная, приближением левой части уравнений (5.6.4), (5.6.5) будем считать

$$(K_n\varphi)(t_0) \equiv \operatorname{Re} \{ (A_n\varphi)(t_0) + i(A_n\varphi)(t_*) \},$$

$$L_{n\mu}(Q_n\varphi)(t_*) = (Q_n\varphi)(t_*).$$

При этом предполагаем, что точка $t_* \in L$ отлична от расчетных узлов.

Построенная на такой основе вычислительная схема приводит к линейной алгебраической системе с коэффициентами, имеющими довольно простую структуру (в отличие от системы, которые могут быть построены применением граничных интегральных уравнений Фредгольма).

5.6.4. Об обосновании вычислительной схемы. Обоснование изложенной схемы проводится в Гёльдеровом пространстве H_β ($0 < \beta < 1$) и основывается на получении (в классе действительных функций) оценок, утверждающих стремление к нулю (при $n \rightarrow \infty$) выражений

$$\|A_n^{-1}(A_n - A)A^{-1}H\|, \quad \|A_n^{-1}(H - H_n)\|,$$

(относительно A_n^{-1} и оценки $\|A_n^{-1}\|$), где H_n — аппроксимирующие H по данной схеме операторы. При этом в оценке $\|A_n^{-1}(A_n - A)A^{-1}H\|$ используется (с учетом ляпуновости L) представление ([46, §§ 51, 61]) оператор-функции $\operatorname{Re} iA$ с данной (действительной) плотностью через интеграл с ядром вида

$$\frac{h(t_0, t)}{r^\lambda}, \quad r = |t - t_0|, \quad 0 < \lambda < 1,$$

где $h(t_0, t)$ удовлетворяет условию Гёльдера по обоим переменным. Наиболее существенные сложности связаны с вопросом получения нужной оценки $\|A_n^{-1}\|$ (сводящимся в конечном счете к оценке $\operatorname{Re} i(A - A_n)$ в H_β).

С точки зрения численной реализации представляет интерес рассмотреть несколько упрощенных расчетных схем, которые могут быть получены, если в выражениях $(Q_n \varphi)(\tau_\nu)$ соответствующие значения $\varphi(\tau_\nu)$ заменить интерполяционным выражением

$$\frac{\tau_\nu - \tau_{\nu+1}}{\tau_{\nu-1} - \tau_{\nu+1}} \varphi(\tau_{\nu-1}) + \frac{\tau_\nu - \tau_{\nu-1}}{\tau_{\nu+1} - \tau_{\nu-1}} \varphi(\tau_{\nu+1}).$$

Такая замена, не влекущая за собой сколь-нибудь существенной потери точности, значительно сокращает объем вычислений, что подтверждается и соответствующим численным экспериментом. Тем не менее, полное обоснование соответствующих упрощенных схем требует отдельного рассмотрения.

После того, как приближенные значения $\varphi_n \approx \varphi$ из соответствующих аппроксимирующих систем найдены, построение конформно отображающих функций заключается в (приближенном) вычислении интегралов типа Коши в функциях $\phi(z)$. При этом для z , близких к границе, довольно хорошие результаты дает применение квадратурной формулы из § 3.3.

Ниже приведены численные результаты решения двух примеров (см. таблиц 1, 2). Указанные в столбцах W числа представляют образы точек z (внутренних или граничных), найденных приближенно по данной здесь схеме; z^* — соответствующие прообразы, вычисленные по известным формулам, приведенным в таблицах. Сравнение значений z и z^* в определенной мере характеризует точность полученных численных результатов.

Таблица 1

Отображение Улитки Паскаля ($x = \cos \theta + 0.2 \cos 2\theta$, $y = \sin \theta + 0.2 \sin 2\theta$)
на единичный круг

$z = 1.20000 - 0.00000i$		
n	W	$z^* = W + mW^2$
100	$0.99989 + 0.00005i$	$1.19986 + 0.000007i$
200	$0.99997 + 0.00001i$	$1.19996 + 0.00002i$
$z = -0.7472136 - 0.3975739i$		
100	$-0.80903 - 0.58785i$	$-0.74724 - 0.39763i$
200	$-0.80902 - 0.58780i$	$-0.74722 - 0.39759i$
$z = -0.50000 + 0.20000i$		
100	$-0.54662 + 0.25597i$	$-0.49996 + 0.20000i$
200	$-0.54665 + 0.25597i$	$-0.49999 + 0.20000i$

Таблица 2

Отображение внешности эллипса ($x = 1.5 \cos \theta$, $y = 0.5 \sin \theta$)
на внешность одиночного круга

$z = 1.50000 + 0.00000i$		
n	W	$z^* = W + \frac{m}{W}$
100	$1.00073 + 0.00000i$	$1.50036 + 0.00000i$
200	$1.00018 + 0.00000i$	$1.50009 + 0.00000i$
$z = 0.00000 - 0.50000i$		
100	$0.00000 - 0.99971i$	$0.00000 - 0.49957i$
200	$0.00000 - 0.99993i$	$0.00000 - 0.49989i$
$z = -1.50000 + 0.30000i$		
100	$-1.11642 + 0.45702i$	$-1.50000 + 0.30000i$
200	$-1.11642 + 0.45702i$	$-1.50000 + 0.30000i$

5.7. О пакете программ для численного решения сингулярных интегральных уравнений и некоторых граничных задач

5.7.1. Некоторые общие замечания. Как известно ([46, § 62]), при решении задачи Дирихле применяется сингулярное интегральное уравнение

$$\varphi(t_0) + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt = f(t_0), \quad t_0 \in L.$$

После того, как некоторые приближенные значения φ найдены из соответствующей линейной алгебраической системы, за приближение к искомому решению $u(x, y)$ можно принять

$$u_n(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{g_n(t)}{t - z} dt,$$

где g_n — кусочно-интерполяционная функция, построенная по найденным приближенным значениям φ в узлах $t_{\sigma k}$. Если эти значения найдены с достаточной точностью, то функция $u_n(x, y)$ осуществляет достаточно хорошее приближение решения исходной задачи.

Отметим, что в некоторых задачах (например, в задаче кручения) требуется определение производной аналитической в области функции по заданной на границе ее действительной (или мнимой) части. Решение задачи Дирихле методом интегральных уравнений дает возможность находить искомые аналитические функции через интеграл типа Коши, не прибегая к сложной процедуре восстановления сопряженных гармонических по области функций. Указанное обстоятельство составляет одно из известных достоинств метода граничных интегральных уравнений, имеющее место как в методе интегральных уравнений Фредгольма, так и в методе сингулярных интегральных уравнений. В связи с этим составлена программа численного решения задачи Дирихле, дающая значения искомой и сопряженной к ней гармонических функций, а также их частных производных в заданных точках области. Эта программа представляет одну из частей упомянутого выше в названии параграфа пакета прикладных программ «НОФИМА», составленного в 80-е гг. прошлого столетия.

Мы изложим ее основные принципы и особые моменты, так как они всегда остаются актуальными.

В задачах теории упругости заключительным этапом решения является вычисление основных характеристик — значений компонентов напряжений и смещений. Пользуясь общепринятыми обозначениями для указанных характеристик, по известным формулам Колосова — Мусхелишвили [46] имеем

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \varphi_1'(z),$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2(\bar{z} \varphi_1''(z) + \varphi_2'(z))$$

для компонентов напряжений и

$$2\mu(u + iv) = \kappa \varphi_1(z) - z \bar{\varphi}_1'(z) - \bar{\varphi}_2(z)$$

для компонентов смещений, где μ и κ — известные в литературе упругие постоянные. Согласно этим формулам, дальнейшая задача состоит в разработке в той или иной мере эффективных схем для приближенного вычисления значений потенциалов $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ и их производных.

Не вдаваясь в подробности, мы здесь отметим лишь, что для приближенного вычисления указанных характеристик использованы определенные специальные схемы приближения плотностей указанных комплексных потенциалов, гарантирующие достаточно хорошую аппроксимацию как самих функций $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, так и их производных. Соответствующая программа вычислений также представляет часть упомянутого пакета прикладных программ (ППП) «НОФИМА» [68].

В случае первой основной задачи теории упругости представляет определенный интерес также вычисление граничной функции f , определяемой через компоненты X_n , Y_n вектора внешних сил по формуле (см. [45, § 41])

$$f(t) = i \int_{t_0}^t (X_n + iY_n) ds,$$

где s — дуговая абсцисса. Хотя последний интеграл не является особым, вычисление его в случае задания исходных данных (контура L

и компонентов X_n, Y_n) в неаналитическом виде сопряжено с определенными трудностями.

В связи с этим отметим, что в ППП «НОФИМА» включена программа вычисления интегралов указанного вида, основанная на замене интегрирования по s комплексным интегрированием, при дискретных заданиях X_n, Y_n применительно к областям с достаточно общими границами.

Отметим, наконец, что анализ линейных алгебраических систем, получаемых в результате дискретизации сингулярных интегральных уравнений, дает некоторую уверенность в лучшей обусловленности таких систем по сравнению с аналогичными системами, порожденными в результате применения известных методов решения интегральных уравнений Фредгольма. Основанием подобной возможности является то, что обычно в сингулярном случае в соответствующих матрицах обнаруживается определенное преобладание диагональных элементов над остальными.³

Отметим также, что практика решения на ЭВМ многочисленных примеров по изложенным в данной работе схемам показала, наряду с хорошей сходимостью вычислительных процессов, устойчивость счета при решении соответствующих алгебраических систем методом исключения Гаусса. На модельных задачах обнаруживалась быстрая улучшаемость результатов с увеличением числа узлов на контуре. Но сколько-нибудь точные утверждения относительно обусловленности соответствующих систем оказываются затруднительными. Правда, в этом направлении имеются и определенные сдвиги, однако проблема в общем случае остается нерешенной.

В ряде случаев оказываются возможными лишь некоторые суждения о поведении невязок при малых ошибках округлений в соответствующей схеме Гаусса. В частности, на основании исследования систем линейных уравнений относительно округлений в отдельных схемах обнаруживается практически небольшой рост невязок с увеличением размерности системы. Это обстоятельство может представлять некоторый практический интерес, ибо в задачах, при численном решении которых основным моментом является хорошее удовлетворение граничных условий, малость невязки имеет немаловажное значение.

³ Это обстоятельство, естественно, обуславливается самим характером диагональной неограниченности ядер типа Коши.

5.7.2. Назначение пакета и схема его функционирования.

Как уже упоминалось, изложенные в данной работе методы аппроксимации сингулярных интегралов были положены в основу разработки пакета прикладных программ (под названием «НОФИМА» [68]), предназначенного для численного решения общих сингулярных интегральных уравнений с гладкими замкнутыми контурами интегрирования, задачи Дирихле для уравнения Лапласа, первой и второй основных задач плоской теории упругости для достаточно широкого класса областей с гладкими границами. ППП составлен на языке ФОРТРАН.

Пакет содержит набор функциональных параметров и программных модулей, обеспечивающих решение каждой из задач указанных типов, что осуществляется автоматически с помощью управляющей программы выбором соответствующих функциональных параметров и модулей по коду.

Функционирование управляющей программы и решение задач осуществляется на основе задания некоторого функционального уравнения (содержащего все основные параметры), полученного аппроксимацией следующего абстрактного уравнения

$$a_0\varphi + a_1 \operatorname{Re} S\varphi + a_2 \operatorname{Im} S\varphi + a_3 \bar{S}\bar{\varphi} + a_4 H\bar{\varphi} + a_5 K\varphi + a_6 \operatorname{Re} I\bar{\varphi} = F,$$

где

$$S\varphi \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt, \quad H\bar{\varphi} \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{\varphi}(t) d\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0},$$

$$K\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_L k(t_0, t)\varphi(t) dt, \quad I\varphi \equiv \int_L \frac{\varphi(t)}{t^2} dt,$$

L — гладкий замкнутый контур, ограничивающий конечную односвязную область (содержащую начало координат внутри себя), a_j ($j = 0, 1, \dots, 6$), F — заданные на L функции (параметры).

В соответствии с классом решаемых задач пакет рассчитан на решение соответствующего уравнения при следующих наборах функциональных параметров:

1. $a_2 = ia_1$, $a_3 = 0$, $a_4 = a_6 = 0$, $a_5 = 1$ — общее сингулярное интегральное уравнение:

$$a\varphi + 2bS\varphi + K\varphi = F,$$

где обозначено $a(t_0) = a_0(t_0)$, $b(t_0) = \frac{1}{2}a_1(t_0)$, при этом считается $a^2(t_0) - b^2(t_0) \neq 0$ на L .

2. $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ — граничное интегральное уравнение теории гармонических функций:

$$\varphi + 2 \operatorname{Re} S\varphi = F.$$

3. $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = i$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$, $a_5 = 0$, $a_6 = \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{\bar{t}_0} + \frac{t_0}{t_0^2} \right)$ — граничное интегральное уравнение первой основной задачи теории упругости:

$$\varphi + S\varphi - \bar{S}\bar{\varphi} + H\bar{\varphi} + \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{\bar{t}_0} + \frac{t_0}{t_0^2} \right) \operatorname{Re} I\bar{\varphi} = F,$$

причем $F(t_0) = \bar{f}(t_0)$, $f(t_0) = f_1(t_0) + if_2(t_0) = i \int_{t_0}^t (X_n + iY_n) ds$, где X_n , Y_n — компоненты вектора внешних усилий, s — дуговая абсцисса.

4. $a_0 = a_1 = 4\sigma - 3$, $a_2 = (4\sigma - 3)i$, $a_3 = 3 - 4\sigma$, где σ — упругая постоянная — коэффициент Пуассона (см. [45, § 19]), $a_4 = 1$, $a_5 = a_6 = 0$ — граничное интегральное уравнение второй основной задачи теории упругости

$$\varkappa\varphi + \varkappa S\varphi - \varkappa\bar{S}\bar{\varphi} - H\bar{\varphi} = F,$$

причем $F(t_0) = -2\mu(\bar{g}_1 + i\bar{g}_2)$, $\varkappa = 3 - 4\sigma$, μ — также известная упругая постоянная (постоянная Ламе) (см. [45, § 17]), g_1 , g_2 — компоненты вектора смещения точек границы.

Другая часть пакета относится к его функционированию для вычисления соответствующих комплексных потенциалов и их производных, представляющих основу выдачи пакетом основных характеристик решаемых задач.

Кроме указанных выше функциональных параметров пакет комплектуется из модулей, реализующих различные функции, в частности: включение в схему модулей разных типов границ, разных типов граничных функций, разных функционалов (связанных со структурой полученного в результате аппроксимации уравнения), реализации схемы решения задачи, оценки точности результатов.

Специфика применяемых вычислительных схем дает возможность пользователю представлять исходную информацию в форме,

вполне удобной для решения практических задач. Учитывая наиболее приемлемые возможности предъявления исходных данных, функционирование пакета, в зависимости от вида исходной информации, производится в двух разных режимах — непрерывном и дискретном. Приведем описание задания исходных данных по обоим режимам для каждой из рассматриваемых задач в отдельности.

Задача 1.

а) *Непрерывный режим*: уравнение границы L ; функции a, b, k, f точек контура L .

б) *Дискретный режим*: точки t_{jk} на границе (найденные по принципу деления данного контура на дуги эквивалентных длин). Остальные входные данные — функции a, b, k, f (в аналитическом или дискретном виде в точках t_{jk}).

Задача 2.

а) *Непрерывный режим*: параметрическое уравнение границы областей и граничная функция F .

б) *Дискретный режим*: точки t_{jk} на границе и значения граничной функции F .

Задача 3.

а) *Непрерывный режим*: все то же самое в соответствующем режиме задачи 2. В этом случае компоненты вектора внешних напряжений обычно предполагаются заданными в виде функций точек контура L (за исключением тех случаев, когда интеграл по контуру от упомянутых функций находится непосредственно).

б) *Дискретный режим*: то же самое, что в соответствующем режиме задачи 2, при этом дополнительно требуется, чтобы между любыми двумя точками t_{jk} функция $\operatorname{Re} t = x(s)$ (абсцисса текущей точки контура) была монотонной. В частности, в разбиение контура включаются точки, соответствующие локальным экстремумам функции $x(s)$. При невыполнении соответствующих условий вырабатывается сигнал «неправильный выбор узлов». В точках разбиения (узлах) считаются заданными значения компонентов вектора внешних напряжений.

Задача 4.

а) *Непрерывный режим*: то же самое, что в соответствующем режиме задач 2, 3, с учетом того, что в данном случае на границе заданы компоненты вектора смещения в виде функции точки контура, задаются также соответствующие упругие постоянные.

б) *Дискретный режим*: также, как и в задаче 3 (с заданием соответствующих упругих постоянных). Вместо напряжений в узлах t_{jk} должны быть заданы значения компонентов вектора смещений.

Общее число узлов берется кратным трем — $3n$. Наиболее часто употребляемые значения в оперативной памяти. Уточнение выбираемого значения n : 18, 24, 36 целесообразно осуществить на основе обсуждения вопроса о требуемой точности и точности эксперимента при дискретном задании исходных данных.

Продуктом пакета является выдача следующих характеристик:

- а) значений решения в узлах заданного сингулярного интегрального уравнения;
- б) значений решения задачи Дирихле, сопряженной гармонической функции и их производных в точках области;
- в) основных характеристик решений задач теории упругости — напряжений и смещений.

В заключение отметим, что программный пакет проверен на решении следующих задач: задача Дирихле; кручение призматического бруса с криволинейным сечением; контур L — эллипс $t = \frac{3}{2} \cos s + i \sin s$, $0 \leq s \leq 2\pi$; первая и вторая основные задачи; граница области — улитка Паскаля $t = \frac{1}{3}(\cos \theta(5 + \cos \theta) - 2 + i \sin \theta(5 + \cos \theta))$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Использованы как непрерывный так и дискретный режимы. Особенно работа пакета в дискретном режиме оказалась удобной при расчете элементов, имеющих сложную геометрическую форму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.—М.: Наука, 1985.—252 с.
2. Бойков И. В. Об одном прямом методе решения сингулярных интегральных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1972.—Т. 12, № 6.—С. 1381–1390.
3. Бойков И. В. К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений // Мат. заметки.—1972.—Т. 12, вып. 2.—С. 177–186.
4. Баун Дж. Е., Джексон Э. Д. Нуклон-нуклонное взаимодействие.—М.: Атомиздат, 1975.—248 с.
5. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений.—М.-Л.: Физматгиз, 1948.—296 с.
6. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.—М.: Наука, 1970.—380 с.
7. Габдулхаев Г. Б. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур // Изв. вузов. Математика.—1965.—№ 5.—С. 43–51.
8. Габдулхаев Г. Б. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Мат. анализ.—1980.—Т. 18.—С. 251–303.
9. Гагуа М. Б. К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений // Тр. вычисл. центра АН ГССР.—1972.—Т. 11, № 1.—С. 20–33.
10. Гегелия Т. Г. О некоторых сингулярных интегральных уравнениях частного вида // Сообщ. АН ГССР.—1952.—Т. 13, № 10.—С. 518–586.
11. Гандель Ю. В., Лифанов И. К., Матвеев А. Ф. Численное решение смешанных краевых задач мат. физики, сводящихся к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков.—М., 1984.—№ 174.—55 с.—(Препринт / ИТЭФ).
12. Гандель Ю. В., Ерёменко С. В., Полянская Т. С. Мат. вопросы методы дискретных токов: учеб. пособие.— Харьков: ХГУ, 1992.—144 с.
13. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.—М.: Наука, 1963.—638 с.
14. Джишкариани А. В. К решению сингулярных интегральных уравнений приближенными проекционными методами // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1979.—Т. 19, № 5.—С. 1149–1161.
15. Джишкариани А. В. К решению сингулярных интегральных уравнений коллокационными методами // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1981.—Т. 21, № 2.—С. 355–362.
16. Золотаревский В. А. Конечномерные методы решения сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах интегрирования.—Кишинев: Штиинца, 1991.—136 с.
17. Золотаревский В. А., Сейчук В. Н. Коллокационный метод решения син-

- гулярных интегральных уравнений вдоль Ляпуновского контура // Диф. уравнения.—1983.—Т. 19, № 6, С. 1056–1064.
18. Иванов В. В. Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений // Итоги науки. Мат. анализ 1963.—М., 1965, С. 125–177.
 19. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.—Киев: Наукова думка, 1968.—288 с.
 20. Каландия А. И. О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН СССР.—1959.—Т. 125, № 9.—С. 715–718.
 21. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1977.—720 с.
 22. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.—М.-Л.: Физматгиз, 1962.—562 с.
 23. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Численные методы решения диф. уравнений и квадратурные формулы.—М.: 1964.—Т. 4, № 4.—С. 64–74.
 24. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов.—М.: Наука, 1967.—500 с.
 25. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения.—М.-Л.: 1950.—312 с.
 26. Лаврентьев М. А. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы // Тр. ЦАГИ.—1932.—Вып. 118.—С. 3–56.
 27. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.—М.: Наука, 1973.—736 с.
 28. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.—М.: Наука, 1977.—448 с.
 29. Лифанов И. К., Полонский Я. Е. Обоснование численного метода дискретных вихрей решения сингулярных интегральных уравнений // ПММ.—1975.—Т. 39, № 4.—С. 742–746.
 30. Лифанов И. К. О методе дискретных вихрей // ПММ.—1979.—Т. 43, № 1.—С. 184–188.
 31. Лифанов И. К. О численном решении сингулярных интегральных уравнений // Диф. уравнения.—1981.—Т. 18, № 12.
 32. Лифанов И. К., Матвеев А. Ф. Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения на отрезке с переменными коэффициентами.—М., 1983.—17 с.—(Препринт / ИТЭФ-185).
 33. Лифанов И. К., Матвеев А. Ф. О сингулярном интегральном уравнении на системе отрезков // Теория функций, функциональный анализ и их прил.—1983.—Вып. 40.—С. 104–110.
 34. Лифанов И. К. Численное решение одномерных сингулярных интегральных уравнений // Диф. уравнения.—1984.—Т. 20, № 1.—С. 68–73.
 35. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.—М.: ТОО Янус, 1995.—520 с.
 36. Матвеев А. Ф. Приближенное решение некоторых сингулярных интегральных уравнений.—М., 1992.—32 с.—(Препринт / ИТЭФ-87).
 37. Матвеев А. Ф. Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения на отрезке // Докл. АН СССР.—1988.—Т. 298, № 3.—С. 281–285.
 38. Матвеев А. Ф. О построении приближенного решения сингулярного ин-

- тегрального уравнения второго рода // Докл. АН СССР.—1989.—Т. 307.—С. 1045–1050.
39. Микеладзе Ш.Е. Численные методы математического анализа.—М.: Гостехиздат, 1953.—526 с.
40. Михлин С. Г. Сингулярное интегральное уравнения // УМН.—1948.—Т. 3, вып. 3.—С. 29–112.
41. Михлин С. Г. Интегральные уравнения.—М.-Л.: 1949.—380 с.
42. Манжиров А. В., Полянин А. Д. Методы решения интегральных уравнений (справочник).—М.: Факториал, 1999.—272 с.
43. Мусаев Б. И. К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений // Сингулярные интегральные операторы.—Баку: Изд-во Азерб. гос. ун-та, 1986.—С. 33–61.
44. Мусаев Б. И. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений при отрицательном индексе методом механических квадратур // Докл. АН СССР.—1988.—Т. 298, № 2.—С. 286–290.
45. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.—М.: Наука, 1966.—720 с.
46. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1966.—512 с.
47. Натансон И. П. Конструктивная теория функций.—М.-Л.: Физматгиз, 1949.—688 с.
48. Никольский С. М. Квадратурные формулы.—М.: Наука, 1974.—224 с.
49. Нинидзе К. Р. О локальном каноническом разбиении в схемах численного решения задач плоской теории упругости // Методы дискретных особенностей в задачах мат. физики: Тр. 9-го Междунар. симп.—Орел, 2000.—С. 329–332.
50. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.—Киев: Наукова думка, 1976.—443 с.
51. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости.—М.: Наука, 1981.—688 с.
52. Плиева Л. Ю. О вычислении коэффициентов и узлов одной квадратурной формулы // Тр. молодых учен. ВНИИ Докл. АН.—2004.—Т. 4.—С. 11–14.
53. Плиева Л. Ю., Хубежты Ш. С. К численному решению сингулярных интегральных уравнений первого рода на отрезках // Изв. вузов, Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки.—2008.—№ 4.—С. 13–16.
54. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений.—М.: Наука, 1979.—494 с.
55. Привалов И. И. Интегральные уравнения.—М.-Л.: ОНТИ, 1935.—248 с.
56. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного.—М.: Наука, 1977.—444 с.
57. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши.—Новосибирск: Наука, 1980.—120 с.
58. Пыхтеев Г. Н. О построении квадратурных формул для интегралов типа Коши по прямоугольному разомкнутому контуру // Изв. АН БССР.—1970.—№ 2.—С. 61–69.
59. Санкидзе Д. Г. О приближенном вычислении сингулярных интегралов // Сообщ. АН ГССР.—1965.—Т. 40, № 3.—С. 513–520.
60. Санкидзе Д. Г. О некоторых квадратурных формулах для несобственных

- интегралов // Тр. Тбилисского гос. ун-та.—1965.—Т. 110.—С. 255–261.
61. Саникидзе Д. Г. О сходимости квадратурного процесса для некоторых сингулярных интегралов // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1970.—Т. 10, № 1.—С. 281–284.
 62. Саникидзе Д. Г. О приближенном вычислении криволинейных сингулярных интегралов // Аннот. докл. семинара Ин-та прикл. математики Тбилисского гос. ун-та.—1970.—№ 3.—С. 12–17.
 63. Саникидзе Д. Г. О порядке приближения некоторых сингулярных операторов квадратурными суммами // Изв. АН Арм. ССР. Математика.—1970.—Т. 5, № 4.—С. 371–384.
 64. Саникидзе Д. Г. О некоторых локальных оценках остатка квадратур для сингулярных интегралов типа Коши // Аннот. докл. семинара Ин-та прикл. математики Тбилисского гос. ун-та.—1971.—№ 4.—С. 35–38.
 65. Саникидзе Д. Г. Об аппроксимации сингулярных интегралов Коши и их предельных значений на концах линии интегрирования // Мат. заметки.—1974.—Вып. 4.—С. 533–542.
 66. Саникидзе Д. Г., Хубеджашвили Ш. С. Замечание об оценке точности одного процесса аппроксимации сингулярных интегралов для функций, имеющих абсолютно непрерывную производную заданного порядка // Сообщ. АН ГССР.—1975.—Т. 78, № 3.—С. 561–564.
 67. Саникидзе Д. Г., Кублашвили М. Д., Хубеджашвили Ш. С. О численном решении некоторых граничных задач методом обобщенных сингулярных уравнений // Сообщ. АН ГССР.—1980.—Т. 100, № 1.—С. 61–64.
 68. Саникидзе Д. Г., Хубеджашвили Ш. С., Деметрашвили Н. Г., Абесадзе Л. И., Мелия М. П. Пакет прикладных программ «Нюфима» для численного решения сингулярных интегральных уравнений и некоторых граничных задач // Информ. бюл. ГКНТ СССР.—М., 1982.—№ 1(45).—27 с.
 69. Саникидзе Д. Г., Хубеджашвили Ш. С., Деметрашвили Н. Г., Мелия М. П. О построении вычислительных схем высокого порядка точности для сингулярных интегральных уравнений с негладкими решениями и их применении к численному решению некоторых граничных задач для областей с углами // Тр. вычисл. центра им. Н. И. Мусхелишвили АН ГССР.—1983.—Т. 23, № 1.—С. 90–100.
 70. Саникидзе Д. Г., Мирианашвили М. Г., Хубеджашвили Ш. С. О применении прямых схем интерполяционной степени точности к численному решению некоторых классов сингулярных интегральных уравнений // Тр. Ин-та вычисл. математики им. Н. И. Мусхелишвили АН ГССР.—1987.—Т. 27, № 1.—С. 184–194.
 71. Саникидзе Д. Г., Хубеджашвили Ш. С., Мирианашвили М. Г., Емельяненко Г. А., Мачавариани А. Н. О численном решении уравнений Липшмана — Швингера // Сообщ. АН ГССР.—1990.—Т. 140.—С. 261–264.
 72. Саникидзе Д. Г., Нацвлишвили З. М., Хубеджашвили Ш. С. Равномерные оценки погрешности интерполяционных квадратур для сингулярных операторов с весами Якоби // Тр. Ин-та вычисл. математики им. Н. И. Мусхелишвили АН ГССР.—1990.—Т. 28, № 1.—С. 179–188.
 73. Саникидзе Д. Г. К численному решению граничных задач методом аппроксимации сингулярных интегралов // Диф. уравнения.—1993.—Т. 29, № 9.—С. 1–13.
 74. Саникидзе Д. Г. О методе дискретных вихрей повышенной точности для

- численного решения одного класса сингулярных интегральных уравнений // Диф. уравнения.—1998.—Т. 34, № 9.—С. 1–7.
75. Саникидзе Д. Г., Хубежты Ш. С. К вопросу применения внешних узлов в модифицированных системах дискретных вихрей // Владикавк. мат. журн.—2000.—Т. 2, вып. 3.—С. 37–41.
76. Саникидзе Д. Г., Нинидзе К. Р. Метод свободных параметров в приближенном вычислении интегралов типа Коши // Методы дискретных особенностей в задачах мат. физики: Тр. 10-го Междунар. симп.—Херсон, 2001.—С. 299–302.
77. Саникидзе Д. Г., Мирианашвили М. Г. Сингулярные интегральные уравнения в численных конформных отображениях // Вісн. Харківського нац. ун-ту.—2003.—№ 590.—С. 213–218.
78. Сеге Г. Ортогональные многочлены.—М.: Физматгиз, 1962.—500 с.
79. Сейчук В. Н. О прямых приближенных методах решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений и их систем в пространствах Гёльдера и Лебега // Методы дискретных особенностей в задачах мат. физики: Тр. 10-го Междунар. симп.—Херсон, 2001.—С. 309–312.
80. Сейчук В. Н. Прямые методы приближенного решения нелинейных и смешанных линейных сингулярных интегральных уравнений на замкнутых гладких контурах // Интегральные уравнения и моделирование прикл. задач: Сб. науч. тр., посвященный памяти проф. В. А. Золотаревского.—Кишинэу, 2006.—Т. 1.—С. 144–176.
81. Тихоненко Н. Я. Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений на вещественной оси и уравнений типа свертки // Методы дискретных особенностей в задачах мат. физики: Тр. 9-го Междунар. симп.—Орел, 2000.—С. 440–444.
82. Фан Ван Хал Об одном методе приближенного решения сингулярных интегральных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики—1965.—Т. 5, № 2.—С. 171–184.
83. Шешко М. А. О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла // Изв. вузов. Математика.—1976.—№ 12.—С. 108–118.
84. Шешко М. А. Сингулярные интегральные уравнения с ядрами Коши и Гильберта и их приближенные решения.—Люблин: Научное общество Католического ун-та в Люблине, 2003.—288 с.
85. Хубежты Ш. С. О квадратурных формулах с наперед заданными узлами для сингулярных интегралов // Исследования по мат. анализу.—Владикавказ: Изд-во СОГУ, 1994.—С. 53–55.
86. Хубежты Ш. С. О квадратурных формулах для сингулярных интегралов // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 3, вып. 1.—С. 49–57.
87. Хубежты Ш. С. О квадратурных формулах для сингулярных интегралов, содержащих наперед заданные узлы // Диф. уравнения.—2001.—№ 12.—С. 1708–1710.
88. Хубежты Ш. С. К вопросу численного решения уравнения Липпмана — Швингера // Тр. 10-го Междунар. симп.—Херсон, 2001.—С. 373–376.
89. Хубежты Ш. С. К численному решению задачи Дирихле методом локально-канонического разбиения // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 2.—С. 52–59.
90. Хубежты Ш. С. Вычисление интегралов типа Коши в задачах плоской теории упругости // Вісн. Харківського ун-ту.—2003.—№ 590, вып. 1.—

- С. 235–239.
91. Хубежты Ш.С. Приближенное вычисление интегралов типа Коши // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 4.—С. 56–67.
 92. Хубежты Ш.С. О численном решении уравнений Липпмана — Швингера // Диф. уравнения.—2004.—Т. 40, № 1.—С. 1–8.
 93. Хубежты Ш. С. Численное решение некоторых классов сингулярных интегральных уравнений // Исследования по комплексному анализу, теории операторов и мат. моделированию / отв. ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2004.—С. 375–407.
 94. Хубежты Ш. С., Плиева Л.Ю. О численном решении первой и второй основных граничных задач математической теории упругости // Диф. уравнения.—2007.—Т. 43, № 9.—С. 1285–1292.
 95. Хубежты Ш.С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов повышенной точности // Исследования по мат. анализу, мат. моделированию и информатике / отв. ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2007.—С. 174–180.
 96. Хубежты Ш.С. Об аппроксимации некоторых сингулярных операторов и приближенном решении сингулярных интегральных уравнений // Исследования по диф. уравнениям и мат. моделированию / отв. ред. А. О. Ватутлян, Е. С. Каменецкий, Ш. С. Хубежты.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2008.—С. 336–348.
 97. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Коши // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, вып. 4.—С. 61–75.
 98. Хубежты Ш. С., Плиева Л. Ю., Бесаева З. В О квадратурных формулах для сингулярных интегралов с весовыми функциями // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, вып. 2.—С. 56–62.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Гёльдеровская норма, 23
- Гладкие линии, 13
- Индекс сингулярного оператора, 25
- Интеграл типа Коши, 16
- Квадратурная формула с наперед заданными узлами, 43
- Компоненты напряжения, 115, 120
- Компоненты смещения, 115, 120
- Конформные отображения, 214
- Кривая Ляпунова, 14
- Локально-каноническая схема, 189
- Предельные значения интеграла типа Коши, 91
- Равномерные оценки, 49
- Сингулярное интегральное уравнение, 24
- Сингулярный интеграл, 21
- Уравнение Липпмана — Швингера, 170
- Условие Гёльдера, 14
- Формулы обращения, 23

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

L, Γ — линии на плоскости,
 H — класс функции Гёльдера,
 $S(\varphi, t)$ — сингулярный интеграл от функции φ ,
 D^+ — внутренняя область,
 D^- — внешняя область,
 t — комплексный параметр на контуре L ,
 z — комплексный параметр в области D ,
 x — действительный параметр на отрезке $(-1, 1)$.

Глава 1

$\Phi_n(\varphi, t, t_0)$, 31	
$\sigma(t_1, t_2)$, 14	$S_n(\varphi; t_0)$, 32
$r(t_1, t_2)$, 14	$p_{\sigma k}$, 32
$H(\mu)$, 14	$d_{\nu k}(t_{\nu j})$, 32
$S\varphi$, 23	$S^*(f; x)$, 33
H , 24	$T_n(x)$, 33
$H(\alpha, \Gamma)$, 24	$U_{n-1}(x)$, 33
$S(\varphi; t_0)$, 24	$H_{n-1}(x)$, 33
$\mathbb{K}, \mathbb{K}\varphi, \mathbb{K}'\varphi$, 25	$ R_n(f; x) $, 34
$\varkappa$, 25, 26	$I(t_0), S(t_0)$, 35
	$S_n(t)$, 36

Глава 2

$S^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\varphi; x)$, 41	
$S(\varphi; t_0)$, 30	$L_{n-1}(\varphi; t)$, 41
E, E_0 , 30	$S_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\varphi; x)$, 42
$\Theta(t_{0j})$, 30	$\ \psi\ _{H(\gamma)}$, 42
$O(h^\alpha \ln h)$, 31	$L_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi; x)$, 44
$H_r(\alpha)$, 31	$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, 44
$L_\nu(\varphi; t_0)$, 31	$A(x), A_k(x)$, 44
$\omega_\sigma(t)$, 31	$R_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi; x)$, 45
$\omega'_\sigma(t_{\sigma k})$, 31	

$\gamma^{(\alpha, \beta)}(x)$, 45
 $S^{(p, q)}(\varphi; x)$, 49
 $\lambda_n(x)$, $\lambda_n^{(p, q)}$, 52
 $E_{n-1}(\varphi)$, 52
 $\rho_n^{(p, q)}(\varphi; x)$, 56
 $H_n^{(p, q)}(\varphi; \beta)$, 56
 $r_n^{(p, q)}(\varphi; x)$, 57
 $C_\sigma(\nu)$, 62
 $H_r^\sigma(L_c)$, 64
 X_n, Y_n , 70
 $h(t_0, t)$, 72
 $\sqrt{T}$, 76
 $T_{\sigma k}$, 77
 $\sqrt{\hat{T}_{\nu k_0}}$, 78
 $C_n(x)$, $S_n(x)$, 84

Глава 3

$\phi(z)$, 89
 D^+, D^- , 90
 $\phi^+(t_0)$, $\phi^-(t_0)$, 91
 $G(z)$, $G_n(z)$, 95
 $\|\varphi\|_{W(\Gamma)}$, 100
 $\lambda_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0)$, 102
 $r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0)$, 103
 $u(z)$, $u_1(z)$, $u_2(z)$, $u_3(z)$, 105
 $\varphi(t_0, t_1, t_2)$, $\varphi(t, t_0, t_1, t_2)$, 106
 $A_\sigma(z)$, 108
 $r_{n\sigma}(\varphi; t, t_0, t_1, t_2)$, 111
 $R_n(\varphi; z)$, 111
 X_x, X_y, Y_y , 115
 Re, Im , 120

Глава 4

$'\varphi$, 123
 $E\varphi$, 124

$E'_n\varphi$, 124
 $(G_n\psi_n)(\tau_\nu)$, 134
 $(\tilde{G}_n\psi_n)(\tau_\nu)$, 136
 $(S\varphi)(t_0)$, 138
 $(H\varphi)(t_0)$, 138
 $(Q_n\varphi_n)(t_0)$, 138
 $(K_n\varphi_n)(t_0)$, 139
 $(K\varphi)(t_0)$, 139
 $(R_n\varphi)(t_0)$, 139
 $L_n(Q_n\varphi)(t_0)$, 139
 $(R_n^*\varphi)(t_0)$, 139
 $\|S^{-1}L_n(H\varphi)\|_{H_\alpha}$, 141
 S_0, S^{-1} , 141
 $(S_0\psi)(t_0)$, 142
 $\delta_n(\varphi; t, t_0)$, 145
 p , 146
 $H_\varphi^{(r)}$, 148
 $Rf, (Rf)^{(r)}$, 153
 $N(t_0, t)$, 154
 C_{1r}, C_{2r} , 154
 $H^{(0)}$, 154
 $|S_n|$, 155
 $K\varphi_0$, 163
 $K_n^*\varphi_0$, 163
 $\tilde{K}_n\xi_{n-1}$, 163

Глава 5

$T(x, x_0)$, 170
 $K(x, x_0)$, 170
 $A_\nu(\alpha)$, $B_s(\alpha)$, 172
 $R_{np}(\alpha)$, 173
 $M(T)$, 174
 $Q(T; x)$, 178
 $(H^{(1)}\omega)(t_0)$, $(H^{(2)}\omega)(t_0)$, 195
 $(H_n^{(1)}\omega_n)(t_0)$, $(H_n^{(2)}\omega_n)(t_0)$, 196
 $(Q_n^{(1)}\omega)(\tau_\nu)$, $(Q_n^{(1)}\omega)(\tau_\nu)$, 197

Научное издание
Серия
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ
Выпуск 3

Хубежты Шалва Соломонович

**КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ
ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ
И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ**

Ответственный редактор *Д. Г. Саникидзе*

*Утверждено к печати Ученым советом
Южного математического института
Владикавказского научного центра
Российской академии наук*

Компьютерная верстка *И. С. Гаприндашвили*
Зав. редакцией *В. В. Кибизова*

Подписано в печать 29.11.2011.
Формат бумаги 60×84¹/₁₆. Усл. п. л. 13,72.
Тираж 200 экз. Заказ № 174

Владикавказский научный центр
362008, г. Владикавказ, пр. Коста, 93.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

ISBN 978-5-904695-07-1



9 785904 695071