

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ИТОГИ НАУКИ • ЮГ РОССИИ

С Е Р И Я

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

В ы п у с к 4

В. Н. Берестовский, Ю. Г. Никоноров

РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ
И ОДНОРОДНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ

Владикавказ
2012

ББК 22.151.2
УДК 514.70
Б 48

Ответственный редактор
д. ф.-м. н., профессор Е. Д. Родионов

Рецензенты:
д. ф.-м. н., профессор В. В. Славский,
д. ф.-м. н., профессор Н. К. Смоленцев

Редакторы серии:
д. ф.-м. н., профессор Ю. Ф. Коробейник,
д. ф.-м. н., профессор А. Г. Кусраев

Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.

Римановы многообразия и однородные геодезические / отв. ред. Е. Д. Родионов.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012.—414 с.—(Итоги науки. Юг России. Математическая монография. Вып. 4).

В монографии излагаются как классические, так и недавно полученные результаты о векторных полях Киллинга и порождаемых ими однопараметрических группах изометрий римановых многообразий, а также о геодезических, являющихся интегральными кривыми киллинговых векторных полей (однородных геодезических). Большое внимание уделено исследованию класса римановых многообразий с однородными геодезическими и его важных подклассов.

Для преподавателей вузов, аспирантов и студентов старших курсов университетов, а также всех специалистов, интересующихся дифференциальной геометрией и группами преобразований.

Berestovskii V. N., Nikononov Yu. G.

Riemannian manifolds and homogeneous geodesics / ed. Eu. D. Rodionov.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2012.—414 p.

The book is devoted to classical and recent results on Killing vector fields and generated by them one-parameter isometry groups of Riemannian manifolds, and also to geodesics that are integral curves of Killing vector fields (homogeneous geodesics). Much of attention is paid to the class of Riemannian manifolds with homogeneous geodesics and to some its important subclasses.

This volume is intended for graduate students, post graduates, and researchers whose work involves differential geometry and transformation groups.

ISBN 978-5-904695-13-2

© Южный математический институт
ВНЦ РАН и РСО-А, 2012
© В. Н. Берестовский, 2012
© Ю. Г. Никоноров, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редакторов серии	9
Предисловие авторов	11
Глава 1. Римановы многообразия	23
1.1. Основы теории гладких многообразий	23
1.1.1. Гладкие многообразия	23
1.1.2. Касательное расслоение над гладким многообразием	25
1.1.3. Гладкие векторные поля на M как дифференцирования кольца $C^\infty(M)$	33
1.1.4. Скобка Ли двух гладких векторных полей	34
1.1.5. Тензорные поля на гладких многообразиях	39
1.2. Многообразия со связностью и римановы многообразия	42
1.2.1. Линейная связность	42
1.2.2. Риманова метрика	43
1.2.3. Связность Леви-Чивита на римановом многообразии	44
1.3. Кривизна многообразий со связностью и римановых многообразий	46
1.3.1. Тензор кривизны многообразия с ковариантной производной	46
1.3.2. Тензор кривизны риманова многообразия	47
1.3.3. Тензор Риччи многообразия с ковариантной производной	49
1.3.4. Тензор Риччи риманова многообразия	50
1.3.5. Кривизны римановых многообразий	51
1.4. Основы геометрии римановых многообразий	52
1.4.1. Параметризация кривой длиной дуги	52

1.4.2. Первая вариация длины кривой	54
1.4.3. Геодезические	57
1.4.4. Геодезический поток	59
1.4.5. Экспоненциальное отображение	62
1.4.6. Кратчайшие пути	63
1.4.7. Внутренняя метрика риманова многообразия	64
1.4.8. Теоремы Хопфа-Ринова и Майерса	65
1.5. Римановы субмерсии и формулы О'Нейла	69
1.6. Разное	75
Глава 2. Группы и алгебры Ли.....	77
2.1. Основные свойства групп Ли	77
2.2. Гладкие действия групп Ли	87
2.3. Основные свойства алгебр Ли	88
2.3.1. Связь с матричными алгебрами Ли	88
2.3.2. Важные классы алгебр Ли и структурные результаты	88
2.3.3. Автоморфизмы и дифференцирования	91
2.4. Группы Ли с левоинвариантными римановыми метриками	93
2.4.1. Связность Леви-Чивита на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой	93
2.4.2. Кривизны группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой	94
2.4.3. Кривизны нильпотентных групповых многообразий	95
2.4.4. Кривизны биинвариантных римановых метрик на группах Ли	97
2.5. Компактные алгебры Ли и группы Ли	100
2.5.1. Компактные алгебры Ли	100
2.5.2. Подалгебры Картана компактных алгебр Ли	103
2.5.3. Корневые системы и группы Вейля	105
2.5.4. Абстрактные корневые системы	107
2.6. Связь с комплексными алгебрами Ли	111
2.7. Инвариантные нормы и скалярные произведения на алгебрах Ли	112

Глава 3. Изометрические потоки и киллинговы векторные поля римановых многообразий	117
3.1. Изометрии и киллинговы векторные поля римановых многообразий	117
3.2. Тензор кривизны и векторные поля Киллинга	122
3.3. Векторные поля Киллинга постоянной длины	125
3.4. Киллинговы векторные поля постоянной длины и переносы Клиффорда — Вольфа	128
3.5. Киллинговы векторные поля и кривизна	132
3.6. Изометрические потоки и точки конечного периода	139
3.7. Регулярные и квазирегулярные киллинговы векторные поля	150
3.7.1. Орбиты изометрических S^1 -действий на римановых многообразиях	150
3.7.2. Потоки на односвязных многообразиях	157
3.7.3. Геодезические потоки и метрики Сакаки на касательных расслоениях римановых многообразий	163
3.8. Киллинговы векторные поля постоянной длины на локально симметрических многообразиях	167
3.8.1. Симметрические пространства	168
3.8.2. Неодносвязные многообразия	172
3.8.3. Локально евклидовы пространства	176
3.8.4. Однородные сферические пространственные формы	181
3.9. Открытые вопросы	186
Глава 4. Однородные римановы многообразия	189
4.1. Группа движений риманова многообразия	189
4.2. Однородные пространства	190
4.3. О топологии однородных пространств	194
4.4. Основные свойства однородных римановых многообразий	196
4.5. Инфинитезимальное строение однородного риманова пространства	198
4.6. Особые инвариантные метрики	200

4.7. Структура множества инвариантных метрик	202
4.8. Компактные однородные римановы многообразия положительной эйлеровой характеристики	206
4.9. Кривизны однородных римановых пространств	216
4.10. Однородные римановы многообразия с ограничениями на кривизну	222
4.10.1. Однородные римановы пространства положительной секционной кривизны	223
4.10.2. Однородные римановы пространства положительной кривизны Риччи	227
4.10.3. Однородные римановы пространства неположительной секционной кривизны	233
4.10.4. Однородные римановы пространства неположительной кривизны Риччи	234
Глава 5. Многообразия с однородными геодезическими.....	237
5.1. Однородные геодезические в римановых многообразиях	237
5.2. Геодезически орбитальные пространства	238
5.3. Строение геодезически орбитальных пространств	241
5.4. Киллинговы поля постоянной длины на ГО-многообразиях	247
5.5. Геодезически орбитальные многообразия неположительной кривизны Риччи	248
5.6. Компактные геодезически орбитальные пространства	252
5.7. Применение полной геодезичности	254
5.8. Компактные ГО-пространства положительной эйлеровой характеристики	260
5.8.1. Основные сведения о компактных однородных многообразиях положительной эйлеровой характеристики	260
5.8.2. Классификационная теорема	261
5.8.3. Доказательство классификационной теоремы	263

Глава 6. Обобщенные нормальные однородные многообразия с внутренней метрикой	271
6.1. δ -однородные и однородные по Клиффорду — Вольфу пространства	271
6.2. δ -однородные и ограниченно однородные по Клиффорду — Вольфу римановы многообразия	272
6.3. Некоторые структурные результаты	277
6.4. Обобщенные нормальные однородные и δ -однородные римановы многообразия	280
6.5. Дополнительные симметрии δ -однородных метрик	287
6.6. Вполне геодезические подмногообразия	290
6.7. Свойства δ -векторов	293
6.7.1. Случай положительной эйлеровой характеристики	296
6.8. Обобщенные нормальные однородные многообразия специального вида	298
6.9. Классификация обобщенных нормальных однородных римановых многообразий положительной эйлеровой характеристики	301
6.9.1. Общие идеи и конструкции	306
6.9.2. Пространства $SO(2l+1)/U(l)$, $l \geq 3$	308
6.9.3. Пространства $Sp(l)/U(1) \cdot Sp(l-1)$, $l \geq 2$	315
6.10. Чебышевская норма на алгебре Ли группы движений компактного однородного финслерова многообразия	322
6.11. Вычисление чебышевских норм для некоторых многообразий	330
6.11.1. Об эллипсоидах Левнера — Джона	331
6.11.2. Еще раз об инвариантных римановых метриках на сферах	332
6.11.3. Чебышевская норма для евклидовых сфер	334
6.11.4. Чебышевская норма для сфер Берже	337
6.11.5. Чебышевская норма для инвариантных метрик на $SO(5)/U(2)$	344

Глава 7. Однородные по Клиффорду — Вольфу	
римановы многообразия	353
7.1. Предварительные сведения	353
7.2. Еще раз о киллинговых полях постоянной длины	355
7.3. Доказательство основного результата	356
7.4. Пространства Клиффорда — Киллинга	359
7.5. Римановы многообразия со свойством Киллинга	360
7.6. Результаты А. Гурвица и Й. Радона	363
7.7. Пространства Клиффорда — Киллинга на сферах и алгебры и модули Клиффорда	365
7.8. Пространства Клиффорда — Киллинга на S^{2n-1} и единичные сферы Радона в $O(2n)$	370
7.9. Тройные системы Ли в $so(2n)$ и вполне геодезические сферы в $SO(2n)$	373
7.10. Алгебры Ли в пространствах Клиффорда — Киллинга на S^{2n-1}	379
7.11. Ограниченно однородные по Клиффорду — Вольфу римановы многообразия	381
7.11.1. Киллинговы поля постоянной длины на круглых нечетномерных сферах	381
7.11.2. Классификация ограниченно КВ-однородных пространств	390
Литература	397
Предметный указатель	409

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ СЕРИИ

Издательский проект «Итоги науки. Юг России» осуществляется с 2008 г. Южным математическим институтом Владикавказского научного центра Российской академии наук и Факультетом математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета. Он включает две математические серии: «Математический форум» и «Математическая монография». В первой публикуются материалы различных форумов (конференций, симпозиумов, семинаров и т. п.), освещающих новейшие математические достижения, к которым, так или иначе, причастны математики Юга России. Во второй выходят монографии по различным разделам современной математики, отражающие важнейшие результаты деятельности научных школ, итоги значительных циклов исследований математиков Юга России и их коллег. Цель этих серийных изданий — дать более полное представление о состоянии математических исследований на Юге России, а также способствовать оживлению научных связей и укреплению позиций математической науки в регионе.

Настоящий выпуск серии «Математическая монография» посвящен римановым многообразиям. Огромное значение в исследованиях римановых многообразий играют их группы изометрий, в частности, однопараметрические группы изометрий и соответствующие им векторные поля Киллинга. Разностороннему исследованию упомянутых объектов, а также геодезических, являющихся интегральными кривыми киллинговых полей (однородных геодезических) на римановых многообразиях и посвящена настоящая книга. Особое внимание уделяется исследованию класса римановых многообразий с однородными геодезическими и его важных подклассов. В целом монография отражает современный уровень исследований в области римановых многообразий, киллинговых векторных полей и однородных геодезических.

Авторы монографии — Берестовский Валерий Николаевич и Никоноров Юрий Геннадьевич — признанные в мире специалисты в области римановой геометрии и теории однородных пространств, яр-

кие представители научной школы академика А. Д. Александрова. Первые две главы монографии можно рассматривать в качестве современного и краткого введения в теорию римановых многообразий, а также теорию групп и алгебр Ли. Однако основное содержание монографии составляют результаты многолетних исследований авторов. В частности, ими или при их непосредственном участии получены глубокие теоремы о классификации: а) компактных односвязных геодезически орбитальных многообразий положительной эйлеровой характеристики; б) компактных односвязных обобщенных нормальных однородных римановых многообразий положительной эйлеровой характеристики; в) односвязных однородных по Клиффорду — Вольфу римановых многообразий; г) ограниченно однородных по Клиффорду — Вольфу римановых многообразий. Эти и другие результаты авторов сформировали современный облик некоторых разделов римановой геометрии.

Несомненно, настоящая монография будет полезна не только специалистам в теории однородных римановых многообразий, но также и всем (в том числе и начинающим) математикам, работающим в области анализа и геометрии.

Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Основной целью данной книги является изложение полученных при существенном участии авторов недавних результатов о геодезически орбитальных (однородных) римановых многообразиях и их специальных классах обобщенных нормальных однородных, в том числе однородных по Клиффорду — Вольфу, римановых многообразий. С этой тематикой тесно связаны и излагаемые авторские результаты о киллинговых векторных полях, в особенности постоянной длины, и однопараметрических группах движений на римановых многообразиях, а также чебышевских нормах на алгебре Ли группы движений компактных однородных финслеровых, в частности римановых, многообразий. В книгу включены и совсем свежие результаты авторов об ограниченно однородных по Клиффорду — Вольфу римановых многообразиях, геодезически орбитальных римановых многообразиях неположительной кривизны Риччи и неизвестных ранее формулах, выражающих тензор кривизны и секционные кривизны однородных римановых многообразий через киллинговы векторные поля.

С целью независимости изложения приводятся известные сведения не только о геодезически орбитальных многообразиях, но и о гладких и римановых многообразиях, группах и алгебрах Ли, однородных римановых многообразиях, компактных однородных многообразиях с положительной эйлеровой характеристикой. При этом в большинстве случаев даются доказательства, а иначе приводятся их наброски или все необходимые ссылки на литературу; основными приоритетами для доказательств являются их краткость и простота. С другой стороны, доказательства основных результатов этой книги полны, но, как правило, не столь просты, что, возможно, связано с необходимостью привлечения разнообразных средств и методов.

В настоящем предисловии дается довольно подробный обзор содержания книги и логической связи приведенных в ней результатов.

Изложение в главах 1 и 2 сведений о римановых многообразиях, группах и алгебрах Ли в основном стандартно. Основными, но не единственными источниками являются книги Ш. Кобаяси, К. Номидзу [42] и Ф. Уорнера [56].

Особо отметим доказательства теорем Хопфа — Ринова и С. Майерса в § 1.4.8 и формул О’Нейла для римановых субмерсий в разделе 1.5. Достаточно простое доказательство теоремы 1.22 С. Майерса о компактности полного риманова многообразия с кривизной Риччи, ограниченной снизу положительной постоянной, и конечности его фундаментальной группы следует классическому оригинальному в [180], использует предложение 1.13 о том, что первая вариация геодезических дает поле Якоби, но в отличие от оригинала не использует координат. Формулы О’Нейла мы выводим только чтобы доказать, что риманова субмерсия связных полных римановых многообразий является субметрией (следствие 1.6) и локально тривиальным расслоением (теорема 1.25). Субметрии необходимы при изучении обобщенных нормальных однородных римановых многообразий в главе 6. Из теоремы 1.25 и предложения 4.1 следует важный факт из теории однородных многообразий: каноническая проекция группы Ли на фактор-многообразие этой группы по ее компактной подгруппе является локально тривиальным расслоением. В разделе 1.6 приведены некоторые (допускающие простую формулировку) результаты о римановых многообразиях с ограничениями на кривизны.

Во второй главе помимо обычных результатов о группах и алгебрах Ли выделим упоминаемые ниже, для которых даны короткие доказательства. Дан набросок доказательства третьей теоремы С. Ли 2.9 о существовании группы Ли с заданной алгеброй Ли на основе теоремы 2.8 Адо о существовании точного конечномерного представления для любой конечномерной алгебры Ли и теоремы 1.5 Г. Фробениуса о вполне интегрируемости; короткое доказательство теоремы Адо получил Ю. А. Неретин в [183]. Теорема Г. Вейля 2.16 о конечности фундаментальной группы и компактности для группы Ли с отрицательно определенной формой Киллинга вытекает из положительности кривизны Риччи соответствующей биинвариантной римановой метрики на этой группе и теоремы С. Майерса 1.22; эта группа полупроста вследствие критерия Э. Картана. В теореме 2.19 получено обращение теоремы Г. Вейля, а в теореме 2.20 доказано,

что алгебра Ли компактна и полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга отрицательно определена. В теореме 2.21 доказано, что каждое дифференцирование компактной полупростой алгебры Ли является внутренним. Односвязная группа Ли с компактной алгеброй Ли изоморфна прямому произведению векторной группы и компактных односвязных полупростых групп Ли (теорема 2.22). Каждая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ компактной группы Ли G совпадает с подалгеброй Ли $\mathfrak{t}$ некоторого ее максимального тора T (теорема 2.23), а максимальные торы сопряжены относительно внутренних автоморфизмов группы G (теорема 2.24). На основании теорем 2.22 и 2.24 в предложении 2.23 доказано, что группа Вейля связной компактной группы Ли G изоморфна конечной фактор-группе $N_G(T)/T$, где $N_G(T)$ — нормализатор тора T в G . На основании теоремы 2.27 Б. Костанта [155] авторы дают в теоремах 2.26 и 2.29 новое доказательство теоремы Э. Б. Винберга [29]: при тех же условиях каждая инвариантная относительно группы Вейля норма (в частности, индуцированная скалярным произведением) на $\mathfrak{t}$ является ограничением единственной $\text{Ad}(G)$ -инвариантной нормы на $\mathfrak{g}$ (индуцированной скалярным произведением). В §§ 2.5.3, 2.5.4 и разделе 2.6 приводятся без доказательства необходимые сведения о группах Вейля, корневых системах и связи вещественных (в частности, компактных) алгебр Ли с комплексными алгебрами Ли; в таблицах 1 и 2 даны корневые системы простых алгебр Ли и их схемы Дынкина.

Большинство результатов третьей главы, посвященной изометрическим потокам, т. е. 1-параметрическим группам изометрий, на римановых многообразиях, было впервые доказано в работах авторов [14, 18, 89]. Каждый такой поток порождается некоторым киллинговым векторным полем X ; основное внимание уделяется векторным полям X постоянной длины. Укажем лишь некоторые из основных результатов. В теореме 3.4 найдена новая формула, выражающая значение ковариантного 4-тензора кривизны на четверке векторных киллинговых полей через метрический тензор и скобки Ли полей. Эта формула и ее следствие 3.1 позволяют вычислять тензор кривизны и секционную кривизну однородного риманова многообразия. При этом для секционной кривизны получается известная формула, выводимая обычно с помощью формул О'Нейла. В теореме 3.5 наряду с другими утверждениями доказано, что если в неко-

торой точке x риманова многообразия длина киллингова векторного поля X достигает положительного максимума, то интегральная кривая поля X через x является геодезической, а секционные кривизны всех двумерных площадок, содержащих касательные векторы этой геодезической, неотрицательны. Следствиями этой теоремы являются теорема 3.8 (кривизна Риччи в направлении единичного киллингова векторного поля неотрицательна; она тождественно равна нулю в точности тогда, когда поле параллельно), теорема 3.9 М. Берже [93] (любое киллингово векторное поле на компактном четномерном римановом многообразии положительной секционной кривизны зануляется в некоторой точке), следствие 3.8 (теорема С. Бохнера [98]), следствие 3.9 Ш. Кобаяси (киллингово векторное поле на компактном римановом многообразии неположительной кривизны Риччи параллельно); если поле нетривиально, то многообразие имеет бесконечную фундаментальную группу (следствие 3.10) и другие результаты. Киллингово векторное поле имеет постоянную длину тогда и только тогда, когда все его интегральные кривые являются геодезическими (предложение 3.2). Движение, т. е. изометрия, метрического пространства, смещающая все его точки на одно и то же расстояние, называется переносом Клиффорда — Вольфа, кратко КВ-переносом (определение 79). Однопараметрическая группа КВ-переносов риманова многообразия порождается киллинговым векторным полем X постоянной длины (предложение 3.4). Для симметрических пространств верно обратное утверждение (теорема 3.27); в общем случае, в том числе для однородных многообразий, оно верно только частично (предложение 3.5). Киллингово поле постоянной длины с замкнутыми траекториями называется регулярным, если все они имеют одинаковую длину, а иначе — квазирегулярным. Киллингово векторное поле постоянной длины регулярно тогда и только тогда, когда оно порождает свободное изометрическое действие группы S^1 . В условиях предложения 3.4 поле X регулярно или все его траектории не замкнуты. Построение регулярных и квазирегулярных векторных полей основывается на теореме 3.21: гладкое векторное поле X с замкнутыми неточечными траекториями на гладком многообразии M порождается некоторым гладким действием $\eta : S^1 \times M \rightarrow M$ в точности тогда, когда X является единичным киллинговым векторным полем на (M, g) для некоторой гладкой римановой метрики g на M . С помощью этой теоремы построены рима-

новы метрики с квазирегулярными единичными киллинговыми векторными полями на всех сферах S^{2n+1} , $n \geq 1$ (следствие 3.12), в том числе вещественно-аналитические координатности один с необычными свойствами (теорема 3.22), на всех гомотопических 7-сферах (следствие 3.11) и на расслоении касательных единичных векторов с метрикой Сасаки над некоторыми римановыми многообразиями с замкнутыми геодезическими (§ 3.7.3). В теореме 3.30 получен критерий существования квазирегулярного (или имеющего и замкнутые и незамкнутые траектории) единичного киллингова векторного поля на локально евклидовом пространстве. Доказана теорема 3.31: однородное риманово многообразие постоянной положительной секционной кривизны допускает квазирегулярные единичные киллинговы поля тогда и только тогда, когда оно не диффеоморфно сфере или вещественному проективному пространству. Все такие многообразия классифицированы в книге [34].

Вследствие теоремы 3.2 и теоремы Майерса — Стинрода 4.1 множество киллинговых векторных полей на римановом многообразии (M, g) составляет алгебру Ли группы Ли $\text{Isom}(M, g)$ всех изометрий пространства (M, g) (теорема 4.2). Если $G \subset \text{Isom}(M, g)$ — транзитивная на (M, g) группа Ли со стабилизатором H в некоторой точке $x \in M$, то $(M = G/H, g)$ редуктивно, а G допускает левоинвариантную и H -правоинвариантную риманову метрику g_0 такую, что каноническая проекция $\pi : (G, g_0) \rightarrow (G/H, g)$ — риманова субмерсия с вполне геодезическими слоями (предложение 4.1). Если метрика g_0 биинвариантна, то пространство (M, g) называется нормальным однородным. Если группы Ли G и $H \subset G$ связны и компактны, то эйлерова характеристика $\chi(G/H)$ неотрицательна, а положительна в точности тогда, когда ранги групп (размерности их максимальных торов) G и H совпадают; в последнем случае $\chi(G/H)$ равна частному от порядков групп Вейля групп G и H (теорема 4.4 Хопфа — Самельсона). Вследствие теорем 1.22, 3.9, 4.4, 4.9, каждое четномерное однородное риманово многообразие положительной секционной кривизны имеет положительную эйлерову характеристику (предложение 4.3); оно неразложимо в прямое метрическое произведение. Заметим, что вследствие двойственности Пуанкаре каждое компактное триангулируемое нечетномерное многообразие имеет нулевую эйлерову характеристику. Компактное связное односвязное почти эффективное однородное риманово многообразие $(G/H, g)$ по-

положительной эйлеровой характеристики неразложимо в прямое метрическое произведение в точности тогда, когда группа Ли G проста (теорема 4.10 Б. Костанта [157]). Классификацию соответствующих однородных пространств G/H получили А. Борель и де Зибен-таль в [103] (см. также книгу Дж. Вольфа [34]). В теореме 4.7 формулируется критерий Б. Костанта естественной редуктивности инвариантной римановой метрики на однородном пространстве G/H . Компактное однородное естественно редуктивное риманово многообразие положительной эйлеровой характеристики нормально однородно относительно некоторой полупростой группы Ли движений (теорема 4.15 и [16]). В теоремах 4.16, 4.17, 4.18 упомянутое ранее следствие 3.1 адаптируется для алгебраических вычислений соответственно секционной, риччиевой и скалярной кривизн однородного риманова многообразия; в теореме 4.19 получены упрощенные формулы для естественно редуктивной метрики. В теореме 4.20 сформулированы некоторые критерии о скалярной кривизне инвариантных римановых метрик на однородном пространстве G/H с компактными и связными группами Ли G и $H \subset G$. В §§ 4.10.1, 4.10.3 и 4.10.4 соответственно приводится без доказательства известная информация об однородных римановых пространствах положительной секционной кривизны, неположительной секционной кривизны и неположительной кривизны Риччи. С помощью теорем 1.22 (С. Майерса) и 4.19 доказана теорема 4.23: однородное эффективное пространство $M = G/H$, где G связна, а H компактна, допускает инвариантную риманову метрику положительной кривизны Риччи тогда и только тогда, когда M компактно и его фундаментальная группа конечна или G компактна и ее подгруппа Леви (т. е. максимальная связная полупростая подгруппа в G) действует транзитивно на M ; при этом достаточно взять любую нормальную однородную метрику на G/H .

Все основные результаты пятой главы опубликованы в статье [73] и работе [188]. Риманово однородное пространство $(M = G/H, g)$, где H — компактная подгруппа группы Ли G и g — G -инвариантная риманова метрика, называется геодезически орбитальным пространством, кратко, ГО-пространством, если любая его геодезическая является орбитой некоторой однопараметрической подгруппы группы G ; при $G = \text{Isom}(M, g)$ это дает понятие риманова ГО-многообразия. Отождествим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G с некоторой подалгеброй алгебры Ли киллинговых векторных полей риманова

многообразие (M, g) . Тогда элемент $X \in \mathfrak{g}$ называется геодезическим вектором, если интегральная кривая поля X через $eH \in G/H$ является геодезической в $(G/H, g)$. Лемма 5.1 и теоремы 5.5, 5.11 дают характеристику геодезических векторов, теоремы 5.7 и 5.8 — их свойства, теоремы 5.6 и 5.11 — характеристику ГО-пространств. Риманово многообразие называется слабо симметрическим, если для любой пары его точек существует изометрия, переставляющая эти точки. Каждое слабо симметрическое пространство является геодезически орбитальным [94]. Если (M, g) — риманово ГО-многообразие, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли его киллинговых полей, $\mathfrak{a}$ — коммутативный идеал в $\mathfrak{g}$, то любое поле $X \in \mathfrak{a}$ имеет постоянную длину на (M, g) (теорема 5.9). В теореме 5.10 доказано, что каждое геодезически орбитальное риманово многообразие неположительной кривизны Риччи является симметрическим пространством. Сначала эту теорему с некоторыми пробелами доказала К. Гордон в статье [131]; полное и принципиально иное доказательство дано в работе [188]. Главный результат пятой главы — теорема 5.12 [73], которая может быть переформулирована следующим образом: «Каждое односвязное неразложимое, не являющееся нормальным однородным, ГО-многообразие положительной эйлеровой характеристики изометрично либо $(G/H = SO(2n+1)/U(n), g)$, $n \geq 2$, либо $(G/H = Sp(n)/U(1) \cdot Sp(n-1), g)$, $n \geq 2$. При этом с точностью до пропорциональности g может быть любой G -инвариантной римановой метрикой, кроме двух, одна из которых G -нормальна однородна, а другая симметрическая. Кроме того, все эти многообразия являются слабо симметрическими флаговыми многообразиями». В доказательстве теоремы 5.12 важную роль играют теорема 4.10 и предложение 5.7: «Пусть $(M = G/H, g)$ — компактное геодезически орбитальное риманово пространство. Тогда любая связная подгруппа Ли $K \subset G$, содержащая H , имеет вполне геодезическую орбиту $P = K(eH) = K/H$, которая является ГО-пространством (с индуцированной метрикой); при этом проекция $\pi : G/H \rightarrow G/K$ является римановой субмерсией с вполне геодезическими слоями, где и слои и база являются ГО-пространствами». Сначала на основе работы [72] теорема 5.12 доказывается в случае компактной (простой) группы Ли G ранга 2. Затем с помощью леммы 5.5 и предложения 5.7 устанавливается, что в общем случае корневая система компактной (простой) группы Ли G (с учетом ее подгруппы H) должна допускать так называемое специальное разложе-

ние со свойствами из следствия 5.3. Работа с корневыми системами простых алгебр Ли позволяет установить, что специальные разложения допускают только пары алгебр Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ из теоремы 5.12. Нужное утверждение о слабой симметричности всех инвариантных римановых метрик на однородных пространствах из теоремы 5.12 доказал В. Циллер в статье [242].

Результаты главы 6 опубликованы в статьях [15, 16, 19, 87, 90]. Изометрия f метрического пространства M на себя называется $\delta(x)$ -переносом для точки $x \in M$, если x — точка максимального смещения для f . Метрическое пространство M называется (G) - δ -однородным (соответственно, (G) -однородным по Клиффорду — Вольфу), если для любой пары точек $x, y \in M$ существует $\delta(x)$ -перенос (соответственно, КВ-перенос) пространства M (из группы изометрий G пространства M), перемещающий x в y . Ясно, что каждый КВ-перенос пространства M является $\delta(x)$ -переносом для всех $x \in M$, а (G) -однородное по Клиффорду — Вольфу пространство (G) - δ -однородно. Локально компактное пространство с внутренней метрикой или риманово однородное многообразие $(M = G/H, \rho)$ с замкнутой транзитивной связной группой движений G и стабилизатором H в (некоторой) точке $x \in M$ называется G -нормальным в обобщенном (соответственно, обычном) смысле, если G допускает биинвариантную (соответственно, риманову биинвариантную) внутреннюю метрику r такую, что естественная проекция $(G, r) \rightarrow (G/H, \rho)$ является субметрией. Компактное связное риманово многообразие (M, μ) (G) - δ -однородно тогда и только тогда, когда оно (G) -нормально в обобщенном смысле; при этом в качестве соответствующей биинвариантной метрики r на G достаточно взять индуцированную $\text{Ad}(G)$ -инвариантной «нормой Чебышева» $\|X\| = \max_{y \in M} \sqrt{\mu(X(y), X(y))}$ на $\mathfrak{g}$ (следствие 6.6). Доказана теорема 6.1: «Для связного полного риманова многообразия (M, ρ) и некоторой его группы Ли G движений следующие условия эквивалентны: 1) (M, ρ) G - δ -однородно; 2) каждая геодезическая в (M, ρ) с началом в какой-нибудь точке $x \in M$ является интегральной кривой некоторого киллингова векторного поля на многообразии (M, ρ) из алгебры Ли группы Ли G , достигающего максимального значения длины в точке x ; 3) для каждой точки $x \in M$ и каждого вектора $v \in M_x$ существует киллингово векторное поле X на многообразии (M, ρ) из алгебры Ли группы Ли G , достигающее максимального значения длины в точ-

ке x , с условием $X(x) = v$. Векторное поле X с условием 3) теоремы 6.1 называется δ -вектором. Из п. 2) теоремы 6.1 вытекает следствие 6.2: каждое (G) - δ -однородное риманово многообразие является геодезически орбитальным римановым пространством (с группой движений G). На основании п. 3) теоремы 6.1 и теоремы 3.5 получаем следствие 6.3: каждое δ -однородное риманово многообразие (M, μ) с внутренней метрикой ρ имеет неотрицательную секционную кривизну. Каждое замкнутое вполне геодезическое подмногообразие δ -однородного (геодезически орбитального) риманова многообразия само δ -однородно (соответственно, геодезически орбитально) (теорема 6.15). Из теоремы 6.15 и теоремы 6.3 Топоногова [55] следует, что каждое (не)компактное δ -однородное риманово многообразие изометрично прямому метрическому произведению (евклидова пространства и) компактных неразложимых δ -однородных римановых многообразий (теорема 6.16). Очевидно, верно обратное утверждение, и прямое произведение односвязно в точности тогда, когда все сомножители односвязны. Каждое локально изометричное (в частности, универсальное) покрывающее пространство риманова δ -однородного многообразия является римановым δ -однородным римановым многообразием (теорема 6.5). Из следствия 6.2, предложения 5.7 и теоремы 6.15 вытекает предложение 6.4: «Пусть $(G/H, \mu)$ — G - δ -однородное многообразие и K — связная подгруппа Ли группы Ли G такая, что $H \subset K \subset G$. Тогда орбита точки $x = eH$ в G/H относительно группы K является вполне геодезическим подмногообразием в $(G/H, \mu)$. В частности, K/H с метрикой, индуцированной тензором μ , — δ -однородное пространство». На основании следствия 6.2 и теоремы 5.12 компактные односвязные неразложимые обобщенные нормальные однородные римановы многообразия положительной эйлеровой характеристики, не являющиеся нормальными, надо искать среди $(G/H, \mu)$ из теоремы 5.12. В предложении 6.20 найдено априорное условие для искомых римановых метрик μ на таких пространствах G/H . В случае пространств $Sp(l)/(U(1) \cdot Sp(l-1))$, $l \geq 2$, это условие эквивалентно положительности секционной кривизны с δ -защемленностью в интервале $(1/16, 1/4)$ [32]; далее в теореме 6.18 доказывается, что в действительности все искомые римановы многообразия имеют такой вид. Сначала доказывается, что риманово многообразие $(SO(7)/U(3), \mu)$ с условиями из предложения 6.20 не является обобщенным нормальным однородным (предложение 6.21).

Затем с помощью предложения 6.4 доказывается, что однородные римановы многообразия $(SO(7)/U(3), \mu)$ и $(Sp(2)/(U(1) \cdot Sp(1)), \mu_1)$ допускают вполне геодезические изометрические вложения в однородные пространства $SO(2l+1)/U(l)$ и $Sp(l)/(U(1) \cdot Sp(l-1))$, $l \geq 3$, с соответствующими инвариантными римановыми метриками; все метрики удовлетворяют условиям предложения 6.20 (леммы 6.12 и 6.13). Доказательство теоремы 6.18 завершается (и сопровождается) довольно непростой работой с δ -векторами и характеристическими полиномами матриц. В разделе 6.10 получены общие результаты о чебышевских нормах на алгебре Ли группы движений компактного однородного финслерова многообразия. В §§ 6.11.3, 6.11.4 и 6.11.5 вычисляются чебышевские нормы на алгебрах Ли (и их подалгебрах Картана) полных связных групп движений для евклидовых сфер, сфер Берже, инвариантных римановых метрик на $SO(5)/U(2) = Sp(2)/(U(1) \cdot Sp(1))$ и эллипсоиды Лёвнера — Джона для единичных шаров этих норм.

Седьмая глава (основные результаты которой получены в работе авторов [88]) посвящена исследованию однородных по Клиффорду — Вольфу римановых многообразий и их естественных обобщений. Основной текст этой главы разбит на 11 разделов. В первом разделе обсуждаются примеры однородных по Клиффорду — Вольфу многообразий. Во втором разделе приводится основной технический инструмент дальнейшего исследования — теорема 7.3 о равенстве нулю ковариантной производной тензора кривизны риманова многообразия при тройном использовании одного и того же киллингова векторного поля постоянной длины. В следующем разделе доказывается основной результат главы — теорема 7.1, дающая полную классификацию односвязных однородных по Клиффорду — Вольфу римановых многообразий. Прежде всего, на основании упомянутой теоремы 7.3 и одного результата из [21], мы немедленно получаем, что каждое односвязное однородное по Клиффорду — Вольфу (кратко, КВ-однородное) риманово многообразие симметрическое. После этого тщательное, хотя и не столь долгое, изучение условия КВ-однородности в симметрическом случае позволяет завершить доказательство. В четвертом разделе вводятся пространства Клиффорда — Киллинга, то есть вещественные векторные пространства киллинговых векторных полей постоянной длины. Многообразия из названия пятого раздела были определены и исследованы в статье [112]

Д’Атри и Никерсон. Это в точности римановы многообразия, которые локально допускают пространства Клиффорда — Киллинга размерности, равной размерности многообразия. Мы доказываем в теореме 7.5, что в случае односвязных полных многообразий эти многообразия классифицируются аналогично КВ-однородным пространствам в теореме 7.1, но из нечетномерных сфер нужно оставить только семимерные. Весьма интересно, что знаменитые классические результаты Радона и Гурвица в статьях [144, 200], обсуждаемых в шестом разделе, можно интерпретировать в точности как построение пространств Клиффорда — Киллинга максимальной размерности на круглых нечетномерных сферах, а знаменитая функция Радона — Гурвица дает их размерности. В следующем разделе устанавливается тесная связь пространств Клиффорда — Киллинга на круглых нечетномерных сферах с алгебрами и модулями Клиффорда. Это позволяет классифицировать все векторные пространства Клиффорда — Киллинга на круглых сферах в теоремах 7.10 и 7.11 с точностью до изометрических преобразований сфер (сохраняющих ориентацию). Радон в его статье [200] заметил, что его исследования задачи Гурвица (задача 4 в разделе 7.6) тесно связаны с некоторыми (топологическими) сферами в группах Ли $O(2n)$, $n \geq 2$. В разделе 7.8 мы доказываем, что каждая такая сфера Радона является вполне геодезической сферой в группе $O(2n)$, снабженной биинвариантной римановой метрикой μ . В следующем разделе мы рассматриваем более общий вопрос о вполне геодезических сферах в $(SO(2n), \mu)$, связанных с тройными системами Ли в алгебре Ли группы Ли $SO(2n)$ и пространствами Клиффорда — Киллинга на круглых сферах S^{2n-1} . В частности доказано, помимо результатов, аналогичных результатам предыдущих разделов, что сферы Радона совпадают с вполне геодезическими сферами Хелгасона (постоянной секционной кривизны k , равной максимальной секционной кривизне в $(SO(2n), \mu)$) из статьи [140] тогда и только тогда, когда $n = 2$. В предложении 7.9 вычисляется кривизна k . В разделе 7.10 изучаются алгебры Ли в пространствах Клиффорда — Киллинга на круглых нечетномерных сферах. Заключительный раздел посвящен изучению ограниченно однородных по Клиффорду — Вольфу многообразий. Классификация таких многообразий приведена в теореме 7.17. Приведены два примера ограниченно однородных, но не однородных по Клиффорду — Вольфу римановых многообразий.

Авторы надеются на то, что настоящая книга будет интересна и полезна специалистам в области анализа и геометрии, научным сотрудникам и преподавателям вузов, работающим в смежных разделах математики, а также студентам и аспирантам соответствующих математических специальностей. Мы будем признательны всем читателям, которые сообщат нам о каких-либо неточностях в изложении материала или о пробелах в цитировании.

В. Н. Берестовский, Ю. Г. Никоноров

ГЛАВА 1

РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

1.1. Основы теории гладких многообразий

1.1.1. Гладкие многообразия. Мы приводим здесь основные определения для гладких многообразий и простейшие примеры многообразий.

Хаусдорфово топологическое пространство M^n называется n -многообразием (без границы), если для каждой точки $x \in M^n$ существуют окрестность U точки x и гомеоморфизм $\phi : U \approx V$ на некоторое открытое подмножество $V \subset \mathbb{R}^n$. Обычно мы предполагаем, что M^n связно и удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Пусть M^n — топологическое n -многообразие (без границы). Тройка (U, ϕ, V) , где U — открытое подмножество в M^n , V — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, а ϕ — гомеоморфизм, называется *картой* на M^n . Семейство карт $(U_\alpha, \phi_\alpha, V_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{A}$, на M^n называется *атласом*, если $\{U_\alpha, \alpha \in \mathbb{A}\}$ — покрытие M^n . Атлас *гладкий*, если для любой пары $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ индексов *отображение (перехода)*

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (1.1)$$

является C^∞ -отображением, т. е. его координатные функции имеют частные производные любого порядка. Это требование имеет смысл, так как $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ и $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ — открытые подмножества евклидова пространства. Максимальный гладкий атлас D на M^n называется *гладкой* или *дифференцируемой структурой* на M^n .

Дифференцируемое или *гладкое многообразие* — многообразие вместе с некоторой дифференцируемой структурой D на нем. Любой гладкий атлас на n -многообразии M определяет единственную дифференцируемую структуру, содержащую его. Поэтому достаточно ввести гладкий атлас на M .

Дифференцируемое многообразие *ориентируемо*, если существует некоторый атлас $(U_\alpha, \phi_\alpha, V_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{A}$, из его гладкой структуры такой, что каждое отображение (1.1) имеет положительный якобиан; любой максимальный атлас с этим свойством называется *ориентацией* на M^n . Иначе (гладкое) многообразие *не ориентируемо*. Каждое связное гладкое ориентируемое многообразие допускает в точности две ориентации. Гладкое многообразие вместе с ориентацией на нем называется *ориентированным многообразием*.

Непрерывное отображение $f : (M^{n_1}, D_1) \rightarrow (M^{n_2}, D_2)$ двух гладких многообразий называется *гладким в точке* $x \in M^{n_1}$, если для некоторых карт $(U_1, \phi_1, V_1) \in D_1$ и $(U_2, \phi_2, V_2) \in D_2$ таких, что $x \in U_1$ и $f(x) \in U_2$, отображение $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}$ является C^∞ -отображением. Это требование имеет смысл, потому что область определения отображения f , $\phi_1(f^{-1}(U_2) \cap U_1)$, является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^{n_1}$ и f отображает его в открытое подмножество $\phi_2(U_2)$ в $\mathbb{R}^{n_2}$. Такое отображение f *гладкое*, если оно гладкое в каждой точке из M^{n_1} . Такое отображение f называется *диффеоморфизмом*, если оно биективно и оба отображения f и f^{-1} гладкие. Два гладких многообразия *диффеоморфны*, если существует диффеоморфизм между ними. В дифференциальной топологии два диффеоморфных гладких многообразия отождествляются.

ПРИМЕР 1. Евклидово пространство $\mathbb{E}^n = \mathbb{R}^n$ допускает естественную гладкую структуру, определяемую одной картой $(\mathbb{E}^n, \text{id}_{\mathbb{E}^n}, \mathbb{E}^n)$.

ПРИМЕР 2. Если U — открытое подпространство в гладком n -многообразии M^n с гладким атласом $(U_\alpha, \phi_\alpha, V_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{A}$, то семейство $(U \cap U_\alpha, \phi_\alpha|_{U \cap U_\alpha}, \phi_\alpha(U \cap U_\alpha))$, $\alpha \in \mathbb{A}$, является гладким атласом на U . Множество U вместе с соответствующей гладкой структурой называется *открытым подмногообразием* в M^n .

ПРИМЕР 3. Пусть $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ — стандартная единичная сфера с центром в нуле. Возьмем $U_N = \mathbb{S}^n - \{(0, \dots, 0, 1)\}$, $U_S = \mathbb{S}^n - \{(0, \dots, 0, -1)\}$, и определим гомеоморфизмы (стереографические проекции) $\phi_N : U_N \rightarrow \mathbb{E}^n$ и $\phi_S : U_S \rightarrow \mathbb{E}^n$, формулами

$$\phi_N(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \quad (1.2)$$

и

$$\phi_S(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n). \quad (1.3)$$

Ясно, что $U_N \cup U_S = \mathbb{S}^n$. Легко проверить, что

$$\phi_N \circ \phi_S^{-1} = \phi_S \circ \phi_N^{-1} = \text{inv}_{\mathbb{S}^{n-1}} : \mathbb{E}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{E}^n - \{0\}$$

— отображение инверсии $\text{inv}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ относительно $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{E}^n$, т. е.

$$\text{inv}_{\mathbb{S}^{n-1}}(y_1, \dots, y_n) = \text{inv}_{\mathbb{S}^{n-1}}(y) = \frac{y}{|y|^2}.$$

Следовательно, мы определили гладкую (даже вещественно аналитическую) структуру на $\mathbb{S}^n$.

ПРИМЕР 4. Если M^m и N^n — гладкие многообразия с гладкими атласами $(U_\alpha, \phi_\alpha, V_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{A}$, и $(W_\beta, \psi_\beta, Y_\beta)$, $\beta \in \mathbb{B}$, то пространство $P^{m+n} := M^m \times N^n$ — гладкое $(n+m)$ -многообразие с гладким атласом $(U_\alpha \times W_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta, V_\alpha \times Y_\beta)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$. Многообразие P^{m+n} с таким гладким атласом называется *произведением гладких многообразий* M^m и N^n .

1.1.2. Касательное расслоение над гладким многообразием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть M — гладкое многообразие. Гладкое отображение $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ называется гладкой вещественной функцией на M .

Предложение 1.1. Множество $C^\infty(M)$ всех гладких вещественных функций на M является коммутативным (ассоциативным) кольцом относительно операций

$$(f + g)(p) = f(p) + g(p),$$

$$(fg)(p) = f(p)g(p), \quad f, g \in C^\infty(M), \quad p \in M.$$

Функция $\mathbf{1}_M$, тождественно равная числу 1, является единицей этого кольца.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Произвольное отображение $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами

$$1) \quad v(cf) = c(vf),$$

$$2) \quad v(f + g) = vf + vg,$$

$$3) \quad v(fg) = f(p)vg + g(p)vf$$

для всех $f, g \in C^\infty(M)$, $c \in \mathbb{R}$, называется *касательным вектором* к гладкому многообразию M в точке $p \in M$. Множество всех

таких отображений M_p называется *касательным векторным пространством* к гладкому многообразию M в точке $p \in M$.

Использование этих слов оправдывает следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть $v, w \in M_p$, $c \in \mathbb{R}$. Тогда отображения $v + w$, cv , определенные формулами

$$(v + w)f = vf + wf, \quad (cv)f = c(vf)$$

для всех $f \in C^\infty(M)$, $c \in \mathbb{R}$, являются элементами из M_p . Отноительно этих двух операций множество M_p является вещественным векторным пространством размерности $\dim(M)$.

Все утверждения этой теоремы, кроме утверждения о размерности, очевидны. Доказательство этого утверждения разбивается на несколько лемм.

Прежде всего, нам нужна следующая лемма [56, лемма 1.10].

Лемма 1.1. Для каждого вещественного числа $r > 0$ существует гладкая вещественная функция $f = f_r$, $0 \leq f \leq 1$, на $\mathbb{R}^n$, равная 1 на замкнутом кубе $[-r, r]^n$, и нулю на дополнении к открытому кубу $(-2r, 2r)^n$.

◁ Сначала рассмотрим случай $r = 1$. Достаточно определить f как произведение

$$f = (h \circ pr_1) \dots (h \circ pr_n), \quad (1.4)$$

где $pr_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — канонические проекции (координатные функции) на $\mathbb{R}^n$, и h — какая-нибудь гладкая функция $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, равная 1 на $[-1, 1]$ и нулю вне $(-2, 2)$. Для построения такой функции h мы начинаем с гладкой функции $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $\phi(t) = e^{-1/t}$, если $t > 0$ и $\phi(t) = 0$ в другом случае. Тогда функция

$$g(t) = \frac{\phi(t)}{\phi(t) + \phi(1-t)}$$

гладкая, неотрицательная и принимает значение 1 для $t \geq 1$ и нулевое значение для $t \leq 0$. Мы получаем нужную функцию h , полагая

$$h(t) = g(t+2)g(2-t).$$

Теперь для произвольного числа $r > 0$ требуемая функция определяется формулой $f_r(x) = f((1/r)x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. ▷

Лемма 1.2. Пусть U — открытое подмногообразие гладкого многообразия M^n , $p_0 \in U$ и $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Тогда существуют некоторая открытая окрестность U_0 точки p_0 и функция $\psi \in C^\infty(M^n)$ такие, что $U_0 \subset U$, $\psi(p) = \phi(p)$ для всех $p \in U_0$ и $\psi(q) = 0$ для всех $q \in M^n - U$.

◁ Существует гладкая карта (U_1, ϕ_1, V_1) многообразия M^n такая, что $p_0 \in U_1 \subset U$ и $\phi_1(p_0) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует число $r > 0$ такое, что $[-2r, 2r]^n \subset V_1$. Определим функцию $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ условиями $\psi(p) = f_r(\phi_1(p))\phi(p)$, где f_r — функция из леммы 1.1, если $p \in U_1$, и $\psi(q) = 0$, если $q \in M^n - U_1$. Тогда ψ — искомая функция для $U_0 = \phi_1^{-1}((-r, r)^n)$. ▷

Лемма 1.3. Пусть V_0 — некоторое выпуклое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ с каноническими координатными функциями $x^1, \dots, x^n$ и $g \in C^\infty(V_0)$. Тогда для любых точек $x_0, x_1 \in V_0$

$$g(x_1) = g(x_0) + \sum_{i=1}^n (x^i(x_1) - x^i(x_0)) \frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0) + \sum_{i,j=1}^n (x^i(x_1) - x^i(x_0))(x^j(x_1) - x^j(x_0)) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j}(x_0 + t(x_1 - x_0)) dt.$$

При этом для фиксированной точки $x_0 \in V_0$, все слагаемые справа и их сомножители являются гладкими функциями от $x_1 \in V_0$.

◁ Вследствие выпуклости множества V_0 корректно определена гладкая функция одной переменной

$$\theta(t) := g(x_0 + t(x_1 - x_0)), \quad t \in [0, 1].$$

Тогда, применяя формулу Ньютона — Лейбница и интегрирование по частям в определенном интеграле, получаем

$$\begin{aligned} \theta(1) &= \theta(0) + \theta(t) \Big|_0^1 = \theta(0) + \int_0^1 \theta'(t) dt = \theta(0) + (t-1) \theta'(t) \Big|_0^1 + \\ &+ \int_0^1 (1-t) \theta''(t) dt = \theta(0) + \theta'(0) + \int_0^1 (1-t) \theta''(t) dt. \end{aligned}$$

Таким образом, получена формула

$$\theta(1) = \theta(0) + \theta'(0) + \int_0^1 (1-t) \theta''(t) dt. \quad (1.5)$$

Легко вычислить, что

$$\theta(0) = g(x_0), \quad \theta(1) = g(x_1), \quad (1.6)$$

$$\theta'(0) = \sum_{i=1}^n (x^i(x_1) - x^i(x_0)) \frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0), \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \theta''(t) = & \sum_{i,j=1}^n (x^i(x_1) - x^i(x_0))(x^j(x_1) - \\ & - x^j(x_0)) \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j}(x_0 + t(x_1 - x_0)). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из равенств (1.5), (1.6), (1.7) и (1.8) следует формула из леммы 1.3. Последнее утверждение леммы 1.3 хорошо известно. $\triangleright$

Лемма 1.4. Пусть $v \in M_{p_0}^n$, $f, g \in C^\infty(M^n)$, $f(p) = g(p)$ для всех точек p из некоторого открытого подмножества U в M^n и $p_0 \in U$. Тогда $vf = vg$.

$\triangleleft$ Пусть $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ определяется равенством $\phi(p) = 1$ для всех $p \in U$. Тогда $\phi \in C^\infty(U)$. Пусть $\psi \in C^\infty(M^n)$ — функция, построенная в лемме 1.2 для заданной здесь функции ϕ . Тогда $\psi(f - g) \equiv 0$ и, следовательно, по «правилу Лейбница»

$$0 = v(\psi(f - g)) = (f - g)(p_0)v\psi + \psi(p_0)v(f - g) = vf - vg. \triangleright$$

Лемма 1.5. Пусть $v \in M_{p_0}^n$ и U — открытое подмногообразие в M^n , содержащее точку p_0 . Тогда существует единственный вектор $v|_U \in U_{p_0}$ такой, что

$$vg = v|_U g|_U \quad \text{для каждой функции } g \in C^\infty(M^n), \quad (1.9)$$

где $g|_U$ обозначает ограничение функции g на U . При этом соответствие

$$v \in M_{p_0}^n \rightarrow v|_U \in U_{p_0}$$

является линейным изоморфизмом векторных пространств.

◁ Вследствие леммы 1.2 для произвольной функции $\phi \in C^\infty(U)$ существуют некоторая открытая окрестность U_0 точки p_0 и функция $\psi \in C^\infty(M^n)$ такие, что $U_0 \subset U$ и $\psi(p) = \phi(p)$ для всех $p \in U_0$. Определим $v|_U \phi = v\psi$. Из леммы 1.4 следуют корректность определения отображения $v|_U : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ и включение $v|_U \in U_{p_0}$. Ясно, что при этом выполняется условие (1.9). Теперь оба утверждения леммы являются следствиями леммы 1.4 и условия (1.9). ▷

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть $\dim(M) = n$, $p = p_0 \in M^n$, $v \in M_{p_0}^n$ и $g \in C^\infty(M^n)$ — произвольная функция. Существует гладкая карта (U, ϕ, V) на M^n с условиями $p_0 \in U$ и $\phi(p_0) = (0, \dots, 0)$. Найдется число $r > 0$ такое, что $[-r, r]^n \subset V$. Положим $V_0 = (-r, r)^n$ и $U_0 = \phi^{-1}(V_0)$. Тогда получим новую карту (U_0, ϕ_0, V_0) , где $\phi_0 = \phi|_{U_0}$, с условием $p_0 \in U_0$ и выпуклым множеством V_0 . На основании леммы 1.5 выполняется условие (1.9), где U нужно заменить на U_0 . Обозначая для краткости функцию $g|_{U_0} \circ \phi_0^{-1}$ как g , получим вследствие леммы 1.3 и равенств $x_0 = \phi_0(p_0) = (0, \dots, 0)$, $\phi_0^i = x^i \circ \phi_0$, что

$$vg = v|_{U_0} g|_{U_0},$$

где

$$\begin{aligned} g|_{U_0} &= g(x_0) + \sum_{i=1}^n \phi_0^i \frac{\partial g}{\partial x^i}(x_0) + \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \phi_0^i \phi_0^j \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j}(t(x^1, \dots, x^n)) dt. \end{aligned}$$

Применяя свойства касательного вектора $v|_{U_0}$ и равенство $\phi_0(p_0) = 0$, получаем отсюда, что

$$v(g) = v|_{U_0} g|_{U_0} = \sum_{i=1}^n (v|_{U_0} \phi_0^i) \frac{\partial g}{\partial x^i}(\phi_0(p_0)).$$

Из проведенных доказательств легко увидеть, что эта формула будет верной, если везде убрать нижние индексы 0 и рассматривать вектор $v \in M_p^n$, где $p \in U$ — произвольная точка. Так как функция g из $C^\infty(M^n)$ была произвольной, это значит, что

$$v(\cdot) = \sum_{i=1}^n \zeta^i \frac{\partial(\cdot \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)), \quad (1.10)$$

где

$$\zeta^i = \zeta^i(v) = (v|_U)(x^i \circ \phi). \quad (1.11)$$

Вследствие леммы 1.5 и формул (1.10), (1.11) соответствие

$$v \in M_p^n \rightarrow (\zeta^1(v), \dots, \zeta^n(v))$$

линейно. Ясно, что произвольный набор чисел $(\zeta^1, \dots, \zeta^n) \in \mathbb{R}^n$ определяет по формуле (1.10) единственный вектор $v \in M_p^n$. Таким образом, векторные пространства M_p^n и $\mathbb{R}^n$ изоморфны и теорема доказана. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Числа $\zeta^1, \dots, \zeta^n$ из формулы (1.11) называются *компонентами вектора* $v \in M_p^n$ в карте (U, ϕ, V) (где $p \in U \subset M^n$).

Пусть M^n — гладкое n -многообразие. Определим *касательное многообразие* TM^n к M^n как множество всех пар (p, v) , где $p \in M^n$, $v \in M_p^n$. При этом p называется *началом вектора* v . Заметим, что если $p \neq q$, то формально $M_p^n \cap M_q^n$ не пусто и состоит из (общего) нулевого вектора; поэтому наряду с вектором указывается его начало. Отображение $\pi : TM^n \rightarrow M^n$, определяемое формулой $\pi(p, v) = p$, называется *проекцией*. Если (U, ϕ, V) — карта на M^n , то определим карту $(\pi^{-1}(U), T\phi, V \times \mathbb{R}^n)$ на TM^n формулой

$$T\phi(p, v) = (\phi(p), \zeta_\phi(v)), \quad (1.12)$$

где $\zeta_\phi(v)$ — n -мерный вектор, составленный из компонент вектора v в карте (U, ϕ, V) (определение 3).

Теорема 1.2. Пусть (U, ϕ, V) и (U_1, ϕ_1, V_1) — две карты на гладком многообразии M^n , $(\pi^{-1}(U), T\phi, V \times \mathbb{R}^n)$ и $(\pi^{-1}(U_1), T\phi_1, V_1 \times \mathbb{R}^n)$ — соответствующие карты на TM^n . Тогда функция перехода

$$T\phi_1 \circ (T\phi)^{-1} : \phi(U \cap U_1) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_1(U \cap U_1) \times \mathbb{R}^n$$

для последних двух карт имеет вид

$$T\phi_1 \circ (T\phi)^{-1} = (\phi_1 \circ \phi^{-1}) \times D(\phi_1 \circ \phi^{-1}),$$

где $D(\phi_1 \circ \phi^{-1})$ — обычный дифференциал Фреше гладкого отображения (диффеоморфизма) $\phi_1 \circ \phi^{-1}$ открытых подмножеств евклидовых пространств. Следовательно, требование, чтобы отображения $T\phi$

для карт (U, ϕ, V) на M^n были гомеоморфизмами, корректно определяет топологию на TM^n и TM^n с картами $(\pi^{-1}(U), T\phi, V \times \mathbb{R}^n)$ становится гладким многообразием размерности $2n$.

◁ Достаточно проверить указанную зависимость компонент ζ_1^j , $j = 1, \dots, n$, вектора $v \in M_p$, $p \in U \cap U_1$, в карте (U_1, ϕ_1, V_1) от его компонент ζ^i , $i = 1, \dots, n$, в карте (U, ϕ, V) . Координаты точек в V_1 будем обозначать $x_1^1, \dots, x_1^n$. Из формул (1.10) и (1.11) следует, что

$$\begin{aligned} \zeta_1^j &= v|_{U \cap U_1} (x_1^j \circ \phi_1) = v|_{U \cap U_1} (x_1^j \circ (\phi_1 \circ \phi^{-1}) \circ \phi) = \\ &= \sum_{i=1}^n \zeta^i \frac{\partial (x_1^j \circ (\phi_1 \circ \phi^{-1}))}{\partial x^i} (\phi(p)), \end{aligned}$$

что и требуется. ▷

Следствие 1.1. Проекция $\pi : TM \rightarrow M$ — гладкое отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Гладкое касательное многообразие TM вместе с гладкой проекцией $\pi : TM \rightarrow M$ называется *касательным расслоением над n -многообразием M^n* . Гладкое сечение X к проекции π , т. е. гладкое отображение $X : M \rightarrow TM$ такое, что $\pi \circ X = \text{id}_M$, называется (гладким) *векторным полем на M^n* .

Предложение 1.2. Множество $F^\infty(M)$ всех гладких векторных полей на M есть модуль над кольцом $C^\infty(M)$ относительно операций

$$(X + Y)(p) = X(p) + Y(p),$$

$$fX(p) = f(p)X(p), \quad f \in C^\infty(M), \quad p \in M, \quad X, Y \in F^\infty(M).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть M и N — гладкие многообразия и $\phi : M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Дифференциал $T\phi : TM \rightarrow TN$ отображения ϕ определяется требованием, что для любых элементов $v \in TM$, $f \in C^\infty(N)$,

$$(T\phi(v))f = v(f \circ \phi). \quad (1.13)$$

Совершенно аналогично теореме 1.2 устанавливается, что $T\phi$ — гладкое отображение, и мы получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T\phi} & TN \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{\phi} & N. \end{array}$$

Если $\phi : M \rightarrow N$ и $\psi : N \rightarrow P$ — гладкие отображения, то $\psi \circ \phi : M \rightarrow P$ — также гладкое отображение, и для $T(\psi \circ \phi) : TM \rightarrow TP$ мы получаем равенство $T(\psi \circ \phi) = T\psi \circ T\phi$. Кроме того, $T\text{id}_M = \text{id}_{TM}$. Эти два свойства означают, что соответствия $T : M \rightarrow TM$ и $T : \{\phi : M \rightarrow N\} \rightarrow \{T\phi : TM \rightarrow TN\}$ определяют *ковариантный функтор из категории Smooth гладких многообразий и их гладких отображений* в себя. Вследствие диаграммы выше это можно также рассматривать как ковариантный функтор из Smooth в *категорию Vect гладких векторных расслоений над гладкими многообразиями*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Гладкое отображение $c : I \rightarrow M^n$ произвольного интервала I числовой прямой, содержащего более одной точки, будем называть (гладким) *путем* в M^n .

Из определения 5 непосредственно следует

Предложение 1.3. Пусть $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^n$ — гладкий путь в M^n , $c(0) = p$, $c'(0) := Tc(d/dx(0)) = w \in M_p^n$, $f \in C^\infty(M^n)$. Тогда

$$wf = (f \circ c)'(0),$$

где справа стоит обычная производная гладкой вещественной функции на $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\psi : N \rightarrow M$ — гладкое отображение.

1) Отображение ψ называется *погружением* (иммерсией), если его дифференциал $T_x\psi := T\psi|_{N_x}$ является невырожденным для каждой точки $x \in N$.

2) Пара (N, ψ) называется (*гладким*) *виртуальным подмногообразием* многообразия M , если ψ — инъективное погружение.

3) Пара (N, ψ) называется (*гладким*) *подмногообразием* многообразия M , если ψ — инъективное погружение, являющееся топологическим вложением, т. е. гомеоморфизмом на свой образ.

Часто при рассмотрении (виртуального) подмногообразия предполагается, что $N \subset M$, ψ — отображение включения, и подмногожество N снабжено некоторой гладкой структурой D . Используя теорему об обратном отображении, легко доказать

Предложение 1.4. Гладкая структура D гладкого подмногообразия $N \subset M$ определяется единственным образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть M и B — гладкие многообразия. Отображение $p : M \rightarrow B$ называется *субмерсией*, если для каждой точ-

ки $x \in M$ дифференциал $T_x p : M_x \rightarrow B_{p(x)}$ является сюръективным отображением. Прообразы-подмногообразия $p^{-1}(b)$, $b \in p(M)$ (размерности $\dim M - \dim B$), называются *слоями*, а векторное поле на M (соответственно, вектор $v \in TM$) — *вертикальным*, если $X(f \circ p) = 0$ (соответственно, $v(f \circ p) = 0$) для всех $f \in C^\infty(B)$. Векторное подпространство всех вертикальных векторов в M_x будет обозначаться V_x .

1.1.3. Гладкие векторные поля на M как дифференцирования кольца $C^\infty(M)$. Если $X \in F^\infty(M)$, $f \in C^\infty(M)$, то можно определить вещественную функцию Xf на M соотношением

$$(Xf)(p) = X(p)f, \quad p \in M. \quad (1.14)$$

Из формул (1.10) и (1.11) следует, что $Xf \in C^\infty(M)$.

Следующее предложение является непосредственным следствием формулы (1.14) и определения 2.

Предложение 1.5. Каждое гладкое векторное поле X на гладком многообразии M определяет дифференцирование $D = D_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ кольца $C^\infty(M)$ по формуле $D_X(f) = Xf$. Это значит, что для любых функций $f, g \in C^\infty(M)$,

- 1) $X(cf) = cXf$,
- 2) $X(f + g) = Xf + Xg$,
- 3) $X(fg) = gXf + fXg$,

или, в других обозначениях,

- 1) $D(cf) = cD_X f$,
- 2) $D(f + g) = D_X f + D_X g$,
- 3) $D(fg) = gD_X f + fD_X g$.

Справедливо и следующее обращение предложения 1.5 (см. [56]):

Теорема 1.3. Для каждого дифференцирования $D : C^\infty(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n)$ кольца $C^\infty(M^n)$ существует единственное гладкое векторное поле X на M^n такое, что $D = D_X$.

◁ Сравнивая свойства 1), 2), 3) для D из предложения 1.5 и для v из определения 2, видим, что для каждой точки $p \in M$, соответствие $f \in C^\infty(M) \rightarrow (Df)(p)$ задается некоторым вектором $X(p) \in M_p$. Если при этом (U, ϕ, V) — некоторая карта на M^n с условием $p \in U$,

то вследствие леммы 1.5 и формулы (1.10)

$$(Df)|_U = \sum_{i=1}^n (X|_U)(x^i \circ \phi) \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}$$

для каждой функции $f \in C^\infty(M)$. Тогда $(X|_U)(x^i \circ \phi) \in C^\infty(U)$, $X \in F^\infty(M)$ и $D = D_X$. $\triangleright$

Предложение 1.5 и теорема 1.3 характеризуют гладкие векторные поля на многообразии M как дифференцирования кольца $C^\infty(M)$.

Заметим также, что для $f, g \in C^\infty(M)$, $X, Y \in F^\infty(M)$,

$$(X + Y)f = Xf + Yf, \quad (1.15)$$

$$(fX)g = f(Xg). \quad (1.16)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Если $f \in C^\infty(M)$, $v \in TM$, то по определению,

$$df(v) = vf.$$

Так определенная (гладкая) функция $df : TM \rightarrow \mathbb{R}$ также называется *дифференциалом функции* f .

Отсюда немедленно следует формула

$$df \circ X = Xf, \quad f \in C^\infty(M), \quad X \in F^\infty(M). \quad (1.17)$$

Из определений 1 и 9 и формулы (1.10) вытекает следующее предложение.

Предложение 1.6. Пусть $f, g \in C^\infty(M)$, и c — постоянная функция на M . Тогда

- 0) $dc = 0$,
- 1) $d(cf) = cdf$,
- 2) $d(f + g) = df + dg$,
- 3) $d(fg) = gdf + fdg$.

Последнее утверждение этого предложения — знаменитое *правило Лейбница*. При соблюдении последних двух свойств свойство 1) эквивалентно свойству 0).

1.1.4. Скобка Ли двух гладких векторных полей. Рутинные вычисления приводят к следующему утверждению.

Предложение 1.7. Пусть X, Y, Z — гладкие векторные поля на гладком многообразии M . Тогда формула

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \quad f \in C^\infty(M),$$

определяет дифференцирование кольца $C^\infty(M)$, и, следовательно, определяет по теореме 1.3 единственное гладкое векторное поле $[X, Y]$ на M . Кроме того,

- 1) операция $[X, Y]$ билинейна над $\mathbb{R}$,
- 2) $[X, Y] = -[Y, X]$ (антисимметричность),
- 3) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (тождество Якоби),
- 4) $[X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Векторное поле $[X, Y]$ называется *скобкой Ли* векторных полей X и Y . Любое векторное пространство L над $\mathbb{R}$ вместе с некоторой билинейной операцией $[\cdot, \cdot]$, удовлетворяющей свойствам 1), 2) и 3) из предложения 1.7, называется *алгеброй Ли* над полем $\mathbb{R}$.

Вычислим теперь компоненты $\zeta^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ векторного поля $[X, Y]$ в карте (U, ϕ, V) , если $\xi^i, \eta^j : U \rightarrow \mathbb{R}$ — компоненты векторных полей X, Y в этой карте. На основании формул (1.10) и (1.11),

$$\begin{aligned} \zeta^i &= [X, Y]\phi^i = X(Y\phi^i) - Y(X\phi^i) = X\eta^i - Y\xi^i = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\eta^i \circ \phi^{-1})}{\partial x^j}(\phi^1, \dots, \phi^n) \xi^j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\xi^i \circ \phi^{-1})}{\partial x^j}(\phi^1, \dots, \phi^n) \eta^j. \end{aligned}$$

Если мы обозначим кратко $\eta^i \circ \phi^{-1}$ как η^i и так далее, то

$$\zeta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \xi^j - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \eta^j. \quad (1.18)$$

Мы использовали здесь правило суммирования Эйнштейна для устранения знака суммы Σ . Эту формулу можно рассматривать как другое определение скобки Ли $[X, Y]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть M и N — гладкие многообразия, X и Y — гладкие векторные поля на M и N соответственно, а $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Говорят, что векторное поле X f -связано с векторным полем Y , если $Tf(X(x)) = Y(f(x))$ для каждой точки $x \in M$.

Как следствие определений 5 и 11 получаем

Следствие 1.2. Пусть $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение двух гладких многообразий. Тогда гладкое векторное поле X на многообразии M f -связано с гладким векторным полем Y на N тогда и только тогда, когда для каждой гладкой вещественной функции ϕ на N выполнено равенство $Y\phi \circ f = X(\phi \circ f)$.

Легко проверить, что из следствия 1.2, определений 10 и 11 немедленно следует

Теорема 1.4. Пусть M и N — гладкие многообразия, а $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Предположим, что гладкие векторные поля X и Y на M f -связаны соответственно с гладкими векторными полями X_1 и Y_1 на N . Тогда гладкое векторное поле $[X, Y]$ на M f -связано с гладким векторным полем $[X_1, Y_1]$ на N .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Гладкий путь $c(p, t)$, $t \in I$, где p — фиксированная точка из M^n , I — открытый (конечный или бесконечный) интервал числовой прямой, содержащий точку 0, называется *интегральной кривой* гладкого векторного поля X с началом в точке p , если

$$c(p, 0) = p, \quad c'(p, t) = X(c(p, t)), \quad t \in I. \quad (1.19)$$

Если I — максимальная область определения такого пути, то путь $c(p, t)$, $t \in I$, называется *максимальной интегральной кривой*.

Если $c(p, t)$, $t \in I_0 \subset I$, — часть такой интегральной кривой с условием $c(p, I_0) \in U$, где (U, ϕ, V) — некоторая карта в M^n , то дифференциальное уравнение в (1.19) для рассматриваемой кривой запишется в виде системы о. д. у. первого порядка для $x^i(t) := x^i(\phi(c(p, t)))$

$$(x^i)'(t) = \zeta^i(\phi^{-1}(x^1(t), \dots, x^n(t))), \quad t \in I_0,$$

где ζ^i , $i = 1, \dots, n$, — компоненты векторного поля X в карте (U, ϕ, V) .

Из теории систем о. д. у. первого порядка с гладкой правой частью следует, что существует единственное гладкое отображение $\Psi : W \rightarrow M$ со следующими свойствами:

- 1) W — открытая окрестность множества $M \times \{0\}$ в $M \times \mathbb{R}$;
- 2) если $p \in M$, то $W \cap (\{p\} \times \mathbb{R}) = \{p\} \times I_p$, где I_p — открытая связная окрестность точки $\{0\}$ в $\mathbb{R}$;

3) если $p \in M$, то $\Psi_p(t) := \Psi(p, t) = c(p, t)$, $t \in I_p$, — интегральная кривая векторного поля X ;

4) W — максимальная область определения отображений Ψ со свойствами 1), 2), 3).

Заметим, что условие 4) эквивалентно тому, что $c(p, t)$, $t \in I_p$, из условия 3) — максимальная интегральная кривая поля X .

Как следствие этих свойств:

α) $\Psi(\cdot, 0) = \text{id}_M$;

β) $\Psi(p, t)$ и $\Psi(\Psi(p, t), s)$ определены для $s, t \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда определено $\Psi(p, t+s)$; при этом $\Psi(\Psi(p, t), s) = \Psi(p, t+s)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Определенное выше отображение $\Psi : W \rightarrow M$, заданное гладким векторным полем X на M , называется *поток* (на M) векторного поля X . Этот поток и векторное поле X называются *полными*, если $W = M \times \mathbb{R}$.

Свойство β) выражают словами: $\Psi_t := \Psi(\cdot, t)$ — *локальная однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов многообразия M^n* . Если поток Ψ полный, то слова «локальная» и «локальных» опускаются.

Предложение 1.8. Гладкое векторное поле X на гладком многообразии M полно тогда и только тогда, когда для некоторого числа $\varepsilon > 0$ область определения соответствующего полю X потока Ψ включает множество $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.

$\triangleleft$ Необходимость очевидна. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Тогда существуют числа $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ и $m \in \mathbb{N}$ такие, что $s = mt$. По условию, на M определено $\Psi_t := \Psi(\cdot, t)$, а тогда и $\Psi(\cdot, s) = (\Psi_t)^m$. $\triangleright$

Предложение 1.9. Каждое гладкое векторное поле X на компактном гладком многообразии M полно.

$\triangleleft$ Для каждой точки $p \in M$ существуют ее открытая окрестность U_p в M и число $\varepsilon_p > 0$ такие, что область определения соответствующего полю X потока Ψ включает $U_p \times (-\varepsilon_p, \varepsilon_p)$. Система $\{U_p, p \in M\}$ образует открытое покрытие компакта M . Поэтому существуют его конечное подпокрытие $\{U_{p_k}, k = 1, \dots, m\}$ и $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{p_k}, k = 1, \dots, m\}$. Тогда область определения соответствующему полю X потока Ψ включает множество $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. На основании предложения 1.8 поле X полно. $\triangleright$

Следующее предложение [42, гл. 1, предложение 1.9] дает геометрическую интерпретацию скобки Ли $[X, Y]$ для $X, Y \in F^\infty(M)$.

Предложение 1.10. Пусть X и Y — гладкие векторные поля на M и Ψ_t — локальная 1-параметрическая группа локальных диффеоморфизмов поля X на M . Тогда

$$[X, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y - (T\Psi_t)Y].$$

Точнее,

$$[X, Y](p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y(p) - ((T\Psi_t)Y)(p)], \quad p \in M.$$

◁ Выберем произвольное открытое подмножество $V := U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ области определения Ψ . Для произвольной функции $f \in C^\infty(M)$ рассмотрим $f(p, t) := f(\Psi_t(p)) - f(p)$, $(p, t) \in V$. Тогда

$$f(p, t) = f(p, t) - f(p, 0) = t \int_0^1 f'(p, ts) ds := tg(p, t).$$

Таким образом, $f \circ \Psi_t = f + tg(\cdot, t)$ на U для всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Вследствие этих равенств, определения Ψ и предложения 1.3

$$Xf(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\Psi_t(p)) - f(p)] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} f(p, t) = \lim_{t \rightarrow 0} g(p, t) = g(p, 0).$$

Положим $p(t) = \Psi_{-t}(p)$. Тогда

$$((T\Psi_t)Y)(p)f = (Y(f \circ \Psi_t))(p(t)) = [(Yf) + t(Yg(\cdot, t))](p(t));$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y - (T\Psi_t)Y](p)f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(Yf)(p) - (Yf)(p(t))] - \\ &- \lim_{t \rightarrow 0} (Yg(\cdot, t))(p(t)) = X(p)(Yf) - Y(p)g(\cdot, 0) = \\ &= X(p)(Yf) - Y(p)(Xf) = [X, Y](p)f. \triangleright \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Говорят, что на гладком многообразии M^n определено k -мерное *распределение* D , если для каждой точки $x \in M^n$ выбрано k -мерное векторное подпространство $D(x) \subset M_x$, $1 \leq k < n$. Распределение D называется *гладким*, если для каждой точки $x \in M^n$ существует ее открытая окрестность U и k гладких векторных полей $X_1, \dots, X_k$ на U таких, что линейная оболочка векторов $X_1(y), \dots, X_k(y)$ совпадает с $D(y)$ для каждой точки $y \in U$.

Говорят, что векторное поле $X \in F^\infty(M)$ принадлежит распределению D , если $X(x) \in D(x)$ для каждой точки $x \in M$. Гладкое распределение D называется *инволютивным*, если $[X, Y] \in D$ для любых векторных полей $X, Y \in F^\infty(M)$, принадлежащих D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. (Виртуальное) подмногообразие (N, ψ) гладкого многообразия M называется *интегральным многообразием* гладкого распределения D на M , если $T\psi(N_x) = D(\psi(x))$ для каждого $x \in N$. Гладкое распределение D на гладком многообразии M называется *вполне интегрируемым*, если через каждую точку многообразия M проходит некоторое интегральное многообразие распределения D . Максимальные связные интегральные многообразия гладкого вполне интегрируемого распределения D на гладком многообразии M называются *слоями*, а множество всех слоев $\mathcal{F} = \mathcal{F}(D)$ называется *слоением* (определяемым распределением D).

Теорема 1.5. Гладкое распределение D на гладком многообразии M вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда оно инволютивно, другими словами, $C^\infty(M)$ -модуль $F^\infty(D)$ гладких векторных полей, принадлежащих D , является алгеброй Ли.

Эта теорема Г. Фробениуса является следствием предложения 1.59 и теоремы 1.60 в [56]. Кроме того, в теореме 1.60 доказано утверждение, из которого следует, что понятие слоения из определения 15 эквивалентно некоторому более распространенному понятию слоения. В статье [148] попутно с выводом основных уравнений О'Нейла для римановой субмерсии [191] дано короткое доказательство теоремы Фробениуса. На основе теоремы 1.5 и ее доказательства нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 1.6. Слой $L \in \mathcal{F}(D)$ для гладкого k -мерного инволютивного распределения D на гладком многообразии M^n является гладким k -мерным подмногообразием $L \subset M^n$ тогда и только тогда, когда L замкнуто в M . В общем случае L является гладким k -мерным многообразием относительно слоевой топологии, базой которой являются компоненты связности множеств $U \cap L$, где U — открытые подмножества в M .

1.1.5. Тензорные поля на гладких многообразиях. Гладкое векторное поле на гладком многообразии — синоним *тензорного поля степени $(1, 0)$* .

Пусть M^n — гладкое многообразие и m — натуральное число. m -линейное отображение $F : (F^\infty(M))^m \rightarrow C^\infty(M)$ (соответственно $F : (F^\infty(M))^m \rightarrow F^\infty(M)$) называется *гладким тензором* (или *гладким тензорным полем*) *степени* $(0, m)$ (соответственно, $(1, m)$) на M . Это значит, что для каждого $i = 1, \dots, m$, и произвольных гладких векторных полей $X_1, \dots, X_i, Y_i, \dots, X_m$ и гладких вещественных функций f на M выполнены соотношения

- 1)
$$F(X_1, \dots, X_i + Y_i, \dots, X_m) = F(X_1, \dots, X_i, \dots, X_m) + F(X_1, \dots, Y_i, \dots, X_m),$$
- 2)
$$F(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_m) = fF(X_1, \dots, X_i, \dots, X_m).$$

Теорема 1.7. Пусть $F, X_1, \dots, X_m$ и $x \in M$ — соответственно тензор степени $(0, m)$ или $(1, m)$, гладкие векторные поля и точка на гладком n -многообразии M . Тогда значение $F(X_1, \dots, X_m)(x)$ зависит только от значений $X_1(x), \dots, X_m(x)$. Кроме того, для каждой точки $x \in M$ F корректно определяет некоторую m -линейную функцию $F(x) : (M_x)^m \rightarrow \mathbb{R}$ или $F(x) : (M_x)^m \rightarrow M_x$.

◁ Вследствие леммы 1.2 существует карта (U, ϕ, V) с условием $x \in U$ и гладкая вещественная функция g на M , равная 1 в некоторой окрестности точки x и нулю вне U . Поскольку $g(x) = 1$, то по свойству 2) тензора F мы получаем

$$F(X_1, \dots, X_m)(x) = F(ggX_1, \dots, ggX_m)(x). \quad (1.20)$$

Обозначим через ξ_i^j , где $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$, компоненты суженных векторных полей X_i , $i = 1, \dots, m$, на U в карте (U, ϕ, V) и через e_l , $l = 1, \dots, n$, гладкие векторные поля на U с компонентами $\xi^j \equiv \delta_l^j$ в карте (U, ϕ, V) . Здесь δ_l^j — так называемый *символ Кронекера*, равный 1 при $j = l$ и 0 иначе. Ясно, что можно понимать $g\xi_i^j$ и ge_l соответственно как гладкие функции и векторные поля на M и

$$ggX_i = g\xi_i^j ge_j \quad (1.21)$$

в обозначениях Эйнштейна. Из свойств 1) и 2) тензора F и формул (1.20) и (1.21) следует, что

$$\begin{aligned} F(X_1, \dots, X_m)(x) &= F(g\xi_1^{j_1} ge_{j_1}, \dots, g\xi_m^{j_m} ge_{j_m})(x) = \\ &= g\xi_1^{j_1}(x) \dots g\xi_m^{j_m}(x) F(ge_{j_1}, \dots, ge_{j_m})(x) = \\ &= \xi_1^{j_1}(x) \dots \xi_m^{j_m}(x) F(ge_{j_1}, \dots, ge_{j_m})(x). \end{aligned}$$

Поэтому

$$F(X_1, \dots, X_m)(x) = \xi_1^{j_1}(x) \dots \xi_m^{j_m}(x) F(ge_{j_1}, \dots, ge_{j_m})(x). \quad (1.22)$$

Заметим теперь, что если h — другая вещественная функция на M , равная 1 в точке x и 0 вне U , то по свойству 1) тензора F получаем

$$F(ge_{j_1}, \dots, ge_{j_m})(x) = F(gh e_{j_1}, \dots, gh e_{j_m})(x) = F(h e_{j_1}, \dots, h e_{j_m})(x).$$

Первое утверждение доказано.

Пусть теперь $w_1, \dots, w_m \in M_x$ — векторы в точке $x \in M$. Возьмем произвольную карту (U, ϕ, V) с $x \in U$. Если ξ_i^j — компоненты вектора w_i , $i = 1, \dots, m$, в карте (U, ϕ, V) , то определим гладкое векторное поле X_i формулой $X_i = \xi_i^j ge_j$ (так что $X_i(x) = w_i$), а затем определим

$$F(x)(w_1, \dots, w_m) = F(X_1, \dots, X_m)(x). \quad (1.23)$$

Если $Y_1, \dots, Y_m$ — некоторые другие гладкие векторные поля на M такие, что $Y_i(x) = w_i$ для $i = 1, \dots, m$, то по первой части теоремы

$$F(X_1, \dots, X_m)(x) = F(Y_1, \dots, Y_m)(x),$$

так что формула (1.23) корректно определяет $F(x)$. $\triangleright$

Пусть F — некоторое гладкое тензорное поле степени $(0, m)$ (или $(1, m)$) на некотором гладком n -многообразии M и (U, ϕ, V) — карта на M . Тогда вследствие последнего утверждения теоремы 1.7 можно корректно определить гладкие вещественные функции (или векторные поля)

$$F_{j_1, \dots, j_m} = F(e_{j_1}, \dots, e_{j_m}) = F(x)(e_{j_1}(x), \dots, e_{j_m}(x)), \quad x \in U,$$

на U . В векторном случае мы получаем векторные поля с компонентами $\xi^j = F_{j_1, \dots, j_m}^j$ в карте (U, ϕ, V) . Вещественные функции $F_{j_1, \dots, j_m}$ (соответственно, $F_{j_1, \dots, j_m}^j$) называются *компонентами тензора F в карте (U, ϕ, V)* .

Пусть теперь ξ_k^j , $j = 1, \dots, n$, — компоненты некоторых векторных полей X_k , $k = 1, \dots, m$, в карте (U, ϕ, V) . Тогда функция (или векторное поле) $F(X_1, \dots, X_m)$ имеет сужение на U (соответственно, компоненты в карте (U, ϕ, V)), равные $F_{j_1, \dots, j_m} \xi_1^{j_1} \dots \xi_m^{j_m}$ (соответственно, $F_{j_1, \dots, j_m}^j \xi_1^{j_1} \dots \xi_m^{j_m}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Производная Ли $L_X A$ от (s, r) -тензорного поля A вдоль векторного поля X определяется своими значениями на векторных полях $X_1, X_2, \dots, X_r$ по формуле

$$L_X A(X_1, \dots, X_r) = X \cdot A(X_1, \dots, X_r) - \sum_{i=1}^r A(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r),$$

если A является $(0, r)$ -тензором, и по формуле

$$L_X A(X_1, \dots, X_r) = [X, A(X_1, \dots, X_r)] - \sum_{i=1}^r A(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r),$$

если A является $(1, r)$ -тензором.

Отметим, что оператор L_X линеен и является дифференцированием относительно тензорного произведения. В частности, действие L_X на функции дает дифференцирование по направлению векторного поля X ; если Y — векторное поле, то $L_X Y = [X, Y]$.

1.2. Многообразия со связностью и римановы многообразия

1.2.1. Линейная связность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. *Линейная связность* (или *ковариантная производная*) на гладком многообразии M — отображение

$$\nabla : F^\infty(M) \times F^\infty(M) \rightarrow F^\infty(M), \quad \nabla(X, Y) := \nabla_X Y \in F^\infty(M)$$

такое, что для всех $Z \in F^\infty(M)$ и $f \in C^\infty(M)$ выполнены соотношения:

- 1) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$;
- 2) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$;
- 3) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
- 4) $\nabla_X fY = f \nabla_X Y + (Xf)Y$.

Теорема 1.8. Пусть ∇ — линейная связность на гладком многообразии M . Тогда отображение

$$T : F^\infty(M) \times F^\infty(M) \rightarrow F^\infty(M),$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

задает кососимметричный $(1, 2)$ -тензор на M .

◁ Из определения T и свойств 1) и 3) в определении 17 следует, что T — аддитивная функция относительно X и Y и $T(X, Y) = -T(Y, X)$. Поэтому нужно только доказать, что

$$T(fX, Y) = fT(X, Y), \quad f \in C^\infty(M).$$

Вследствие определения T , свойств 2) и 4) в определении 17 и свойств $[\cdot, \cdot]$ получаем

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y fX - [fX, Y] = \\ &= f(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) - (Yf)X + (Yf)X = fT(X, Y). \triangleright \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Тензор T из формулировки теоремы 1.8 называется *тензором кручения* линейной связности ∇ .

1.2.2. Риманова метрика. Гладкий *метрический тензор* или *риманова метрика* на гладком многообразии M^n — гладкий симметричный положительно определенный тензор $g : F^\infty(M) \times F^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ степени $(0, 2)$ на M такой, что для всех гладких векторных полей X, Y на M выполнены соотношения:

- 1) $g(X, Y) = g(Y, X)$,
- 2) $g(X, X) \geq 0$,
- 3) $g(X, X)(x) > 0$, если $X(x) \neq 0$ и $x \in M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Пара (M, g) , где M — гладкое (связное) многообразие, а g — (гладкий) метрический тензор на M , называется *римановым многообразием*.

Если (U, ϕ, V) — карта на M , а g — метрический тензор на M , то g имеет компоненты $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$, в карте (U, ϕ, V) . Обычно эти компоненты отождествляются с функциями $g_{ij} \circ \phi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$. В терминах этих компонент, условие 1) выше эквивалентно равенствам $g_{ij} = g_{ji}$, а условия 2) и 3) вместе эквивалентны утверждению, что для любой точки $x \in U$ $(n \times n)$ -матрица $G(x) := (g_{ij}(x))$ положительно определена. Если, согласно предыдущему разделу, гладкие векторные поля X и Y имеют соответственно компоненты ξ^i и η^j в карте (U, ϕ, V) , то

$$g(X, Y)|_U = g_{ij} \xi^i \eta^j.$$

В упражнении 25 (см. [56, с. 52]) утверждается следующая важная

Теорема 1.9. *Каждое гладкое (связное) многообразие допускает гладкую риманову метрику.*

В доказательстве этой теоремы используются утверждение, что каждое хаусдорфово локально компактное топологическое пространство M со второй аксиомой счетности (все эти условия выполняются для гладких многообразий M в нашем смысле) *паракомпактно*, т. е. каждое открытое покрытие пространства M допускает некоторое открытое локально конечное измельчение [56, лемма 1.9], и теорема о существовании (гладких) разбиений единицы на гладком многообразии [56, теорема 1.11]. Доказательство этих двух утверждений в [56] занимает только четыре страницы. Используя эти результаты, можно доказать теорему 1.9 в качестве легкого упражнения. Детали опускаются.

1.2.3. Связность Леви-Чивита на римановом многообразии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Линейная связность ∇ на римановом многообразии (M, g) называется *связностью Леви-Чивита*, если для всех гладких векторных полей X, Y, Z на M выполняются следующие условия:

- 1) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_X Z)$;
- 2) тензор кручения T связности ∇ равен нулю.

Важность введенного понятия демонстрирует следующая

Теорема 1.10. *На каждом римановом многообразии (M, g) существует единственная связность Леви-Чивита ∇ .*

◁ Очевидно,

$$T = 0 \iff \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \quad (1.24)$$

Для краткости будем писать $\langle X, Y \rangle$ вместо $g(X, Y)$. Сделаем циклические перестановки в равенстве 1) из определения 20:

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \\ Y\langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \\ Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

Тогда вследствие (1.24)

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y \rangle + \\ &+ \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X \rangle + \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_Y X, Z \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \\ &+ \langle [Y, Z], X \rangle + \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_Y X, Z \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle. \end{aligned}$$

Мы получаем отсюда, что

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \frac{1}{2} [X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \\ &+ \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Если теперь определить $\langle \nabla_X Y, Z \rangle$ правой частью формулы (1.25), то легко проверить, что для фиксированных векторных полей X и Y это дает нам $(0, 1)$ -тензорную функцию $F(Z)$ от $Z \in F^\infty(M)$. Следовательно, на основании легко доказываемой леммы 1.6 ниже, существует единственное векторное поле $W = W(X, Y)$ на M такое, что $F(Z) = \langle W, Z \rangle$. Это значит, что можно определить $\nabla_X Y$ как гладкое векторное поле $W(X, Y)$. Наконец, используя формулу (1.25), легко проверить, что так определенное отображение ∇ имеет все свойства из определений 17 и 20. $\triangleright$

Лемма 1.6. *Для каждого гладкого $(0, 1)$ -тензора F на римановом многообразии (M, g) существует единственное гладкое векторное поле W на M такое, что для каждого гладкого векторного поля Z на M выполнено равенство $F(Z) = \langle W, Z \rangle$.*

Из определения ковариантной производной ∇ на гладком многообразии M^n , леммы 1.2 и формул (1.10), (1.11) следует, что если векторные поля X и Y совпадают на некотором открытом подмножестве $U \subset M$ с векторными полями X' и Y' соответственно, то $\nabla_X Y = \nabla_{X'} Y'$ на U . Следовательно, для любой карты (U, ϕ, V) на M^n и соответствующих гладких векторных полей $e_1, \dots, e_n$ на U можно корректно определить гладкие векторные поля

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k, \quad (1.26)$$

где Γ_{ij}^k — некоторые гладкие вещественные функции на U , называемые *символами Кристоффеля* (в карте (U, ϕ, V)).

Мы хотим вычислить символы Кристоффеля связности Леви-Чивита ∇ на римановом многообразии (M, g) как функции компонент g_{ij} метрического тензора g в той же карте (U, ϕ, V) .

Используя тот факт, что $[e_i, e_j] = 0$ для всех $i, j = 1, \dots, n$, получаем из формул (1.25) и (1.26):

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{e_i} e_j, e_l \rangle &= \langle \Gamma_{ij}^k e_k, e_l \rangle = \Gamma_{ij}^k \langle e_k, e_l \rangle = \Gamma_{ij}^k g_{kl} = \\ &= g_{lk} \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} (e_i \langle e_j, e_l \rangle + e_j \langle e_l, e_i \rangle - e_l \langle e_i, e_j \rangle) = \\ &= \frac{1}{2} (e_i g_{jl} + e_j g_{li} - e_l g_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали краткие обозначения $\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}$ и так далее, вместо точного выражения $\frac{\partial g_{jl} \circ \phi^{-1}}{\partial x^i} \circ \phi$.

Условие 3) для метрического тензора g , как было сказано выше, эквивалентно утверждению, что для любой точки $x \in U$ матрица $G(x) = (g_{ij}(x))$, $i, j = 1, \dots, n$, положительно определена. В частности, существует обратная матрица $G(x)^{-1} = (g^{rs}(x))$ с гладкими вещественными элементами g^{rs} , $r, s = 1, \dots, n$, на U и условиями $g^{rs} g_{sk} \equiv \delta_k^r$. Используя эти факты, выводим из выражений в предыдущем абзаце, что

$$\Gamma_{ij}^m = g^{ml} g_{lk} \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ml} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (1.27)$$

Из последней формулы видно, что $\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ji}^m$.

1.3. Кривизна многообразий со связностью и римановых многообразий

1.3.1. Тензор кривизны многообразия с ковариантной производной.

Теорема 1.11. Пусть M — гладкое многообразие с ковариантной производной ∇ . Тогда функция $R : (F^\infty(M))^3 \rightarrow F^\infty(M)$, определенная формулой

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z) &= R(X, Y)Z = \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \end{aligned} \quad (1.28)$$

является $(1, 3)$ -тензором на M (тензором кривизны связности ∇). Кроме того,

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z. \quad (1.29)$$

◁ Ясно, что функция R аддитивна по каждой из трех переменных. Последняя формула очевидна. Пусть $f \in C^\infty(M)$. Используя свойства связности ∇ , мы получаем

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= \nabla_{fX} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX, Y]} Z = \\ &= f(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) - \\ &- (Yf) \nabla_X Z - \nabla_{-(Yf)X} Z = fR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

То же свойство для Y следует теперь из формулы (1.29). Вследствие свойств ∇

$$\begin{aligned} R(X, Y)(fZ) &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X, Y]} (fZ) = \\ &= f(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) + \nabla_X (Yf)Z + \\ &+ (Xf) \nabla_Y Z - \nabla_Y (Xf)Z - (Yf) \nabla_X Z - ([X, Y]f)Z = \\ &= fR(X, Y)Z + (Yf) \nabla_X Z + (Xf) \nabla_Y Z - (Xf) \nabla_Y Z - \\ &- (Yf) \nabla_X Z + [X(Yf) - Y(Xf)]Z - ([X, Y]f)Z = fR(X, Y)Z. \triangleright \end{aligned}$$

1.3.2. Тензор кривизны риманова многообразия. Тензор кривизны R связности Леви-Чивита ∇ на римановом многообразии (M, g) имеет дополнительные свойства симметрии.

Теорема 1.12. Пусть (M, g) — гладкое риманово многообразие и ∇ — соответствующая связность Леви-Чивита на (M, g) . Тогда для любых гладких векторных полей X, Y, Z и W на M выполнены равенства

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0, \quad (1.30)$$

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle, \quad (1.31)$$

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle. \quad (1.32)$$

◁ 1) Используя формулы (1.24), (1.28) и тождество Якоби для скобки Ли, мы получаем

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \\ &- \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \\ &- \nabla_{[Z, X]} Y = \nabla_X [Y, Z] + \nabla_Y [Z, X] + \nabla_Z [X, Y] - (\nabla_{[X, Y]} Z + \\ &+ \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_{[Z, X]} Y) = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0. \end{aligned}$$

2) Используя свойство 1) связности ∇ из определения 17 в § 1.2.1, мы получаем

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle = \\ &= X \langle \nabla_Y Z, W \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W \rangle - Y \langle \nabla_X Z, W \rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W \rangle - \\ &- [X, Y] \langle Z, W \rangle + \langle Z, \nabla_{[X, Y]} W \rangle = -\langle \nabla_Y Z, \nabla_X W \rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W \rangle + \\ &+ \langle Z, \nabla_{[X, Y]} W \rangle + X(Y \langle Z, W \rangle) - X \langle Z, \nabla_Y W \rangle - Y(X \langle Z, W \rangle) + \\ &+ Y \langle Z, \nabla_X W \rangle - [X, Y] \langle Z, W \rangle = -\langle \nabla_Y Z, \nabla_X W \rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W \rangle + \\ &+ \langle Z, \nabla_{[X, Y]} W \rangle - X \langle Z, \nabla_Y W \rangle + Y \langle Z, \nabla_X W \rangle. \end{aligned}$$

Выполняя только часть второго шага выше, мы получаем

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)W, Z \rangle &= \langle \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X, Y]} W, Z \rangle = \\ &= X \langle \nabla_Y W, Z \rangle - \langle \nabla_Y W, \nabla_X Z \rangle - Y \langle \nabla_X W, Z \rangle + \\ &+ \langle \nabla_X W, \nabla_Y Z \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} W, Z \rangle. \end{aligned}$$

Теперь нужная формула получается сравнением двух выражений выше и свойства симметрии тензора g .

3) Свойство (1.32) является следствием всех предыдущих свойств (1.29), (1.30) и (1.31). Ввиду (1.31), равенство (1.32) эквивалентно равенству

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(Z, W)Y, X \rangle = 0. \quad (1.33)$$

Вследствие (1.30) и (1.31) левая часть в (1.33) равна

$$\begin{aligned} &-\langle R(Y, Z)X, W \rangle - \langle R(Z, X)Y, W \rangle + \langle R(Z, W)Y, X \rangle = \\ &= \langle R(Y, Z)W, X \rangle - \langle R(Z, X)Y, W \rangle + \langle R(Z, W)Y, X \rangle = \\ &= -\langle R(W, Y)Z, X \rangle - \langle R(Z, X)Y, W \rangle = \\ &= \langle R(Z, X)W, Y \rangle + \langle R(W, Y)X, Z \rangle. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее выражение с левой частью в (1.33) (в особенности их вторые члены), видим, что его можно получить из (1.33) циклической перестановкой $Z \rightarrow W \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow Z$. Применяя эту перестановку еще раз и обращая порядок слагаемых, видим, что последнее выражение, а следовательно, и левая часть в (1.33), равна

$$\langle R(Y, X)Z, W \rangle + \langle R(W, Z)Y, X \rangle.$$

Ввиду (1.29), соответствующие слагаемые в этом выражении и в левой части в (1.33) противоположны друг другу. Это доказывает равенство (1.33) и теорему. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Тензор $\langle R(X, Y)Z, W \rangle$ называется *ковариантным тензором кривизны* риманова многообразия (M, g) .

Теперь мы вычислим компоненты R_{ijk}^l (соответственно, R_{ijkl}) (ковариантного) тензора кривизны риманова многообразия (M, g) в карте (U, ϕ, V) на M в терминах символов Кристоффеля Γ_{ij}^m . Вследствие определения тензора кривизны и предыдущего раздела

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle = \langle R_{ijk}^m e_m, e_l \rangle = g_{lm} R_{ijk}^m = \\ &= \langle \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_k - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_k - \nabla_{[e_i, e_j]} e_k, e_l \rangle = \\ &= \langle \nabla_{e_i} \Gamma_{jk}^m e_m - \nabla_{e_j} \Gamma_{ik}^m e_m, e_l \rangle = \\ &= \left\langle \left(\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^s + \frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial x^i} - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^s - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x^j} \right) e_s, e_l \right\rangle = \\ &= g_{ls} \left(\Gamma_{im}^s \Gamma_{jk}^m + \frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial x^i} - \Gamma_{jm}^s \Gamma_{ik}^m - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x^j} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$R_{ijk}^s = \Gamma_{im}^s \Gamma_{jk}^m + \frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial x^i} - \Gamma_{jm}^s \Gamma_{ik}^m - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x^j}, \quad (1.34)$$

$$R_{ijkl} = g_{ls} R_{ijk}^s. \quad (1.35)$$

В терминах компонент, свойства симметрии (1.29), (1.30), (1.31) и (1.32) можно записать соответственно в виде равенств

$$R_{ijk}^s = -R_{jik}^s, \quad (1.36)$$

$$R_{ijk}^s + R_{jki}^s + R_{kij}^s = 0, \quad (1.37)$$

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}, \quad (1.38)$$

$$R_{ijkl} = R_{klij}. \quad (1.39)$$

Кроме того, из (1.35) и (1.36) (соответственно, (1.37)) мы получаем

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}, \quad (1.40)$$

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0. \quad (1.41)$$

1.3.3. Тензор Риччи многообразия с ковариантной производной. Напомним, что *след* $\text{trace}(l)$ линейного отображения $l : V \rightarrow V$ конечномерного векторного пространства V в себя есть сумма всех диагональных элементов матрицы (l) отображения l в каком-нибудь базисе e пространства V . Это определение не зависит от выбора e .

Предположим теперь, что R — тензор кривизны линейной связности ∇ на гладком многообразии M и X, Y — гладкие векторные поля на M . Тогда функция

$$R(\cdot, X)Y : Z \in F^\infty(M) \rightarrow R(Z, X)Y \in F^\infty(M)$$

является $(1, 1)$ -тензором на M . Следовательно, по теореме 1.7 для каждой точки $x \in M$ этот тензор корректно определяет $\mathbb{R}$ -линейное отображение

$$R(\cdot, X(x))Y(x) : w \in M_x \rightarrow R(w, X(x))Y(x) \in M_x.$$

Тогда нетрудно увидеть, что формула

$$\text{Ric}(X, Y)(x) = \text{trace } R(\cdot, X(x))Y(x) \quad (1.42)$$

определяет гладкий $(0, 2)$ -тензор на M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Тензор Ric называется *тензором Риччи* линейной связности ∇ на M .

В терминах компонент, если R_{ijk}^l — компоненты тензора кривизны R в карте (U, ϕ, V) , то компоненты тензора Риччи Ric в карте (U, ϕ, V) равны

$$\text{Ric}_{jk} = R_{ljk}^l. \quad (1.43)$$

1.3.4. Тензор Риччи риманова многообразия.

Теорема 1.13. Тензор Риччи связности Леви-Чивита для гладкого риманова многообразия (M, g) симметричен, т. е.

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}(Y, X)$$

для любых гладких векторных полей X и Y на M .

◁ Возьмем произвольную точку $x \in M^n$ и некоторый ортонормированный базис $\{v_1, \dots, v_n\}$ в евклидовом пространстве $(M_x, g(x))$.

Матрица линейного отображения $R(\cdot, X(x))Y(x) : M_x \rightarrow M_x$ в базисе $\{v_1, \dots, v_n\}$ равна $(a_{ij}) = (\langle R(v_j, X(x))Y(x), v_i \rangle)$. Тогда вследствие свойств (1.29), (1.31) и (1.32)

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y)(x) &= \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \langle R(v_i, X(x))Y(x), v_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \langle R(Y(x), v_i)v_i, X(x) \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \langle R(v_i, Y(x))X(x), v_i \rangle = \text{Ric}(Y, X)(x). \triangleright \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Риманово многообразие (M, g) называется *многообразием Эйнштейна*, если $\text{Ric} = \lambda g$ для некоторого числа λ .

1.3.5. Кривизны римановых многообразий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Пусть σ — 2-плоскость в касательном векторном пространстве M_x к риманову многообразию (M^n, g) , $n \geq 2$, и u, v — два линейно независимых вектора в σ . *Секционная кривизна* $K(\sigma)$ многообразия (M^n, g) в направлении σ — число

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(u, v)v, u \rangle}{|u \wedge v|},$$

где

$$|u \wedge v| = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2.$$

Используя свойства тензора кривизны R , легко проверить, что $K(\sigma)$ не зависит от выбора базиса $\{u, v\}$ в σ . В частности, если $\{u, v\}$ — ортонормированный базис в σ , то

$$K(\sigma) = \langle R(u, v)v, u \rangle. \quad (1.44)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Пусть (M^n, g) , $n \geq 2$, — риманово многообразие. *Кривизна Риччи* в направлении вектора $v \in M_x$ определяется как

$$\text{ric}(v) = \text{Ric}(v, v).$$

Обычно $\text{ric}(v)$ вычисляется в направлении единичного вектора $v \in (M_x, g(x))$, $x \in M$. В этом случае можно включить v в некоторый ортонормированный базис $\{v_1 = v, v_2, \dots, v_n\}$ пространства

$(M_x, g(x))$. Тогда, используя формулу из доказательства теоремы 1.13, мы получаем

$$\text{ric}(v) = \text{Ric}(v, v) = \sum_{i=1}^n \langle R(v_i, v)v, v_i \rangle = \sum_{i=2}^n K(\sigma_i), \quad (1.45)$$

где σ_i — линейная оболочка векторов v и v_i , $i \geq 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. Пусть (M^n, g) , $n \geq 2$, — риманово многообразие. *Скалярная кривизна* многообразия (M, g) в точке $x \in M$ — вещественное число

$$\text{sc}(x) = \sum_{i=1}^n \text{ric}(v_i) = \sum_{i,j=1}^n \langle R(v_i, v_j)v_j, v_i \rangle, \quad (1.46)$$

где $\{v_1, \dots, v_n\}$ — любой ортонормированный базис в $(M_x, g(x))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Определение не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{v_1, \dots, v_n\}$ в $(M_x, g(x))$.

Существует следующая классическая

Теорема 1.14 (Ф. ШУР). Пусть (M^n, g) — риманово многообразие размерности $n \geq 3$. Если для каждой точки x в M все секционные кривизны 2-плоскостей в точке x равны (числу, которое может и не зависеть от x), то (M, g) имеет постоянную секционную кривизну.

Важные результаты о проблемах устойчивости в теореме Ф. Шура получил И. Г. Николаев в статье [186]. Аналогично теореме Шура (см. замечание к разделу 3.6 в [37]), справедлива

Теорема 1.15. Риманово многообразие (M^n, g) размерности $n \geq 3$ эйнштейново тогда и только тогда, когда $\text{Ric} = \lambda g$, где λ — некоторая гладкая вещественная функция на M .

1.4. Основы геометрии римановых многообразий

1.4.1. Параметризация кривой длиной дуги. Мы будем использовать общее соглашение, что отображение $f : S \rightarrow M$ подмногожества S в гладком многообразии N называется *гладким*, если существует открытое подмногообразие $U \subset N$, где $S \subset U$, и гладкое расширение $F : U \rightarrow N$ отображения f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. *Гладким путем* в гладком многообразии M называется гладкое отображение $c : [a, b] \rightarrow M$, где $[a, b]$, $a < b$, — конечный отрезок в $\mathbb{R}$. Гладкий путь c называется *регулярным*, если $c'(t) := Tc(t, 1)$ — ненулевой вектор в $M_{c(t)}$ для каждого числа $t \in [a, b]$. Будем говорить, что гладкий путь c в M *эквивалентен* гладкому пути $c_1 : [a_1, b_1] \rightarrow M$ ($c \sim c_1$), если существует гладкое отображение ϕ отрезка $[a, b]$ на отрезок $[a_1, b_1]$ такое, что $\phi'(t) > 0$, $a \leq t \leq b$ и $c = c_1 \circ \phi$. Ясно тогда, что c регулярен тогда и только тогда, когда c_1 регулярен. Класс эквивалентности какого-нибудь гладкого пути относительно отношения эквивалентности $\sim$ называется *гладкой ориентированной кривой* в M (*регулярной*, если некоторый ее представитель регулярен). Любой представитель гладкой кривой в M называется ее *параметризацией*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. По определению, *длина* $l = l(c)$ гладкого пути $c : [a, b] \rightarrow M$ в гладком римановом многообразии (M, g) — число

$$l = l(c) = \int_a^b |c'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{g(c'(t), c'(t))} dt. \quad (1.47)$$

Предложение 1.11. *Длина гладкой кривой, определяемой некоторым путем c в римановом многообразии (M, g) , не зависит от ее параметризации, т. е. если $c \sim c_1$, то $l(c) = l(c_1)$.*

◁ Пусть $c : [a, b] \rightarrow M$, $c_1 : [a_1, b_1] \rightarrow M$ и $c = c_1 \circ \phi$. Тогда

$$\begin{aligned} c'(t) &= Tc(t, 1) = T(c_1 \circ \phi)(t, 1) = Tc_1(T\phi(t, 1)) = \\ &= Tc_1((\phi(t), \phi'(t))) = \phi'(t)c'_1(\phi(t)), \end{aligned}$$

и мы получаем, что

$$\begin{aligned} |c'(t)| &= \sqrt{g(c'(t), c'(t))} = \sqrt{g(\phi'(t)c'_1(\phi(t)), \phi'(t)c'_1(\phi(t)))} = \\ &= \phi'(t)\sqrt{g(c'_1(t), c'_1(t))} = \phi'(t)|c'_1(\phi(t))| \end{aligned}$$

вследствие свойств метрического тензора. Используя теперь замену $\tau = \phi(t)$ переменных в определенном интеграле, получаем

$$l(c) = \int_a^b |c'(t)| dt = \int_a^b |c'_1(\phi(t))| \phi'(t) dt = \int_{a_1}^{b_1} |c'_1(\tau)| d\tau = l(c_1). \triangleright$$

Удобно использовать специальную параметризацию регулярной гладкой кривой, определяемую гладким путем $c : [a, b] \rightarrow (M, g)$, длиной дуги пути c :

$$s(t) = \int_a^t |c'(\tau)| d\tau, \quad a \leq t \leq b. \quad (1.48)$$

Ясно, что $s(a) = 0$, $s(b) = l(c) = l$ и $s'(t) = |c'(t)| > 0$. Тогда по теореме об обратном отображении для одной переменной существует гладкий диффеоморфизм $\phi(s) = t(s)$ отрезка $[0, l]$ на $[a, b]$ такой, что $\phi(s(t)) = t$, $a \leq t \leq b$. Теперь можно определить гладкий регулярный путь $c_1 : [0, l] \rightarrow M$ по формуле

$$c_1(s) = c(t(s)), \quad s \in [0, l]. \quad (1.49)$$

Ясно, что $c(t) = c_1(s(t))$, $s'(t) > 0$, $a \leq t \leq b$, так что $c \sim c_1$. Путь $c_1 = c_1(s)$, определенный формулой (1.49), называется *параметризацией (соответствующей) кривой длиной дуги*. Иногда мы будем использовать вместо s параметр σ , где $a \leq \sigma \leq b$, $s = K\sigma + \text{const}$, $K = \text{const} > 0$, для соответствующих $a < b$ и говорить, что путь $c_2(\sigma) = c_1(K\sigma + \text{const})$, $a \leq \sigma \leq b$, *параметризован пропорционально длине дуги*.

Предложение 1.12. Гладкий путь $c = c(t) : [a, b] \rightarrow (M, g)$ параметризован пропорционально длине дуги тогда и только тогда, когда $|c'(t)| = K$, $a \leq t \leq b$, где K — некоторое положительное число. При этом $l(c) = K(b - a)$ и c параметризован длиной дуги тогда и только тогда, когда $K = 1$ и $a = 0$.

1.4.2. Первая вариация длины кривой. Пусть $f : N \rightarrow M$ — гладкое отображение и M имеет линейную связность ∇ . Векторное поле вдоль f определяется как гладкое отображение $W : N \rightarrow TM$ такое, что для каждой точки $x \in N$, $W(x) \in M_{f(x)}$. Другими словами, должно выполняться соотношение $\pi_M \circ W = f$. Такое векторное поле W является *касательным к f* , если существует гладкое векторное поле $\tilde{W} : N \rightarrow TN$ на N такое, что $W = Tf \circ \tilde{W}$. Множество $F^\infty(f)$ (соответственно, $F_t^\infty(f)$) всех гладких (касательных) векторных полей вдоль f есть $C^\infty(N)$ -модуль относительно поточечного умножения $(\phi W)(x) = \phi(x)W(x)$, $x \in N$.

Из свойств 2) и 4) связности ∇ в разделе 1.2.3 и формул (1.10), (1.11) легко выводится, что для произвольных гладких векторных полей X, Y на M и точки $y \in M$, $\nabla_X Y(y)$ зависит только от $X(y)$ и значений Y в произвольной окрестности U точки y . На самом деле нетрудно показать, что $\nabla_X Y(y)$ определяется $X(y)$ и сужением поля Y на произвольный путь с касательным вектором $X(y)$. Это позволяет корректно определить гладкое векторное поле $\nabla_V W$ вдоль f для любых гладких векторных полей V и W вдоль f , если V касательно к f , со свойствами, аналогичными предыдущим:

- 1) $\nabla_{V_1+V_2} W = \nabla_{V_1} W + \nabla_{V_2} W$,
- 2) $\nabla_{\phi V} W = \phi \nabla_V W$, $\phi \in C^\infty N$,
- 3) $\nabla_V (W_1 + W_2) = \nabla_V W_1 + \nabla_V W_2$,
- 4) $\nabla_V (\phi W) = \phi \nabla_V W + (\tilde{V}\phi)W$, где $V = Tf \circ \tilde{V}$.

Мы не будем обсуждать это детально, но дадим координатное описание. Пусть $x \in N$, $f(x) \in U$, где $(U, \phi, \tilde{U})$ — карта на M , $\{e_1, \dots, e_n\}$ и Γ_{ij}^k — соответствующие гладкие векторные поля и символы Кристоффеля для ∇ в карте $(U, \phi, \tilde{U})$. Тогда $f^{-1}(U)$ — открытая окрестность точки x в N , и сужения векторных полей V и W на $f^{-1}(U)$ можно представить в виде

$$V = \xi^i(e_i \circ f), \quad W = \eta^j(e_j \circ f),$$

где ξ^i и η^j — гладкие вещественные функции на $f^{-1}(U)$. Тогда сужение $\nabla_V W$ на $f^{-1}(U)$ можно определить как

$$\nabla_V W = (\xi^i \eta^j (\Gamma_{ij}^k \circ f) + \tilde{V} \eta^k)(e_k \circ f). \quad (1.50)$$

Если теперь V, W, Z — гладкие векторные поля вдоль f и V, W касаются f , то можно определить *тензор кривизны*

$$R(V, W)Z = \nabla_V \nabla_W Z - \nabla_W \nabla_V Z - \nabla_{Tf \circ [\tilde{V}, \tilde{W}]} Z. \quad (1.51)$$

Используя приведенные ранее компонентные выражения объектов в случае карт на N и M , нетрудно (хотя несколько хлопотно и скучно) проверить следующие утверждения. Для каждой точки $x \in N$

$$R(V, W)Z(x) = R(V(x), W(x))Z(x), \quad (1.52)$$

где справа — тензор кривизны пространства со связностью (M, ∇) , так что слева мы тоже получаем тензор. Если (M, g) гладкое риманово многообразие и ∇ — его связность Леви-Чивита, то для любых

векторных полей V, W, Z вдоль f , где V касается f , имеются обычные свойства

$$\tilde{V}g(W, Z) = g(\nabla_V W, Z) + g(W, \nabla_V Z); \quad (1.53)$$

если W также касается f , то

$$\nabla_V W - \nabla_W V = Tf \circ [\tilde{V}, \tilde{W}]. \quad (1.54)$$

Пусть гладкий путь $c = c(t) : [a, b] \rightarrow (M, g)$ параметризован пропорционально длине дуги и $|c'(t)| = K$, $a \leq t \leq b$. Гладкое отображение $C = C(t, s)$, $(t, s) \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, называется *вариацией пути c* , если $C(t, 0) = c(t)$ для всех $t \in [a, b]$. Это *вариация c фиксированными концами*, если $C(a, s) = c(a)$ и $C(b, s) = c(b)$ для всех $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Рассмотрим такую вариацию. Пусть $X = TC \circ \partial/\partial t$, $Y = TC \circ \partial/\partial s$ — касательные векторные поля вдоль C . Для любого фиксированного $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ отображение $c_s(t) = C(t, s)$, $t \in [a, b]$, является гладким путем в (M, g) , и вследствие (1.47)

$$l(s) := l(c_s) = \int_a^b |X(t, s)| dt = \int_a^b \sqrt{g(X(t, s), X(t, s))} dt. \quad (1.55)$$

Так как $|c'(t)| = K > 0$, а $[a, b]$ компактно, то по непрерывности можно предполагать, что подынтегральное выражение в формуле (1.55) положительно (иначе можно взять меньшее положительное ε). Тогда функция $l(s)$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$, гладкая. Вычислим ее производную $l'(0)$ по s в $s = 0$. Вследствие формул (1.53) и (1.54) получим

$$\begin{aligned} l'(0) &= \frac{1}{2K} \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial s} g(X(t, s), X(t, s)) \right]_{s=0} dt = \\ &= \frac{1}{2K} \int_a^b (Yg(X, X))(t, 0) dt = \frac{1}{K} \int_a^b g(\nabla_Y X, X)(t, 0) dt = \\ &= \frac{1}{K} \int_a^b g(\nabla_X Y, X)(t, 0) dt = \frac{1}{K} \int_a^b [Xg(Y, X)(t, 0) - \\ &- g(Y, \nabla_X X)(t, 0)] dt = -\frac{1}{K} \int_a^b g(Y, \nabla_X X)(t, 0) dt + \frac{1}{K} [g(Y, X)]_a^b. \end{aligned}$$

Сохраняя обозначения X, Y для ограничений этих векторных полей на $c(\cdot) = C(\cdot, 0)$, можно записать полученный результат в виде

$$l'(0) = -\frac{1}{K} \int_a^b g((\nabla_{c'} c')(t), Y(t)) dt + \frac{1}{K} \left[g(Y(\cdot), c'(\cdot)) \right]_a^b. \quad (1.56)$$

Если C — вариация с фиксированными концами, то

$$l'(0) = -\frac{1}{K} \int_a^b g((\nabla_{c'} c')(t), Y(t)) dt. \quad (1.57)$$

Формулы (1.56) и (1.57) называются *формулами первой вариации длины кривой*.

1.4.3. Геодезические.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. Гладкая кривая $c : [a, b] \rightarrow (M, g)$, параметризованная пропорционально длине дуги, называется *геодезической*, если для каждой ее вариации $C : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (M, g)$ с фиксированными концами $l'(0) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30. Гладкое векторное поле V вдоль гладкой кривой $c : [a, b] \rightarrow (M, g)$ называется *параллельным* (вдоль c), если $\nabla_{c'} V = 0$.

Теорема 1.16. Гладкий путь $c : [a, b] \rightarrow (M, g)$ является геодезической тогда и только тогда, когда его векторное поле касательных c' параллельно вдоль c .

◁ *Достаточность.* Прежде всего получаем, что

$$\frac{d}{dt} g(c'(t), c'(t)) = c'(t)g(c', c') = 2g((\nabla_{c'} c')(t), c'(t)) = 0,$$

т. е. $|c'(t)| \equiv K$ для некоторого числа K , которое можно считать положительным. Следовательно, к пути c применима формула (1.57), из которой следует, что $l'(0) = 0$. Таким образом, c — геодезическая.

Необходимость. Пусть $c : [a, b] \rightarrow (M^n, g)$ — геодезическая. Из определения следует, что любая часть $c : [a_1, b_1] \rightarrow (M, g)$, $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, пути c — геодезическая. Предположим, что $c([a_1, b_1]) \subset U$, где (U, ϕ, V) — некоторая карта в M . Сохраняя то же обозначение $[a, b]$

для $[a_1, b_1]$, мы можем применить формулу (1.57). По лемме 1.1, существует гладкая функция $\chi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, которая положительна внутри $[a, b]$ и равна нулю при a и b . Пусть $x^m(t) = (x^m \circ \phi \circ c)(t)$ и $\xi^m(t)$ — соответственно координаты пути c и компоненты векторного поля $(\nabla_{c'} c')(t)$ в карте (U, ϕ, V) , $t \in [a, b]$, $m = 1, \dots, n$. Тогда формула

$$(x^m \circ \phi \circ C)(t, s) = x^m(t) + s\chi(t)\xi^m(t), \quad (t, s) \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon),$$

определяет некоторую вариацию C пути c с фиксированными концами для малого $\varepsilon > 0$. При этом

$$Y(t) = (TC \circ \partial/\partial s)(t, 0) = \chi(t)(\nabla_{c'} c')(t).$$

В этом случае формула (1.57) дает нам

$$l'(0) = -\frac{1}{K} \int_a^b \chi(t) g((\nabla_{c'} c')(t), (\nabla_{c'} c')(t)) dt. \quad (1.58)$$

Это число будет отрицательным, если $(\nabla_{c'} c')(t) \neq 0$ хотя бы в одной точке t внутри $[a, b]$, что невозможно по определению геодезической. Поэтому $(\nabla_{c'} c')(t) = 0$ для всех $t \in [a_1, b_1]$, а следовательно, и для всех $t \in [a, b]$. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31. Гладкое векторное поле Y вдоль геодезической $c = c(t)$, $a \leq t \leq b$, называется *полем Якоби* (вдоль c), если для векторного поля касательных $X = c'$,

$$\nabla_X \nabla_X Y + R(Y, X)X = 0. \quad (1.59)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 32. Гладкое отображение $C(t, s)$, $(t, s) \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется *вариацией геодезических*, если для каждого фиксированного числа $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, путь $c_s(t) = C(t, s)$, $t \in [a, b]$, является геодезической.

Предложение 1.13. Если $C(t, s)$, $(t, s) \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, — вариация геодезических, то для каждого числа $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, поле $Y_s(t) = TC(t, s)(\partial/\partial s)$, $t \in [a, b]$, является полем Якоби вдоль c_s .

◁ Пусть $X = TC \circ (\partial/\partial t)$, а W — произвольное гладкое векторное поле вдоль C . Тогда

$$\begin{aligned} Y(g(X, W)) &= g(\nabla_Y X, W) + g(X, \nabla_Y W), \\ X(Y(g(X, W))) &= g(\nabla_X \nabla_Y X, W) + g(\nabla_Y X, \nabla_X W) + \\ &+ X(g(X, \nabla_Y W)) = g(\nabla_X \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_X X, W) - \\ &- g(\nabla_X \nabla_Y X, W) + X(g(\nabla_Y X, W)) + X(g(X, \nabla_Y W)) = \\ &= g(R(X, Y)X, W) - g(\nabla_X \nabla_Y X, W) + X(Y(g(X, W))). \end{aligned}$$

Отсюда вследствие произвольности векторного поля W и свойств тензоров g, R получаем тождество (1.59). ▷

1.4.4. Геодезический поток. Теорема 1.16 утверждает, что гладкий путь $c : [a, b] \rightarrow (M, g)$ в римановом многообразии (M^n, g) является геодезической тогда и только тогда, когда его векторное поле касательных $c' = Tc \circ d/dx$ параллельно вдоль c , т. е.

$$\nabla_{c'} c' = 0. \quad (1.60)$$

Мы доказали раньше, что тогда $|c'(t)| = K$ для всех $t \in [a, b]$ и некоторой постоянной $K \geq 0$, так что c параметризован пропорционально длине дуги. Если $c([a, b]) \subset U$, где (U, ϕ, V) — карта в M , то вследствие свойств ковариантной производной из определения 17 и формулы (1.26) уравнение (1.60) эквивалентно следующей системе о. д. у. второго порядка:

$$\frac{d^2 x^m}{dt^2}(t) + \Gamma_{ij}^m(x^1(t), \dots, x^n(t)) \frac{dx^i}{dt}(t) \frac{dx^j}{dt}(t) = 0, \quad t \in [a, b], \quad (1.61)$$

где

$$x^i(t) = x^i(\phi \circ c(t)), \quad \Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ij}^m \circ \phi^{-1},$$

и $x^1, \dots, x^n$ — стандартные координатные функции в открытом подмножестве $V \subset \mathbb{R}^n$. В свою очередь, система (1.61) эквивалентна следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx^i}{dt}(t) = \xi^i(t), \quad \frac{d\xi^m}{dt}(t) = -\Gamma_{ij}^m(x^1(t), \dots, x^n(t)) \xi^i(t) \xi^j(t). \quad (1.62)$$

Применяя эти уравнения (может быть, к части кривой), легко получаем

Предложение 1.14. Если $l : [c, d] \rightarrow [a, b]$ аффинное сюръективное отображение с $l'(\tau) \equiv k$, $\tau \in [c, d]$, и $c : [a, b] \rightarrow (M, g)$ — геодезическая, то $\sigma(\tau) = (c \circ l)(\tau)$, $\tau \in [c, d]$, также является геодезической.

Карта (U, ϕ, V) на M^n определяет карту $(\pi^{-1}(U), \psi, V \times \mathbb{R}^n)$ на TM с координатными функциями $x^1, \dots, x^n; \xi^1, \dots, \xi^n$, где $\pi : TM \rightarrow M$ — каноническая проекция. Можно рассматривать векторное поле касательных $c'(t)$ вдоль гладкого пути $c(t)$, $t \in [a, b]$, в M как гладкий путь в TM со свойством $\pi \circ c' = c$. Если $c([a, b]) \subset U$, то

$$(\psi \circ c')(t) = \left(x^1(t), \dots, x^n(t); \xi^1(t) = \frac{dx^1}{dt}(t), \dots, \xi^n(t) = \frac{dx^n}{dt}(t) \right). \quad (1.63)$$

Сравнивая уравнения (1.62) и (1.63), видим, что путь $c(t)$, $a \leq t \leq b$, — геодезическая тогда и только тогда, когда $c'(t)$, $a \leq t \leq b$, — интегральная кривая гладкого векторного поля F на TM с компонентами

$$\xi^1, \dots, \xi^n; -\Gamma_{ij}^1(x^1, \dots, x^n)\xi^i\xi^j, \dots, -\Gamma_{ij}^n(x^1, \dots, x^n)\xi^i\xi^j$$

в карте $(\pi^{-1}(U), \psi, V \times \mathbb{R}^n)$. Ясно, что определение векторного поля F не зависит от выбора карты и F — корректно определенное гладкое векторное поле на TM .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33. Так определенное векторное поле F на TM называется *геодезическим векторным полем*.

Из уравнений (1.62) и теоремы существования и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с данными начальными условиями следует, что и обратное к предыдущему утверждение верно, так что мы получаем:

Теорема 1.17. Если $\psi(t)$, $a \leq t \leq b$, — интегральная кривая векторного поля F (на TM), то $c(t) := (\pi \circ \psi)(t)$, $a \leq t \leq b$, — геодезическая в (M, g) и $c'(t) = \psi(t)$, $a \leq t \leq b$. Каждая геодезическая на (M, g) имеет такой вид.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34. Поток Ψ , определенный геодезическим векторным полем F на TM для риманова многообразия (M, g) , называется *геодезическим потоком* многообразия (M, g) .

Помимо общих свойств потоков, геодезический поток имеет специальные свойства.

Теорема 1.18. Если Ψ — геодезический поток на TM (геодезического) векторного поля F на TM для риманова многообразия (M, g) , то

$$\Psi(sv, t) = s\Psi(v, st) \quad \text{для всех } s, t \in \mathbb{R}, v \in TM. \quad (1.64)$$

Кроме того,

$$T\pi \circ F = \text{id}_{TM} = \pi_{TM} \circ F. \quad (1.65)$$

◁ Можно переформулировать утверждения теоремы 1.17 так:

$$c_v(t) := (\pi \circ \Psi)(v, t), \quad (v, t) \in W, \quad (1.66)$$

$$c'_v(t) = \Psi(v, t), \quad (v, t) \in W; \quad c'_v(0) = \Psi(v, 0) = v, \quad (1.67)$$

где $c_v(t)$, $t \in I_v$, — геодезическая кривая в (M, g) с начальными данными

$$c_v(0) = \pi(v), \quad c'_v(t) = v.$$

Тогда вследствие предложения 1.14 для любого числа $s \in \mathbb{R}$ кривая

$$\sigma(t) = c_v(st), \quad st \in I_v,$$

является геодезической в (M, g) с касательными векторами $\sigma'(t) = sc'_v(st)$ и начальными данными

$$\sigma(0) = c_v(0) = \pi(v) = \pi(sv), \quad \sigma'(0) = sc'_v(0) = sv.$$

По теореме 1.17 и определению Ψ это эквивалентно уравнению (1.64).

Теперь второе равенство в (1.65) следует из общего определения векторных полей. Дифференцируя уравнение (1.66) и используя уравнение (1.67), получаем

$$v = c'_v(0) = T\pi(\Psi'_v(0)) = T\pi(F(\Psi_v(0))) = T\pi(F(v))$$

для каждого вектора $v \in TM$. Мы доказали первое равенство в (1.65). ▷

1.4.5. Экспоненциальное отображение. В обозначениях предыдущего раздела, определим множество

$$\widetilde{W} := \{v \in TM \mid (v, 1) \in W\}.$$

Так как W — открытая окрестность множества $TM \times \{0\}$, мы получаем как следствие уравнения (1.64), что $\widetilde{W}$ — открытая окрестность множества T_0M всех нулевых векторов в TM ; T_0M естественно отождествляется с M . Экспоненциальное отображение $\text{Exp} : \widetilde{W} \rightarrow M$ риманова многообразия (M, g) определяется формулой

$$\text{Exp}(v) := \pi(\Psi(v, 1)), \quad v \in \widetilde{W}. \quad (1.68)$$

Если x — какая-нибудь точка из M , то ограничение отображения Exp на пересечение $M_x \cap \widetilde{W} := \widetilde{W}_x$ называется *экспоненциальным отображением в точке x* и обозначается Exp_x . Так как $\widetilde{W}$ — открытая окрестность множества T_0M , то из уравнения (1.64) следует, что $\widetilde{W}_x$ — открытая звездная окрестность нулевого вектора 0_x в M_x . Это значит, что для любого вектора $w \in \widetilde{W}_x$ и каждого числа $s \in [0, 1]$, также $sw \in \widetilde{W}_x$. Отметим следующее

Предложение 1.15. Для любого риманова многообразия (M, g) следующие утверждения эквивалентны:

- 1) геодезический поток Ψ пространства (M, g) полный;
- 2) область определения экспоненциального отображения Exp пространства (M, g) равна TM ;
- 3) есть точка $x \in M$ с областью определения экспоненциального отображения Exp_x пространства (M, g) в точке x , равной M_x .

Набросок доказательства. Эквивалентность утверждений 1) и 2) очевидна. Ясно, что из 2) вытекает 3). Мы обсудим утверждение 3) $\implies$ 2) позже.

Теорема 1.19. Для каждой точки $x \in (M, g)$ существует наибольшее число $0 < r_x \leq +\infty$ такое, что Exp_x определено на $V_x = U(0_x, r_x) \subset M_x$, где $U(0_x, r_x)$ — открытый шар в M_x с центром в нуле 0_x и радиусом r_x , и является диффеоморфизмом этого множества на открытую окрестность $U_x = \text{Exp}_x(V_x)$ точки x в M .

$\triangleleft$ Так как $\Psi(0_x, t) = 0_x$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то

$$\text{Exp}_x(0_x) := \pi(\Psi(0_x, 1)) = \pi(0_x) = x.$$

Утверждение теоремы будет следствием теоремы об обратном отображении, если мы докажем, что

$$T(\text{Exp}_x)(0_x) = \text{id}_{M_x} \quad (1.69)$$

$((M_x)_{0_x})$ естественно отождествляется с M_x). Если v — произвольный вектор в M_x и $t \in \mathbb{R}$ достаточно близко к 0, то вследствие определения и формул (1.64) и (1.66)

$$\text{Exp}_x(tv) = \pi(\Psi(tv, 1)) = \pi(\Psi(v, t)) = c_v(t). \quad (1.70)$$

Теперь из (1.67) и (1.70) следует, что

$$T(\text{Exp}_x)(0_x)(v) = c'_v(0) = v.$$

Мы доказали равенство (1.69) и теорему. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35. Карта $(U_x, \phi_x = (\text{Exp}_x)^{-1}, V_x)$, построенная в теореме 1.19, называется *римановой нормальной системой координат в точке x* (если мы используем также какие-нибудь прямоугольные евклидовы координаты в V_x с началом 0_x). Если геодезический поток Ψ пространства (M, g) полный, то число r_x из теоремы 1.19 называется *радиусом инъективности* пространства (M, g) в точке x и обозначается $\text{Radinj}(x)$.

1.4.6. Кратчайшие пути.

Теорема 1.20. Пусть y — произвольная точка в $U_x - \{x\}$ и

$$c = c(t) = \text{Exp}_x(tv), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad |v| = r_0,$$

— геодезическая в (M, g) с концами x и y . Тогда длина $\tilde{l}$ произвольного кусочно гладкого пути $\tilde{c}(s)$, $a \leq s \leq b$, с концами x и y не меньше длины $l = r_0$ геодезической c . Более того, $\tilde{l} = l$ тогда и только тогда, когда путь $\tilde{c}$ получается из c заменой параметра.

$\triangleleft$ Предположим сначала, что $\tilde{c}([a, b]) \subset U_x$. Можно считать, что $\tilde{c}(s) \neq x$ при $s > a$. Определим вариацию геодезических по формуле

$$C = C(t, s) = \text{Exp}_x(t(\text{Exp}_x^{-1}(\tilde{c}(s)))), \quad (t, s) \in [0, 1] \times [a, b].$$

При каждом $s > a$ путь $c_s(t) = C(t, s)$, $t \in [0, 1]$, является геодезической, параметризованной пропорционально длине дуги, с длиной

$l(s) > 0$, причем $c_b = c$. Вследствие этого, теоремы 1.16 и формулы (1.56)

$$l'(s) = \frac{1}{l(s)} \left[g(Y(\cdot, s), c'_s(\cdot)) \right]_0^1 = g\left(\tilde{c}'(s), \frac{c'_s(1)}{|c'_s(1)|}\right) \leq |\tilde{c}'(s)|. \quad (1.71)$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$l = r_0 = l(c) = l(b) = l(b) - l(a) = \int_a^b l'(s) ds \leq \int_a^b |\tilde{c}'(s)| ds = \tilde{l}.$$

Из полученных оценок ясно, что $\tilde{l} = l$ тогда и только тогда, когда для всех $s \in (a, b]$ в неравенстве из (1.71) достигается равенство, т. е. $\tilde{c}'(s) = |\tilde{c}'(s)| (c'_s(1)/|c'_s(1)|)$; это значит, что путь $\tilde{c}$ получается из геодезической c заменой параметра.

Если $\tilde{c}([a, b])$ не лежит в U_x , то по непрерывности существует число $a < d < b$ такое, что $\tilde{c}([a, d]) \subset U_x$ и $r_0 < r(d) = r_1 < r_x$, где $r(d) = |(\text{Exp}_x|_{V_x})^{-1}(\tilde{c}(d))|$. Тогда вследствие приведенных оценок,

$$\tilde{l} \geq l(\tilde{c}|_{[a, d]}) \geq r_1 > r_0 = l. \triangleright$$

Следствие 1.3. Если $c = c(t)$, $a \leq t \leq b$, — кратчайший кусочно гладкий путь в (M, g) с данными концами, параметризованный пропорционально длине дуги, то c — (гладкая) геодезическая в (M, g) .

1.4.7. Внутренняя метрика риманова многообразия. Через $\overline{xy}$ будем обозначать множество кусочно гладких путей c , соединяющих точки x и y (на заданном многообразии).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36. Пусть (M, g) — связное гладкое риманово многообразие. Расстояние $d(x, y)$ между точками x, y в M определяется формулой

$$d(x, y) = \inf_{\overline{xy}} l(c), \quad (1.72)$$

т. е. равно точной нижней границе длин всех кусочно гладких путей c в (M, g) , соединяющих точки x и y .

Предложение 1.16. Если (M, g) — связное риманово многообразие, то пара (M, d) , где $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, является метрическим пространством. При этом метрическая топология на (M, d) совпадает с исходной топологией на гладком многообразии M .

◁ Так как M — связное топологическое многообразие со второй аксиомой счетности, то оно линейно связно. Используя аппроксимацию путей кусочно гладкими путями, видим, что каждую точку x в M можно соединить с любой другой точкой y в M некоторым кусочно гладким путем c (с концами x и y). Тогда $0 \leq d(x, y) \leq l(c) < +\infty$ для любых двух точек $x, y \in M$.

Обращение ориентации пути не меняет его длину. Поэтому $d(x, y) = d(y, x)$. Неравенство треугольника следует непосредственно из определений. Неравенство $d(x, y) > 0$ при $x \neq y$, а также совпадение метрической и исходной топологий на M выводятся из теоремы 1.20 (или еще проще). ▷

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37. Метрика d на (связном) гладком римановом многообразии (M, g) называется *внутренней метрикой*.

1.4.8. Теоремы Хопфа-Ринова и Майерса. Существенным дополнением предложений 1.15 и 1.16 является

Теорема 1.21 (ХОПФ-РИНОВ). Для любого (связного гладкого) риманова многообразия (M, g) равносильны следующие утверждения:

- 1) метрическое пространство (M, d) полное;
- 2) область определения экспоненциального отображения Ехр многообразия (M, g) является TM ;
- 3) есть точка $x \in M$ с областью определения экспоненциального отображения Ехр_x пространства (M, g) в точке x , равной M_x ;
- 4) есть точка $x \in M$ такая, что каждый замкнутый шар $B(x, r)$, $0 \leq r < +\infty$, в (M, d) компактен.

◁ Ясно, что 2) $\Rightarrow$ 3) и 4) $\Rightarrow$ 1). Докажем, что 1) $\Rightarrow$ 2). Возьмем произвольную точку $x \in M$ и произвольный единичный вектор $v \in M_x$. Пусть T — множество всех вещественных чисел τ , для которых определено $\text{Ехр}_x(\tau v) = \text{Ехр}(\tau v)$. Напомним, что $\text{Ехр}(\tau v) = \Psi(1, \tau v) = \Psi(\tau, v)$, где Ψ — геодезический поток риманова многообразия (M, g) . Из второго общего свойства потоков, определяемых гладкими векторными полями, следует, что $T = I_v$ — открытая связная окрестность нуля в $\mathbb{R}$. Предположим, что $0 < \tau_0 = \sup T < +\infty$. По определению, для каждого числа $\tau \in (0, \tau_0)$, $\text{Ехр}_x(\tau v) = c_v(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, — отрезок геодезической в (M, g) с начальным касательным вектором $c'_v(0) = v$. Так как v — единичный вектор, то каждый такой отрезок параметризован длиной дуги. Следова-

тельно, $d(\text{Exp}_x(tv), \text{Exp}_x(sv)) \leq |t - s|$ для любых $t, s \in [0, \tau_0]$. Тогда вследствие полноты пространства (M, d) существует предел $\lim_{t \rightarrow \tau_0} \text{Exp}_x(tv) = \text{Exp}_x(\tau_0 v)$ и $\tau_0 \in T$. Противоречие. Вследствие формулы (1.64), произвола в выборе точки $x \in M$ и единичного вектора $v \in M_x$, доказано, что отображение Exp определено на всем множестве TM .

Для доказательства соотношения 3) $\Rightarrow$ 4) достаточно установить, что для каждой точки $y \in M$ существует кратчайшая геодезическая, соединяющая точки x и y . Действительно, тогда $B(x, r) = \text{Exp}_x((B(0_x, r)))$ (где $B(0_x, r) \subset (M_x, g(x))$) для каждого вещественного числа $r \geq 0$, и множество $B(x, r)$ компактно.

Из теоремы 1.20 следует, что утверждение верно, если $d(x, y) < r_x$, где r_x — радиус инъективности многообразия (M, g) в точке x . Пусть $s_0 := d(x, y) \geq r_x$ и s — некоторое число такое, что $0 < s < r_x$. Из определения внутренней метрики d следует, что для каждого натурального числа k существует точка z_k такая, что $d(x, z_k) = s$ и $d(x, z_k) + d(z_k, y) \leq s_0 + (1/k)$. Так как все точки z_k лежат в компактном шаре $B(x, s)$, то из последовательности z_k можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке z . По построению, $d(x, z) + d(z, y) = s_0 = d(x, y)$ и $d(x, z) = s$. Тогда вследствие теоремы 1.20 существует соединяющая точки x и z параметризованная длиной дуги кратчайшая геодезическая $\gamma(t) = \text{Exp}_x(tv)$, $0 \leq t \leq s$.

По условию $c(t) := \text{Exp}_x(tv)$ определено при всех $t \in [0, +\infty)$. Докажем, что множество S всех чисел $t \in [0, s_0]$ таких, что $d(x, c(t)) + d(c(t), y) = d(x, y)$, совпадает с отрезком $[0, s_0]$; тогда $c(s_0) = \text{Exp}_x(s_0 v) = y$ и утверждение будет доказано.

По построению $[0, s] \subset S$. Из неравенства треугольника для метрики d следует, что если $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq s_0$ и $t_2 \in S$, то $t_1 \in S$. Ясно, что множество S замкнуто. Пусть $s_1 \in S$ и $0 < s_1 < s_0$. Повторяя проведенное выше рассуждение для получения точки z с точкой $z_1 = c(s_1)$ вместо x , можно найти точку z_2 такую, что $d(z_1, z_2) + d(z_2, y) = d(z_1, y)$, $z_1 \neq z_2 \neq y$ и точки z_1 и z_2 соединяются некоторой параметризованной длиной кратчайшей геодезической $c_1(t)$, $s_1 \leq t \leq s_2 < s_0$. На основании следствия 1.3 и неравенства треугольника объединение кратчайших геодезических $c(t)$, $0 \leq t \leq s_1$, и c_1 даст некоторую параметризованную длиной дуги кратчайшую геодезическую, определенную на отрезке $[0, s_2]$. То-

гда вследствие единственности продолжения решений систем о. д. у. с гладкой правой частью должно выполняться тождество $c_1(t) = c(t)$, $s_1 \leq t \leq s_2$. Следовательно, $[0, s_2] \subset S$. Из доказанных свойств множества S вытекает, что $S = [0, s_0]$. $\triangleright$

Из теоремы 1.21 и следствия 1.3 вытекает

Следствие 1.4. Если метрическое пространство (M, d) , определяемое римановым многообразием (M, g) , полное, то любые две точки x, y в M можно соединить (не обязательно единственной) кратчайшей геодезической (M, g) , параметризованной длиной дуги.

Теорема 1.22 (МАЙЕРСА [180]). Если (M^n, g) — полное риманово многообразие, кривизна Риччи которого (для каждого единичного касательного к M^n вектора) не меньше $(n-1)k^2$, где $k > 0$, то многообразие M^n компактно, диаметр его (относительно внутренней метрики d) не превосходит π/k , а его фундаментальная группа конечна.

$\triangleleft$ Рассмотрим произвольную параметризованную длиной дуги геодезическую $c = c(t)$, $0 \leq t \leq a$, соединяющую точки x и y , где $a > 0$. Выберем произвольный ортонормированный базис $v_1, \dots, v_n$ в $(M_x, g(x))$ с условием $v_n = c'(0)$. Продолжим эти векторы до параллельных векторных полей $V_1, \dots, V_n$ вдоль c . При этом $V_n(t) = c'(t)$ и $V_1(t), \dots, V_n(t)$ — ортонормированный базис в $(M_{c(t)}, g(c(t)))$ для всех $t \in [0, a]$. Определим вариации геодезической c по формулам

$$C_i(t, s) = \text{Exp}(sf(t)V_i(t)), \quad (t, s) \in [0, a] \times (-\varepsilon, \varepsilon), \quad (1.73)$$

где

$$i = 1, \dots, n-1; \quad f(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right), \quad 0 \leq t \leq a.$$

Тогда

$$f(0) = f(a) = 0, \quad f(t) > 0, \quad 0 < t < a; \quad f'' + \frac{\pi^2}{a^2}f = 0. \quad (1.74)$$

Посчитаем вторые производные от длин кривых этих вариаций при $s = 0$ (первые равны нулю).

Определим векторные поля $X_i = TC_i \circ (\partial/\partial t)$ и $Y_i = TC_i \circ (\partial/\partial s)$ для $i = 1, \dots, n-1$. При каждом фиксированном $t_0 \in (0, a)$ кривые

$C_i(t_0, \cdot)$, $i = 1, \dots, n-1$, являются геодезическими. Поэтому вследствие предложения 1.13 каждое векторное поле X_i является полем Якоби вдоль геодезической $C_i(t_0, \cdot)$; при этом $X_i(t, 0) = c'(t)$ — единичные векторные поля вдоль c и

$$Y_i(t, s) = f(t)\tilde{Y}_i(t, s), \quad \nabla_{Y_i} X_i(t, 0) = \nabla_{X_i} Y_i(t, 0) = f'(t)V_i(t), \quad (1.75)$$

где $\tilde{Y}_i$ — единичные векторные поля. Отсюда, из гладкости тензора кривизны, компактности отрезка $[0, a]$ и непрерывной зависимости решений систем о.д.у. от начальных данных и независимой переменной следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $X_i(t, s) \neq 0$ для всех $(t, s) \in [0, a] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Будем считать, что это условие далее выполнено.

Тогда

$$l_i(s) = \int_0^a \sqrt{g(X_i, X_i)(t, s)} dt, \quad l'_i(s) = \int_0^a \frac{g(\nabla_{Y_i} X_i, X_i)}{|X_i|}(t, s) dt.$$

Вследствие последнего равенства в формуле (1.75)

$$g(\nabla_{Y_i} X_i, X_i)(t, 0) = g(f'(t)V_i(t), c'(t)) = 0.$$

Поэтому получаем вследствие сказанного ранее, что

$$\begin{aligned} l''_i(0) &= \int_0^a [g(\nabla_{Y_i} \nabla_{Y_i} X_i, X_i) + g(\nabla_{Y_i} X_i, \nabla_{Y_i} X_i)](t, 0) dt = \\ &= \int_0^a [-g(R(X_i, Y_i)Y_i, X_i)(t, 0) + g(f'(t)V_i(t), f'(t)V_i(t))] dt = \\ &= \int_0^a [-g(R(c', fV_i)(fV_i), c')(t) + f'(t)^2] dt = \\ &= \int_0^a [-f^2 K(c', V_i) + (f')^2](t) dt. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и используя условия (1.74), получаем

$$\int_0^a (f')^2(t) dt = - \int_0^a f f''(t) dt = \frac{\pi^2}{a^2} \int_0^a f^2(t) dt.$$

Наконец получаем

$$\begin{aligned}
 l_i''(0) &= - \int_0^a f(fK(c', V_i) + f'')(t) dt, \\
 \sum_i^{n-1} l_i''(0) &= - \int_0^a f \left(f \sum_i^{n-1} K(c', V_i) + (n-1)f'' \right)(t) dt = \\
 &= - \int_0^a f(t) (f(t) \operatorname{ric}(c'(t)) + (n-1)f''(t)) dt = \sum_i^{n-1} l_i''(0), \\
 \sum_i^{n-1} l_i''(0) &= \int_0^a f^2(t) \left(\frac{\pi^2(n-1)}{a^2} - \operatorname{ric}(c'(t)) \right) dt.
 \end{aligned}$$

По условию $\operatorname{ric}(c'(t)) \geq (n-1)k^2$ и если $a > \pi/k$, то подынтегральное выражение отрицательно при $0 < t < a$. Следовательно, хотя бы для одного $i = i_0$, $l_{i_0}''(0) < 0$ и $l_{i_0}'(0) = 0$. Поэтому параметризованная длиной дуги геодезическая $c(t)$, $0 \leq t \leq a$, не может быть кратчайшей, соединяющей точки x и y . Тогда $d(x, y) \leq \pi/k$ вследствие произвола в выборе такой соединяющей их геодезической и доказательства теоремы 1.21, и $\operatorname{diam}(M) \leq \pi/k$ вследствие произвола в выборе самих точек x и y . Тогда (M, d) компактно вследствие теоремы 1.21. Поскольку все эти заключения верны и для универсальной накрывающей $\widetilde{M}$, то $\widetilde{M}$ компактно, а фундаментальная группа $\pi_1(M)$ конечна. $\triangleright$

1.5. Римановы субмерсии и формулы О'Нейла

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38. Пусть M и B — римановы многообразия. Субмерсия $p : M \rightarrow B$ (см. определение 8) называется *римановой*, если для каждой точки $x \in M$ линейное отображение $T_x p : H_x(M) \rightarrow B_{f(x)}$, где $H_x(M) = V_x(M)^\perp$ — ортогональное дополнение к $V_x(M)$ в M_x , является изометрией. Векторы вида $v \in H_x(M)$, $x \in M$, называются *горизонтальными*.

Пусть $p : M \rightarrow B$ — риманова субмерсия. Тогда определены (гладкие ортогональные) проекции $H : TM \rightarrow HM$ и $V : TM \rightarrow VM$

на горизонтальные и вертикальные распределения HM и VM . Определим отображение $\mathcal{A} : F^\infty(M) \times F^\infty(M) \rightarrow F^\infty(M)$ формулой

$$\mathcal{A}_X Y = V\nabla_{HX}(HY) + H\nabla_{HX}(VY).$$

Легко видно, что $\mathcal{A}$ является $(1, 2)$ -тензором; он называется *тензором О'Нейла* и имеет следующие свойства:

- 1) $\mathcal{A}$ горизонтален, т. е. $\mathcal{A}_X = \mathcal{A}_{HX}$;
- 2) для каждого векторного поля $X \in F^\infty M$ $\mathcal{A}_X$ кососимметричен, причем $\mathcal{A}_X(HM) \subset VM$ и $\mathcal{A}_X(VM) \subset HM$;
- 3) если $X, Y \in HM$, то $\mathcal{A}_X Y = -\mathcal{A}_Y X$.

Первое утверждение очевидно; нетрудно проверить и второе утверждение. Третье утверждение будет доказано в лемме 1.8, которая показывает, что в основном $\mathcal{A}$ — тензор интегрируемости горизонтального распределения HM .

В вычислениях с тензорными выражениями можно выбирать специальные горизонтальные векторные поля. Горизонтальное векторное поле X на M называется *базовым*, если оно p -связано с некоторым векторным полем X_* на B . Каждое векторное поле X_* на B имеет единственный горизонтальный лифт X на M и X — базовое. Поэтому $X \longleftrightarrow X_*$ — взаимно однозначное соответствие между базовыми векторными полями на M и произвольными векторными полями на B . Как показывает следующая лемма, в некоторой степени это соответствие сохраняет скобки, скалярные произведения и ковариантные производные. Далее метрические тензоры на M и B будем обозначать одинаково: $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Лемма 1.7. *Если X, Y — базовые векторные поля на M , то*

- 1) $\langle X, Y \rangle = \langle X_*, Y_* \rangle \circ p$,
- 2) $H[X, Y]$ — базовое векторное поле, соответствующее полю $[X_*, Y_*]$,
- 3) $H\nabla_X Y$ — базовое векторное поле, соответствующее полю $\nabla_{X_*}^* Y_*$.

◁ Первое утверждение — прямое следствие определений. Вследствие теоремы 1.4 векторное поле $[X, Y]$ p -связано с векторным полем $[X_*, Y_*]$, откуда следует второе утверждение. Третье свойство доказывается на основании формулы (1.25). Действительно, для ба-

зового векторного поля Z на M вследствие этой формулы

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \\ &+ \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Но, например, вследствие первого свойства

$$X\langle Y, Z \rangle = X\{\langle Y_*, Z_* \rangle \circ p\} = X_*\langle Y_*, Z_* \rangle \circ p.$$

Вследствие первых двух свойств

$$\langle [X, Y], Z \rangle = \langle H[X, Y], Z \rangle = \langle [X_*, Y_*], Z_* \rangle \circ p$$

и так далее. Отсюда следует, что $2\langle \nabla_{X_*}^* Y_*, Z_* \rangle \circ p$ равно правой части уравнения (1.76). Следовательно, $\nabla_X Y$ p -связано с $\nabla_{X_*}^* Y_*$, откуда вытекает третье свойство. $\triangleright$

Лемма 1.8. Пусть X и Y — горизонтальные векторные поля. Тогда $\mathcal{A}_X Y = \frac{1}{2}V[X, Y]$.

$\triangleleft$ Так как $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, имеется соотношение $V[X, Y] = \mathcal{A}_X Y - \mathcal{A}_Y X$. Поэтому достаточно доказать указанное выше свойство 3), или, что эквивалентно, показать, что $\mathcal{A}_X X = 0$. Можно предполагать, что поле X базовое. Тогда $0 = W\langle X, X \rangle = 2\langle \nabla_W X, X \rangle$ для любого вертикального векторного поля W . Но $[W, X] = \nabla_W X - \nabla_X W$ вертикально, так как W p -связано с нулевым векторным полем на B . Поэтому

$$\langle \nabla_W X, X \rangle = \langle \nabla_X W, X \rangle = -\langle W, \nabla_X X \rangle = -\langle W, \mathcal{A}_X X \rangle.$$

Так как $\mathcal{A}_X X$ вертикально, получаем нужный результат. $\triangleright$

Теорема 1.23. Пусть $p : M \rightarrow B$ — риманова субмерсия, K и K_* — секционные кривизны пространств M и B , x, y — горизонтальные взаимно ортогональные единичные векторы в некоторой точке $z \in M$, $x_* = T_p(x)$, $y_* = T_p(y)$. Тогда

$$K(\sigma(xy)) = K_*(\sigma(x_*y_*)) - 3|\mathcal{A}_x y|^2.$$

$\triangleleft$ Существуют базовые векторные поля X, Y на M такие, что $X(z) = x$, $Y(z) = y$. Пусть R и R_* — тензоры кривизны пространств

M и B . Тогда вследствие леммы 1.7, определения тензора $\mathcal{A}$ и вертикальности векторного поля $[V[X, Y], Y]$ (см. доказательство леммы 1.8) получаем

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Y, X \rangle &= \langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X, Y]} Y, X \rangle = \\ &= \langle H \nabla_X H \nabla_Y Y - H \nabla_Y H \nabla_X Y - H \nabla_{H[X, Y]} Y, X \rangle + \\ &+ \langle H \nabla_X V \nabla_Y Y - H \nabla_Y V \nabla_X Y - H \nabla_{V[X, Y]} Y, X \rangle = \\ &= \langle R_*(X_*, Y_*)Y_*, X_* \rangle \circ p + \langle \mathcal{A}_X(\mathcal{A}_Y Y), X \rangle - \\ &- \langle \mathcal{A}_Y(\mathcal{A}_X Y), X \rangle - \langle H \nabla_Y V[X, Y], X \rangle. \end{aligned}$$

Вычислим каждое из последних трех слагаемых. Первое слагаемое равно нулю, так как $\mathcal{A}_Y Y = 0$ вследствие свойства 3) тензора $\mathcal{A}$. Вследствие свойств 2) и 3) тензора $\mathcal{A}$ второе слагаемое равно

$$\langle \mathcal{A}_X Y, \mathcal{A}_Y X \rangle = -\langle \mathcal{A}_X Y, \mathcal{A}_X Y \rangle.$$

Третье слагаемое вследствие леммы 1.8 и свойств 2) и 3) тензора $\mathcal{A}$ равно

$$-\langle \mathcal{A}_Y V[X, Y], X \rangle = \langle V[X, Y], \mathcal{A}_Y X \rangle = -2\langle \mathcal{A}_X Y, \mathcal{A}_X Y \rangle.$$

Теперь утверждение теоремы является непосредственным следствием проведенных вычислений. $\triangleright$

Лемма 1.9. Пусть $p : M \rightarrow B$ — риманова субмерсия и M полно. Тогда для каждой кратчайшей геодезической $c_* = c_*(t)$, $0 \leq t \leq a$, в B , параметризованной длиной дуги, и точки $z \in p^{-1}(c_*(0))$ существует единственный горизонтальный лифт $c(t)$, $0 \leq t \leq a$, пути c_* . Это значит, что $p(c(t)) = c_*(t)$ для всех $t \in [0, a]$ и все касательные векторы $c'(t)$, $0 \leq t \leq a$, горизонтальны. При этом путь $c(t)$, $0 \leq t \leq a$, является кратчайшей геодезической в M , соединяющей слой $p^{-1}(c_*(0))$ и $p^{-1}(c_*(a))$ и параметризованной длиной дуги.

$\triangleleft$ Из условий следует существование продолжающей c_* геодезической $c_{*1} = c_{*1}(t)$, $-\varepsilon \leq t \leq a + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, являющейся топологическим вложением. Пусть $C_1 := c_{*1}(-\varepsilon, a + \varepsilon)$. Тогда множество $C = p^{-1}(C_1) - p^{-1}(C_1)$ замкнуто в M (черта сверху обозначает замыкание). Так как p — субмерсия, то $M_1 := p^{-1}(C_1)$ — подмногообразие в $M_0 = M - C$. Ясно, что $z \in M_1$. При этом ограничение $p : M_1 \rightarrow C_1$ — риманова субмерсия. Пусть X — горизонтальный

лифт (единичного) касательного векторного поля c'_{*1} вдоль c_{*1} относительно этой римановой субмерсии и c — максимальная интегральная кривая векторного поля X с началом в z . Тогда c параметризована длиной дуги и вследствие полноты M она определена на $(-\varepsilon, a + \varepsilon)$. При этом $\text{Tr} \circ X = c'_{*1} \circ \text{p}$ и $\text{p}(c(0)) = \text{p}(z) = c_{*1}(0)$. Поэтому $\text{p}(c(t)) = c_{*1}(t)$ для всех $t \in (-\varepsilon, a + \varepsilon)$. Вследствие лемм 1.7 и 1.8

$$\nabla_X X = H\nabla_X X + V\nabla_X X = H\nabla_X X + \mathcal{A}_X X = H\nabla_X X,$$

$$\text{Tr}(H\nabla_X X) = \nabla_{c'_{*1}}^* c'_{*1} = 0.$$

Следовательно, $\nabla_X X = 0$ и кривая c является геодезической в M . При этом путь $c(t)$, $0 \leq t \leq a$, является кратчайшей геодезической в M , соединяющей слои $p^{-1}(c_*(0))$ и $p^{-1}(c_*(a))$. Иначе существует более короткий путь $c_1(t)$, $0 \leq t \leq b$, в M , соединяющий некоторые точки из слоев $p^{-1}(c(0))$ и $p^{-1}(c(a))$. Тогда путь $\text{p}(c_1(t))$, $0 \leq t \leq b$, соединяет точки $c_*(0)$ и $c_*(a)$, и

$$\begin{aligned} l(\text{p} \circ c_1) &= \int_0^b \sqrt{\langle (\text{p} \circ c_1)'(t), (\text{p} \circ c_1)'(t) \rangle} dt = \\ &= \int_0^b \sqrt{\langle H(c'_1(t)), H(c'_1(t)) \rangle} dt \leq \int_0^b \sqrt{\langle c'_1(t), c'_1(t) \rangle} dt = \\ &= l(c_1) < l(c) = l(c_*), \end{aligned}$$

где l означает длину соответствующего пути. Следовательно, путь $c_*(t)$, $0 \leq t \leq a$, не является кратчайшей геодезической в B . $\triangleright$

Теорема 1.24. Пусть $\text{p} : M \rightarrow B$ — риманова субмерсия, M полно, а B связно. Тогда B полно, а p сюръективно. Если при этом M имеет секционную кривизну $\geq k$, то и B имеет секционную кривизну $\geq k$.

$\triangleleft$ Пусть $x \in \text{p}(M)$. Вследствие леммы 1.9 каждая геодезическая $c_*(t)$, $0 \leq t < a$, в B с началом x , параметризованная длиной дуги, имеет горизонтальный лифт $c(t)$, $0 \leq t < a$, в M , также являющийся геодезической, параметризованной длиной дуги. Так как M полно, то этот лифт непрерывно продолжается на $[0, a]$ и

$$\text{p}(c(a)) = \lim_{t \nearrow a} \text{p}(c(t)) = \lim_{t \nearrow a} c_*(t).$$

Отсюда легко следует, что Ехр_x определено на всем касательном пространстве B_x . На основании теоремы Хопфа — Ринова 1.21, B полно. Из связности B и следствия 1.4 вытекает, что точку x можно соединить с любой точкой $y \in B$ кратчайшей геодезической $c_*(t)$, $0 \leq t \leq a$, параметризованной длиной дуги. Тогда вследствие леммы 1.9 $y \in \text{p}(M)$ и p сюръективно. Теперь последнее утверждение является непосредственным следствием уже доказанных утверждений и теоремы 1.23. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 39. Подмногообразие N риманова многообразия M называется *вполне геодезическим*, если каждая геодезическая в M , касающаяся в некоторой точке многообразия N , лежит в N .

Вследствие предложения 8.2 из [42, гл. VII] справедливо

Предложение 1.17. Гладкое (может быть, виртуальное) подмногообразие N риманова многообразия (M, g) является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда $\nabla_X Y \in F^\infty(N)$ для любых векторных полей $X, Y \in F^\infty(N)$ и связности Леви-Чивита ∇ в (M, g) .

На основании теоремы 1.24, леммы 1.9 и единственности максимальной геодезической с данным касательным вектором в начальной точке получаем

Следствие 1.5. Пусть $\text{p} : M \rightarrow B$ — риманова субмерсия, M полно, B связно. Тогда каждая геодезическая в M с горизонтальным касательным вектором в начальной точке горизонтальна. (Если, кроме того, M связно, а слои субмерсии p вполне геодезические, то слои изометричны друг другу.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 40. Отображение метрических пространств

$$f : (M, r) \rightarrow (N, q)$$

называется *субметрией*, если оно отображает каждый замкнутый шар $B(x, s) \subset (M, r)$ с радиусом s и центром x на замкнутый шар $B(f(x), s) \subset (N, q)$ с радиусом s и центром $f(x)$ [86].

Следствие 1.6. Пусть $\text{p} : M \rightarrow B$ — риманова субмерсия, M полно, B связно. Тогда p — субметрия. При этом для любых точек $x_*, y_* \in B$, $x \in \text{p}^{-1}(x_*)$,

$$\rho_B(x_*, y_*) = \min \{ \rho_M(x, y) : y \in \text{p}^{-1}(y_*) \}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В статье [86] доказано, что всякая субметрия полного риманова C^∞ -многообразия M в риманово C^∞ -многообразие B

является римановой субмерсией класса $C^{1,1}$; в общем случае результаты не улучшаем.

Теорема 1.25 [42, 53, 60]. Пусть $p : M \rightarrow B$ — риманова субмерсия, M полно, B связно. Тогда p является локально тривиальным расслоением.

◁ Вследствие теоремы 1.24 B полно. Пусть x — произвольная точка из B , $r = r(x)$ — радиус инъективности риманова многообразия B в точке x , $U = U(x, r)$ — открытый шар радиуса r с центром x , $F = p^{-1}(x)$. Определим отображение $\phi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ формулой

$$\phi(u, f) = \text{Exp}_M(H(\text{Tr}(f)^{-1}((\text{Exp}_x|_U)^{-1}(u))))). \quad (1.77)$$

На основании леммы 1.9, следствия 1.5 и формулы (1.77) легко устанавливается, что $p(\phi(u, f)) = u$. На самом деле можно доказать, что ϕ — диффеоморфизм, но достаточно установить, что ϕ — гомеоморфизм. Ясно, что ϕ непрерывно. Остается проверить, что ϕ — биекция. Если $z \in p^{-1}(u)$, где $u \in U$, то вследствие леммы 1.9 существует *единственный* горизонтальный лифт $[z, f]$ *единственного* кратчайшего геодезического отрезка $[u, x]$ в B , и он также является кратчайшим геодезическим отрезком в M . Отсюда, из следствия 1.5 и формулы (1.77) вытекает, что $\phi(f, u) = z$ и ϕ — биекция. ▷

1.6. Разное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 41. Пусть (M, g) — компактное риманово многообразие положительной секционной кривизны K . Его *δ -заземленность* $\delta(M, g)$ определяется как $\frac{\min K}{\max K}$.

Очевидно, что $\delta(M, g) \in (0, 1]$. Если $\delta(M, g) = 1$, а M односвязно, то (M, g) изометрично, с точностью до гомотетии, стандартной сфере. Если (M, g) компактно и $\delta(M, g) > 1/4$, то (M, g) диффеоморфно некоторой сферической пространственной форме (постоянной секционной кривизны 1). Если $n = \dim(M)$ нечетно, то число $1/4$ можно заменить некоторым числом $\delta(n) \in (0, 1/4)$ [106]. Для каждого натурального числа $n \geq 2$ существует вещественное число $\delta(n) \in (0, 1/4)$ такое, что каждое компактное односвязное риманово многообразие размерности n с условием $\delta(M, g) > \delta(n)$ диффеоморфно сфере или компактному симметрическому пространству ранга один [198]. Если (M, g) — компактное риманово многообразие секционной кривизны

$K \geq 1$ с диаметром $\text{diam}(M) \geq \pi/2$, то M гомеоморфно сфере или локально симметрично [133, 226].

В работе [134] Д. Громол и В. Мейер построили некоторую экзотическую семимерную сферу (Σ^7, g) секционной кривизны $K \geq 0$. Она получена как пространство орбит некоторого изометрического действия группы Ли $Sp(1)$ на группе Ли $Sp(2)$ (снабженной биинвариантной римановой метрикой) с индуцированной римановой метрикой и, следовательно, является базой римановой субмерсии. Неравенство $K \geq 0$ следует из теорем 1.24 и 2.14.

Каждое некомпактное связное полное риманово многообразие M^n с $K \geq 0$ допускает некоторое компактное вполне геодезическое подмногообразие (душу) S и диффеоморфизм на нормальное векторное расслоение νS над S , тождественный на S (Дж. Чигер — Д. Громол [108], В. А. Шарафутдинов [61]). Существует метрическая ретракция (отображение Шарафутдинова) $p : M \rightarrow S$ [62], которая является римановой субмерсией класса C^∞ [225]. Если дополнительно в некоторой точке $x \in M^n$ все секционные кривизны положительны, то M^n диффеоморфно $\mathbb{R}^n$ [197].

Каждое гладкое многообразие M^n , $n \geq 3$, допускает полную риманову метрику g_M с кривизной Риччи $a(n) < \text{ric}(g_M) < b(n) < 0$, где числа $a(n)$, $b(n)$ зависят только от n [172].

ГЛАВА 2

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

2.1. Основные свойства групп Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42. *Группа Ли* есть гладкое многообразие G , являющееся одновременно группой с операцией произведения $\cdot$ и гладкими отображениями

$$\cdot : (g, h) \in G \times G \rightarrow g \cdot h \in G$$

и

$$^{-1} : g \in G \rightarrow g^{-1} \in G.$$

Единичный элемент в группе G обозначается буквой e .

Мы будем писать просто gh вместо $g \cdot h$.

Из определения 42 следует, что для любого фиксированного элемента g в G операции $l_g : h \in G \rightarrow gh \in G$ и $r_g : h \in G \rightarrow hg \in G$ левого (соответственно, правого) умножения на элемент g гладкие. Кроме того, l_g и r_g — диффеоморфизмы G на себя, так как $l_{g^{-1}} \circ l_g = \text{id}_G$ и $r_{g^{-1}} \circ r_g = \text{id}_G$. Отображения l_g и r_g называются *левым переносом* и *правым переносом* (на элемент g) соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 43. Гладкое отображение $\phi : G \rightarrow H$ групп Ли, являющееся гомоморфизмом групп, называется *гомоморфизмом групп Ли*. Если ϕ — мономорфизм, эпиморфизм или изоморфизм, оно называется *моно-, эпи- или изоморфизмом групп Ли*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 44. Говорят, что векторное поле X на группе Ли G *левоинвариантно* (соответственно, *правоинвариантно*), если

$$X(gh) = T(l_g)(X(h)) \quad (\text{соответственно, } X(hg) = T(r_g)(X(h)))$$

для любых элементов $g, h \in G$. Другими словами, векторное поле X l_g - (соответственно, r_g -) связано с самим собой для каждого элемента g в G (см. § 1.1.4).

Ясно, что каждое левоинвариантное или правоинвариантное векторное поле на группе Ли гладкое.

Предложение 2.1. *Множество LG всех левоинвариантных векторных полей на группе Ли G образует алгебру Ли размерности $n = \dim G$.*

◁ Из линейности дифференциала гладкого отображения в каждой точке следует, что LG — линейное пространство над $\mathbb{R}$. Если $X \in LG$, то оно полностью определяется своим значением в e , так как $X(g) = T(l_g)(X(e))$ для каждого элемента $g \in G$; а любой элемент $v \in G_e$ корректно определяет векторное поле $X \in LG$ по формуле $X(g) = T(l_g)(v)$. Поэтому LG имеет размерность $n = \dim G$. Если $X, Y \in LG$, то X и Y l_g -связаны с самими собой для каждого $g \in G$. Тогда по теореме 1.4 их скобка Ли $[X, Y]$ l_g -связана с собой для каждого $g \in G$. Таким образом, LG образует n -мерную подалгебру Ли алгебры Ли $F^\infty(G)$ всех гладких векторных полей на G . ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогично доказывается, что множество RG всех правоинвариантных векторных полей на группе Ли G образует алгебру Ли размерности $n = \dim G$. Информация о связи между алгебрами Ли RG и LG дается в теореме 2.5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 45. Пара $(LG, [\cdot, \cdot])$ называется *алгеброй Ли группы Ли G* .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из доказательства предложения 2.1 следует, что алгебру Ли LG можно отождествить с касательным пространством G_e , снабженным соответствующей скобкой Ли $[\cdot, \cdot]$. Мы будем использовать это отождествление.

Теорема 2.1. *Если $\phi : G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп Ли, то $T\phi_e : (G_e, [\cdot, \cdot]) \rightarrow (H_e, [\cdot, \cdot])$ — гомоморфизм алгебр Ли. Если ϕ моно-, эпи- или изоморфизм, то $T\phi_e$ моно-, эпи- или изоморфизм алгебр Ли.*

◁ Для доказательства первого утверждения достаточно установить, что каждое левоинвариантное векторное поле X на G ϕ -связано с левоинвариантным векторным полем Y на H таким, что $T\phi(X(e)) = Y(e)$. Тогда по теореме 1.4

$$T\phi([X, Y](e)) = [T\phi(X(e)), T\phi(Y(e))]$$

для всех $X, Y \in LG$, а это и означает, что $T\phi_e$ — гомоморфизм алгебр Ли. Пусть g — произвольный элемент в G . Так как ϕ — гомоморфизм

групп Ли, то

$$\phi(gh) = \phi(g)\phi(h), \quad g, h \in G,$$

т. е.

$$\phi \circ l_g = l_{\phi(g)} \circ \phi. \quad (2.1)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Y(\phi(g)) &= (Tl_{\phi(g)})(Y(e)) = (Tl_{\phi(g)})(T\phi(X(e))) = T(l_{\phi(g)} \circ \phi)(X(e)) = \\ &= T(\phi \circ l_g)(X(e)) = T\phi(Tl_g(X(e))) = T\phi(X(g)). \end{aligned}$$

Из формулы (2.1) вытекает, что

$$T\phi(g) \circ Tl_g(e) = Tl_{\phi(g)}(e) \circ T\phi(e).$$

Отсюда следует, что ранг линейного отображения $T\phi_g$ не зависит от $g \in G$, так как $Tl_g(e)$, $Tl_{\phi(g)}(e)$ являются линейными изоморфизмами векторных пространств. Тогда $\phi(G)$ — множество меры нуль в H , если $T\phi_e$ не сюръективно (теорема А. Сарда), а ядро отображения ϕ — замкнутое подмногообразие (и нормальная подгруппа) в G размерности по крайней мере 1, если $T\phi_e$ не инъективно (известный результат о гладких отображениях гладких многообразий). Отсюда следует второе утверждение теоремы. $\triangleright$

На основании второго утверждения теоремы 2.1, его доказательства и теоремы об обратном отображении получаем

Следствие 2.1. Если $\phi : G \rightarrow H$ — изоморфизм групп Ли в смысле определения 43, то обратное отображение $\phi^{-1} : H \rightarrow G$ также является изоморфизмом групп Ли в смысле этого определения.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим группу Ли $G = (\mathbb{R}^n, +)$ со стандартными координатными функциями $x^1, \dots, x^n$. Тогда векторные поля $\partial/\partial x^i$, $i = 1, \dots, n$, составляют базис алгебры Ли LG над $\mathbb{R}$. При этом для любой гладкой вещественной функции f на G получаем

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] f := \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} f \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f \right) = 0.$$

Следовательно, $[X, Y] = 0$ для всех $X, Y \in LG$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 46. Алгебра Ли $(L, [\cdot, \cdot])$ с нулевыми скобками называется *коммутативной алгеброй Ли*.

ПРИМЕР 6. Пусть $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ — целочисленная решетка. Фактор-группа $T^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ является группой Ли, естественный гомоморфизм $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ — эпиморфизмом групп Ли, дифференциал $T\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — тождественным изоморфизмом коммутативной алгебры Ли. Группа Ли T^n называется *n-мерным тором*, а эпиморфизм ϕ — *универсальным накрывающим эпиморфизмом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 47. Гомоморфизм групп Ли $\phi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$ называется *1-параметрической подгруппой группы Ли G* .

Предложение 2.2. Каждое лево- или право-инвариантное векторное поле на группе Ли полно.

◁ Предположим, что X — левоинвариантное векторное поле на группе Ли G . Существует некоторая интегральная кривая $\Psi(e, t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, векторного поля X с началом e . Вследствие левой инвариантности поля X для каждого элемента $g \in G$,

$$\Psi(g, t) := g\Psi(e, t), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad (2.2)$$

— интегральная кривая поля X с началом g . Другими словами, область определения потока Ψ поля X включает в себя множество $G \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. На основании предложения 1.8 поле X полно. Случай правоинвариантного поля рассматривается аналогично. ▷

Предложение 2.3. Пусть Ψ — поток лево- или право-инвариантного векторного поля X на группе Ли G . Тогда $\phi(t) = \Psi(e, t)$, $t \in \mathbb{R}$, — 1-параметрическая подгруппа группы Ли G .

◁ Предположим, что X левоинвариантно. Тогда вследствие свойств потока Ψ и левой инвариантности поля X $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ — гладкое отображение и

$$\phi(t+s) = \Psi(e, t+s) = \Psi(\Psi(e, t), s) = \Psi(e, t)\Psi(e, s) = \phi(t)\phi(s),$$

т. е. $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ — гомоморфизм. Случай правоинвариантного поля рассматривается аналогично. ▷

Предложение 2.4. Пусть G — группа Ли. Тогда для каждого вектора $v \in G_e$ существует единственная 1-параметрическая подгруппа $\phi_v : \mathbb{R} \rightarrow G$ с условием $\phi'_v(0) = v$.

◁ По определению, для всех $t, s \in \mathbb{R}$ и $\phi = \phi_v$ должны выполняться равенства $\phi(t+s) = \phi(t) \cdot \phi(s)$ и $\phi'(0) = v$. Дифференцируя первое равенство по s при $s = 0$, получаем, что должно быть

$\phi'(t) = T(l_{\phi(t)})(\phi'(0)) = T(l_{\phi(t)})(v)$. Это значит, что $\phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является интегральной кривой левоинвариантного векторного поля X с условиями $X(e) = v$ и $\phi(0) = e$. Отсюда и из предложений 2.2 и 2.3 следует существование единственной нужной 1-параметрической подгруппы ϕ_v в G . $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 48. Пусть G — группа Ли и $\mathfrak{g} = G_e$ — ее алгебра Ли. Отображение $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$, определенное формулой $\exp(v) = \phi_v(1)$, называется *экспоненциальным отображением* (для) группы Ли G .

Предложение 2.5. Пусть G, H — группы Ли, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ — их алгебры Ли и $f : G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп Ли. Тогда коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{Tf_e} & \mathfrak{h} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

$\triangleleft$ Пусть $v \in \mathfrak{g}$, $\phi_v : \mathbb{R} \rightarrow G$ — соответствующая 1-параметрическая подгруппа в G . Тогда $\psi := f \circ \phi_v$ — 1-параметрическая подгруппа в H ,

$$\begin{aligned} \psi'(0) &= (f \circ \phi_v)'(0) = Tf(\phi_v(0))(\phi'(0)) = Tf_e(v), \\ \exp(Tf_e(v)) &= \psi(1) = f(\phi_v(1)) = f(\exp(v)). \triangleright \end{aligned}$$

Теорема 2.2. Отображение $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ группы Ли G является диффеоморфизмом в некоторой окрестности нуля $\{0\} \in \mathfrak{g}$.

$\triangleleft$ Пусть v — произвольный вектор из $\mathfrak{g}$. Рассмотрим прямую $c(s) = sv$, $s \in \mathbb{R}$, в $\mathfrak{g}$. Очевидно, что при фиксированном $s \in \mathbb{R}$, $\psi(t) := \phi_v(st)$, $t \in \mathbb{R}$, — 1-параметрическая подгруппа в G с касательным вектором $\psi'(0) = sv$. Поэтому

$$(\exp \circ c)(s) = \exp(sv) = \phi_{sv}(1) = \psi(1) = \phi_v(s).$$

Дифференцируя это равенство по s при $s = 0$, получаем

$$T\exp_0(c'(0)) = T\exp_0(v) = v.$$

Поэтому $T\exp_0 = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$ вследствие произвола в выборе $v \in \mathfrak{g}$. Теперь нужное утверждение следует из теоремы об обратном отображении. $\triangleright$

Пусть $Gl(n, \mathbb{R})$ — группа вещественных $(n \times n)$ -матриц с ненулевым определителем. Сопоставляя матрице $X \in G := Gl(n, \mathbb{R})$ ее элементы x_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, расположенные в лексикографическом порядке, получаем биекцию $\phi : G \rightarrow V$ группы G на открытое подмножество $V := \phi(\det^{-1}(0))$ в $\mathbb{R}^{n^2}$. Считая ϕ гомеоморфизмом, а тройку (G, ϕ, V) — картой, видим, что группа G является группой Ли, так как элементы произведения двух матриц являются членами от элементов сомножителей, а элементы обратной матрицы X^{-1} для $X \in G$ — рациональными функциями от элементов матрицы X . Многообразие G состоит из двух компонент связности, состоящих соответственно из матриц с положительным определителем и матриц с отрицательным определителем; первая компонента является связной группой Ли $Gl^+(n, \mathbb{R})$, а вторая смежным классом по подгруппе $Gl^+(n, \mathbb{R})$.

Теорема 2.3. Алгебра Ли $G_e = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ для $G = Gl(n, \mathbb{R})$ совпадает с линейным вещественным пространством $M(n, \mathbb{R})$ всех квадратных вещественных $(n \times n)$ -матриц. При этом скобка Ли $[A, B]$ элементов $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ вычисляется по формуле

$$[A, B] = AB - BA. \quad (2.3)$$

◁ Произведение XY , где $X, Y \in M(n, \mathbb{R})$, линейно по X и Y . Поэтому элемент $A \in G_e$ определяет соответствующее левоинвариантное векторное поле A на G по формуле

$$A(X) = XA, \quad X \in G. \quad (2.4)$$

По той же причине, если $A, B \in G_e$ и A, B — соответствующие левоинвариантные векторные поля на G , то элементы

$$\alpha^{ij}(X) = \sum_{k=1}^n x_{ik} a_{kj}, \quad \beta^{lm}(X) = \sum_{r=1}^n x_{lr} b_{rm} \quad (2.5)$$

матриц XA, XB являются компонентами векторных полей A, B в точке X относительно указанной ранее карты. Теперь прямое вычисление с использованием формул (1.18) и (2.5) дает уравнение (2.3). ▷

Легко доказать

Предложение 2.6. *Отображение $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow Gl(n, \mathbb{R})$ (в смысле определения 48) вычисляется по обычной формуле*

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

Пусть $V = V(n, \mathbb{R})$ — вещественное векторное пространство размерности n . *Общая линейная группа $Gl(V)$ — группа всех вещественных линейных (невырожденных) преобразований пространства V . Группа $Gl(V)$ допускает единственную структуру группы Ли такую, что определяемый выбором произвольного базиса в пространстве V изоморфизм $\phi : Gl(V) \rightarrow Gl(n, \mathbb{R})$ абстрактных групп является изоморфизмом групп Ли. Алгеброй Ли $gl(V)$ группы Ли $Gl(V)$ является векторное пространство всех линейных эндоморфизмов $A : V \rightarrow V$ со скобкой (2.3).*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 49. Гомоморфизм групп Ли $f : G \rightarrow Gl(V)$ (алгебр Ли $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$) называется *представлением группы Ли G* (соответственно, *алгебры Ли $\mathfrak{g}$*) *в пространстве V* . Представление f (соответственно, ϕ) называется *точным*, если оно является мономорфизмом, и *неприводимым*, если не имеет нетривиальных инвариантных подпространств в V .

Предложение 2.7. *Пусть G — группа Ли, $g \in G$, $I(g) : G \rightarrow G$, где $I(g)(g') = gg'g^{-1}$, $g' \in G$. Тогда*

- 1) $I(g) : G \rightarrow G$ — внутренний автоморфизм группы Ли G ;
- 2) линейное отображение $\text{Ad}(g) := TI(g)_e : G_e \rightarrow G_e$ — автоморфизм алгебры Ли $(G_e, [\cdot, \cdot])$ группы Ли G ;
- 3) отображение $g \in G \rightarrow \text{Ad}(g)$ — гомоморфизм группы Ли в группу Ли $\text{Aut}(G_e, [\cdot, \cdot])$ всех автоморфизмов алгебры Ли $(G_e, [\cdot, \cdot])$ группы Ли G , и, следовательно, является представлением группы Ли G в векторном пространстве G_e .

◁ 1) Очевидно, $I(g^{-1}) = I(g)^{-1}$,

$$I(g)(g_1g_2) = g(g_1g_2)g^{-1} = (gg_1g^{-1})(gg_2g^{-1}) = I(g)(g_1)I(g)(g_2),$$

т. е. $I(g)$ — автоморфизм абстрактной группы G . Из определения группы Ли следует, что $I(g)$ — диффеоморфизм. Следовательно, $I(g)$ — автоморфизм группы Ли G .

2) Это частный случай теоремы 2.1.

3) Заметим сначала, что $\text{Aut}(G_e, [\cdot, \cdot])$ — замкнутая подгруппа группы Ли $Gl(G_e)$ и поэтому вследствие теоремы 2.7 является подгруппой Ли группы Ли $Gl(G_e)$. Очевидно, что

$$I(g_1 g_2)(g) = (g_1 g_2)g(g_1 g_2)^{-1} = g_1(g_2 g g_2^{-1})g_1^{-1} = I(g_1)(I(g_2)(g))$$

для любых элементов $g, g_1, g_2 \in G$. Тогда вследствие свойств дифференциалов гладких отображений и тождества $I(g)(e) = e$

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g_1 g_2) &= T(I(g_1 g_2))_e = T(I(g_1)I(g_2))_e = \\ &= T(I(g_1))_e T(I(g_2))_e = \text{Ad}(g_1) \text{Ad}(g_2), \end{aligned}$$

т. е. $\text{Ad} : G \rightarrow Gl(G_e)$ — гомоморфизм абстрактных групп. Из определения группы Ли следует, что Ad — гладкое отображение и поэтому — гомоморфизм групп Ли и следовательно представление группы Ли G в векторном пространстве G_e . Из последнего утверждения теоремы 2.1 следует, что Ad — гомоморфизм группы Ли G в группу Ли всех автоморфизмов алгебры Ли $(G_e, [\cdot, \cdot])$. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 50. Представление $\text{Ad} : g \in G \rightarrow \text{Ad}(g)$ называется *присоединенным представлением группы Ли G* , а его дифференциал $\text{ad} = (T(\text{Ad}))_e$ — *присоединенным представлением алгебры Ли $(G_e, [\cdot, \cdot])$ группы Ли G* .

Следующая наша цель — вычислить ad .

Теорема 2.4. При отождествлении левоинвариантных векторных полей X и Y на группе Ли G с их значениями в e ,

$$\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]. \quad (2.6)$$

$\triangleleft$ Пусть $\phi(t), \psi(s), t, s \in \mathbb{R}$, — 1-параметрические подгруппы в G , определенные полями X и Y как в предложении 2.3. Тогда

$$\begin{aligned} I(\phi(t))(\psi(s)) &= \phi(t)\psi(s)\phi(-t); \\ \text{Ad}(\phi(t))(Y) &= T(I(\phi(t)))_e(\psi'(0)) = \\ &= (T(r_{\phi(-t)}) \circ T(l_{\phi(t)}))(Y) = T(r_{\phi(-t)})(Y). \end{aligned}$$

Вследствие формулы (2.2) $T(r_{\phi(-t)})(Y) = T(\Psi_{-t})(Y)$, где Ψ — поток поля X . Таким образом,

$$\text{Ad}(\phi(t))(Y) = T(\Psi_{-t})(Y). \quad (2.7)$$

Тогда на основании предложения 1.10

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}(X)(Y) &= (\operatorname{Ad}(\phi(t))(Y))'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [T(\Psi_{-t})(Y) - Y] = \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y - T(\Psi_{-t})(Y)] = -[-X, Y] = [X, Y]. \triangleright \end{aligned}$$

На основании предложений 2.5, 2.6 и теоремы 2.4 получаем

Следствие 2.2. Для каждого элемента X из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G $\operatorname{Ad}(\exp(tX)) = \exp(t \operatorname{ad}(X))$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.5. Пусть X и Y (соответственно, $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$) — левоинвариантные (правоинвариантные) векторные поля на группе Ли G ; причем

$$\tilde{X}(e) = X(e), \quad \tilde{Y}(e) = Y(e). \quad (2.8)$$

Тогда

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}](e) = -[X, Y](e).$$

$\triangleleft$ Пусть $\phi(t)$, $\psi(s)$, $t, s \in \mathbb{R}$, — 1-параметрические подгруппы в G , являющиеся интегральными кривыми векторных полей X и Y . Вследствие равенств (2.8) и

$$\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s) = \phi(s)\phi(t),$$

$$\psi(t+s) = \psi(t)\psi(s) = \psi(s)\psi(t)$$

получим, что $\phi(t)$, $\psi(s)$, $t, s \in \mathbb{R}$, являются также интегральными кривыми векторных полей $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$. Из вычислений в доказательстве теоремы 2.4 для X , Y и аналогичных им вычислений для $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ получим равенства

$$[X, Y](e) = \operatorname{ad}(X)(Y) = -[\tilde{X}, \tilde{Y}](e). \triangleright$$

Позже нам будет нужно следующее предложение.

Предложение 2.8. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G , $X, Y \in \mathfrak{g}$ и $[X, Y] = 0$. Тогда для любых чисел $t, s \in \mathbb{R}$, элементы $\exp(tX)$, $\exp(sY) \in G$ коммутируют.

◁ Вследствие предложений 2.5, 2.7, следствия 2.2, теоремы 2.4 и предложения 2.6

$$\begin{aligned} & \exp(tX) \exp(sY) \exp(-tX) = I(\exp(tX))(\exp(sY)) = \\ & = \exp(TI(\exp(tX))_e(sY)) = \exp(s \operatorname{Ad}(\exp(tX))(Y)) = \\ & = \exp(s \exp(\operatorname{ad}(tX))(Y)) = \exp\left(s\left(Y + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{ad}(tX)^k(Y)}{k!}\right)\right) = \exp(sY). \triangleright \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 51. Подгруппа $H \subset G$ группы Ли G , являющаяся гладким (виртуальным) подмногообразием в G , называется (*виртуальной*) *подгруппой Ли* (группы Ли G).

На основании определений 7, 51 и теорем 1.5, 1.6 получаем

Теорема 2.6. Каждая подалгебра Ли $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g} = G_e$ группы Ли G определяет левоинвариантное инволютивное распределение $D = D(\mathfrak{h}) = \{Tl_g(\mathfrak{h}), g \in G\}$. Слой H слоения $\mathcal{F}(D)$, содержащий единицу $e \in G$, является связной виртуальной подгруппой Ли. Обратно, для каждой связной виртуальной подгруппы Ли $H \subset G$ касательное пространство $H_e = \mathfrak{h}$ является подалгеброй Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. При этом H является подгруппой Ли группы Ли G тогда и только тогда, когда H замкнута в G . В общем случае H является группой Ли относительно слоевой топологии.

В предложении 2.2.6 и теореме 2.27 из книги [1] дается достаточно короткое доказательство следующей *теоремы Картана*, являющейся естественным дополнением теоремы 2.6.

Теорема 2.7. Всякая замкнутая (в топологическом смысле) подгруппа H группы Ли G является (под)группой Ли.

Используя теоремы 2.6 и 2.7, получаем

Следствие 2.3. Пересечение любого набора подгрупп Ли данной группы Ли G также является подгруппой группы Ли G . Подмножества $SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$ и $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$, состоящие соответственно из матриц с определителем 1 и ортогональных матриц (т. е. $X \in GL(n, \mathbb{R})$ таких, что $XX^t = E = e$), являются замкнутыми подгруппами и следовательно подгруппами Ли группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$. При этом пересечение $O^+(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$ является (открыто-замкнутой) компонентой связности единицы группы Ли $O(n)$.

Вещественное векторное пространство $V(n, \mathbb{R}, (\cdot, \cdot))$ размерности n со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ будем называть *n -мерным*

евклидовым пространством и обозначать $\mathbb{E}^n$. В этом случае компактная подгруппа Ли $O(V) \subset Gl(V)$ (соответственно, $O^+(V) \subset Gl(V)$) всех линейных (соответственно, сохраняющих произвольную ориентацию пространства V) преобразований пространства V , сохраняющих скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, изоморфна группе Ли $O(n)$ (соответственно, $O^+(n)$).

Некоторую дополнительную информацию о группах и алгебрах Ли можно найти в книгах [1, 56].

2.2. Гладкие действия групп Ли

Гладкие многообразия и группы Ли связаны важным понятием гладкого действия. Это понятие неявно применялось ранее и неоднократно применяется в дальнейшем в разных ситуациях, которые уместно рассмотреть здесь с единой точки зрения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 52. *Гладкое (левое) действие группы Ли G на гладком многообразии M — гладкое отображение $\mu : G \times M \rightarrow M$, $\mu : (g, x) \in G \times M \rightarrow g(x) \in M$ такое, что для всех элементов $g_1, g_2 \in G$, $x \in M$, $e(x) = x$, $(g_1 \cdot g_2)(x) = g_1(g_2(x))$. Похоже определяется гладкое правое действие.*

Ясно, что для коммутативной группы Ли понятия правого и левого действия совпадают. Потоки полных гладких векторных полей на гладких многообразиях, в том числе геодезические потоки и потоки киллинговых векторных полей на полных римановых многообразиях являются примерами гладкого действия аддитивной группы вещественных чисел. Операцию умножения в группе Ли можно толковать одновременно как гладкое левое и гладкое правое действия на себе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 53. Пусть задано гладкое левое действие $\mu : G \times M \rightarrow M$ группы Ли G . *Стабилизатором точки $x \in M$ относительно действия μ называется множество $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$. Действие μ называется (почти) свободным, если для каждой точки $x \in M$, $G_x = \{e\}$ (соответственно, G_x дискретно). Действие μ называется (почти) эффективным, если $G_M = \bigcap_{x \in M} G_x = \{e\}$ (соответственно, G_M дискретно).*

Ясно, что множества G_x , $x \in M$, и G_M являются замкнутыми подгруппами группы Ли, и поэтому подгруппами Ли вследствие теоремы 2.7. Другие названия группы G_x — *стационарная подгруппа*

точки x , подгруппа изотропии точки x ; группа $T(G_x) = \{Tg, g \in G_x\}$ называется *линейной группой изотропии*. Группа G_M называется *ядром неэффективности действия μ* . Ясно, что G_M является нормальной подгруппой Ли группы Ли G , всякое свободное действие эффективно, а каждое почти свободное действие почти эффективно. Действие μ индуцирует некоторое гладкое эффективное действие группы Ли G/G_M на M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 54. Орбитой точки $x \in M$ относительно гладкого действия $\mu : G \times M \rightarrow M$ группы Ли G называется множество $O_x = \{g(x) : g \in G\}$. Действие μ называется (*просто*) *транзитивным*, если $O_x = M$ для некоторой точки $x \in M$ (и действие μ свободно).

Определение гладких транзитивных и просто транзитивных действий групп Ли на гладких многообразиях является основой понятия однородного пространства. Однородные пространства рассматриваются в разделе 4.2.

2.3. Основные свойства алгебр Ли

2.3.1. Связь с матричными алгебрами Ли. Немаловажно то, что любая алгебра Ли изоморфна некоторой матричной алгебре. Точнее имеет место следующая

Теорема 2.8 (ТЕОРЕМА АДО [30]). *Каждая конечномерная алгебра Ли имеет точное конечномерное представление.*

Короткое доказательство теоремы Адо с использованием универсальных обертывающих алгебр (см. [38]) дано в статье [183] Ю. А. Неретина.

Мы видели, что каждая группа Ли G единственным образом определяет ее (конечномерную) алгебру Ли $(LG, [\cdot, \cdot])$. На основании теорем 2.6 и 2.8 не столь трудно получить в некотором смысле обратное утверждение:

Теорема 2.9 (ТРЕТЬЯ ТЕОРЕМА С. ЛИ). *Для любой конечномерной алгебры Ли $(L, [\cdot, \cdot])$ существует единственная с точностью до изоморфизма связная односвязная группа Ли G с алгеброй Ли $(LG, [\cdot, \cdot])$, изоморфной $(L, [\cdot, \cdot])$.*

2.3.2. Важные классы алгебр Ли и структурные результаты. Среди подалгебр Ли заданной алгебры Ли важное значение имеют идеалы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 55. Векторное подпространство $\mathfrak{f}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *идеалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$* , если $[X, Y] \in \mathfrak{f}$ для любых элементов $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{f}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 56. Говорят, что $\mathfrak{g}$ — *полупростая алгебра Ли*, если единственным ее коммутативным идеалом является $\{0\}$. Некоммутативная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *простой*, если $\dim \mathfrak{g} > 1$ и $\mathfrak{g}$ не имеет других идеалов, кроме $\mathfrak{g}$ и $\{0\}$. Группа Ли с простой (соответственно, полупростой) алгеброй Ли называется *простой* (соответственно, *полупростой*) *группой Ли*.

Центром алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется множество $C(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \text{ для всех } Y \in \mathfrak{g}\}$. Легко доказывается следующее предложение.

Предложение 2.9. *Каждый идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является ее подалгеброй Ли. Центр $C(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ является коммутативным идеалом алгебры $\mathfrak{g}$. Всякая простая алгебра Ли полупроста. Всякая нетривиальная полупростая алгебра имеет размерность не меньше 3.*

Для каждой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяется множество важных подалгебр и идеалов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 57. Пусть $\mathfrak{k}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Определим формулами

$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \text{ для всех } Y \in \mathfrak{k}\},$$

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] \in \mathfrak{k} \text{ для всех } Y \in \mathfrak{k}\},$$

соответственно *централизатор* и *нормализатор подалгебры $\mathfrak{k}$* в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Нетрудно понять, что $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$, а $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Из определения 57 и тождества Якоби также следует

Предложение 2.10. *Для всякой подалгебры Ли $\mathfrak{k}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ множества $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ и $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$ являются подалгебрами Ли в $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{k}$ — идеал в $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$.*

Рассмотрим произвольную алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Если V, W — линейные подпространства в $\mathfrak{g}$, то $[V, W]$ обозначает линейную оболочку всех векторов вида $[v, w]$, где $v \in V$ и $w \in W$.

Важным идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ является ее *производная алгебра*, определяемая равенством $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Кроме того, можно определить

линейные подпространства $\mathfrak{g}^k$ для всех неотрицательных целых чисел k следующим образом:

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots, \mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k], \dots$$

Из формулы Якоби следует, что $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$, $k \geq 0$, и каждое подпространство $\mathfrak{g}^k$ является идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Отметим, что $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *нильпотентной степени k* , если $\mathfrak{g}^k = \{0\}$ и $\mathfrak{g}^{k-1} \neq \{0\}$. Она *нильпотентна*, если она нильпотентна некоторой степени k . Связная группа Ли G называется *нильпотентной (степени k)*, если ее алгебра Ли нильпотентна (степени k).

ПРИМЕР 7. Каждая коммутативная алгебра Ли нильпотентна степени 1.

Отметим, что для нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ степени k подалгебра $\mathfrak{g}^{k-1} \neq \{0\}$ содержится (по определению $\mathfrak{g}^k = \{0\}$) в центре $\mathfrak{g}$. Следовательно, любая нильпотентная алгебра Ли имеет нетривиальный центр.

Теорема 2.10 (ТЕОРЕМА ЭНГЕЛЯ [57]). Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна тогда и только тогда, когда для каждого $X \in \mathfrak{g}$, оператор $\text{ad } X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ нильпотентен.

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно определить также последовательность ее идеалов

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0], \dots, \mathfrak{g}_{l+1} = [\mathfrak{g}_l, \mathfrak{g}_l], \dots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 59. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *разрешимой (степени $k \geq 1$)*, если существуют числа l со свойством $\mathfrak{g}_l = \{0\}$, и k — наименьшее из таких чисел. Связная группа Ли G называется *разрешимой (степени k)*, если ее алгебра Ли разрешима (степени k).

Ясно, что каждая нильпотентная, в частности, коммутативная алгебра Ли разрешима. Можно доказать, что сумма двух разрешимых (нильпотентных) идеалов в заданной алгебре Ли также является разрешимым (соответственно, нильпотентным) идеалом. Поэтому корректно следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60. Радикалом $\text{rad} = \text{rad}(\mathfrak{g})$ (нильрадикалом $\text{nilrad} = \text{nilrad}(\mathfrak{g})$) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется наибольший разрешимый (соответственно, наибольший нильпотентный) идеал в $\mathfrak{g}$.

Теорема 2.11 (ТЕОРЕМА ЛЕВИ — МАЛЬЦЕВА [57]). Для каждой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует полупростая подалгебра $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ такая, что имеет место разложение $\mathfrak{g} = \text{rad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ (прямая сумма линейных пространств). Любые две подалгебры с таким свойством переводятся друг в друга автоморфизмами алгебры $\mathfrak{g}$, сохраняющими радикал $\text{rad}(\mathfrak{g})$.

Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима, то $\text{nilrad} \supset \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, поскольку $\mathfrak{g}'$ — нильпотентный идеал в разрешимой алгебре $\mathfrak{g}$ [57].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 61. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли. Выражение

$$B(X, Y) = B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{trace}(\text{ad } X \circ \text{ad } Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g},$$

где $\text{ad } X(Y) = [X, Y]$, называется *формой Киллинга* на $\mathfrak{g}$.

Нетрудно доказать следующее предложение.

Предложение 2.11. Форма Киллинга билинейна, симметрична и инвариантна относительно всех автоморфизмов соответствующей алгебры Ли.

Теорема 2.12 (КРИТЕРИЙ КАРТАНА [30]). Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда $B_{\mathfrak{g}}([X, Y], Z) = 0$ для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ ($B_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = 0$, другими словами).

Теорема 2.13 (КРИТЕРИЙ ПОЛУПРОСТОТЫ [30, 57]). Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга $B_{\mathfrak{g}}$ невырождена.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 62. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *унимодулярной*, если выполняется равенство $\text{trace}(\text{ad}(X)) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$. Группа Ли G называется *унимодулярной*, если она допускает двусторонне инвариантную меру Хаара.

Отметим, что для связной группы Ли G ее унимодулярность эквивалентна унимодулярности алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В частности, унимодулярными являются все компактные, все полупростые, все связные нильпотентные группы Ли [58, гл. 10, предложение 1.4].

2.3.3. Автоморфизмы и дифференцирования. Как уже было сказано, группа $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ всех автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть замкнутая подгруппа группы Ли $Gl(\mathfrak{g})$ и поэтому является группой Ли.

Предложение 2.12. 1) Множество $\text{Der} = \text{Der}(\mathfrak{g})$ всех дифференцирований алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. линейных отображений $D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ таких, что

$$D[X, Y] = [D(X), Y] + [X, D(Y)], \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \quad (2.9)$$

является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

2) Для любых $D \in \text{Der}$, $X \in \mathfrak{g}$,

$$[D, \text{ad } X] = \text{ad}(D(X)). \quad (2.10)$$

Множество $D\mathfrak{g} := \{\text{ad}(X) : X \in \mathfrak{g}\}$ — идеал алгебры Ли Der .

3) Алгебра Ли $\mathfrak{aut}(\mathfrak{g})$ группы Ли $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ совпадает с Der .

< 1) Проверяется непосредственно с использованием равенства $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ для $D_1, D_2 \in \text{Der} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

2) Заметим прежде всего, что тождество Якоби для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ эквивалентно тому, что все элементы вида $\text{ad } X$, $X \in \mathfrak{g}$, являются дифференцированиями алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Формула (2.10) проверяется непосредственно. Второе утверждение является ее следствием.

3) Пусть $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — произвольная 1-параметрическая подгруппа в $GL(\mathfrak{g})$ и $\gamma'(0) = D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Соотношение

$$\gamma(t)([X, Y]) = [\gamma(t)(X), \gamma(t)(Y)], \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \quad (2.11)$$

можно переписать в виде

$$\gamma(t) \circ \text{ad } X = \text{ad}(\gamma(t)X) \circ \gamma(t), \quad X \in \mathfrak{g},$$

или

$$\gamma(t) \circ \text{ad}(\cdot) \circ \gamma(-t) = \text{ad} \circ \gamma(t), \quad (2.12)$$

а равенство (2.10) — в виде

$$D \circ \text{ad}(\cdot) + \text{ad}(\cdot) \circ (-D) = \text{ad} \circ D. \quad (2.13)$$

Если теперь $D \in \mathfrak{aut}(\mathfrak{g})$, то, дифференцируя (2.11), получаем, что

$$D([X, Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)],$$

т. е. $D \in \text{Der}$. Если же $D \in \text{Der}$ и $\gamma(t) = \exp(tD)$, $t \in \mathbb{R}$, — (матричная) экспонента, то выполняется соотношение (2.13), а следовательно и (2.12), эквивалентное соотношению (2.11). $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 63. Дифференцирование D алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *внутренним*, если $D = \text{ad } X$ для некоторого $X \in \mathfrak{g}$.

Из предыдущего предложения следует, что множество внутренних дифференцирований $D\mathfrak{g}$ образует идеал в алгебре всех дифференцирований $\text{Der}(\mathfrak{g})$ заданной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Следует отметить, что для некоторых алгебр Ли все дифференцирования исчерпываются внутренними (это справедливо, например, для полупростых алгебр), в то время как другие алгебры Ли (например, нильпотентные) заведомо имеют дифференцирования, не являющиеся внутренними.

2.4. Группы Ли с левоинвариантными римановыми метриками

В этом разделе мы применяем полученные в разделе 4.9 формулы для вычисления секционной, скалярной кривизны и кривизны Риччи однородных римановых многообразий к частному случаю левоинвариантных римановых метрик на группах Ли. Особо рассматриваются нильпотентные группы Ли и группы Ли с биинвариантной римановой метрикой. Последний случай особенно важен для выяснения структуры компактных алгебр Ли и групп Ли в разделе 2.5.

2.4.1. Связность Леви-Чивита на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 64. Риманова метрика (метрический тензор) g на группе Ли G называется *левоинвариантной*, если для каждого элемента $h \in G$, левый перенос l_h является изометрией пространства (G, g) .

Ясно, что для определения такой метрики g достаточно выбрать произвольный ортонормированный базис $X_1, \dots, X_n$ в $(G_e, g(e))$, или, что то же самое, в алгебре Ли LG всех левоинвариантных векторных полей на G . Тогда любое гладкое векторное поле X на G единственным образом представляется в виде $X = \xi^i X_i$ с гладкими компонентами-функциями ξ^i . При этом X левоинвариантно тогда и только тогда, когда все функции ξ^i постоянны. Формула (1.25) дает для любых левоинвариантных векторных полей X, Y, Z на G в обозначении $g(X, Y) := \langle X, Y \rangle$, что

$$\begin{aligned} \langle 2\nabla_X Y, Z \rangle &= X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + \\ &+ \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle, \end{aligned}$$

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \langle [X, Y], Z \rangle + \langle U(X, Y), Z \rangle, \quad (2.14)$$

где для каждого $Z \in LG$,

$$\langle U(X, Y), Z \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle \right). \quad (2.15)$$

Ясно, что $U(X, Y)$ определено корректно, билинейно и симметрично. Так как Z — произвольное левоинвариантное векторное поле, то отсюда на основании леммы 1.6 следует, что

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2} [X, Y] + U(X, Y). \quad (2.16)$$

2.4.2. Кривизны группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой. В теоремах 4.16, 4.17 и 4.18 соответственно получены формулы для вычисления секционной кривизны, кривизны Риччи и скалярной кривизны для произвольного однородного пространства $M = G/H$ связной группы Ли G по ее компактной подгруппе H с G -инвариантной римановой метрикой g относительно канонического левого действия группы Ли G на G/H . Формулы даны в терминах $\text{Ad}(H)$ -инвариантного разложения $G_e = \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ в прямую сумму и $\text{Ad}(H)$ -инвариантного скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{p}$ такого, что каноническое отождествление евклидовых векторных пространств $(\mathfrak{p}, (\cdot, \cdot))$ и $(M_H, g(H))$ является изометрией. Кроме того, используется симметричная билинейная форма $U : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ и нижние индексы $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{p}$ указывают проекции на соответствующие пространства. Очевидно, в рассматриваемом здесь случае $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $H = \{e\}$, $\mathfrak{h} = \{0\}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$, $(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Далее, сравнение формул (2.15) и (4.7) показывает, что при отождествлении $\mathfrak{g} = G_e$ с LG значение символов U в этих формулах совпадает. Из сказанного следует, что при использовании упомянутых формул нужно занулить все символы, содержащие нижний индекс $\mathfrak{h}$, убрать нижние индексы $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{p}$, а $(\cdot, \cdot)$ заменить на $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В результате получим приводимые ниже формулы.

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Y, X \rangle &= \langle U(X, Y), U(X, Y) \rangle - \langle U(Y, Y), U(X, X) \rangle - \\ &- \frac{3}{4} \langle [X, Y], [X, Y] \rangle - \frac{1}{2} \langle [X, [X, Y]], Y \rangle - \frac{1}{2} \langle X, [Y, [Y, X]] \rangle. \end{aligned}$$

Если X и Y — два левоинвариантных ортогональных единичных векторных поля на G , то это выражение постоянно и дает секционную кривизну $K(X, Y)$.

Кривизна Риччи Ric в направлении левоинвариантного векторного поля X задается формулой

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, X) = & -\frac{1}{2} B(X, X) - \frac{1}{2} \sum_i |[X, X_i]|^2 + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{i,j} \langle [X_i, X_j], X \rangle^2 - \langle [Z, X], X \rangle, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где B — форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а Z — левоинвариантное векторное поле на G , определяемое формулой

$$Z = \sum_i U(X_i, X_i). \quad (2.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из равенства (2.15) ясно, что для любого $X \in \mathfrak{g}$, $\langle Z, X \rangle = \text{trace}(\text{ad}(X))$. Это равенство полностью определяет поле Z , которое поэтому не зависит от выбора базиса $\{X_i\}$. Таким образом, $Z = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ унимодулярна. Отметим также, что $\text{trace}(\text{ad}(Z)) = \langle Z, Z \rangle$.

Скалярная кривизна sc задается формулой

$$sc = -\frac{1}{4} \sum_{i,j} |[X_i, X_j]|^2 - \frac{1}{2} \sum_i B(X_i, X_i) - |Z|^2. \quad (2.19)$$

Вследствие левой инвариантности метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ достаточно вычислить ее кривизны в точке $e \in G$. Из приведенных формул, формулы (2.15) и теоремы 2.5 получаем

Следствие 2.4. Формулы для секционной, риччиевой и скалярной кривизн левоинвариантной римановой метрики на группе Ли G в точке $e \in G$ для левоинвариантных и правоинвариантных векторных полей, ортогональных и единичных в e , совпадают.

2.4.3. Кривизны нильпотентных групповых многообразий. Здесь мы уточним формулы предыдущего раздела для риччиевой и скалярной кривизн нильпотентных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Предложение 2.13. *Предположим, что (G, g) — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, и ее алгебра Ли $\mathfrak{g} = LG$ нильпотентна ступени k . Тогда $(\mathfrak{g} = LG, g(e))$ допускает прямое ортогональное разложение в сумму векторных подпространств*

$$\mathfrak{g} = V_0 \oplus \dots \oplus V_{k-1}, \quad V_m = \mathfrak{g}^m \ominus \mathfrak{g}^{m+1}. \quad (2.20)$$

Предложение 2.14. *Если $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ — конечномерная нильпотентная алгебра Ли, то*

$$\text{trace ad } X = 0, \quad \text{trace ad}^2 X = 0 \quad (2.21)$$

для каждого элемента $X \in \mathfrak{g}$.

◁ Можно выбрать некоторый ортонормированный базис $X_1, \dots, X_n$, адаптированный к разложению (2.20). Ясно тогда, что для любого элемента $X \in \mathfrak{g}$, матрицы линейных отображений $\text{ad } X$ и $\text{ad}^2 X$ в этом базисе будут верхними треугольными с нулями на главной диагонали. Следовательно, мы получаем равенства (2.21). ▷

Вследствие предложения 2.14, замечания 5 и формул (2.17), (2.19) получаем следующие формулы:

$$\text{Ric}(X, X) = -\frac{1}{2} \sum_i |[X, X_i]|^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j} \langle [X_i, X_j], X \rangle^2, \quad (2.22)$$

$$\text{sc} = -\frac{1}{4} \sum_{i,j=1} |[X_i, X_j]|^2. \quad (2.23)$$

Из этих формул получаем

Следствие 2.5. *Если (G, g) — (связная) нильпотентная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, то ее скалярная кривизна sc неположительна. При этом $\text{sc} = 0$ тогда и только тогда, когда G коммутативна. В последнем случае и всякая секционная кривизна равна нулю.*

В свою очередь, отсюда вытекает

Следствие 2.6. *Если (G, g) — (связная) нильпотентная некоммутативная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, то существуют единичные ортогональные векторы $X, Y \in (LG, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ такие, что $\text{Ric}(X, X) < 0$ и $K(X, Y) < 0$.*

Интересно, что верно и противоположное утверждение.

Предложение 2.15. Если (G, g) — связная нильпотентная группа Ли степени $k > 1$, то $\text{Ric}(X, X) > 0$ для каждого единичного вектора $X \in (LG)^{k-1}$. Как следствие, существует единичный ортогональный к X вектор $Y \in (LG, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ такой, что $K(X, Y) > 0$.

◁ Ясно, что $[X_i, X] \in LG^k = \{0\}$ для каждого вектора X_i , так что формула (2.22) принимает вид

$$\text{Ric}(X, X) = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \langle [X_i, X_j], X \rangle^2.$$

Очевидно, что это число положительно. Теперь очевидно и второе утверждение. ▷

2.4.4. Кривизны биинвариантных римановых метрик на группах Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 65. Пусть G — связная группа Ли, а K — ее связная подгруппа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g} = LG$. Левоинвариантная риманова метрика на группе Ли G называется *K-правоинвариантной*, если она инвариантна относительно правых сдвигов на элементы подгруппы K ; в случае $K = G$ такая метрика называется *биинвариантной*.

Предложение 2.16. Риманова метрика $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ на связной группе Ли G удовлетворяет условиям определения 65 тогда и только тогда, когда $\langle U(X, Y), \mathfrak{k} \rangle = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$, т. е. оператор $\text{ad}(Z) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ кососимметричен для всех $Z \in \mathfrak{k}$. При этом $U(X, Y) = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{k}$.

◁ Нетрудно видеть, что преобразования Ψ_t , $t \in \mathbb{R}$, заданные произвольным элементом $Z \in \mathfrak{k}$, состоят из правых сдвигов на элементы подгруппы Ли K . Поэтому метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на группе Ли G K -правоинвариантна относительно связной подгруппы Ли K тогда и только тогда, когда всякое такое поле Z является киллинговым векторным полем на $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Поэтому вследствие теоремы 3.2 левоинвариантная метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на G K -правоинвариантна тогда и только тогда, когда

$$\langle U(X, Y), Z \rangle = \frac{1}{2} (\langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle) = \frac{1}{2} Z \langle X, Y \rangle = 0 \quad (2.24)$$

для всех $X, Y \in LG$, $Z \in \mathfrak{k}$. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональное разложение в прямую сумму векторных пространств. Полагая $X \in \mathfrak{m}$,

$Y, Z \in \mathfrak{k}$ в формуле (2.24), видим, что $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, так как $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$. Поэтому, полагая $Z \in \mathfrak{m}$, $X, Y \in \mathfrak{k}$ в формуле (2.24), получаем, что $\langle U(X, Y), Z \rangle = 0$ и, следовательно, $U(X, Y) = 0$. $\triangleright$

На основании предложения 2.16 и уравнения (2.16) получаем

Следствие 2.7. В условиях определения 65, для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{k} \subset LG$,

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2} [X, Y]. \quad (2.25)$$

Отсюда и из теоремы Хопфа — Ринова 1.21 вытекает

Следствие 2.8. Для каждого левоинвариантного векторного поля X на группе Ли с биинвариантной римановой метрикой $\nabla_X X = 0$. Геодезическими такой метрики являются 1-параметрические подгруппы и их левые и правые сдвиги, $\exp = \text{Exp}_e$; если группа Ли G связна, то отображение $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ сюръективно.

Теорема 2.14. Для любой пары единичных и ортогональных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{k}$ на группе Ли G с левоинвариантной и K -правоинвариантной римановой метрикой соответствующая секционная кривизна вычисляется по формуле

$$K(X, Y) = \frac{1}{4} |[X, Y]|^2. \quad (2.26)$$

Теорема 2.15. Пусть $X = X_1, \dots, X_n$ — ортонормированный базис левоинвариантных векторных полей на связной группе Ли G с биинвариантной римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда

$$\text{Ric}(X, X) = -\frac{1}{4} B(X, X) = \frac{1}{4} \sum_i \langle [X, X_i], [X, X_i] \rangle \quad (2.27)$$

для каждого $X \in \mathfrak{k}$. При этом $\text{Ric}(X, X) = 0$ тогда и только тогда, когда X — центральный элемент алгебры Ли $(LG, [\cdot, \cdot])$. Если метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$ биинвариантна, то алгебра Ли $(LG, [\cdot, \cdot])$ имеет тривиальный центр тогда и только тогда, когда кривизна Риччи такой метрики положительна; при этом группа Ли G компактна и имеет конечную фундаментальную группу.

$\triangleleft$ Первое равенство в (2.27) есть непосредственное следствие теоремы 4.19. Второе равенство следует из первого, определения формы Киллинга и предложения 2.16. Отсюда и из теоремы Майерса 1.22 следуют остальные утверждения. $\triangleright$

Теорема 2.16 (ТЕОРЕМА Г. ВЕЙЛЯ). Если форма Киллинга алгебры Ли связной группы Ли G отрицательно определена, то G компактна и имеет конечную фундаментальную группу. Как следствие, ее универсальная накрывающая группа Ли $\tilde{G}$ компактна.

◁ Очевидно, скалярное произведение на G_e распространяется до биинвариантной римановой метрики на группе Ли G тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно всех автоморфизмов $\text{Ad}(g)$, $g \in G$, алгебры Ли $(G_e, [\cdot, \cdot])$. Тогда вследствие предложений 2.11, 2.16, теоремы 2.4 и условий теоремы скалярное произведение $-B$ распространяется до биинвариантной метрики на группе Ли G . Из теоремы 2.15 вытекает первое утверждение, а из него — второе. ▷

Из теоремы 2.15 непосредственно вытекает

Следствие 2.9. Скалярная кривизна биинвариантной римановой метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на связной группе Ли G в произвольном ортонормированном базисе $X_1, \dots, X_n$ левоинвариантных векторных полей на $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ вычисляется по формуле

$$\text{sc} = \frac{1}{4} \sum_{j,k=1}^n |[X_j, X_k]|^2.$$

Она неотрицательна, а равна нулю тогда и только тогда, когда группа Ли G коммутативна.

Приведем еще одно следствие из теоремы 2.15.

Следствие 2.10. Пусть G — полупростая (не обязательно компактная) группа Ли, K — ее компактная подгруппа, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ — соответствующие алгебры Ли. Тогда ограничение на $\mathfrak{k}$ формы Киллинга $B_{\mathfrak{g}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ отрицательно определено.

◁ Выбирая произвольное скалярное произведение на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и усредняя его по действию компактной группы $\text{Ad}_G(K)$, получаем некоторое $\text{Ad}(K)$ -инвариантное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, которое порождает на группе G левоинвариантную и K -правоинвариантную риманову метрику. Пусть $X = X_1, \dots, X_n$ — $(\cdot, \cdot)$ -ортонормированный базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Поскольку центр алгебры $\mathfrak{g}$ тривиален, то по предложению 2.16 и определению формы Киллинга получаем, что $B_{\mathfrak{g}}(X, X) = \sum_i ([X, [X, X_i], X_i) = -\sum_i ([X, X_i], [X, X_i]) < 0$ для любого нетривиального $X \in \mathfrak{k}$. ▷

2.5. Компактные алгебры Ли и группы Ли

2.5.1. Компактные алгебры Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 66. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *компактной*, если существует компактная группа Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 67. Билинейная симметричная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется *инвариантной*, если

$$\langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle = 0$$

для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Далее в этом разделе рассматриваются алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с фиксированным инвариантным (положительно определенным) скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Предложение 2.17. *Ортогональное дополнение идеала алгебры Ли само является идеалом.*

◁ Пусть $\mathfrak{f}$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда вследствие определения 67 для любых элементов $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{f}$, $Z \in \mathfrak{f}^\perp$, получаем

$$\langle [X, Z], Y \rangle = -\langle Z, [X, Y] \rangle = 0,$$

т. е. $[X, Z] \in \mathfrak{f}^\perp$ и $\mathfrak{f}^\perp$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$. ▷

Предложение 2.18. *Центр $\mathfrak{z}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является ее максимальным коммутативным идеалом.*

◁ По предложению 2.9 $\mathfrak{z}$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{f}$ — произвольный коммутативный идеал алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{f}^\perp$ и вследствие предложения 2.17 для любых элементов $X, Y \in \mathfrak{f}$, $Z \in \mathfrak{f}^\perp$, $[X, Z] \in \mathfrak{f} \cap \mathfrak{f}^\perp = \{0\}$ и $[X, Y] = 0$ вследствие коммутативности идеала $\mathfrak{f}$. Следовательно, $X \in \mathfrak{z}$ и $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{z}$. ▷

Теорема 2.17. *Каждая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с (произвольным) инвариантным скалярным произведением представляется в виде прямой ортогональной суммы идеалов $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{l}$, где $\mathfrak{z}$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{l}$ — полупростая алгебра Ли. Кроме того, $\mathfrak{l}$ представляется в виде прямой ортогональной суммы идеалов, являющихся простыми алгебрами Ли.*

◁ Положим $\mathfrak{l} := \mathfrak{z}^\perp$. Тогда $\mathfrak{l}$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вследствие предложений 2.9, 2.17 и $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{l}$. При этом вследствие предложения 2.18, идеал $\mathfrak{l}$ — полупростая алгебра Ли. Последнее утверждение

доказывается индукцией по размерности алгебры Ли $\mathfrak{l}$ на основании предложения 2.17. $\triangleright$

Предложение 2.19. *Каждая компактная алгебра Ли допускает инвариантное скалярное произведение.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathfrak{g}$ — компактная алгебра Ли. По определению существует компактная связная группа Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Возьмем произвольное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{g} = G_e$ и продолжим его до левоинвариантной римановой метрики на G , сохранив обозначение. Вследствие компактности G на G существует биинвариантная мера Хаара — Лебега dg с условием $\int_G 1 dg = 1$. Ясно, что формула

$$\langle u, v \rangle := \int_G (Tr_g(u), Tr_g(v)) dg, \quad u, v \in G_x, x \in G,$$

определяет биинвариантную риманову метрику на G . На основании предложения 2.16 и формулы (2.15), ее ограничение на $\mathfrak{g} = G_e$ является инвариантным скалярным произведением на $\mathfrak{g}$. $\triangleright$

Лемма 2.1. *Если $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли с инвариантным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, то всякое ее дифференцирование D с условием*

$$\langle D(X), Y \rangle + \langle X, D(Y) \rangle = 0 \quad (2.28)$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$ является внутренним.

$\triangleleft$ Так как алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупростая, то гомоморфизм алгебр Ли $\text{ad } \mathfrak{g} \rightarrow D\mathfrak{g}$ (см. п. 2 предложения 2.12) является изоморфизмом. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$. Из определения 67 легко выводится, что автоматически $D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Вследствие предложения 2.12 $D\mathfrak{g}$ — идеал в алгебре Ли $\text{aut}(\mathfrak{g})$ группы Ли $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. Пусть $A = \text{Aut}(\mathfrak{g}) \cap SO(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Тогда $D\mathfrak{g}$ — идеал в алгебре Ли $\mathfrak{a}$ группы Ли A . Ясно, что $D \in \mathfrak{a}$, если D удовлетворяет условиям леммы. Так как A — компактная группа Ли, то вследствие предложения 2.19 на $\mathfrak{a}$ существует некоторое инвариантное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$. Предположим, что $D\mathfrak{g} \neq \mathfrak{a}$. Тогда на основании предложения 2.17, ортогональное относительно $(\cdot, \cdot)$ дополнение $\mathfrak{b} := D\mathfrak{g}^\perp$ нетривиально и также является идеалом в $\mathfrak{a}$. Возьмем произвольные ненулевые элементы $X \in \mathfrak{g}$ и $D \in \mathfrak{b}$. Тогда $[D, \text{ad } X] \in D\mathfrak{g} \cap \mathfrak{b} = \{0\}$. С другой стороны, вследствие формулы (2.10) $[D, \text{ad } X] = \text{ad}(D(X))$. Так как ядро гомоморфизма ad на $\mathfrak{g}$ тривиально, то $D = 0$, противоречие. $\triangleright$

Теорема 2.18. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ компактна тогда и только тогда, когда на $\mathfrak{g}$ существует инвариантное скалярное произведение.*

◁ Необходимость доказана в предложении 2.19.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли с инвариантным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. На основании теоремы 2.17, имеется ортогональное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{l}$ в прямую сумму идеалов, где $\mathfrak{z}$ — центр, а $\mathfrak{l}$ — полупростая алгебра Ли. Из доказательства леммы 2.1 следует, что алгебра Ли $\mathfrak{l}$ изоморфна алгебре Ли компактной группы Ли $A = \text{Aut}(\mathfrak{l}) \cap SO(\mathfrak{l}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{l}})$. Алгебра Ли $\mathfrak{z}$ изоморфна алгебре Ли тора T^m , где $m = \dim(\mathfrak{z})$. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна алгебре Ли компактной группы Ли $T^m \times L$ и теорема доказана. ▷

На основании теоремы 2.18 и определения 67 получаем

Следствие 2.11. *Подалгебра Ли компактной алгебры Ли является компактной алгеброй Ли.*

Предложение 2.20. *Разрешимая подалгебра Ли компактной алгебры Ли коммутативна.*

◁ Пусть $\mathfrak{h}$ — разрешимая подалгебра Ли компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. На основании следствия 2.11, $\mathfrak{h}$ — компактная алгебра Ли. Предположим, что $\mathfrak{h}$ не коммутативна. Тогда вследствие теорем 2.17 и 2.18 $\mathfrak{h}$ представляется в виде прямой суммы идеалов $\mathfrak{h} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{l}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{l}_k$, где $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $\mathfrak{h}$, а $\mathfrak{l}_1, \dots, \mathfrak{l}_k$ — простые алгебры Ли. Так как всегда $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то вследствие простоты подалгебр $\mathfrak{l}_1, \dots, \mathfrak{l}_k$ получаем, что

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = [\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_1] \oplus \dots \oplus [\mathfrak{l}_k, \mathfrak{l}_k] = \mathfrak{l}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{l}_k.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{h}$ не может быть разрешимой алгеброй Ли, противоречие. ▷

Теорема 2.19. *Компактная связная полупростая группа Ли имеет конечный центр и конечную фундаментальную группу. При этом форма Киллинга на ее алгебре Ли отрицательно определена.*

◁ Пусть G — полупростая компактная связная группа Ли. Вследствие полупростоты и компактности группа G имеет дискретный, а следовательно конечный центр. По теореме 2.18 ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет некоторое инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. На основании предложения 2.16 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ продолжается до биинвариантной римановой метрики на группе Ли G . Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет тривиальный

центр вследствие полупростоты. Теперь остальные утверждения следуют из теоремы 2.15. $\triangleright$

Из предложений 2.11, 2.16 и теорем 2.15, 2.17, 2.18 следует

Теорема 2.20. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ компактна и полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга $B_{\mathfrak{g}}$ отрицательно определена.*

Теорема 2.21. *Каждое дифференцирование компактной полупростой алгебры Ли является внутренним.*

$\triangleleft$ Вследствие теоремы 2.20 форма Киллинга $B_{\mathfrak{g}}$ отрицательно определена на $\mathfrak{g}$. Из предложений 2.11 и 2.12 следует, что скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle = -B_{\mathfrak{g}}$ инвариантно на $\mathfrak{g}$, а всякое дифференцирование D алгебры Ли $\mathfrak{g}$ удовлетворяет условию (2.28). Остается применить лемму 2.21. $\triangleright$

Из теорем 2.18, 2.17, 2.20, 2.16 и следствия 2.11 непосредственно вытекает

Теорема 2.22. *Каждая компактная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли односвязной группы Ли вида $G = \mathbb{R}^m \times G_1 \times \dots \times G_k$, где $G_1, \dots, G_k$ — компактные односвязные простые группы Ли.*

2.5.2. Подалгебры Картана компактных алгебр Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 68. Нильпотентная подалгебра $\mathfrak{t}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *подалгеброй Картана*, если $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$ (т. е. она совпадает со своим нормализатором в $\mathfrak{g}$).

Теорема 2.23. *Подалгебры Картана компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ совпадают с ее максимальными коммутативными подалгебрами. Подалгебры Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ компактной группы Ли G совпадают с алгебрами Ли максимальных торов в G ; при этом присоединенное представление $\text{Ad}(G)$ (связной группы Ли G) действует транзитивно на множестве всех подалгебр Картана в $\mathfrak{g}$.*

$\triangleleft$ Вследствие определения 68 и предложения 2.20 каждая подалгебра Картана $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ коммутативна. Следовательно, если $\mathfrak{h}$ — произвольная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{t}$, то $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{t} = \mathfrak{t}$. Тогда $\mathfrak{t}$ — максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Предположим, что $\mathfrak{t}$ — максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$, но $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$. Тогда на основании предложения 2.10, $\mathfrak{t}$ — максимальный коммутативный идеал в $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ и поэтому для каждого элемента

$X \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$, не лежащего в $\mathfrak{t}$, $\text{Lin}(\mathfrak{t} \cup \{X\})$ — коммутативная подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$, что противоречит максимальнойности $\mathfrak{t}$ относительно этого свойства. Первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть $\mathfrak{t}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, т. е. (вследствие доказанного) ее максимальная коммутативная подалгебра. На основании предложения 2.8 для любых чисел $t, s \in \mathbb{R}$ и любых векторов $X, Y \in \mathfrak{t}$ элементы $\exp(tX), \exp(sY) \in G$ коммутируют. Тогда наименьшая замкнутая подгруппа T в G , содержащая элементы такого вида, связна, коммутативна и компактна. По теореме Картана 2.7 группа $T \subset G$ является группой Ли и следовательно тором. Пусть $T' \supset T$ — максимальный тор в группе G с (коммутативной!) алгеброй Ли $\mathfrak{t}'$. По построению, $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}'$, и вследствие максимальнойности $\mathfrak{t}$ должно выполняться равенство $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$. Обратно, пусть T — максимальный тор в G с (коммутативной) алгеброй Ли $\mathfrak{t}$. Тогда $\mathfrak{t}$ должна быть максимальной коммутативной подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Иначе, применяя только что проведенные рассуждения, можно найти другой тор $T' \supset T$, где $T' \neq T$.

Известно, что для всякого тора T существует элемент $g \in T$ такой, что порожденная им подгруппа всюду плотна в T (см., например, [1, предложение 4.3]). Поэтому на основании следствия 2.8 существует вектор X из его алгебры Ли $\mathfrak{t}$ такой, что 1-параметрическая подгруппа $\exp(tX)$, $t \in \mathbb{R}$, всюду плотна в T . Пусть теперь T_1, T_2 — два максимальных тора в компактной группе Ли G с векторами X_1, X_2 из их алгебр Ли $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ (подалгебр Картана), аналогичными вектору X . Из предложения 2.8 следует, что $\mathfrak{t}_i$ — централизатор X_i в $\mathfrak{g}$ для $i = 1, 2$. Так как группа Ли G компактна, то ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает $\text{Ad}(G)$ -инвариантное (в других терминах, инвариантное) скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ (см. доказательство предложения 2.19). Рассмотрим теперь на G непрерывную функцию $f(g) = (X_1, \text{Ad}(g)(X_2))$. Поскольку группа G компактна, у этой функции есть точка абсолютного минимума g_0 . Значит, для любого $Z \in \mathfrak{g}$ функция $\tilde{f}(t) = f(g_0 \exp(tZ))$ достигает минимума в точке $t = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{f}'(0) = (X_1, \text{Ad}(g_0)([Z, X_2])) = \\ &= (\text{Ad}(g_0^{-1})X_1, [Z, X_2]) = -([\text{Ad}(g_0^{-1})X_1, X_2], Z), \end{aligned}$$

поэтому $[\text{Ad}(g_0^{-1})(X_1), X_2] = [X_1, \text{Ad}(g_0)(X_2)] = 0$. Полученное равенство означает, что $\text{Ad}(g_0)(X_2) \in \mathfrak{t}_1$, откуда получаем $\text{Ad}(g_0)(\mathfrak{t}_2) = \mathfrak{t}_1$. $\triangleright$

Теорема 2.24. Пусть G — связная компактная группа Ли. Тогда любые два максимальных тора в G сопряжены посредством внутреннего автоморфизма группы G , любой элемент группы G содержится в некотором максимальном торе этой группы, любой максимальный тор в G является максимальной абелевой подгруппой в G , централизатор любого тора $T \subset G$ является объединением всех максимальных торов, содержащих T (в частности, он связан).

◁ Первое утверждение вытекает из теоремы 2.23, а второе — из предложения 2.19 и следствия 2.8. Третье утверждение доказано в предложении 4.26 из [1], а четвертое является его следствием. ▷

Вследствие теорем 2.23 и 2.24 корректно следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 69. Размерность максимальной коммутативной подалгебры компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (соответственно, максимального тора компактной группы Ли G) называется *рангом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (компактной группы Ли G)* и обозначается $\text{rk } \mathfrak{g}$ ($\text{rk } G$).

Из теоремы 2.23 непосредственно получаем

Предложение 2.21. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_k$ — представление компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в виде прямой суммы ее центра и простых алгебр Ли из теоремы 2.17. Тогда всякая подалгебра Картана $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ представляется в виде прямой суммы $\mathfrak{t} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{t}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{t}_k$, где $\mathfrak{t}_i \subset \mathfrak{g}_i$, $i = 1, \dots, k$, — подалгебры Картана.

2.5.3. Корневые системы и группы Вейля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 70. Целочисленной решеткой тора T с алгеброй Ли $\mathfrak{t}$ называется множество $\exp^{-1}(e)$, где $\exp : \mathfrak{t} \rightarrow T$ — экспоненциальное отображение.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли компактной группы Ли G с биинвариантной римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$, T — максимальный тор в G . В книге Дж. Адамса [1] доказано следующее предложение 4.12.

Предложение 2.22. Алгебра Ли $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ расщепляется в прямую ортогональную сумму $\text{Ad } T$ -инвариантных векторных подпространств вида $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \sum_{i=1}^m V_i$, где $\text{Ad } T$ тривиально действует на $\mathfrak{t}$, $\dim V_i = 2$ для $i \geq 1$, и действие $\text{Ad } T$ на V_i (в некотором ортонормированном базисе $\{e_{i,1}, e_{i,2}\}$) задается матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi\theta_i(t)) & -\sin(2\pi\theta_i(t)) \\ \sin(2\pi\theta_i(t)) & \cos(2\pi\theta_i(t)) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\theta_i(t) := \theta_i(\exp^{-1}(t))$, $t \in T$, корректно определяется линейной формой $\theta_i : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{R}$, принимающей целые значения на целочисленной решетке. При этом (по теореме 5.5 в [1]) формы θ_i, θ_j линейно независимы, если $i \neq j$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 71. Формы $\pm \theta_i : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{R}$ называются *корнями группы Ли G* .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В силу теоремы 3.24 из [1] и теоремы 2.24 линейные формы $\pm \theta_i : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{R}$ однозначно определяются группой Ли G . Если группа Ли G односвязна (а значит, полупроста), то эти формы принято называть *корнями алгебры Ли $\mathfrak{g}$* , а корни и систему всех корней обозначать соответственно малыми греческими буквами и $\Delta = \Delta(\mathfrak{g})$. Ограничение скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{t}$ позволяет обычным образом отождествлять корни с элементами из $\mathfrak{t}$. Тогда для всякого корня $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$, $\alpha \perp U_\alpha := \ker \alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 72. Пусть T — максимальный тор компактной связной группы Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{t}$. *Группой Вейля W* группы G (соответственно, алгебры Ли $\mathfrak{t}$) называется группа тех автоморфизмов тора T (алгебры $\mathfrak{t}$), которые являются (соответственно, индуцированы) ограничениями внутренних автоморфизмов группы G .

Предложение 2.23. *Группа Вейля W связной компактной группы Ли G (картановской подалгебры Ли $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$) изоморфна конечной группе $N_G(T)/T$, где $N_G(T)$ нормализатор группы T в G . При этом группа W , с точностью до изоморфизма, не зависит от выбора компактной связной группы Ли G с данной компактной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$.*

◁ Достаточно доказать предложение для группы Ли G . Любой автоморфизм из W имеет вид $t \rightarrow ntn^{-1}$, где $n \in N_G(T)$. Следовательно, определен соответствующий эпиморфизм $f : N_G(T) \rightarrow W$, причем его ядром является централизатор $Z_G(T)$. Подгруппа $N_G(T)$ замкнута в G и, следовательно, компактна. По теореме 2.24 $Z_G(T) = T$, поэтому $W \cong N_G(T)/T$ и W компактна. Ясно, что *каждый* автоморфизм тора T накрывается линейным преобразованием его универсальной накрывающей векторной группы Ли $\mathfrak{t}$, сохраняющим целочисленную решетку $\exp^{-1}(e)$. Поэтому группа $\text{Aut}(T) \subset GL(\mathfrak{t})$, а следовательно и ее подгруппа W , дискретна. Будучи компактной и дискретной, группа W конечна. Ясно, что группа W действует тривиально на центре $Z(G) \subset T$ группы G . Поэтому действие группы W на T полностью определяется ее индуцированным действием на

$T/Z(G)$, т. е. действием группы Вейля полупростой компактной связной группы Ли $G/Z(G)$ с тривиальным центром на ее максимальном торе $T/Z(G)$ (см. в связи с этим теорему 2.22). $\triangleright$

На основании замечания 6, предложения 4.37 и теоремы 5.13 в [1] получаем следующую теорему.

Теорема 2.25. *Группа Вейля W подалгебры Картана $\mathfrak{t}$ компактной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ переставляет корни из $\Delta(\mathfrak{g})$ и порождается (ортогональными относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{t}}$) отражениями в гиперплоскостях $U_{\alpha} \subset \mathfrak{t}$, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g})$, из замечания 6.*

2.5.4. Абстрактные корневые системы. Изложение абстрактных корневых систем может быть найдено во многих источниках (см., например, [25]).

В этом разделе будем обозначать через $\mathbb{R}^l$ l -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Каждый ненулевой вектор $\alpha \in \mathbb{R}^l$ определяет отражение σ_{α} с *плоскостью отражения (зеркалом)* $U_{\alpha} = \{\beta \in \mathbb{R}^l \mid (\beta, \alpha) = 0\}$. Нетрудно вывести явную формулу для отражения:

$$\sigma_{\alpha}(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 73. Конечное множество $\Delta \subset \mathbb{R}^l$ называется *корневой системой*, а его элементы — *корнями*, если линейная оболочка множества Δ совпадает с $\mathbb{R}^l$ и выполнены следующие два условия:

- 1) $\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha, \beta \in \Delta$;
- 2) $\sigma_{\alpha}(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \in \Delta$ для всех $\alpha, \beta \in \Delta$.

Корневая система называется *приведенной*, если она удовлетворяет дополнительному условию

- 3) если $\alpha, \beta \in \Delta$ и β параллелен α , то $\beta = \pm \alpha$.

Из условий в этом определении легко следует, что угол между любыми двумя корневыми векторами может принимать лишь одно из значений $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$, а отношение квадратов длин неортогональных корней приведенной корневой системы может быть равным только 1, 2 или 3 в зависимости от угла между векторами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 74. Конечная группа W , порожденная всеми отражениями σ_{α} , $\alpha \in \Delta$, называется *группой Вейля корневой системы Δ* .

Дополнение в $\mathbb{R}^l$ к объединению всех зеркал U_α , $\alpha \in \Delta$, распадается на связные компоненты, которые называются *открытыми камерами Вейля*, а их замыкания называются просто *камерами Вейля*. Легко понять, что группа Вейля W просто транзитивна на множестве камер Вейля. Будем говорить, что вектор $\alpha \in \mathbb{R}^l$ *регулярный*, если он принадлежит открытой камере Вейля, и *сингулярный*, если он лежит по крайней мере в одном зеркале.

Множество $\Pi \subset \Delta$ называется *системой простых корней* (базисом), если Π является базисом в $\mathbb{R}^l$, и каждый корень $\beta \in \Delta$ можно записать в виде $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha$, где коэффициенты k_α целые, все одновременно неотрицательные или неположительные. При этом корни с неотрицательными коэффициентами называются *положительными*, а с неположительными — *отрицательными*, в то время как корни из Π называются *простыми*. Любая система корней эффективно восстанавливается по некоторой ее системе простых корней, которая заведомо существует. Более того, различные системы простых корней переводятся друг в друга посредством группы Вейля W .

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ — простые корни некоторой системы Π . Матрицей Картана системы Π называется матрица с элементами $a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$. Эта матрица содержит всю информацию о корневой системе Δ . Существует также удобный графический способ выразить информацию, содержащуюся в матрице Картана — *схемы Дынкина*. Рассмотрим граф Γ , вершины которого соответствуют простым корням (нумеруются как и простые корни). Две различные вершины с номерами i и j соединяются $m_{i,j}$ ребрами, где $m_{i,j} = a_{ij} \cdot a_{ji}$. Если $|a_{ij}| > |a_{ji}|$, то надо добавить стрелку, ведущую от i -ой вершины к j -ой (т. е. стрелка направлена на более короткий корень, поскольку $(\alpha_i, \alpha_j) < 0$ в таком случае). Снабженный такими дополнительными отметками граф Γ и называется *схемой Дынкина* (примеры таких схем см. в таблице 2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 75. Приведенная система корней Δ называется *неприводимой*, если ее нельзя разбить на две непустые подсистемы, чтобы каждый корень одной из подсистем был ортогонален каждому корню из другой подсистемы.

Отметим, что для неприводимой системы корней Δ соответствующая группа Вейля W действует неприводимо на $\mathbb{R}^l$. В частности W -орбита произвольного корня порождает $\mathbb{R}^l$. Можно показать, что

в неприводимой системе корней встречается не более двух длин корней, что приводит к понятиям *коротких* и *длинных* корней, причем группа Вейля W действует транзитивно на множестве корней одинаковой длины.

Понятно, что классификация приведенных корневых систем сводится к классификации неприводимых корневых систем, которая получается из классификации неприводимых систем простых корней. Для каждой неприводимой системы простых корней соответствующая схема Дынкина является связной. На языке схем Дынкина можно изложить и хорошо известную классификацию неприводимых систем простых корней. Существуют четыре бесконечные серии A_l , B_l , C_l и D_l таких систем, а также пять особых систем: F_4 , E_6 , E_7 , E_8 и G_2 . Более подробная информация об этих системах содержится в таблицах 1 и 2. Необходимо отметить, что существует естественное взаимно-однозначное соответствие между неприводимыми системами простых корней и простыми комплексными алгебрами Ли, а также с простыми компактными алгебрами Ли.

Таблица 1

Тип $\mathfrak{g}$	$\dim \mathfrak{g}$	Корни	Простые корни
A_l ($l \geq 1$)	$l^2 + 2l$	$\epsilon_i - \epsilon_j$	$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ ($1 \leq i \leq l$)
B_l ($l \geq 2$)	$2l^2 + l$	$\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j, \pm \epsilon_i$	$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ ($1 \leq i < l$), $\alpha_l = \epsilon_l$
C_l ($l \geq 2$)	$2l^2 + l$	$\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j, \pm 2\epsilon_i$	$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ ($1 \leq i < l$), $\alpha_l = 2\epsilon_l$
D_l ($l \geq 3$)	$2l^2 - l$	$\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j$	$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ ($1 \leq i < l$), $\alpha_l = \epsilon_{l-1} + \epsilon_l$
E_6	78	$\epsilon_i - \epsilon_j, \pm \epsilon,$ $\epsilon_i + \epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon$	$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ ($1 \leq i < 6$), $\alpha_6 = \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon$
E_7	133	$\epsilon_i - \epsilon_j,$ $\epsilon_i + \epsilon_j + \epsilon_k + \epsilon_l$	$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ ($1 \leq i < 7$), $\alpha_7 = \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7 + \epsilon_8$
E_8	248	$\epsilon_i - \epsilon_j,$ $\pm(\epsilon_i + \epsilon_j + \epsilon_k)$	$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ ($1 \leq i < 8$), $\alpha_8 = \epsilon_6 + \epsilon_7 + \epsilon_8$
F_4	52	$\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j, \pm \epsilon_i,$ $(\pm \epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4)/2$	$\alpha_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)/2,$ $\alpha_2 = \epsilon_4, \alpha_3 = \epsilon_3 - \epsilon_4,$ $\alpha_4 = \epsilon_2 - \epsilon_3$
G_2	14	$\epsilon_i - \epsilon_j, \pm \epsilon_i$	$\alpha_1 = -\epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3$

В соответствии с обозначениями в работе [30] мы приведем в таблице 1 классификацию неприводимых корневых систем, что экви-

Таблица 2

Тип g	Схема Дынкина	Порядок группы Вейля	Компактная алгебра Ли
$A_l \ (l \geqslant 1)$	$\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{l-1} - \alpha_l$	$(l+1)!$	$su(l+1)$
$B_l \ (l \geqslant 2)$	$\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{l-1} \Rightarrow \alpha_l$	$2^l \cdot l!$	$so(2l+1)$
$C_l \ (l \geqslant 2)$	$\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{l-1} \Leftarrow \alpha_l$	$2^l \cdot l!$	$sp(l)$
$D_l \ (l \geqslant 3)$	$\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \begin{array}{c} \alpha_{l-2} \\ \\ \alpha_l \end{array} - \alpha_{l-1}$	$2^{l-1} \cdot l!$	$so(2l)$
E_6	$\alpha_1 - \alpha_2 - \begin{array}{c} \alpha_3 \\ \\ \alpha_6 \end{array} - \alpha_4 - \alpha_5$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	e_6
E_7	$\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \begin{array}{c} \alpha_4 \\ \\ \alpha_7 \end{array} - \alpha_5 - \alpha_6$	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	e_7
E_8	$\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \begin{array}{c} \alpha_5 \\ \\ \alpha_8 \end{array} - \alpha_6 - \alpha_7$	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$	e_8
F_4	$\alpha_1 - \alpha_2 \Leftarrow \alpha_3 - \alpha_4$	$2^7 \cdot 3^2$	f_4
G_2	$\alpha_1 \Leftarrow \alpha_2$	12	g_2

В таблице 1 корни для систем B_l , C_l , D_l и F_4 выражены через некоторый ортонормированный базис $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_l)$. Корни для систем A_l , E_7 , E_8 и G_2 выражены через векторы $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{l+1}$, связанные соотношением $\sum_i \epsilon_i = 0$. Для этих векторов $(\epsilon_i, \epsilon_i) = \frac{1}{l+1}$, $(\epsilon_i, \epsilon_j) = -\frac{1}{l+1}$ при $i \neq j$. Корни для E_6 выражены через векторы $\epsilon_1, \dots, \epsilon_6$, построенные как для A_5 , и ортогональный им вектор ϵ , удовлетворяющий условию $(\epsilon, \epsilon) = 1/2$. Индексы $i, j, \dots$ в записи любого корня считаются различными.

Все корни любой из алгебр Ли A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 имеют одну и ту же длину. Корни остальных простых алгебр Ли имеют две различ-

ные длины, и мы получаем подсистемы $\Delta_l \subset \Delta$ и $\Delta_s \subset \Delta$ всех длинных и всех коротких корней соответственно. Если $\alpha \in \Delta_l$, $\beta \in \Delta_s$ для B_l, C_l, F_4 (соответственно, G_2), то $|\alpha|_1 = \sqrt{2}|\beta|_1$ (соответственно, $|\alpha|_1 = \sqrt{3}|\beta|_1$), где $|X|_1 = \sqrt{\langle X, X \rangle}$. Во всех случаях корни одинаковой длины могут образовывать углы $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$. Корни разной длины для B_l, C_l, F_4 (соответственно, G_2) могут образовывать углы $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ (соответственно, $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$).

В таблице 2 приведены схемы Дынкина для соответствующих корневых систем, порядки соответствующих групп Вейля и соответствующие компактные простые алгебры Ли.

2.6. Связь с комплексными алгебрами Ли

Алгебры Ли могут быть определены над любым полем $\mathbb{F}$. Если характеристика поля отлична от 2, то для таких алгебр Ли разработана глубокая теория, основы которой замечательно изложены в книге Дж. Хамфриса [57]. Для геометрических исследований (помимо вещественных алгебр Ли) важную роль играют комплексные алгебры Ли.

Отличие комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ от вещественной состоит лишь в том, что $\mathfrak{g}$ является линейным пространством над полем $\mathbb{C}$. Умножение на мнимую единицу $\sqrt{-1}$ в $\mathfrak{g}$ порождает естественную комплексную структуру J , т. е. $\mathbb{R}$ -линейный эндоморфизм J алгебры Ли $\mathfrak{g}$ такой, что $J^2 = -\text{Id}$. Комплексную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ можно рассматривать и как алгебру Ли над полем вещественных чисел (операция коммутирования при этом наследуется). Получающаяся таким образом вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ обладает комплексной структурой J и называется *овеществлением* комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. С другой стороны, если $\mathfrak{g}_0$ — вещественная алгебра Ли, то $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ естественным образом снабжается структурой алгебры Ли: для $X + \sqrt{-1}Y, U + \sqrt{-1}V \in \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ определим коммутатор по формуле $[X + \sqrt{-1}Y, U + \sqrt{-1}V] = [X, U] - [Y, V] + \sqrt{-1}([X, V] + [Y, U])$. Полученная таким образом комплексная алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ называется *комплексификацией* алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 76. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная алгебра Ли. *Вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$* — это такая подалгебра $\mathfrak{g}_0$ вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, что $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ изоморфна $\mathfrak{g}$. В таком случае каждый $Z \in \mathfrak{g}$ однозначно записывается в виде $Z = X + \sqrt{-1}Y$, где $X, Y \in \mathfrak{g}_0$.

Отметим, что существуют комплексные алгебры Ли, не обладающие вещественной формой. Но любая полупростая комплексная алгебра Ли имеет вещественную форму и даже не одну. Подробнее о вещественных формах можно узнать из гл. III книги [58] или из [30].

Отметим, что каждая комплексная полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождает абстрактную корневую систему, по которой может быть однозначно восстановлена [57, 58]. Используя инвариантность и невырожденность формы Киллинга, $\mathfrak{g}$ можно разложить в прямую сумму простых (т. е. не имеющих собственных идеалов) алгебр Ли. Корневые системы простых алгебр Ли являются неприводимыми. Классификация таких систем по сути эквивалентна классификации простых комплексных алгебр Ли. Более подробно об этом можно прочитать в книгах [30, 57, 58].

Примечательно также, что каждая полупростая комплексная алгебра Ли имеет *компактную* вещественную форму (см. теорему 6.3 в [58]). Более того, любые две компактные вещественные формы полупростой комплексной алгебры Ли сопряжены, т. е. переводятся друг в друга внутренними автоморфизмами алгебры (теорема 1.2 в [30, гл. 4]). Поэтому классификация компактных простых алгебр Ли может быть легко получена из классификации простых комплексных алгебр Ли.

2.7. Инвариантные нормы и скалярные произведения на алгебрах Ли

В этом разделе, следуя работе [19], мы приведем результаты о связи между инвариантными нормами и скалярными произведениями на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с нормами и скалярными произведениями, заданными на некоторой картановской подалгебре $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ и инвариантными относительно соответствующей группы Вейля.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем вещественных чисел, F — некоторая компактная группа преобразований пространства V . Рассмотрим некоторую норму $|\cdot| : V \rightarrow \mathbb{R}$ (скалярное произведение $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$) на V . Будем говорить, что $|\cdot|$ инвариантна относительно группы F , если $|X| = |f(X)|$ для всех $X \in V$ и всех $f \in F$. Аналогично, будем говорить, что скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ инвариантно относительно группы F , если $(X, Y) = (f(X), f(Y))$ для всех $X, Y \in V$ и $f \in F$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если норма $|\cdot|$ евклидова, т. е. порождена некоторым скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, то ее инвариантность относительно группы F равносильна инвариантности относительно F порождающего ее скалярного произведения. Действительно,

$$2(f(X), f(Y)) - 2(X, Y) = (f(X + Y), f(X + Y)) - (f(X), f(X)) - (f(Y), f(Y)) - (X + Y, X + Y) + (X, X) + (Y, Y).$$

Далее мы будем рассматривать инвариантные нормы $|\cdot|$ и инвариантные скалярные произведения $(\cdot, \cdot)$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, подразумеваемая инвариантность относительно группы внутренних автоморфизмов $\text{Int}(\mathfrak{g})$, порожденной элементами $\exp(\text{ad}(X))$, $X \in \mathfrak{g}$. Если G — компактная связная группа Ли с касательной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, то $\text{Int}(\mathfrak{g}) = \text{Ad}(G)$ вследствие предложения 2.7, теоремы 2.4 и следствия 2.2, поэтому инвариантность в этом смысле эквивалентна $\text{Ad}(G)$ -инвариантности.

Зафиксируем в $\mathfrak{g}$ некоторую подалгебру Картана $\mathfrak{t}$. Рассмотрим две подгруппы в группе $\text{Int}(\mathfrak{g})$, связанные с подалгеброй Картана $\mathfrak{t}$:

$$\widetilde{W} = \{f \in \text{Int}(\mathfrak{g}) \mid f(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}\}, \quad \widetilde{W}_0 = \{f \in \text{Int}(\mathfrak{g}) \mid f|_{\mathfrak{t}} = \text{Id}\}.$$

Понятно, что $\widetilde{W}_0$ является нормальной подгруппой в группе $\widetilde{W}$, а группа $W = \widetilde{W}/\widetilde{W}_0$ является группой Вейля алгебры Картана $\mathfrak{t}$ (см. определение 72 и предложение 2.23).

Для произвольной $\text{Ad}(G)$ -инвариантной нормы $|\cdot|$ (произвольного $\text{Ad}(G)$ -инвариантного скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$) на $\mathfrak{g}$ мы будем обозначать через $|\cdot|_{\mathfrak{t}}$ (соответственно, $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{t}}$) ее (его) ограничение на подалгебру $\mathfrak{t}$. Понятно, что $|\cdot|_{\mathfrak{t}}$ и $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{t}}$ являются инвариантными относительно группы Вейля W .

Известен следующий результат Э. Б. Винберга.

Теорема 2.26 (Э. Б. Винберг [29]). Пусть G — компактная связная группа Ли, $\mathfrak{t}$ — произвольная подалгебра Картана в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда каждая инвариантная относительно группы Вейля W норма на $\mathfrak{t}$ является ограничением единственной $\text{Ad}(G)$ -инвариантной нормы на $\mathfrak{g}$.

Мы приведем здесь доказательство этой теоремы, основанное на следующем результате Б. Костанта.

Теорема 2.27 (Б. КОСТАНТ [155]). Пусть G — компактная связная группа Ли, Q — некоторое $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное про-

изведение на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$ — произвольная подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$. Рассмотрим O — произвольную орбиту присоединенного действия G на $\mathfrak{g}$. Тогда ортогональная (относительно Q) проекция O на $\mathfrak{t}$ совпадает с выпуклой оболочкой орбиты группы Вейля W произвольного элемента из $\mathfrak{t} \cap O$.

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.26. Рассмотрим произвольную инвариантную относительно группы Вейля W норму $|\cdot|_1$ на $\mathfrak{t}$. В силу теоремы 2.23 для произвольного $Y \in \mathfrak{g}$ существует $s \in G$ такой, что $\text{Ad}(s)(Y) \in \mathfrak{t}$. Рассмотрим подмножество $\text{Reg} \subset \mathfrak{g}$ регулярных элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. тех ее элементов, централизатор которых в $\mathfrak{g}$ имеет минимальную размерность. Из теоремы 2.23 легко выводится, что Reg состоит в точности из тех элементов $X \in \mathfrak{g}$, для которых 1-параметрическая подгруппа $\exp(tX)$, $t \in \mathbb{R}$, всюду плотна в некотором максимальном торе $T \subset G$. Отсюда, из определения Reg и теоремы 2.23 следует, что Reg является открытым и всюду плотным подмножеством в $\mathfrak{g}$. Определим теперь отображение

$$|\cdot| : \text{Reg} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.29)$$

так, что

$$|Y| = |\text{Ad}(s)(Y)|_1, \quad \text{Ad}(s)(Y) \in \mathfrak{t}.$$

Отметим, что приведенное определение корректно. Действительно, пусть $Y_1 = \text{Ad}(s_1)(Y) \in \mathfrak{t}$ и $Y_2 = \text{Ad}(s_2)(Y) \in \mathfrak{t}$. Тогда векторы Y_1 и Y_2 являются регулярными. Поскольку $\text{Ad}(t)(Y_1) = Y_2$, где $t = s_2 s_1^{-1}$, то (в силу регулярности) $\text{Ad}(t)(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$. Поскольку же норма $|\cdot|_1$ является инвариантной относительно группы Вейля W , то $|Y_1|_1 = |Y_2|_1$. Таким образом, отображение (2.29) определено корректно. Очевидно также, что оно непрерывно и $\text{Ad}(G)$ -инвариантно. Поскольку Reg всюду плотно в $\mathfrak{g}$, отображение (2.29) можно с сохранением непрерывности и $\text{Ad}(G)$ -инвариантности продолжить на всю алгебру $\mathfrak{g}$.

Покажем теперь, что полученное отображение $|\cdot| : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ является нормой на $\mathfrak{g}$. В доказательстве нуждается лишь неравенство $|X + Y| \leq |X| + |Y|$ для произвольных $X, Y \in \mathfrak{g}$. Пусть $Z = X + Y$. В силу $\text{Ad}(G)$ -инвариантности можно без ограничения общности считать, что $Z \in \mathfrak{t}$. Зафиксируем на $\mathfrak{g}$ некоторое $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение Q , и пусть $X_{\mathfrak{t}}$ и $Y_{\mathfrak{t}}$ — Q -ортогональные проекции на $\mathfrak{t}$ векторов X и Y соответственно. Тогда $Z = X_{\mathfrak{t}} + Y_{\mathfrak{t}}$. Поэтому $|Z| = |Z|_1 \leq |X_{\mathfrak{t}}|_1 + |Y_{\mathfrak{t}}|_1$. Рассмотрим теперь $\tilde{X} (\tilde{Y})$ —

некоторый вектор в пересечении $\mathfrak{t}$ с орбитой точки X (соответственно, Y) относительно присоединенного действия. Согласно теореме 2.27 вектор $X_{\mathfrak{t}}$ лежит в выпуклой оболочке орбиты $\tilde{X}$ относительно группы Вейля W . Поскольку $|\cdot|_1$ -нормы всех элементов этой орбиты одинаковы и равны $|\tilde{X}|_1 = |X|$, то $|X_{\mathfrak{t}}|_1 = |X_{\mathfrak{t}}| \leq |X|$. Аналогично получаем, что $|Y_{\mathfrak{t}}|_1 = |Y_{\mathfrak{t}}| \leq |Y|$. Следовательно,

$$|X + Y| = |Z| = |Z|_1 \leq |X_{\mathfrak{t}}|_1 + |Y_{\mathfrak{t}}|_1 \leq |X| + |Y|,$$

что и требовалось. Таким образом, мы нашли $\text{Ad}(G)$ -инвариантную норму на $\mathfrak{g}$, ограничение которой на $\mathfrak{t}$ совпадает с $|\cdot|_1$. Единственность такой нормы следует из определения нормы $|\cdot|$. $\triangleright$

Перейдем теперь к исследованию $\text{Ad}(G)$ -инвариантных скалярных произведений. Понятно, что ограничение произвольного $\text{Ad}(G)$ -инвариантного скалярного произведения на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ на подалгебру Картана $\mathfrak{t}$ инвариантно относительно группы Вейля.

Известна следующая

Теорема 2.28 [25]. *Для простой компактной группы Ли G любое инвариантное относительно группы Вейля скалярное произведение на подалгебре Картана $\mathfrak{t}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ пропорционально ограничению формы Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{t}$.*

С помощью этой теоремы нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема 2.29. *Пусть G — компактная связная группа Ли, $\mathfrak{t}$ — произвольная подалгебра Картана в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда каждое инвариантное относительно группы Вейля W скалярное произведение на $\mathfrak{t}$ является ограничением единственного $\text{Ad}(G)$ -инвариантного скалярного произведения на $\mathfrak{g}$.*

$\triangleleft$ Пусть $(\cdot, \cdot)$ — произвольное $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G . Вследствие теоремы 2.17 существует $(\cdot, \cdot)$ -ортогональное разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_l$$

в прямую сумму центра $\mathfrak{z}$ и простых алгебр Ли $\mathfrak{g}_i$, $1 \leq i \leq l$. Из определения формы Киллинга B на $\mathfrak{g}$ следует, что это разложение ортогонально и относительно B , причем ограничения B на $\mathfrak{g}_i$ совпадают с формами Киллинга B_i алгебр Ли $\mathfrak{g}_i$, $1 \leq i \leq l$. Вслед-

ствие простоты последних алгебр (другими словами, их неприводимости относительно их внутренних автоморфизмов), инвариантное скалярное произведение на каждой из них определяется с точностью до умножения на постоянное число. Кроме того, форма Киллинга B отрицательно определена на $\mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_l$ вследствие теоремы 2.19 и равна нулю на $\mathfrak{z}$. Следовательно,

$$(\cdot, \cdot) = Q \oplus x_1 \cdot B_1 \oplus \dots \oplus x_l \cdot B_l,$$

где Q — произвольное скалярное произведение на $\mathfrak{z}$, $x_i < 0$, $1 \leq i \leq l$.

Теперь достаточно применить предложение 2.21 и теорему 2.28. $\triangleright$

Приведенные выше результаты полезны при исследовании свойств чебышевских норм (см. разделы 6.10, 6.11), соответствующих компактным однородным римановым многообразиям. В частности, теорема 2.26 позволяет ограничиться вычислением значений чебышевской нормы для векторов из какой-либо фиксированной подалгебры Картана алгебры Ли группы движений.

ГЛАВА 3

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОТОКИ И КИЛЛИНГОВЫ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Везде в этой главе, если не оговорено противное, римановы многообразия предполагаются связными.

3.1. Изометрии и киллингов векторные поля римановых многообразий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 77. Диффеоморфизм $\phi : (M, g) \rightarrow (M, g)$ риманова многообразия (M, g) на себя называется *изометрией* или *движением* риманова многообразия (M, g) , если для любой точки $x \in M$ и любых векторов $u, v \in M_x$, $g(T\phi(u), T\phi(v)) = g(u, v)$ (в других обозначениях, $\phi^*g = g$).

Теорема 3.1. Пусть $\phi : (M, g) \rightarrow (M, g)$ — биекция риманова многообразия (M, g) . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) ϕ — изометрия риманова многообразия (M, g) ;
- 2) ϕ — изометрия метрического пространства (M, d) , где d — внутренняя метрика на (M, g) , определяемая формулой (1.72).

◁ Из определений следует, что $1) \implies 2)$.

$2) \implies 1)$. Сначала предположим, что $\phi : M \rightarrow M$ — диффеоморфизм, являющийся изометрией метрического пространства (M, d) на себя. Тогда на основании следствия 1.4, $\text{Exp} \circ T\phi = \phi \circ \text{Exp}$ всюду на TM , причем для каждого вектора $v \in TM$, $\langle T\phi(v), T\phi(v) \rangle = \langle v, v \rangle$ (для краткости мы пишем $\langle X, Y \rangle$ вместо $g(X, Y)$). Следовательно,

$$\begin{aligned} 2\langle T\phi(u), T\phi(v) \rangle &= \langle T\phi(u) + T\phi(v), T\phi(u) + T\phi(v) \rangle - \langle T\phi(u), T\phi(u) \rangle - \\ &\quad - \langle T\phi(v), T\phi(v) \rangle = \langle u + v, u + v \rangle - \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle = 2\langle u, v \rangle \end{aligned}$$

для любой точки $x \in M$ и любых векторов $u, v \in M_x$, т. е. ϕ — изометрия риманова многообразия (M, g) .

С помощью того же следствия 1.4 нетрудно доказать, что каждая изометрия $\phi : (M, d) \rightarrow (M, d)$ является диффеоморфизмом гладкого многообразия M и следовательно изометрией риманова многообразия (M, g) . Детали опускаются. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 78. Гладкое векторное поле X на римановом многообразии (M, g) называется *киллинговым векторным полем*, если соответствующий ему поток Ψ полон и преобразования Ψ_t , $t \in \mathbb{R}$, являются изометриями риманова многообразия (M, g) .

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Отметим, что условие киллинговости векторного поля X эквивалентно классическим координатным *уравнениям Киллинга* в [151]: $\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = 0$ на ковариантные компоненты $\xi_i = g_{ij}\xi^j$ векторного поля X .

Теорема 3.2. Гладкое векторное поле X на полном римановом многообразии (M, g) является киллинговым векторным полем тогда и только тогда, когда

$$Xg(Y, Z) = g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) \quad (3.1)$$

для любых гладких векторных полей Y, Z на M , или, что эквивалентно, когда $L_X g = 0$.

$\triangleleft$ *Необходимость.* Пусть X — гладкое киллингово векторное поле на (M, g) , Ψ — его поток и $p \in M$ — произвольная точка. Тогда на основании предложений 1.3 и 1.10

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z)(p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [g(Y, Z)(p) - g(Y, Z)(\Psi_{-t}(p))] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [g(Y, Z)(p) - g((T\Psi_t)Y, (T\Psi_t)Z)(p)] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [g(Y, Z) - g((T\Psi_t)Y, Z)] + \\ &+ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [g((T\Psi_t)Y, Z) - g((T\Psi_t)Y, (T\Psi_t)Z)](p) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} g(Y - (T\Psi_t)Y, Z)(p) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} g((T\Psi_t)Y, Z - (T\Psi_t)Z)(p) = \\ &= g([X, Y], Z)(p) + g(Y, [X, Z])(p). \end{aligned}$$

Достаточность. Пусть X — гладкое векторное поле на полном римановом многообразии (M, g) , удовлетворяющее соотношению (3.1), Ψ — поток векторного поля X с областью определения W и Y, Z — произвольные гладкие векторные поля на M . Пусть

$(p, t_0) \in W$, где $t_0 > 0$, — произвольная точка в W . Определим гладкий путь $c(t) = \Psi(p, t)$ и гладкие вещественные функции $f(t)$ и $\phi(t)$ на $[0, t_0]$ по формулам

$$f(t) = g(Y, Z)(c(t)) - g(Y, Z)(p),$$

$$\phi(t) = g(Y, Z)(c(t)) - g((T\Psi_t)Y(p), (T\Psi_t)Z(p)).$$

Ясно, что $c'(t) = Tc(\frac{\partial}{\partial t}) = X(c(t))$ для всех $t \in [0, t_0]$. Тогда на основании проведенных чуть выше вычислений, определения 11 и следствия 1.2

$$f'(t) = Xg(Y, Z)(c(t)),$$

$$\phi'(t) = g([X, Y], Z)(c(t)) + g(Y, [X, Z])(c(t))$$

для всех $t \in [0, t_0]$. Вследствие этого из равенств $f(0) = 0 = \phi(0)$ и (3.1) получаем

$$f(t_0) = \int_0^{t_0} f'(t) dt = \int_0^{t_0} \phi'(t) dt = \phi(t_0).$$

Поэтому $g((T\Psi_{t_0})Y(p), (T\Psi_{t_0})Z(p)) = g(Y, Z)(p)$, т. е. Ψ_t — локальная 1-параметрическая группа локальных изометрий риманова многообразия (M, g) . Если теперь $c(t) = \Psi(p_0, t)$, $(p_0, t) \in W$, — максимальная интегральная кривая поля X с началом в произвольной точке p_0 , то $c'(t) = (T\Psi_t)(c'(0))$,

$$g(c'(t), c'(t)) = g((T\Psi_t)(c'(0)), (T\Psi_t)(c'(0))) = g(c'(0), c'(0)),$$

т. е. касательные векторы $c'(t)$ имеют постоянную длину для всех t из области определения c . Отсюда, из полноты риманова многообразия (M, g) и теоремы Хопфа — Ринова легко выводится, что $c(t)$ определено при всех $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, X задает 1-параметрическую группу Ψ_t , $t \in \mathbb{R}$, изометрий риманова многообразия (M, g) и поэтому является киллинговым полем на (M, g) .

Осталось заметить, что равенство (3.1) эквивалентно равенству $L_X g = 0$, что сразу следует из определения 16. $\triangleright$

Теорема 3.3. Пусть X — поле Киллинга на римановом многообразии (M, g) . Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Ограничение X на произвольную геодезическую $c(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в (M, g) является полем Якоби вдоль этой геодезической, т. е. имеет место равенство $\nabla_{\tau(t)}^2 X + R(X, \tau(t))\tau(t) = 0$, где $\tau(t) = c'(t)$.

2) Если $h(t) = \frac{1}{2}g(X(c(t)), X(c(t)))$, где $c(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) — геодезическая на (M, g) , то

$$h''(t) = g(\nabla_{\tau(t)} X, \nabla_{\tau(t)} X) - g(R(X, \tau(t))\tau(t), X).$$

3) Для произвольной точки $x \in M$ со свойством $g_x(X, X) \neq 0$ интегральная траектория поля X , проходящая через точку $x \in M$, является геодезической на (M, g) тогда и только тогда, когда x — критическая точка квадрата длины $g(X, X)$ поля X .

◁ Докажем первое утверждение. Пусть $c = c(t)$, $t \in [a, b]$, — произвольная геодезическая, а Y — киллингово векторное поле на (M, g) . Тогда формула $C(t, s) := \Psi_s(c(t))$, где Ψ_s , $s \in \mathbb{R}$, — 1-параметрическая группа изометрий пространства (M, g) , определяемая полем Y , задает некоторую вариацию геодезических в (M, g) , причем $TC(t, s)(\partial/\partial s) = Y(C(t, s))$. Остается применить предложение 1.13.

Из этого утверждения и выкладок

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{1}{2} \nabla_{\tau(t)} g(X, X) = g(\nabla_{\tau(t)} X, X), \\ h''(t) &= g(\nabla_{\tau(t)}^2 X, X) + g(\nabla_{\tau(t)} X, \nabla_{\tau(t)} X) = \\ &= g(\nabla_{\tau(t)} X, \nabla_{\tau(t)} X) - g(R(X, \tau(t))\tau(t), X) \end{aligned}$$

следует второе утверждение теоремы.

Докажем утверждение 3). Пусть $f = g(X, X)$. Для произвольного векторного поля Y имеем в точке x равенство $Yf = 2g(\nabla_Y X, X) = -2g(Y, \nabla_X X)$ согласно утверждению 1) в предложении 3.1. Если x — не критическая точка, то $\nabla_X X \neq 0$ в этой точке (достаточно в предыдущем равенстве положить $Y := \nabla_X X$), т. е. интегральная кривая поля X через точку x не является геодезической. Если же рассматриваемая точка — критическая, то $\nabla_X X = 0$ в точке x . Обозначая через Ψ_t , $t \in \mathbb{R}$, изометрический поток, порождаемый полем X , получаем $T\Psi_t(X(x)) = X(\Psi_t(x))$. Значит, $\nabla_X X = 0$ вдоль всей орбиты $\Psi_t(x)$, т. е. эта орбита (интегральная кривая поля X) является геодезической. ▷

Для киллингова векторного поля X полезен оператор A_X , определенный на векторных полях формулой

$$A_X V = -\nabla_V X. \quad (3.2)$$

Ясно, что $A_X = L_X - \nabla_X$. Известно следующее утверждение (см., например, [42]).

Предложение 3.1. Пусть X — киллингово векторное поле на римановом многообразии (M, g) . Тогда верны следующие утверждения:

1) Для любых векторных полей U и V на M выполняется равенство $g(\nabla_U X, V) + g(U, \nabla_V X) = 0$. Другими словами, оператор A_X кососимметричен.

2) Для каждого векторного поля U на M выполняется равенство

$$R(X, U) = [\nabla_X, \nabla_U] - \nabla_{[X, U]} = [\nabla_U, A_X],$$

где R — тензор кривизны многообразия (M, g) .

3) Для любых векторных полей U, V, W на римановом многообразии (M, g) верна следующая формула:

$$-g(R(X, U)V, W) = g(\nabla_U \nabla_V X, W) + g(\nabla_U V, \nabla_W X).$$

◁ Ясно, что $X \cdot g(U, V) = g(\nabla_X U, V) + g(U, \nabla_X V)$ и $X \cdot g(U, V) = g([X, U], V) + g(U, [X, V])$. Поэтому

$$\begin{aligned} g(\nabla_U X, V) + g(U, \nabla_V X) &= \\ &= g(\nabla_X U - [X, U], V) + g(U, \nabla_X V - [X, V]) = 0, \end{aligned}$$

что доказывает первое утверждение.

Второе утверждение получим, следуя идеям доказательства леммы 2.2 из [154]. Отметим сначала, что для любого векторного поля V выполняется равенство $\nabla_V(A_X) = [\nabla_V, A_X]$ (см. предложение 2.10 третьей главы в [42]), и оператор $\nabla_V(A_X)$ кососимметричен в силу кососимметричности оператора A_X . Рассмотрим билинейную форму $\psi(V, U) = \nabla_V(A_X)U - R(X, V)U$, где U, V — векторные поля, R — тензор кривизны рассматриваемого многообразия. Легко понять, что $\nabla_V(A_X)U = [\nabla_V, A_X] \cdot U = \nabla_V A_X U - A_X \nabla_V U = -\nabla_V \nabla_U X - A_X \nabla_V U$ и

$$\begin{aligned} \psi(V, U) - \psi(U, V) &= [\nabla_V, A_X] \cdot U - [\nabla_U, A_X] \cdot V + R(X, U)V - \\ &- R(X, V)U = [\nabla_U, \nabla_V]X - \nabla_{[U, V]}X - R(U, V)X = 0, \end{aligned}$$

поскольку $R(X, U)V + R(V, X)U + R(U, V)X = 0$ (см. равенство (1.30)) и $A_X \nabla_U V - A_X \nabla_V U = A_X [U, V] = -\nabla_{[U, V]} X$. Таким образом, билинейная форма ψ симметрична по своим двум аргументам. Теперь мы рассмотрим трилинейную форму $\varphi(U, V, W) = g(\psi(V, U), W)$. Ясно, что она симметрична по аргументам V и U . Заметим теперь, что выражение $\varphi(U, V, W) = g(\nabla_V(A_X)U - R(X, V)U, W) = g(\nabla_V(A_X)U, W) - g(R(X, V)U, W)$ кососимметрично по аргументам W и U (это следует из свойств тензора кривизны и кососимметричности оператора $\nabla_V(A_X)$). Если трилинейная форма симметрична по одной паре аргументов и кососимметрична по другой, эта форма, очевидно, нулевая. Поэтому и $\psi(V, U) \equiv 0$ и $\nabla_V(A_X) = [\nabla_V, A_X] = R(X, V)$ для любого векторного поля V , что доказывает второе утверждение леммы.

Третье утверждение следует из предыдущего:

$$\begin{aligned} g(R(X, U)V, W) &= g(\nabla_U A_X V, W) - g(A_X \nabla_U V, W) = \\ &= -g(\nabla_U \nabla_V X, W) + g(\nabla_U V, A_X W) = \\ &= -g(\nabla_U \nabla_V X, W) - g(\nabla_U V, \nabla_W X), \end{aligned}$$

потому что оператор A_X кососимметричен для киллингова векторного поля X . $\triangleright$

3.2. Тензор кривизны и векторные поля Киллинга

Лемма 3.1. Пусть X, Y, Z — киллинговы поля на римановом многообразии (M, g) . Тогда

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([X, Z], Y) + g(X, [Y, Z]).$$

$\triangleleft$ Поскольку $[U, V] = \nabla_U V - \nabla_V U$ для любых векторных полей U, V , а оператор A_X ($A_X Y = -\nabla_Y X$) кососимметричен для любого киллингова поля X , то

$$\begin{aligned} g([X, Z], X) &= g(\nabla_X Z, X) - g(\nabla_Z X, X) = \\ &= -g(A_Z X, X) + g(A_X Z, X) = -g(Z, A_X X) = g(\nabla_X X, Z). \end{aligned}$$

Поляризуя данное равенство, получаем

$$g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) = g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X).$$

Прибавляя очевидное равенство $g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) = g([X, Y], Z)$, получаем лемму. $\triangleright$

Лемма 3.2. Пусть X, Y, Z, W — киллинговы поля на римановом многообразии (M, g) . Тогда

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, W) &= g(\nabla_Z X, \nabla_Y W) - g(\nabla_Y Z, \nabla_W X) - \\ &- \frac{1}{2} \left[g([Y, [Z, X]], W) + g([Y, [Z, W]], X) + g([Y, [X, W]], Z) + \right. \\ &\left. + g([Z, X], [Y, W]) + g([Z, W], [Y, X]) + g([Y, Z], [X, W]) \right]. \end{aligned}$$

◁ Пусть

$$f := 2g(\nabla_Z X, W) = g([Z, X], W) + g([Z, W], X) + g(Z, [X, W])$$

(см. лемму 3.1). Тогда $Y \cdot f = 2g(\nabla_Y \nabla_Z X, W) + 2g(\nabla_Z X, \nabla_Y W)$ с одной стороны, и вследствие теоремы 3.2

$$\begin{aligned} Y \cdot f &= g([Y, [Z, X]], W) + g([Z, X], [Y, W]) + g([Y, [Z, W]], X) + \\ &+ g([Z, W], [Y, X]) + g([Y, [X, W]], Z) + g([Y, Z], [X, W]) \end{aligned}$$

с другой, поэтому

$$\begin{aligned} g(\nabla_Y \nabla_Z X, W) &= -g(\nabla_Z X, \nabla_Y W) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[g([Y, [Z, X]], W) + g([Y, [Z, W]], X) + g([Y, [X, W]], Z) + \right. \\ &\left. + g([Z, X], [Y, W]) + g([Z, W], [Y, X]) + g([Y, Z], [X, W]) \right]. \end{aligned}$$

По пункту 3) предложения 3.1

$$g(R(X, Y)Z, W) = -g(\nabla_Y \nabla_Z X, W) - g(\nabla_Y Z, \nabla_W X).$$

Из двух последних равенств получается утверждение леммы. ▷

Для гладких векторных полей X, Y на римановом многообразии (M, g) положим

$$\mathcal{U}(X, Y) := \nabla_X Y - \frac{1}{2} [X, Y]. \quad (3.3)$$

Поскольку $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, то $\mathcal{U}(X, Y) = \mathcal{U}(Y, X)$, и равенство $\nabla_X Y = \frac{1}{2} [X, Y] + \mathcal{U}(X, Y)$ дает разложение в сумму кососимметрической и симметрической формы. По лемме 3.1

$$2g(\mathcal{U}(X, Y), Z) = g([X, Z], Y) + g(X, [Y, Z]) \quad (3.4)$$

для любых киллинговых полей X, Y, Z .

Теорема 3.4. Пусть X, Y, Z, W — киллинговы векторные поля на римановом многообразии (M, g) . Тогда

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, W) &= g(\mathcal{U}(X, Z), \mathcal{U}(Y, W)) - g(\mathcal{U}(X, W), \mathcal{U}(Y, Z)) + \\ &+ \frac{1}{2}g([X, Y], [Z, W]) + \frac{1}{4}g([X, Z], [Y, W]) - \frac{1}{4}g([X, W], [Y, Z]) + \\ &+ \frac{1}{4}\left[g([X, [Z, W]], Y) - g([Y, [Z, W]], X) + \right. \\ &\left. + g([Z, [X, Y]], W) - g([W, [X, Y]], Z)\right]. \end{aligned}$$

◁ Учитывая лемму 3.2, уравнения (3.3) и (3.4), тождество Якоби, получаем

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, W) &= g(\nabla_Z X, \nabla_Y W) - g(\nabla_Y Z, \nabla_W X) - \\ &- \frac{1}{2}\left[g([Y, [Z, X]], W) + g([Y, [Z, W]], X) + g([Y, [X, W]], Z) + \right. \\ &\left. + g([Z, X], [Y, W]) + g([Z, W], [Y, X]) + g([Y, Z], [X, W])\right] = \\ &= \frac{1}{4}g([Z, X], [Y, W]) + \frac{1}{4}g([Y, [Z, X]], W) + \frac{1}{4}g(Y, [W, [Z, X]]) + \\ &+ \frac{1}{4}g([Z, [Y, W]], X) + \frac{1}{4}g(Z, [X, [Y, W]]) + g(\mathcal{U}(X, Z), \mathcal{U}(Y, W)) - \\ &- \frac{1}{4}g([Y, Z], [W, X]) - \frac{1}{4}g([W, [Y, Z]], X) - \frac{1}{4}g(W, [X, [Y, Z]]) - \\ &- \frac{1}{4}g([Y, [W, X]], Z) - \frac{1}{4}g(Y, [Z, [W, X]]) - g(\mathcal{U}(Y, Z), \mathcal{U}(X, W)) - \\ &- \frac{1}{2}g([Y, [Z, X]], W) - \frac{1}{2}g([Y, [Z, W]], X) - \frac{1}{2}g([Y, [X, W]], Z) - \\ &- \frac{1}{2}g([Z, X], [Y, W]) - \frac{1}{2}g([Z, W], [Y, X]) - \frac{1}{2}g([Y, Z], [X, W]) = \\ &= g(\mathcal{U}(X, Z), \mathcal{U}(Y, W)) - g(\mathcal{U}(X, W), \mathcal{U}(Y, Z)) + \\ &+ \frac{1}{2}g([X, Y], [Z, W]) + \frac{1}{4}g([X, Z], [Y, W]) - \frac{1}{4}g([X, W], [Y, Z]) + \\ &+ \frac{1}{4}\left[g([X, [Z, W]], Y) - g([Y, [Z, W]], X) + \right. \\ &\left. + g([Z, [X, Y]], W) - g([W, [X, Y]], Z)\right]. \triangleright \end{aligned}$$

Полагая в этой теореме $Z = Y$ и $W = X$, получаем важное

Следствие 3.1. Пусть X, Y — киллинговы поля на римановом многообразии (M, g) . Тогда

$$g(R(X, Y)Y, X) = g(\mathcal{U}(X, Y), \mathcal{U}(X, Y)) - g(\mathcal{U}(Y, Y), \mathcal{U}(X, X)) - \\ - \frac{3}{4} g([X, Y], [X, Y]) - \frac{1}{2} g([X, [X, Y]], Y) - \frac{1}{2} g(X, [Y, [Y, X]]).$$

3.3. Векторные поля Киллинга постоянной длины

В этом разделе мы приведем некоторые свойства киллинговых векторных полей постоянной длины на римановых многообразиях и установим их связь с переносами Клиффорда — Вольфа. Отметим, что в книге [63] киллинговы векторные поля постоянной длины называются *инфинитезимальными переносами*.

Г. Риччи (см. [202]) получил следующую теорему: для того чтобы конгруэнция C кривых состояла из интегральных кривых некоторого киллингова поля, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: (1) любые $n - 1$ взаимно ортогональные конгруэнции, ортогональные к C , являются каноническими относительно C ; (2) кривые любой конгруэнции, ортогональной к C , являются геодезическими, или их главные нормали ортогональны к кривым из C в соответствующих точках; (3) главные нормали к кривым из C , не являющимся геодезическими, касаются некоторой нормальной конгруэнции.

Поясним, что условие (1) эквивалентно уравнениям (см. (38.8) в [63])

$$\gamma_{nhk} + \gamma_{nkh} = 0 \quad (h, k = 1, \dots, n - 1; h \neq k),$$

где согласно уравнению (30.1) в [63], $\gamma_{ljk} = \lambda_{l|i,j} \lambda_h^i \lambda_k^j$, а λ_l^i , $l = 1, \dots, n$, — компоненты поля направлений, касающегося l -й конгруэнции; конгруэнция C имеет номер $n = \dim M$. По определению, конгруэнция кривых *нормальна*, если они ортогональны некоторому (1-параметрическому) семейству гиперповерхностей в (M, g) (см. подробности в [63]).

На основе теоремы Г. Риччи в [63] доказывается, что конгруэнция геодезических состоит из интегральных кривых некоторого инфинитезимального переноса тогда и только тогда, когда выполнены условия (1) и (2) теоремы Г. Риччи.

В [63] также доказано следующее утверждение: единичное векторное поле X на (M, g) является (единичным) полем Киллинга тогда и только тогда, когда угол между полем X и касательным вектором любой (ориентированной) геодезической в (M, g) постоянен вдоль этой геодезической. Как следствие, интегральные (геодезические) кривые двух инфинитезимальных переносов образуют постоянный угол вдоль каждой из них.

Известно следующее утверждение (см. [96, с. 499]).

Предложение 3.2. Пусть X — киллингово векторное поле X на римановом многообразии (M, g) . Тогда эквивалентны следующие свойства:

- 1) X имеет постоянную длину;
- 2) $\nabla_X X = 0$;
- 3) каждая интегральная кривая поля X — геодезическая в (M, g) .

◁ Достаточно заметить, что длина поля X постоянна вдоль любой его интегральной кривой и что для любого гладкого векторного поля Y на (M, g) имеется следующее равенство:

$$\begin{aligned} 0 &= (L_X g)(X, Y) = X \cdot g(X, Y) - g([X, X], Y) - g(X, [X, Y]) = \\ &= g(\nabla_X X, Y) + g(X, \nabla_X Y) - g(X, [X, Y]) = \\ &= g(\nabla_X X, Y) + g(X, \nabla_Y X) = g(\nabla_X X, Y) + \frac{1}{2} Y \cdot g(X, X). \triangleright \end{aligned}$$

Можно характеризовать поля Киллинга постоянной длины на римановых многообразиях в терминах некоторых специальных систем координат. Нетрудно доказать справедливость следующих утверждений.

(1) Существование киллингова векторного поля X в окрестности точки x риманова многообразия (M^n, g) с условием $X(x) \neq 0$, эквивалентно существованию локальной карты (U, φ, V) , где $x \in U$, $\varphi(x) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, с каноническими координатными функциями $x^i \circ \varphi$, $i = 1, \dots, n$, такой, что все компоненты $g_{ij} \circ \varphi^{-1}$ метрического тензора g не зависят от x^n , и X имеет компоненты $\xi^i = \delta_n^i$. Таким образом, локальная однопараметрическая группа локальных изометрий $\gamma(t)$, порожденная векторным полем X , имеет вид

$$\varphi(\gamma(t)(\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n))) = (x^1, \dots, x^{n-1}, x^n + t).$$

(2) В приведенных выше условиях, кривая $c(t)$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, с координатными функциями $x^i(t) := x^i(\varphi(c(t))) = \delta_n^i t$ является геодезической тогда и только тогда, когда функция

$$g_{nn}(\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)) \quad (3.5)$$

имеет критическое значение в точке $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

(3) Точки x сдвигаются на локально постоянное расстояние под действием $\gamma(t)$ тогда и только тогда, когда функция (3.5) постоянна в некоторой окрестности точки $\mathbf{0}$.

Утверждения (1)–(3) доказаны в [63, разд. 72].

Далее мы приведем еще несколько известных свойств киллинговых векторных полей постоянной длины.

Предложение 3.3. *Для каждого киллингова векторного поля Z постоянной длины и любых векторных полей X , Y на римановом многообразии (M, g) верны следующие равенства:*

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) &= g(R(X, Z)Z, Y) = g(R(Z, Y)X, Z), \\ g(R(X, Z)Z, \nabla_Y Z) + g(R(Y, Z)Z, \nabla_X Z) &= 0, \\ g(\nabla_Z \nabla_Y Z, \nabla_X Z) &= g(R(X, Z)Z, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

◁ Докажем первое равенство. Так как $g(Z, Z) = \text{const}$, то

$$X \cdot g(Z, Z) = 2g(\nabla_X Z, Z) = 0.$$

Поэтому

$$0 = Y \cdot g(\nabla_X Z, Z) = g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z).$$

Вследствие утверждения 3) предложения 3.1 мы получаем

$$g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) = -g(R(Z, Y)X, Z) - g(\nabla_Y X, \nabla_Z Z) = -g(R(Z, Y)X, Z),$$

так как $\nabla_Z Z = 0$. Поэтому $g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) = g(R(Z, Y)X, Z)$. Формула $g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) = g(R(X, Z)Z, Y)$ следует из симметрий тензора кривизны.

Докажем теперь второе равенство. В силу уже доказанного первого равенства

$$\begin{aligned} &g(R(X, Z)Z, \nabla_Y Z) + g(R(Y, Z)Z, \nabla_X Z) = \\ &= g(\nabla_X Z, \nabla_{\nabla_Y Z} Z) + g(\nabla_Y Z, \nabla_{\nabla_X Z} Z) = g(U, \nabla_V Z) + g(V, \nabla_U Z), \end{aligned}$$

где $U = \nabla_X Z$, $V = \nabla_Y Z$. Теперь, используя утверждение 1) предложения 3.1, получаем $g(U, \nabla_V Z) + g(V, \nabla_U Z) = 0$.

Далее, так как $\nabla_Z Z = 0$ и для любого гладкого векторного поля W соблюдаются равенства

$$\begin{aligned}\nabla_Z \nabla_W &= \nabla_W \nabla_Z + \nabla_{[Z, W]} + R(Z, W), \\ \nabla_Z W &= \nabla_W Z + [Z, W],\end{aligned}$$

мы получаем (используя первое равенство)

$$\begin{aligned}g(\nabla_Z \nabla_Y Z, \nabla_X Z) &= g(\nabla_{[Z, Y]} Z, \nabla_X Z) + g(R(Z, Y)Z, \nabla_X Z) = \\ &= g(R(X, Z)Z, [Z, Y]) + g(R(Z, Y)Z, \nabla_X Z) = \\ &= g(R(X, Z)Z, \nabla_Z Y) - g(R(X, Z)Z, \nabla_Y Z) - g(R(Y, Z)Z, \nabla_X Z).\end{aligned}$$

С другой стороны, мы доказали, что

$$g(R(X, Z)Z, \nabla_Y Z) + g(R(Y, Z)Z, \nabla_X Z) = 0,$$

следовательно, мы получили третье равенство. $\triangleright$

Отметим, что киллинговы векторные поля постоянной длины естественно возникают при рассмотрении различных геометрических конструкций, например, при определении K -контактных многообразий и многообразий Сасаки (см., например, [83, 97, 105]).

Есть множество ограничений на существование нетривиальных киллинговых векторных полей постоянной длины на заданном римановом многообразии. Так, согласно известной теореме Х. Хопфа, необходимым условием существования такого поля на компактном многообразии (M, g) является равенство $\chi(M) = 0$ для эйлеровой характеристики. Кроме того, в этом случае теорема 2 из работы Р. Ботта [104] позволяет утверждать, что нулевыми являются все числа Понтрягина ориентируемой накрывающей M .

3.4. Киллинговы векторные поля постоянной длины и переносы Клиффорда — Вольфа

Существует связь между киллинговыми векторными полями постоянной длины и переносами Клиффорда — Вольфа на произвольном римановом многообразии (M, g) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 79. *Перенос Клиффорда — Вольфа* в римановом многообразии (M, g) с внутренней метрикой ρ есть изометрия s , перемещающая все точки в M на одно и то же расстояние, т. е. $\rho(x, s(x)) \equiv \text{const}$ для всех $x \in M$.

Заметим, что переносы Клиффорда — Вольфа часто называются *переносами Клиффорда* (см., например, [34] или [42]), но мы следуем здесь терминологии статьи [129].

Переносы Клиффорда — Вольфа естественно возникают в исследованиях однородных римановых накрытий однородных римановых многообразий [34, 42]. Укажем еще одну конструкцию таких преобразований. Предположим, что на некотором римановом многообразии M действует транзитивно некоторая группа изометрий G . Тогда любой центральный элемент s этой группы является переносом Клиффорда — Вольфа. В самом деле, если x и y — некоторые точки многообразия M , то существует элемент $g \in G$ такой, что $g(x) = y$. Тогда

$$\rho(x, s(x)) = \rho(g(x), g(s(x))) = \rho(g(x), s(g(x))) = \rho(y, s(y)).$$

В частности, если центр Z группы G не дискретен, то каждая 1-параметрическая подгруппа в Z есть 1-параметрическая группа переносов Клиффорда — Вольфа на (M, g) . Заметим, что немногие классические римановы многообразия допускают однопараметрическую группу переносов Клиффорда — Вольфа. Например, известно, что среди неприводимых компактных односвязных симметрических пространств только нечетномерные сферы, пространства $SU(2m)/Sp(m)$, $m > 1$, и простые компактные группы Ли, снабженные какой-нибудь биинвариантной римановой метрикой, допускают 1-параметрические группы переносов Клиффорда — Вольфа [232]. Очевидно следующее предложение.

Предложение 3.4. Пусть 1-параметрическая группа изометрий $\gamma(t)$ на (M, g) , порожденная некоторым киллинговым векторным полем X , состоит из переносов Клиффорда — Вольфа. Тогда X имеет постоянную длину.

Предложение 3.4 допускает частичное обращение. Более точно, справедливо

Предложение 3.5. Предположим, что некоторое риманово многообразие (M, g) имеет радиус инъективности, ограниченный снизу

некоторой положительной постоянной (в частности, это условие выполняется для любого компактного или однородного многообразия), и X — нетривиальное киллингово векторное поле постоянной длины на (M, g) . Тогда изометрии $\gamma(t)$ из 1-параметрической группы движений, порожденной векторным полем X , являются переносами Клиффорда — Вольфа, если t достаточно близко к 0.

◁ Не ограничивая общности, можно предполагать, что векторное поле X единично. Пусть радиус инъективности риманова многообразия (M, g) ограничен снизу некоторым числом $\delta > 0$. По предложению 3.2, интегральные траектории векторного поля X или, что то же самое, орбиты 1-параметрической группы движений $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, порожденной этим векторным полем, являются геодезическими в (M, g) . Выберем s так, чтобы $|s| < \delta$. Тогда для каждой точки $x \in M$ геодезический сегмент $\gamma(t)(x)$, соединяющий точки x и $\gamma(s)(x)$, является кратчайшей. Поэтому $\rho(x, \gamma(s)(x)) = s$ для каждой точки $x \in M$, т. е. изометрия $\gamma(s)$ передвигает все точки многообразия на одно и то же расстояние. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Заметим, что предложение 3.5 в общем случае не верно, если радиус инъективности не ограничен снизу положительной константой.

Вообще говоря, в условиях предложения 3.5, не все изометрии из 1-параметрической группы движений $\gamma(t)$, порожденной киллинговым векторным полем X постоянной длины, являются переносами Клиффорда — Вольфа. Это демонстрируют в частности результаты следующих разделов в этой главе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 80. Предположим, что киллингово векторное поле X на римановом многообразии (M, g) имеет постоянную длину. Тогда X называется *регулярным* (*квазирегулярным*), если все интегральные кривые векторного поля X замкнуты и имеют одну и ту же длину (соответственно, если существуют интегральные кривые разной длины).

Ясно, что киллингово векторное поле постоянной длины на римановом многообразии регулярно тогда и только тогда, когда оно порождается *свободным* изометрическим действием группы S^1 . Киллингово векторное поле постоянной длины на римановом многообразии квазирегулярно тогда и только тогда, когда оно порождается

почти свободным (т. е. когда все точки имеют конечный стабилизатор, но есть точки с нетривиальным стабилизатором) изометрическим действием группы S^1 . При этом орбита точки с тривиальным (соответственно, нетривиальным) стабилизатором называется *регулярной* (соответственно, *сингулярной*).

Предложение 3.6. Пусть X — нетривиальное киллингово векторное поле на римановом многообразии M . Если 1-параметрическая группа движений $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, порожденная полем X , состоит из переносов Клиффорда — Вольфа, то поле X имеет постоянную длину и оно либо регулярно, либо все его интегральные траектории не замкнуты.

◁ Согласно предложению 3.4, поле X имеет постоянную длину. Ясно, что интегральные траектории поля X совпадают с орбитами группы $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\gamma(t)(x) = x$ для некоторой точки $x \in M$ и $t > 0$. Существует минимальное число t_* среди всех чисел $\tau > 0$ таких, что $\gamma(\tau)(x) = x$. Поэтому $\gamma(t)(x) \neq x$ при $t \in (0, t_*)$. Так как $\gamma(t_*)$ — перенос Клиффорда — Вольфа, то $\gamma(t_*)(y) = y$ для каждой точки $y \in M$. Если теперь $\gamma(t)(z) = z$ для некоторой точки $z \in M$ и $t \in (0, t_*)$, то $\gamma(t)(x) = x$, потому что $\gamma(t)$ также является переносом Клиффорда — Вольфа.

Поэтому все точки многообразия (M, g) имеют один и тот же положительный период t_* относительно действия группы $\gamma(t)$. Так как длина поля X постоянна, то это значит, что все интегральные траектории поля X имеют одну и ту же длину, т. е. поле X регулярно. ▷

Легко построить примеры, показывающие, что для одного и того же пространства возможны обе ситуации из утверждения предложения 3.6. Например, рассмотрим риманово многообразие (M, g) с группой переносов Клиффорда — Вольфа, изоморфной $S^1 \times S^1$: сам плоский тор $S^1 \times S^1$ или прямое метрическое произведение двух нечетномерных круглых сфер являются такими многообразиями. Если выбрать в $S^1 \times S^1$ некоторую подгруппу, изоморфную S^1 (рациональную обмотку тора), то очевидно, что киллингово векторное поле на (M, g) , порожденное этой подгруппой, регулярно. Если напротив, выбрать в $S^1 \times S^1$ некоторую незамкнутую подгруппу $\mathbb{R}$ (иррациональную обмотку тора), то киллингово векторное поле на (M, g) , порожденное этой подгруппой, не имеет замкнутых интегральных кривых.

3.5. Киллинговы векторные поля и кривизна

В этом разделе мы (опираясь на изложение в работе [14]) приведем некоторые утверждения (многие из которых хорошо известны) о зависимости характеристик кривизны риманова многообразия (M, g) от наличия на нем киллинговых полей определенного вида.

Теорема 3.5 [14]. Пусть X — поле Киллинга на римановом многообразии (M, g) , порожденное однопараметрической группой $\gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$, изометрий пространства M , $x \in M$ — точка ненулевого локального минимума (максимума) длины $g(X, X)^{1/2}$ поля X , $Y(s)$ ($s \in \mathbb{R}$) — векторное поле вдоль геодезической $c(s) = \gamma(s)(x)$, определяемое формулой $Y(s) = d(\gamma(s))(w)$, где $w \in M_x$. Тогда

$$g(Y, Y) \equiv g(w, w), \quad g(Y, X) \equiv g(w, X(x)), \quad (3.6)$$

выражения $g(\nabla_X Y, \nabla_X Y)$ и $g(R(X, Y)Y, X)$ не зависят от $s \in \mathbb{R}$, причем

$$g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) = g(\nabla_X Y, \nabla_X Y) \geq (\leq) g(R(X, Y)Y, X) \quad (3.7)$$

на геодезической $c(s) = \gamma(s)(x)$, $s \in \mathbb{R}$.

◁ Равенства (3.6) и независимость указанных выражений от s очевидны. Определим гладкое отображение

$$C : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow M, \quad C(s, t) = \text{Exp}(tY(s)).$$

Для однопараметрической подгруппы $\gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$, изометрий (M, g) , порожденной X , имеется очевидное равенство

$$\begin{aligned} \gamma(s_1)(C(s, t)) &= \gamma(s_1)(\text{Exp}(tY(s))) = \gamma(s_1)(\text{Exp}(td\gamma(s)(w))) = \\ &= \text{Exp}(d\gamma(s_1)(d\gamma(s)(tw))) = \text{Exp}(td\gamma(s_1 + s)(w)) = C(s + s_1, t). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\gamma(s_1)(C(s, t)) = C(s + s_1, t). \quad (3.8)$$

Таким образом, мы имеем

$$dC\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = X(C(s, t)), \quad dC\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = Y(s, t),$$

где $Y(s, t)$ — продолжение векторного поля $Y(s) = Y(s, 0)$. Это означает, что векторные поля X и Y являются касательными векторными полями вдоль отображения C ; а также

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = dC\left(\left[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right]\right) = 0. \quad (3.9)$$

Ясно, что для любого фиксированного s кривая $c_s(t) = C(s, t)$, $t \in \mathbb{R}$, является геодезической в (M, g) с касательным векторным полем $Y_s(t) = Y(s, t)$. Согласно утверждению 2) теоремы 3.3 имеет место равенство

$$\frac{1}{2}\nabla_Y^2 g(X, X) = g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) - g(R(X, Y)Y, X)$$

для всех точек кривой $c(s) = \gamma(s)(x)$, $s \in \mathbb{R}$. С другой стороны, точка $x \in M$ является точкой ненулевого локального минимума (максимума) квадрата длины $g(X, X)$ поля X ; этим же свойством обладает и каждая точка $c(s) = \gamma(s)(x)$, $s \in \mathbb{R}$. Поэтому

$$\frac{1}{2}\nabla_Y^2 g(X, X) = g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) - g(R(X, Y)Y, X) \geq (\leq) 0$$

для всех точек $c(s) = \gamma(s)(x)$, $s \in \mathbb{R}$, что и требовалось доказать. $\triangleright$

В случае единичного киллингова поля теорема 3.5 немедленно влечет следующее утверждение.

Теорема 3.6. Пусть X — единичное поле Киллинга на римановом многообразии (M, g) , порожденное однопараметрической группой $\gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$, изометрий пространства M , $Y(s)$ ($s \in \mathbb{R}$) — векторное поле вдоль кривой $c(s) = \gamma(s)(x)$, $x \in M$, определяемое формулой $Y(s) = d(\gamma(s))(w)$, где $w \in M_x$. Тогда

$$g(Y, Y) \equiv g(w, w), \quad g(Y, X) \equiv g(w, X(x)), \quad (3.10)$$

$$g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) = g(\nabla_X Y, \nabla_X Y) = g(R(X, Y)Y, X) = \text{const}. \quad (3.11)$$

В частности, если $g(w, w) = 1$ и $w \perp X(x)$, то

$$g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) = g(\nabla_X Y, \nabla_X Y) = K(X, Y) = \text{const}. \quad (3.12)$$

Из теоремы 3.6 легко получается

Следствие 3.2. В условиях теоремы 3.6 для каждой точки $x \in M$ выполнено неравенство

$$K(X(x), w) \geq 0, \quad w \in M_x, \quad |w| = 1, \quad w \perp X(x),$$

(т. е. в каждой точке $x \in M$ секционная кривизна произвольной двумерной площадки, содержащей вектор $X(x)$, неотрицательна). При этом оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда $d\gamma(t)(w)$ является параллельным векторным полем вдоль геодезической $\gamma(t)(x)$.

Следствие 3.3. На римановом многообразии M отрицательной кривизны Риччи не существует нетривиальных киллинговых векторных полей постоянной длины.

Теорема 3.7. Всякое нетривиальное параллельное поле X на римановом многообразии M^n является полем Киллинга постоянной длины [63], и $\text{Ric}(X, X) = 0$. При этом M^n локально является прямым метрическим произведением одномерного многообразия, касающегося поля X , и некоторого его ортогонального дополнения. Если риманово многообразие M^n полно, то его универсальное накрытие $\tilde{M}^n$ является прямым метрическим произведением $\tilde{M}^n = R^{n-1} \times \mathbb{R}$, где поле $\tilde{X}$, проектирующееся на поле X при естественной проекции $\tilde{M}^n \rightarrow M^n$, касательно к $\mathbb{R}$ -направлению.

◁ Понятно, что из условия параллельности $\xi_{i,j} = 0$ поля X (ξ_i — ковариантные компоненты поля X в некоторой локальной системе координат) следует равенство $\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = 0$, т. е. поле X является киллинговым. Постоянство длины параллельного поля X и равенство для кривизны Риччи $\text{Ric}(X, X) = 0$ очевидны. В силу параллельности поля X параллельным и инволютивным на M^n является также и распределение, ортогональное полю X . Теперь последнее утверждение теоремы следует из теоремы разложения де Рама [41, гл. IV, § 6]. ▷

Теорема 3.8. Пусть X — единичное поле Киллинга на n -мерном римановом многообразии M^n . Тогда кривизна Риччи Ric многообразия M^n удовлетворяет условию $\text{Ric}(X, X) \geq 0$. При этом равенство $\text{Ric}(X, X) \equiv 0$ эквивалентно параллельности векторного поля X . Следовательно, в этом случае верны все утверждения теоремы 3.7.

◁ Первое утверждение теоремы является очевидным следствием равенства (3.12). Допустим теперь, что $\text{Ric}(X, X) \equiv 0$. В силу равенства (3.12), для каждой точки $x \in M^n$ и каждого вектора $w \in M_x$, $w \perp X(x)$, выполнены соотношения $K(X(x), w) = 0$ и $\nabla_w X(x) = 0$. Кроме того, $\nabla_X X \equiv 0$. Таким образом, поле X параллельно на многообразии M^n . ▷

Утверждение теоремы 3.8 можно также получить с помощью формулы

$$(\Delta f)_x = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{V_i} X, \nabla_{V_i} X) - \text{Ric}(X, X),$$

где X — инфинитезимальное аффинное преобразование риманова многообразия (M, g) , $f = \frac{1}{2}g(X, X)$, а $V_1, \dots, V_n$ — ортонормированный базис в M_x (см. [41, гл. II, § 4, лемма 2]).

Теорема 3.8 непосредственно влечет

Следствие 3.4. Для киллингова векторного поля X на римановом многообразии M неположительной кривизны Риччи следующие два условия эквивалентны:

- 1) X имеет постоянную длину;
- 2) поле X параллельно на M .

Для многообразий неположительной секционной кривизны утверждение предыдущего следствия может быть усилено.

Предложение 3.7. Для киллингова векторного поля X на полном римановом многообразии (M, g) неположительной секционной кривизны следующие три условия эквивалентны:

- 1) длина X ограничена на (M, g) ;
- 2) X имеет постоянную длину;
- 3) поле X параллельно на (M, g) .

◁ С учетом следствия 3.4 достаточно показать, что каждое поле Киллинга ограниченной длины имеет постоянную длину. Пусть длина киллингова поля X ограничена на (M, g) . Согласно утверждению 2) теоремы 3.3, для каждой геодезической $c(t)$, $t \in \mathbb{R}$, на (M, g) справедливо равенство

$$h''(t) = g(\nabla_{\tau(t)} X, \nabla_{\tau(t)} X) - g(R(X, \tau(t))\tau(t), X),$$

где $h(t) = \frac{1}{2}g(X(c(t)), X(c(t)))$. Поскольку секционная кривизна многообразия (M, g) неположительна, то $h''(t) \geq 0$ при $t \in \mathbb{R}$, таким

образом, функция h является выпуклой. Кроме того, в силу ограниченности длины поля X , функция h ограничена на $\mathbb{R}$. Следовательно, $h(t) = \text{const}$ при $t \in \mathbb{R}$. Через любые две точки на (полном) римановом многообразии (M, g) проходит некоторая геодезическая, поэтому поле Киллинга X имеет постоянную длину. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Отметим, что утверждение предложения 3.7 легко вывести из теоремы 1 работы [231], которая, в частности, утверждает, что каждая ограниченная изометрия на односвязном римановом многообразии M неположительной секционной кривизны является переносом Клиффорда — Вольфа.

Из теоремы 3.5 получаем следующий хорошо известный результат.

Теорема 3.9 (ТЕОРЕМА БЕРЖЕ [93]). *Любое киллингово векторное поле на компактном четномерном римановом многообразии (M, g) положительной секционной кривизны зануляется в некоторой точке из M .*

$\triangleleft$ Допустим, что поле X не имеет нулей на (M, g) , и пусть $\gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$, — однопараметрическая группа движений, порождаемая полем X . В силу компактности M длина киллингова поля X достигает своего абсолютного минимума в некоторой точке $x \in M$, причем $g(X(x), X(x)) \neq 0$. Согласно теореме 3.5 для любого вектора $w \in M_x$ на геодезической $c(s) = \gamma(s)(x)$, $s \in \mathbb{R}$, выполнено неравенство

$$g(\nabla_X Y, \nabla_X Y) \geq g(R(X, Y)Y, X),$$

где $Y = Y(s) = d\gamma(s)(w)$ ($s \in \mathbb{R}$) — векторное поле вдоль геодезической $c = c(s) = \gamma(s)(x)$.

Определим линейный оператор $A_X : (M_x, g_x) \rightarrow (M_x, g_x)$ по формуле

$$A_X(w) = (\nabla_X Y)(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau_{-s}(d\gamma(s)(w)) - w}{s},$$

где $\tau_{-s} : (M_{c(s)}, g_{c(s)}) \rightarrow (M_x, g_x)$ — параллельный перенос из конца в начало отрезка $c(\sigma)$, $0 \leq \sigma \leq s$, геодезической c . Поскольку $d\gamma(s)$ и τ_{-s} являются линейными изометриями векторных евклидовых пространств, сохраняющими ограничение векторного поля X на c , то A_X — кососимметрический эндоморфизм, причем $A_X(X(x)) = 0$. Следовательно, ограничение оператора A_X на единичную евклидову сферу $S^{n-2} \subset (M_x, g_x)$, ортогональную к $X(x)$, задает киллингово

поле на S^{n-2} ($n = \dim M$). Но поскольку n — четное число, то существует точка $w \in S^{n-2}$ такая, что $A_X(w) = 0$. Это следует, например, из того, что $\chi(S^{n-2}) = 2 \neq 0$, или из того, что любой оператор на нечетномерном линейном вещественном пространстве имеет собственный вектор. Для такой точки w выполнено неравенство

$$0 = g(A_X(w), A_X(w)) \geq g(R(X(x), w)w, X(x)),$$

чего не может быть в силу положительности секционной кривизны многообразия (M, g) . $\triangleright$

Следствие 3.5. В условиях теоремы 3.6 и обозначениях теоремы 3.9 формула $Z(w) = A_X(w) = \nabla_X Y_w(x)$, где $Y_w(s) = d\gamma(s)(w)$ ($w \in M_x$, $|w| = 1$, $w \perp X(x)$) определяет киллингово поле вращений на единичной евклидовой сфере $S^{n-2} \subset (M_x, g_x)$, ортогональной к $X(x)$, где $n = \dim M$. Также имеет место следующее ограничение на длину киллингова векторного поля Z на S^{n-2} : $|Z(w)| = K(X(x), w)$.

Это следствие влечет в свою очередь

Следствие 3.6. Пусть M — n -мерное риманово многообразие с единичным киллинговым векторным полем X . Если n четно, то в каждой точке $x \in M$ существует единичный вектор $w \perp X(x)$ такой, что $K(X(x), w) = 0$. Следовательно, если существует точка $x \in M$ такая, что секционная кривизна любой двумерной площадки, содержащей вектор $X(x)$, положительна, то n нечетно.

Следствие 3.7. Каждое полное двумерное риманово многообразие M с единичным векторным полем Киллинга X локально евклидово. Следовательно, M изометрично евклидовой плоскости или одной из плоских полных поверхностей: цилиндру, тору, листу Мебиуса или бутылке Клейна. При этом поле X параллельно. В последних двух случаях X квазирегулярно и имеет единственную сингулярную траекторию-окружность, а X определяется с точностью до умножения на -1 . Во всех остальных случаях поле X может иметь любое направление.

Отметим, что в книге [41] теорема Берже выводится из следующего утверждения.

Теорема 3.10 [41, гл. II, теорема 5.6]. Пусть M — компактное ориентируемое риманово многообразие положительной секционной кривизны, и пусть f — изометрия M .

- (1) Если $n = \dim M$ — четное число, и f сохраняет ориентацию, то f имеет неподвижную точку.
- (2) Если $n = \dim M$ — нечетное число, и f изменяет ориентацию, то f имеет неподвижную точку.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. В работе [224] теорема 3.10 обобщена на случай произвольного конформного преобразования f .

В книге [41] приведено и другое, близкое к оригинальному из [93], доказательство теоремы Берже. Еще одно ее доказательство дано в лемме (Берже) 2.2 и следствии 2.1 из [220].

В качестве следствия теоремы 3.10 легко получается

Теорема 3.11 (ТЕОРЕМА СИНГА [211]). Пусть M^n — компактное риманово многообразие положительной секционной кривизны.

- (1) Если n — четное число, и M ориентируемо, то M односвязно.
- (2) Если n — нечетное число, то M ориентируемо.

◁ Приведем здесь оригинальное доказательство этой теоремы. Оба утверждения будем доказывать одновременно. Предположим, что какое-нибудь из этих утверждений неверно. Тогда M не односвязно и существует нестягиваемая петля c_1 в M . Вследствие компактности M свободный гомотопический класс $[c_1]$ петли c_1 содержит некоторую нетривиальную кратчайшую петлю, и на основании следствия 1.3, эта кратчайшая петля должна быть замкнутой периодической геодезической; пусть $c = c(t)$, $0 \leq t \leq a$, — ее параметризация длиной дуги и $c(0) = x$, $c'(0) = c'(a) = u$. Определим $P(t) : M_{c(0)} \rightarrow M_{c(t)}$, $0 \leq t \leq a$, — параллельный перенос вдоль этой геодезической. Тогда $P(a)$ — линейное ортогональное преобразование евклидова пространства (M_x, g_x) , причем $P(a)(u) = u$. В первом случае $P(a)$ сохраняет ориентацию, а во втором обращает ее (при надлежащем выборе петли c_1 , возможном вследствие неориентируемости M). Поэтому $P(a)$ — сохраняющее (соответственно, обращающее) ориентацию ортогональное преобразование ортогонального дополнения $u^\perp = M_x \ominus \mathbb{R}u$. Тогда, как известно [35], в обоих случаях существует единичный вектор $v \in u^\perp$ такой, что $P(a)(v) = v$. Пусть $V(t) := P(t)(v)$, $0 \leq t \leq a$, и $C(t, s) := \text{Exp}_{c(t)}(sV(t))$, $(t, s) \in [0, a] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ — гладкая вариация геодезической c . Заметим, что эта вариация вполне аналогична вариациям $C_i(t, s)$ из (1.73) при $f(t) \equiv 1$. Очевидно, для каждого $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, кривая $c_s(t) := C(t, s)$, $0 \leq t \leq a$, — гладкая петля в M некоторой длины $l(s)$, свободно

гомотопная петле c . Тогда $l'(0) = 0$ вследствие формулы (1.56). Аналогично доказательству теоремы 1.22, получаем

$$l''(0) = \int_0^a [-f^2 K(c', V) + (f')^2](t) dt = - \int_0^a K(c'(t), V(t)) dt < 0.$$

Следовательно, вопреки предположению, петля c не является кратчайшей петлей в классе $[c_1]$. $\triangleright$

Из теоремы 3.5 вытекают еще несколько интересных следствий.

Следствие 3.8 (ТЕОРЕМА БОХНЕРА [98]). *Если кривизна Риччи компактного риманова многообразия M отрицательна, то на M не существует ненулевых киллинговых полей.*

Для доказательства достаточно (в теореме 3.5) в качестве $x \in M$ рассмотреть точку абсолютного максимума длины киллингова поля X . Отметим, что теорема Бохнера следует также из более общей теоремы 4.28.

Следствие 3.9 [41, гл. II, следствие 4.2]. *Если X — киллингово векторное поле на компактном римановом многообразии M неположительной кривизны Риччи, то X параллельно и, следовательно, имеет постоянную длину.*

Из этого следствия и теоремы 3.8 получаем

Следствие 3.10. *Всякое компактное риманово многообразие M неположительной кривизны Риччи с нетривиальным киллинговым векторным полем имеет бесконечную фундаментальную группу.*

3.6. Изометрические потоки и точки конечного периода

Материал этого и следующего раздела основан на работах [14] и [18]. В этом разделе мы получим некоторые утверждения о структуре множества точек конечного периода относительно изометрических потоков на римановых многообразиях. Также мы приводим детальное описание свойств изометрических потоков на римановых многообразиях, порожденных киллинговыми векторными полями, все интегральные траектории которых замкнуты (теорема 3.17).

Рассмотрим некоторое гладкое действие $\mu : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ аддитивной группы вещественных чисел на гладком многообразии M .

По потоку μ определим функцию периодичности $P_\mu : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ следующим образом:

$$P_\mu(x) = \begin{cases} 0, & \mu(s, x) = x, \ s > 0, \\ t > 0, & \mu(t, x) = x, \ \mu(s, x) \neq x, \ 0 < s < t, \\ \infty, & \mu(s, x) \neq x, \ s > 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Аналогично, по заданному потоку μ определим для каждого $t \in [0, \infty)$ множество $M_\mu(t)$:

$$M_\mu(0) = P_\mu^{-1}(0), \quad M_\mu(t) = \{x \in M \mid \mu(t, x) = x\} \text{ при } t > 0. \quad (3.14)$$

Лемма 3.3. Пусть задан изометрический поток $\mu : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ на римановом многообразии (M, g) . Тогда для любого $t \in [0, \infty)$ множество $M_\mu(t)$ или пусто или является (возможно, несвязным) замкнутым вполне геодезическим подмногообразием в (M, g) . Кроме того, справедливы следующие утверждения:

- 1) Каждая связная компонента $M_\mu(0)$ имеет четную коразмерность в M .
- 2) Если $M_\mu(t) \neq M$ при некотором $t \in [0, \infty)$, то каждая связная компонента $M_\mu(t)$ имеет коразмерность не меньше 1 в M .
- 3) Если многообразие M ориентируемо, то для любого $t \in [0, \infty)$ каждая связная компонента подмногообразия $M_\mu(t)$ имеет четную коразмерность в M .

◁ Утверждение о том, что $M_\mu(0)$ является замкнутым вполне геодезическим подмногообразием (с четной коразмерностью каждой из своих связных компонент) в (M, g) , доказано в работе [152]. Идея доказательства состоит в том, что $M_\mu(0)$ — это множество точек на M , на которых зануляется киллингово поле V , порождающее поток μ . Четность коразмерности каждой компоненты связности $M_\mu(0)$ в M следует из того, что образ кососимметричного оператора на евклидовом пространстве имеет четную размерность.

Рассмотрим теперь некоторое $t > 0$. Поскольку $\mu(t)$ является изометрией риманова многообразия (M, g) , то множество неподвижных точек этой изометрии $M_\mu(t)$ является замкнутым вполне геодезическим подмногообразием в M . Это утверждение также хорошо известно (см., например, [42, гл. VII, § 8]), но мы дадим набросок его доказательства, поскольку нам также необходимо получить утверждение 3) леммы.

Понятно, что множество $M_\mu(t)$ замкнуто в M . Рассмотрим некоторую точку $x \in M_\mu(t)$ и дифференциал $Q : M_x \rightarrow M_x$ изометрии $I = \mu(t)$ в точке x . Рассмотрим теперь в M_x подпространство L , на котором Q тождественно. Пусть L_0 — множество векторов длины меньше r_0 в L , где $r_0 > 0$ выбрано так, что экспоненциальное отображение $\exp_x : M_x \rightarrow M$ инъективно на шаре радиуса r_0 с центром в начале координат. Тогда V_0 — образ L_0 при рассматриваемом экспоненциальном отображении — совпадает с множеством точек в $M_\mu(t)$, находящихся на расстоянии меньше r_0 от точки x . Поскольку $\exp_x$ осуществляет биекцию между множествами L_0 и V_0 , то $M_\mu(t)$ действительно является подмногообразием в M .

Рассмотрим теперь произвольную точку $y \in M_\mu(t)$ такую, что $\rho(x, y) < r_0$. Тогда существует единственная кратчайшая, соединяющая эти две точки, причем эта кратчайшая инвариантна при изометрии $I = \mu(t)$, т. е. она состоит из точек, принадлежащих $M_\mu(t)$. Поскольку точку $x \in M_\mu(t)$ можно выбрать произвольно, то $M_\mu(t)$ — вполне геодезическое подмногообразие в M .

Если $M_\mu(t) \neq M$, то любая связная компонента $M_\mu(t)$ имеет размерность не меньше 1, поскольку изометрия, тождественная на некотором открытом множестве в M , тождественна всюду.

Нам осталось лишь доказать утверждение про ориентируемые многообразия M . В случае ориентируемости M отображение $I = \mu(t)$ не изменяет ориентации, поэтому и его дифференциал Q сохраняет ориентацию в M_x . Осталось заметить, что при этом дополнительное подпространство к подпространству L (на котором Q тождественно) обязано быть четномерным. $\triangleright$

Следующий результат позволяет прояснить поведение функции периодичности изометрического потока на римановом многообразии.

Теорема 3.12 (В. Озолс [194]). *Пусть на римановом многообразии (M, g) задан изометрический поток $\mu : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, P_μ — функция периодичности, построенная по этому потоку. Тогда у любой точки $x \in M$ существует такая окрестность, в которой функция периодичности P_μ принимает лишь конечное число значений.*

Далее нам понадобится следующая

Лемма 3.4. *Пусть Q — ортогональное преобразование в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Определим следующие подмножества в $\mathbb{R}^n$: $Q_f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q^m(x) = x \text{ для некоторого } m \in \mathbb{N}\}$, $Q_\infty = \mathbb{R}^n \setminus Q_f$.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) Q_f — Q -инвариантное линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$.
- 2) Существует единственное $p \in \mathbb{N}$ такое, что $Q^p|_{Q_f} = \text{Id}$ и $Q^m|_{Q_f} \neq \text{Id}$ при $1 \leq m < p$.
- 3) Если $p > 1$, то существует $y \in Q_f$ такой, что $Q^p(y) = y$ и $Q^m(y) \neq y$ при $1 \leq m < p$.
- 4) Для каждого $y \in Q_\infty$ замыкание в $\mathbb{R}^n$ множества точек $\{Q^m(y) | m \in \mathbb{Z}\}$ содержит некоторый тор T^l размерности $l \geq 1$.
- 5) Если $Q_\infty \neq \emptyset$, то Q_f имеет коразмерность не меньше 2 в $\mathbb{R}^n$.
- 6) Для всякого натурального числа $l < p$, где p — число из 2), множество

$$Q_l = \{x \in \mathbb{R}^n | Q^l(x) = x\}$$

является Q -инвариантным линейным подпространством в Q_f и $Q_l \neq Q_f$. При этом подпространство Q_l имеет коразмерность не меньше 2 в $\mathbb{R}^n$ или $Q(v) = -v$ для всякого вектора $v \perp Q_l$, где $v \in \mathbb{R}^n$.

◁ Первое утверждение леммы очевидно. Пусть $s = \dim(Q_f)$, и задан некоторой базис $e_1, e_2, \dots, e_s$ в Q_f . Для каждого $1 \leq i \leq s$ рассмотрим a_i — минимальное натуральное число, для которого $Q^{a_i}(e_i) = e_i$. Пусть $p \in \mathbb{N}$ — наименьшее общее кратное всех чисел a_i при $1 \leq i \leq s$. Понятно, что p — как раз то число, существование и единственность которого составляет сущность утверждения 2) леммы. Утверждение 3) леммы следует из 2) и того, что множество $\{x \in Q_f | Q^m(x) = x\}$ при $1 \leq m < p$ является собственным линейным подпространством в Q_f .

Докажем теперь четвертое утверждение леммы. Пусть G — замыкание в группе $O(n)$ множества ортогональных преобразований $\{Q^m | m \in \mathbb{Z}\}$. Поскольку $y \in Q_\infty$, то G — замкнутая не дискретная коммутативная подгруппа в $O(n)$. Пусть теперь O_y — орбита точки $y \in \mathbb{R}^n$ относительно действия группы G . Очевидно, что O_y является замыканием в $\mathbb{R}^n$ множества точек $\{Q^m(y) | m \in \mathbb{Z}\}$. Пусть теперь $\tilde{G}$ — связная компонента единицы группы G , и пусть $\tilde{O}_y$ — орбита точки $y \in \mathbb{R}^n$ относительно действия группы $\tilde{G}$. Понятно, что $\tilde{O}_y \subset O_y$. Поскольку $\tilde{O}_y$ — однородное пространство связной компактной коммутативной группы Ли $\tilde{G}$, то $\tilde{O}_y$ гомеоморфно тору T^l , и при этом $l \geq 1$, поскольку в противном случае $\tilde{O}_y$ сводится к точке, и $y \in Q_f$.

Предположим теперь, что $Q_\infty \neq \emptyset$, и рассмотрим P — (нетривиальное) ортогональное дополнение к Q_f в $\mathbb{R}^n$. Понятно, что P является Q -инвариантным. Если P одномерно, то $Q^2(x) = x$ для любого $x \in P$, т. е. $P \subset Q_f$, чего не может быть. Таким образом, P имеет размерность не меньше 2, что и доказывает утверждение 5) леммы.

Утверждение 6) легко доказывается с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше. $\triangleright$

Теорема 3.13. Пусть на римановом многообразии (M, g) задано гладкое изометрическое действие $\mu : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ аддитивной группы вещественных чисел, и $P = P_\mu$ — функция периодичности, построенная по потоку μ . Предположим, что $M_\infty = P^{-1}(\infty) \neq \emptyset$. Тогда множество $M_f = P^{-1}([0, \infty))$ замкнуто в M и имеет нулевую лебегову меру, в то время как M_∞ открыто, связно и всюду плотно в M .

$\triangleleft$ Покажем, что для любой точки $x \in M$ существует такое $r_x > 0$, что пересечение M_f с замкнутым шаром $B(x, r_x) = \{y \in M \mid \rho(y, x) \leq r_x\}$ является замкнутым множеством в M нулевой меры. Согласно теореме 3.12 существует такое $r_x > 0$, что в замкнутом шаре $B(x, r_x)$ функция периодичности P принимает лишь конечное число значений. Пусть $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_s$ — все конечные значения P в этом шаре. Рассмотрим теперь множества $M_\mu(t_i)$ (см. (3.14)) при $1 \leq i \leq s$. Согласно лемме 3.3 каждое из множеств $M_\mu(t_i)$ является замкнутым вполне геодезическим подмногообразием в M , причем каждая связная компонента $M_\mu(t_i)$ имеет коразмерность не меньше 1 в M . Пусть $U = \bigcup_{i=1}^s M_\mu(t_i)$, тогда

$$B(x, r_x) \cap M_f = B(x, r_x) \cap U = \bigcup_{i=1}^s (B(x, r_x) \cap M_\mu(t_i)).$$

Поскольку $B(x, r_x) \cap M_\mu(t_i)$ замкнуто и имеет меру 0 в M для всех $1 \leq i \leq s$, мы и получаем нужный результат.

Для доказательства связности множества M_∞ (в предположении $M_\infty \neq \emptyset$) достаточно (в силу теоремы 3.12 и леммы 3.3) показать, что произвольная связная компонента каждого из вполне геодезических подмногообразий $M_\mu(t)$, $t > 0$, имеет коразмерность ≥ 2 в M . Действительно, в этом случае топологическая размерность множества M_f не превосходит $n - 2$, где n — размерность многообразия M (см., например, [58, гл. 7, § 9]).

Если $M_\mu(t)$ в окрестности некоторой точки $x \in M_\mu(t)$ имеет коразмерность ≤ 1 в M , то, как нетрудно понять, множество $M_\mu(2t)$ содержит некоторую окрестность точки x в M (см. доказательство утверждения 5) леммы 3.4). Но последнее означает, что $M_f = M_\mu(2t) = M$, что противоречит условию $M_\infty \neq \emptyset$. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Для доказательства того, что топологическая размерность множества M_f не превосходит $n - 2$, можно также применить утверждение 3) леммы 3.3 к ориентированному риманову многообразию $\widetilde{M}$, двулистно накрывающему M , и потоку $\widetilde{\mu} : \mathbb{R} \times \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$, порождаемому потоком μ .

Отметим, что в условиях предыдущей теоремы нельзя утверждать, что множество M_f является вполне геодезическим подмногообразием в (M, g) . Это можно продемонстрировать на следующем примере. Пусть $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — изометрический поток на евклидовом пространстве $M = \mathbb{R}^4$, определенный следующим образом: $\mu(t)$ — ортогональное преобразование, задаваемое в стандартном базисе $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq 4$, матрицей $A(t) = \text{diag}(A_1(t), A_2(t))$, где

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad A_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно понять, что M_f в этом примере является объединением двух двумерных подпространств, одно из которых натянуто на векторы e_1 и e_2 , а второе — на векторы e_3 и e_4 . Как видно из этого примера, препятствием к полной геодезичности множества M_f может являться наличие точек, неподвижных относительно рассматриваемого изометрического потока. В теореме 3.16 мы покажем, что при отсутствии таких точек M_f действительно является вполне геодезическим подмногообразием в (M, g) .

Теорема 3.14. Пусть на гладком многообразии M задано гладкое действие $\mu : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ аддитивной группы вещественных чисел. Предположим, что на M определена риманова метрика g такая, что для некоторого $t > 0$ диффеоморфизм $\mu(t)$ является изометрией риманова многообразия (M, g) , и существует точка $x \in M$ с условием $P(x) = t$ для функции периодичности $P = P_\mu$, соответствующей потоку μ . Пусть $M_f = P^{-1}([0, \infty))$. Тогда существует такая окрестность U точки x в M и такое $T > 0$, что выполняются следующие свойства:

1) T делится нацело на t , и, соответственно, преобразование $\mu(T)$ является изометрией на (M, g) .

2) $M_f \cap U = M_\mu(T) \cap U$, где $M_\mu(T) = \{y \in M \mid \mu(T, y) = y\}$ — замкнутое вполне геодезическое подмногообразие в (M, g) .

3) В любой окрестности точки x найдется точка $y \in M_f$, для которой $P(y) = T$.

◁ Введем сначала обозначения, необходимые для доказательства теоремы. Условимся для точки $y \in M$ через O_y обозначать орбиту этой точки под действием однопараметрической группы диффеоморфизмов $\mu(s)$, $s \in \mathbb{R}$. Для точки x в формулировке теоремы выберем число $r_x > 0$ такое, что выполнены следующие условия:

1) экспоненциальное отображение $\text{Exp}_x : M_x \rightarrow M$ инъективно на шаре радиуса r_x с центром в начале координат;

2) никакая орбита O_y , $y \in M$, не лежит целиком в шаре $U = \{y \in M \mid \rho(x, y) < r_x\}$.

Учитывая условия теоремы, существование нужного числа r_x легко доказывается. Далее мы покажем, что U — окрестность точки x , существование которой утверждается в теореме.

Поскольку $t = P(x) > 0$, то x является неподвижной точкой изометрии $I := \mu(t)$.

Рассмотрим теперь $Q : M_x \rightarrow M_x$ — дифференциал изометрии I в точке x . отождествляя M_x с евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, мы можем воспользоваться результатами леммы 3.4 для ортогонального отображения Q . Пусть

$$Q_f = \{z \in M_x \mid Q^m(z) = z \text{ для некоторого } m \in \mathbb{N}\}, \quad Q_\infty = M_x \setminus Q_f.$$

Рассмотрим теперь число $p \in \mathbb{N}$, существование которого утверждается в лемме 3.4, и положим $T = t \cdot p$. Далее покажем, что таким образом определенное число как раз и является числом, существование которого утверждается в теореме.

Рассмотрим некоторый вектор $z \in M_x$ длины меньше r_x . При экспоненциальном отображении $\text{Exp}_x : M_x \rightarrow M$ этот вектор переходит в некоторую точку $y \in M$. Понятно, что $\text{Exp}_x(Q^m(z)) = I^m(y)$ для любого целого m , поскольку экспоненциальное отображение на римановых многообразиях коммутирует с изометриями. Если $z \in Q_f$, то в силу выбора числа p мы имеем $Q^p(z) = z$, и поэтому $I^p(y) = y$, т. е. $y \in M_\mu(T)$.

Пусть теперь $z \in Q_\infty$. Покажем, что $y = \text{Exp}_x(z)$ не принадлежит множеству M_f . Предположим противное. Тогда орбита O_y точки y относительно потока μ компактна. Пусть теперь S — замыкание в M_x множества точек орбиты $\{Q^m(z) \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Понятно, что все векторы этой орбиты имеют длину меньше r_x . Согласно лемме 3.4, S содержит некоторый тор T^l размерности $l \geq 1$. В силу компактности орбиты O_y образ множества S при экспоненциальном отображении Exp_x является подмножеством орбиты O_y . Поскольку $\text{Exp}_x : M_x \rightarrow M$ инъективно на шаре радиуса r_x с центром в начале координат, то O_y содержит образ тора T^l при отображении Exp_x , который сам является тором размерности $l \geq 1$. Поскольку же орбита O_y гомеоморфна окружности, мы получаем, что $l = 1$ и O_y является гомеоморфным образом окружности $T^1 = T^1$. Следовательно, орбита O_y целиком содержится в окрестности U точки x , что невозможно в силу выбора этой окрестности.

Таким образом, множество $U \cap M_f$ является образом множества векторов z в Q_f , имеющих длину меньше r_x , при экспоненциальном отображении Exp_x . Следовательно, $M_f \cap U = M_\mu(T) \cap U$, где $M_\mu(T) = \{y \in M \mid \mu(T, y) = y\}$ — замкнутое вполне геодезическое подмногообразие в (M, g) по лемме 3.3.

Нам осталось доказать, что в любой окрестности точки x найдется точка $y \in M_f$, для которой $P(y) = T$. Если $p = 1$, то $T = t$ и все очевидно. Пусть $p > 1$. Тогда в силу пункта 3) леммы 3.4 существует вектор $z \in Q_f$ такой, что $Q^p(z) = z$ и $Q^m(z) \neq z$ при $1 \leq m < p$. Гомотетией можно добиться того, что длина вектора z сколь угодно мала, и заведомо меньше $r_x > 0$. Понятно, что точка $y = \text{exp}_x(z)$ такова, что $P(y) = T$. Теорема полностью доказана. $\triangleright$

Из доказанной теоремы нетрудно вывести следующую теорему.

Теорема 3.15. Пусть в условиях теоремы 3.14 в некоторой окрестности точки x на M функция периодичности P принимает лишь конечные значения. Тогда существует число $T > 0$ со следующими свойствами:

- 1) Преобразование $\mu(T)$ тождественно на M .
- 2) Функция периодичности P принимает лишь конечные значения, причем этих значений не более чем счетное число, и для любой точки $y \in M$ либо $P(y) = 0$, либо T делится нацело на $P(y)$.

3) В любой окрестности точки x на M существуют точки y со свойством $P(y) = T$.

4) На M корректно определено гладкое и эффективное действие $\eta : S^1 \times M \rightarrow M$ окружности $S^1 = \mathbb{R}/(T \cdot \mathbb{Z})$, орбиты которого совпадают с орбитами μ .

◁ По теореме 3.14 мы можем выбрать число $T > 0$ и окрестность U точки x так, что для них выполняются все утверждения теоремы 3.14. В частности, выполнено равенство $M_f \cap U = M_\mu(T) \cap U$, где $M_\mu(T) = \{y \in M \mid \mu(T, y) = y\}$, и $\mu(T)$ является изометрией на римановом многообразии (M, g) .

По условию теоремы все точки y из некоторой окрестности точки x в M имеют конечные периоды. Это значит, что в некоторой окрестности точки x изометрия $\mu(T)$ тождественна. В силу связности и полноты многообразия M она тождественна и на всем многообразии. Вышеприведенные рассуждения доказывают утверждение 1) теоремы.

Поскольку изометрия $\mu(T)$ тождественна на M , то число T является периодом для каждой из точек M . Поэтому T делится нацело на число $P(y)$ для точек $y \in M$ таких, что $P(y) \neq 0$. Таким образом, множество наименьших положительных периодов не более чем счетно. Это рассуждение доказывает утверждение 2) в формулировке теоремы.

Третье утверждение теоремы следует из утверждения 3) теоремы 3.14.

Утверждение 4) теоремы непосредственно следует из предыдущих утверждений теоремы. ▷

Теорема 3.16. Пусть на римановом многообразии (M, g) задано гладкое нигде не исчезающее киллингово векторное поле X , порождающее однопараметрическую группу изометрий $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, которой соответствует функция периодичности $P = P_\mu$. Тогда $M_f = \{x \in M \mid P_\mu(x) < \infty\}$ — (возможно, несвязное) замкнутое вполне геодезическое подмногообразие в (M, g) .

◁ Теорема очевидна, если $M_f = M$. Далее рассмотрим случай, когда $M_f \neq M$. Поскольку поле X не имеет нулей на многообразии M , то $P^{-1}(0) = \emptyset$. Рассмотрим теперь произвольную точку $x \in M_f$; тогда $P(x) = t > 0$.

Согласно теореме 3.14 существуют такая окрестность U точки x в M и такое $T > 0$, что $M_f \cap U = M_\mu(T) \cap U$, где $M_\mu(T) = \{y \in M \mid \mu(T, y) = y\}$ — замкнутое вполне геодезическое подмногообразие в (M, g) . Таким образом, в некоторой окрестности любой точки $x \in M_f$ множество M_f совпадает с замкнутым вполне геодезическим подмногообразием в (M, g) . Это и доказывает теорему. $\triangleright$

Если в условиях теоремы 3.16 рассмотреть M' — какую-либо компоненту множества M_f , то M' является вполне геодезическим подмногообразием в (M, g) , инвариантным относительно изометрического потока μ . Таким образом, можно более детально исследовать функцию периодичности P_μ этого потока, ограниченного на M' . Некоторую информацию об этом нам доставляет следующий результат.

Теорема 3.17. Пусть на римановом многообразии (M, g) задано нетривиальное гладкое изометрическое действие $\mu : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ аддитивной группы вещественных чисел, и $P = P_\mu$ — функция периодичности, построенная по потоку μ . Если функция P принимает лишь конечные значения, то справедливы следующие утверждения.

1) Функция $P : M \rightarrow \mathbb{R}$ является полунепрерывной снизу и принимает не более счетного числа положительных значений τ_i , $\tau_{i+1} < \tau_i$ при $1 \leq i < \aleph$, где $\aleph \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Число $T = \tau_1$ делится нацело на каждое из чисел τ_i .

2) Существует гладкое, изометричное и эффективное действие $\eta : S^1 \times M \rightarrow M$ окружности $S^1 = \mathbb{R}/T \cdot \mathbb{Z}$, орбиты которого совпадают с орбитами μ .

3) Пусть M_i — множество точек $x \in M$ с наименьшим положительным периодом τ_i . Тогда M_1 — открытое, связное и всюду плотное множество в M .

4) Каждое множество M_i содержится в (возможно, несвязном) замкнутом вполне геодезическом подмногообразии $M_\mu(\tau_i) = \{x \in M \mid \mu(\tau_i, x) = x\}$.

$\triangleleft$ Рассмотрим произвольную точку $x \in M$ такую, что $t := P(x) > 0$. Пусть O_x — орбита точки x под действием потока μ . Выберем число $r_x > 0$ так, что множество

$$TO_x = \{y \in M \mid \rho(y, O_x) < r_x\}$$

является трубчатой окрестностью орбиты O_x , т. е. для каждой точки $y \in TO_x$ существует единственная ближайшая к y точка на ор-

бите O_x . В силу компактности орбиты O_x существование нужного числа $r_x > 0$ легко доказывается.

Покажем теперь, что функция P полунепрерывна снизу в точке $x \in M$. Понятно, что для любой точки $z \in O_x$ выполнено равенство $P(z) = P(x) = t$. Рассмотрим произвольную точку y в шаре $\{y \in M \mid \rho(x, y) < r_x\}$. Покажем, что $l = P(y)$ (наименьший положительный период для точки y) делится нацело на t . Действительно, пусть z — ближайшая к y точка на орбите O_x . Поскольку $\mu(l)(y) = y$, и $\mu(l)$ — изометрия (M, g) , то ближайшей точкой на орбите O_x к точке y является также и точка $\mu(l)(z)$. Но поскольку окрестность TO_x трубчатая, то $\mu(l)(z) = z$, и l делится нацело на t . Таким образом, в шаре $\{y \in M \mid \rho(x, y) < r_x\}$ функция периодичности P принимает значения, не меньшие t . Значит, функция периодичности P полунепрерывна снизу в точке x . То, что функция P полунепрерывна в тех точках $z \in M$, где $P(z) = 0$, очевидно. Таким образом, мы доказали полунепрерывность снизу функции P в каждой точке многообразия. Теперь утверждения 1) и 2) следуют из теоремы 3.15.

Докажем утверждение 3) теоремы. В силу того, что функция периодичности P полунепрерывна снизу на M , прообраз $P^{-1}(T) = M_1$ является открытым подмножеством в M . Как следует из теоремы 3.15, множество $M_1 = P^{-1}(T)$ пересекается с любой окрестностью точки $y \in M$ с положительным значением $P(y)$. Кроме того, как следует из леммы 3.3, каждая связная компонента множества $P^{-1}(0)$ является вполне геодезическим подмногообразием в (M, g) коразмерности ≥ 2 . Таким образом, точки $y \in M$ со свойством $P(y) = T$ образуют всюду плотное открытое подмножество в M .

Предположим теперь, что множество M_1 не является связным. Нетрудно понять, что это возможно лишь при условии, что несвязным будет множество $M \setminus M'$, где M' — некоторая связная компонента множества M_i , $i > 1$. Отметим, что существует не более одной компоненты M' с описанным свойством. Ясно, что при этом M' имеет коразмерность 1 в M . Рассмотрим некоторую точку $x \in M'$. Тогда, согласно утверждению 6) леммы 3.4, дифференциал изометрии $\mu(\tau_i)$ в точке x изменяет ориентацию в M_x . Это означает, что многообразие M не является ориентируемым, и, следовательно, множество $M \setminus M'$ связно вопреки нашему допущению. Полученное противоречие доказывает связность множества M_1 .

Утверждение 4) с учетом леммы 3.3 очевидно. $\triangleright$

3.7. Регулярные и квазирегулярные киллинговы векторные поля

3.7.1. Орбиты изометрических S^1 -действий на римановых многообразиях. Сначала мы приведем некоторую стандартную информацию о гладких изометрических действиях группы окружности $S^1 = SO(2)$ на римановых многообразиях. Все эти факты и их далекие идущие обобщения можно найти в статьях [11, 174].

Заметим, что существование какого-нибудь гладкого S^1 -действия с некоторыми предписанными свойствами на данном гладком многообразии M дает частичную информацию о топологии многообразия M . Например, в статье [195] показано, что если компактное ориентируемое гладкое многообразие M допускает гладкое S^1 -действие с изолированными неподвижными точками, которые также изолированы как особые точки, то все числа Понтрягина и сигнатура многообразия M равны нулю, а характеристика Эйлера многообразия M четна и равна числу неподвижных точек.

Пусть дано какое-нибудь эффективное почти свободное изометрическое действие $\tau : S^1 \times M \rightarrow M$ на римановом многообразии (M, g) . Рассмотрим проекцию

$$\pi : M \rightarrow M/S^1 = \overline{M}, \quad (3.15)$$

где $\overline{M} = M/S^1$ — фактор-пространство, точки которого — орбиты группы S^1 . Пространство M/S^1 снабжается естественной внутренней метрикой $\bar{\rho}$ следующим образом. Пусть O_x и O_y — орбиты некоторых точек x и y относительно S^1 -действия на (M, ρ) . Можно показать, что существует

$$\bar{\rho}(O_x, O_y) = \min \{ \rho(u, v) \mid u \in O_x, v \in O_y \}.$$

Можно проверить, что так определенная функция $\bar{\rho}$ является некоторой полной внутренней метрикой на $\overline{M} = M/S^1$. Кроме того, если $\bar{\rho}(O_x, O_y) = \rho(u, v)$, то любая кратчайшая в (M, g) , соединяющая точки u и v , ортогональна к обеим орбитам O_x и O_y . Поэтому, если рассматривать пространство орбит $\overline{M}$ вместе с метрикой $\bar{\rho}$, то отображение (3.15) является субметрией. В [201] также показано, что M/S^1 — риманов орбифолд (многообразие с особенностями).

Предположим, что некоторая точка $x \in M$ имеет тривиальный стабилизатор относительно S^1 -действия на (M, g) . Тогда каждая

точка в O_x , орбите точки x , имеет то же свойство. В этом случае орбита O_x называется *регулярной*, а в противоположном случае — *особой*. Далее, особые точки орбифолда M/S^1 характеризуются как проекции особых орбит (относительно π). Хорошо известно, что объединение всех регулярных орбит является некоторым открытым всюду плотным подмножеством в M . Каждая точка особой орбиты имеет нетривиальный стабилизатор, изоморфный $\mathbb{Z}_n$ для некоторого $n \geq 2$ (см., например, [25, § 9] или [239]).

Если особых орбит нет, т. е. группа S^1 действует свободно, то проекция (3.15) является расслоением и $\bar{M} = M/S^1$ — гладкое многообразие, которое можно снабдить естественной римановой метрикой $\bar{g}$ такой, что проекция (3.15) — риманова субмерсия [191]. Заметим, что в этом случае $\bar{\rho}$ порождается римановой метрикой $\bar{g}$.

Вследствие теоремы 3.17 для риманова многообразия (M^n, g) с (квази)регулярным векторным полем Киллинга X существует гладкое, изометричное и эффективное действие $\eta : S^1 \times M \rightarrow M$ окружности $S^1 = \mathbb{R}/T \cdot \mathbb{Z}$, орбиты которого совпадают с орбитами потока μ , порождаемого векторным полем X .

Дадим координатное описание риманова многообразия (M^n, g) с (квази)регулярным полем Киллинга X в трубчатой окрестности $U = TO_x$ ($U' = TO_x$) (из доказательства теоремы 3.17) регулярной (соответственно, сингулярной) орбиты $O = O_x$.

(1) Орбита O регулярна тогда и только тогда, когда существует «карта» $(U, \varphi, V_r^{n-1} \times S^1)$, где V_r^{n-1} — открытый шар радиуса $r > 0$ с центром $\mathbf{0}$ в $\mathbb{R}^{n-1}$, такая, что компоненты метрического тензора g в этой карте не зависят от $\theta \in S^1$, $g_{nn} \circ \varphi^{-1}$ является константой, и для каждого единичного вектора $v = (v^1, \dots, v^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ и вещественного числа $t \in [0, r)$ выполнены равенства

$$g_{ij}(tv, 0)v^i v^j = 1, \quad g_{nj}(tv, 0)v^j = 0$$

и

$$g_{ij}(tv, 0)v^i w^j = 0, \quad w \in \mathbb{R}^n, \quad w \perp v.$$

Здесь мы применили правило суммирования Эйнштейна и обозначили для простоты через g_{kl} функции $g_{kl} \circ \varphi^{-1}$.

(2) Орбита O сингулярна тогда и только тогда, когда пространство U' (с внутренней метрикой) является фактор-пространством пространства U из пункта (1) относительно действия циклической

группы изометрий I на U конечного порядка $k \geq 2$, порожденной изометрией h , где $f = \varphi \circ h \circ \varphi^{-1}$ имеет вид

$$f(v, \theta) = \left(f_1(v), \theta + \frac{2\pi}{k} \right),$$

где f_1 — вращение порядка k вокруг центра шара V_r^{n-1} , причем f_1 является также изометрией риманова многообразия (V_r^{n-1}, g_0) , где метрический тензор g_0 имеет компоненты

$$g_{0ij}(x^1, \dots, x^{n-1}) = g_{ij}(\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)), \quad 1 \leq i, j \leq n-1.$$

Регулярные и квазирегулярные киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях обладают рядом общих свойств. Сначала мы уточним результат теоремы 3.17 для случая однопараметрической группы движений на римановом многообразии, порожденной (квази)регулярным киллинговым векторным полем.

Теорема 3.18. Пусть $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — однопараметрическая группа движений риманова многообразия (M, g) , порожденная единичным (квази)регулярным киллинговым векторным полем X . Тогда функция периодичности P потока μ принимает лишь конечные значения и для потока μ справедлива теорема 3.17. Кроме того, справедливы следующие утверждения:

1) Все интегральные кривые поля X являются простыми замкнутыми геодезическими, причем для каждой точки $x \in M$ число $P(x)$ является длиной интегральной кривой поля X , проходящей через точку x .

2) Изометрическое действие $\eta : S^1 \times M \rightarrow M$ окружности $S^1 = \mathbb{R}/T \cdot \mathbb{Z}$ является эффективным и почти свободным. При этом орбиты длины T этого действия являются регулярными, в то время как все остальные орбиты сингулярны. Действие η свободно тогда и только тогда, когда поле Киллинга X регулярно.

3) Если длины интегральных кривых поля X ограничены в совокупности снизу некоторым числом $\delta > 0$ (что заведомо выполнено для риманова многообразия (M, g) , радиус инъективности которого ограничен снизу некоторой положительной константой), то χ из теоремы 3.17 конечно, т. е. функция периодичности P принимает лишь конечное число значений.

4) Если M' — множество сингулярных точек M относительно действия η , то M' является объединением не более чем счетного (и даже конечного в случае компактного M) числа вполне геодезических подмногообразий в M , размерность и коразмерность каждого из которых не меньше 1. Если к тому же M ориентируемо, то коразмерность каждого из этих вполне геодезических подмногообразий четна.

5) Если многообразие M двумерно и ориентируемо, то все орбиты η регулярны, т. е. имеют одинаковую длину T .

6) Если многообразие M трехмерно и ориентируемо, то сингулярные орбиты η на M изолированы, и, следовательно, M является слоением Зейферта.

7) Если многообразие M компактно, трехмерно и ориентируемо, то множество сингулярных орбит η конечно.

◁ Из (квази)регулярности поля X следует, что все интегральные кривые этого поля (или, что то же самое, орбиты потока μ) являются окружностями. Таким образом, функция периодичности потока μ принимает лишь конечные значения. Следовательно, в этой ситуации выполнены все условия теоремы 3.17.

Далее, утверждение 1) теоремы вытекает из предложения 3.2. Второе утверждение следует из того, что киллингово поле X не имеет нулей на M .

Докажем теперь третье утверждение теоремы. Поскольку каждое число τ_i является длиной некоторой замкнутой геодезической, то мы получаем неравенство $\tau_i \geq \delta > 0$ для всех $1 \leq i < \infty$. Кроме того, число $\tau_1 = T$ (максимальный период) делится нацело на τ_i . Поэтому ∞ в данном случае конечно.

Четвертое утверждение теоремы следует из леммы 3.3, утверждения 4) теоремы 3.17 и из того, что поле X не имеет нулей.

Остальные утверждения теоремы являются очевидными следствиями четвертого утверждения. ▷

Таким образом, если рассмотреть на римановом многообразии (M, g) изометрический поток $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, порожденный некоторым (квази)регулярным киллинговым полем постоянной длины, то образ однопараметрической группы $\mu(t)$ при естественном гомоморфизме в $\text{Isom}(M, g)$ (полную группу движений (M, g)) является окружностью S^1 с эффективным (почти) свободным действием. Последнее условие означает, что стабилизатор произвольной точки $x \in M$ относительно действия S^1 является конечной подгруппой в S^1 . Верно

и обратное. Пусть $\eta : S^1 \times M \rightarrow M$ — гладкое, эффективное и почти свободное действие окружности S^1 на гладком многообразии M . Это действие порождает нигде не исчезающее векторное поле X на M . Тогда многообразие M можно снабдить такой римановой метрикой g , что поле X является киллинговым полем постоянной длины на (M, g) . Оба этих утверждения вытекают из результатов работы А. Уодсли [219]. В частности, в процитированной статье доказана следующая

Теорема 3.19 (А. Уодсли [219]). Пусть $\mu : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ — C^r -гладкое действие ($3 \leq r \leq \infty$) аддитивной группы вещественных чисел, каждая орбита которого является окружностью, а M является C^r -гладким многообразием. Тогда существование C^r -гладкого действия $\eta : S^1 \times M \rightarrow M$, орбиты которого совпадают с орбитами μ , равносильно тому, что на M существует такая риманова метрика, что орбиты μ относительно этой метрики являются вложенными вполне геодезическими подмногообразиями в M .

Другое доказательство теоремы 3.19 дано в приложении А Д. Б. Э. Эпштейна к книге [21].

В связи с теоремой 3.19 отметим, что выполнение только одного условия, что все орбиты потока μ являются окружностями, даже в предположении компактности M и вещественной аналитичности потока μ , не гарантирует существования гладкого действия $\eta : S^1 \times M \rightarrow M$, орбиты которого совпадают с орбитами μ . Соответствующие контрпримеры были приведены в статье [209] для размерности 5 (см. также существенно более простой пример У. Терстона в приложении А к книге [21]) и в статье [125] для размерности 4. Умножение многообразия на торы показывает наличие таких контрпримеров в любой размерности не меньше 4. В то же время, в статье [124] доказано, что в размерности 3 такие контрпримеры невозможны даже в случае многообразия и потока класса C^1 , но возможны, если M некомпактно.

Отметим также, что в работах [210, 219] показана эквивалентность следующих двух условий для одномерного слоения $\mathcal{F}$ на гладком многообразии M :

1) на многообразии M существует риманова метрика g , относительно которой все слои слоения $\mathcal{F}$ являются геодезическими на (M, g) ;

2) на M определена 1-форма ω такая, что $\omega(X) = 0$ и $d\omega(T) = 0$, где X — произвольный вектор, а T — произвольная двумерная площадка, касательные к $\mathcal{F}$.

Кроме того, в [210] показано, что все орбиты потока μ , порожденного единичным векторным полем на римановом многообразии (M, g) , являются геодезическими тогда и только тогда, когда на (M, g) существует трансверсальное к орбитам μ поле плоскостей размерности 1, инвариантное относительно потока μ .

Следующая теорема по сути доказана в [219], и понадобится нам в дальнейшем вместе с конструкцией римановой метрики, изложенной в доказательстве.

Теорема 3.20. Пусть $\eta : S^1 \times M \rightarrow M$ — гладкое, эффективное и почти свободное действие окружности S^1 на гладком многообразии M , а X — порожденное этим действием векторное поле на M . Тогда M можно снабдить римановой метрикой g такой, что поле X является киллинговым полем единичной длины на римановом многообразии (M, g) . При этом поле X является регулярным (квазирегулярным), если действие η на M свободно (соответственно, не является свободным).

◁ Понятно, что поле X нигде не зануляется на M . Зафиксируем на M некоторую риманову метрику g_1 . Далее, рассмотрим новую риманову метрику g_2 , получающуюся усреднением метрики g_1 с помощью интегрирования по мере Хаара на S^1 . Относительно метрики g_2 действие η является изометричным. Поэтому поле X является киллинговым на (M, g_2) . Понятно, что X не обязано иметь постоянную длину в метрике g_2 . Поэтому рассмотрим новую риманову метрику g на M , которая конформно эквивалентна метрике g_2 . А именно, положим $g = fg_2$, где $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ определяется формулой $f = (g_2(X, X))^{-1}$. В силу киллинговости X на (M, g_2) имеем $L_X g_2 = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} Xf &= -(g_2(X, X))^{-2} \cdot X(g_2(X, X)) = \\ &= -(g_2(X, X))^{-2} \cdot (L_X g_2)(X, X) = 0 \end{aligned}$$

и

$$L_X g = L_X(fg_2) = (Xf)g_2 + f(L_X g_2) = 0.$$

Таким образом, поле X киллингово на (M, g) и, кроме того, $g(X, X) \equiv 1$.

Если действие η на M свободно, то все орбиты этого действия регулярны, т. е. группа изотропии каждой точки $x \in M$ относительно этого действия тривиальна. Это означает, что интегральные кривые поля X относительно римановой метрики g имеют постоянную длину.

Если же действие η не является свободным, то существует точка $x \in M$, группа изотропии которой изоморфна $\mathbb{Z}_n$ для некоторого $n \geq 2$. Соответственно, длина интегральной кривой поля X , проходящей через точку x , будет в n раз короче длины интегральной кривой поля X , проходящей через любую регулярную точку $y \in M$, т. е. точку, стабилизатор которой относительно действия η тривиален. Значит, в этом случае поле X является квазирегулярным. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Отметим, что в работе [239] приведен пример аналитического почти свободного действия группы S^1 на аналитическом некомпактном трехмерном многообразии M с бесконечным числом попарно неизоморфных групп изотропии точек $x \in M$. Используя теорему 3.20, можно снабдить M такой римановой метрикой g , что действие S^1 на (M, g) изометрично, а соответствующее этому действию поле Киллинга X имеет единичную длину. Понятно, что в таком случае число минимальных положительных периодов для точек многообразия M бесконечно, и в совокупности эти периоды не ограничены снизу никаким положительным числом. Это же наблюдение показывает, что никакой элемент $g \in S^1$, отличный от единицы группы, не является переносом Клиффорда — Вольфа на (M, g) , т. е. изометрией, перемещающей все точки на одно и то же расстояние. Согласно предложению 3.5, радиус инъективности построенного таким образом риманова многообразия (M, g) не ограничен снизу никакой положительной константой.

Из теорем 3.18 и 3.20 сразу получается следующий вариант теоремы А. Уодсли (теоремы 3.19).

Теорема 3.21. Пусть M — гладкое многообразие, а X — нигде не закручиваемое векторное поле на M , все интегральные траектории которого замкнуты. Поле X порождается некоторым гладким действием $\eta : S^1 \times M \rightarrow M$ тогда и только тогда, когда на M существует такая риманова метрика g , что X является единичным киллинговым полем на римановом многообразии (M, g) .

3.7.2. Потоки на односвязных многообразиях. С помощью теоремы 3.20 можно построить множество примеров римановых многообразий с квазирегулярными киллинговыми полями постоянной длины. В этом разделе мы рассмотрим односвязные примеры таких многообразий.

Рассмотрим гладкое действие $\mu : S^1 \times M \rightarrow M$ окружности на гладком многообразии M . Почти свободное действие μ называется *псевдосвободным*, если множество сингулярных орбит конечно, но не пусто.

Согласно теореме 3.20, на каждом многообразии M с псевдосвободным действием окружности S^1 можно задать риманову метрику g такую, что поле X , порожденное действием S^1 , является квазирегулярным киллинговым полем единичной длины. Учитывая наличие множества примеров псевдосвободного действия окружности на многообразиях, мы получаем много примеров римановых многообразий с квазирегулярными киллинговыми полями постоянной длины. Например, в работе [179] доказано, что каждая из 28 гомотопических 7-сфер допускает гладкие псевдосвободные действия S^1 . Таким образом, применяя теорему 3.20, мы получаем

Следствие 3.11. *На каждой из 28 гомотопических семимерных сфер Σ можно ввести риманову метрику g такую, что на (Σ, g) существует квазирегулярное киллингово поле единичной длины.*

Хорошо известны псевдосвободные действия окружности S^1 на нечетномерных сферах S^{2n-1} , которые мы сейчас опишем.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, со стандартной эрмитовой нормой сферу

$$S^{2n-1} = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = 1\}.$$

Пусть $q_1, q_2, \dots, q_n$ — натуральные числа, не имеющие общего делителя > 1 . Рассмотрим следующее действие окружности $S^1 \subset \mathbb{C}$ на S^{2n-1} :

$$s(z) = (s^{q_1} z_1, s^{q_2} z_2, \dots, s^{q_n} z_n), \quad s \in S^1. \quad (3.16)$$

Понятно, что это действие изометрично относительно канонической метрики на S^{2n-1} , индуцированной стандартной евклидовой метрикой из $\mathbb{C}^n$. Если среди чисел q_i есть неравные, то существуют особые орбиты относительно этого действия, т. е. действие S^1 является псевдосвободным.

Следствие 3.12. На каждой сфере S^{2n-1} при $n \geq 2$ существует риманова метрика, обладающая квазирегулярным единичным полем Киллинга таким, что лишь одна интегральная траектория этого поля является особой.

◁ Рассмотрим частный случай конструкции (3.16), когда $q_1 = q > 1$ и $q_i = 1$ при $2 \leq i \leq n$. Для такого действия существует лишь одна особая орбита — орбита, проходящая через точку $(1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$. Согласно теореме 3.20 сфера S^{2n-1} ($n \geq 2$) допускает риманову метрику такую, что векторное поле X , порожденное рассматриваемым действием S^1 на S^{2n-1} , является киллинговым полем единичной длины относительно этой метрики. ▷

Отметим, что метрики из следствия 3.12, построенные с помощью конструкции, изложенной в доказательстве теоремы 3.20, имеют кооднородность 1. Напомним, что гладкое (компактное риманово) многообразие M имеет кооднородность 1, если пространство орбит M/G полной группы изометрий G пространства M одномерно. Обширная информация и библиография по римановым многообразиям кооднородности 1 приведена в работах [71] и [135].

Более интересным представляется следующий результат.

Теорема 3.22. На каждой сфере S^{2n-1} , $n \geq 2$, для любого $\varepsilon > 0$ существует (вещественно аналитическая) риманова метрика g кооднородности 1 и (вещественно аналитическое) поле Киллинга X единичной длины на (S^{2n-1}, g) с замкнутыми интегральными траекториями такие, что

- 1) все секционные кривизны (S^{2n-1}, g) отличаются от 1 не более чем на ε ;
- 2) выполнено соотношение $L/l > 1/\varepsilon$, где L и l — максимальная и минимальная из длин интегральных траекторий поля X соответственно.

◁ Рассмотрим частный случай в (3.16), когда $q_1 = q > 1$, а $q_i = q + 1$ при $2 \leq i \leq n$. Отметим, что наименьший положительный период относительно потока, соответствующего действию S^1 , для точек $x \in S^{2n-1}$ равен либо $2\pi/q$, либо $2\pi/(q + 1)$, либо 2π . Квадрат длины киллингова поля V , порожденного действием (3.16), на сфере S^{2n-1} с канонической метрикой вычисляется по формуле

$$\text{can}_x(V, V) = q^2(x_1^2 + x_2^2) + (q + 1)^2(x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})$, $x_{2k-1} + \sqrt{-1} x_{2k} = z_k \in \mathbb{C}$. Рассмотрим теперь поле $\tilde{V} = \frac{1}{q} V$. Оно киллингово на (S^{2n-1}, can) , при этом

$$1 \leq \sqrt{\text{can}(\tilde{V}, \tilde{V})} \leq 1 + 1/q.$$

При $q \rightarrow \infty$ такие поля сходятся к единичному киллингову полю на сфере (S^{2n-1}, can) . Пусть $f^q : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ определяется формулой

$$f^q(x) = \text{can}_x(\tilde{V}, \tilde{V}) = 1 + \frac{2q+1}{q^2} \varphi(x), \quad \varphi(x) = \sum_{i=3}^{2n} x_i^2, \quad x \in S^{2n-1}.$$

Рассмотрим теперь новую риманову метрику g^q на S^{2n-1} , определяемую следующим образом:

$$g^q = (\text{can}(\tilde{V}, \tilde{V}))^{-1} \text{can} = \frac{1}{f^q} \text{can}.$$

Таким образом, g^q получается конформной деформацией канонической метрики на S^{2n-1} , а поле $\tilde{V}$ является единичным киллинговым относительно этой метрики.

Покажем теперь, что метрики g^q на сферах S^{2n-1} имеют координатность 1. Отметим, что функция φ , а вместе с ней и функции f^q , инвариантны относительно действия группы $SO(2) \times SO(2n-2) \subset SO(2n)$, которая изометрично действует на (S^{2n-1}, can) с координатностью 1. Пространством орбит при этом действии является отрезок вещественной оси. Орбитами действия этой группы являются множества

$$M_t = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + x_2^2 = t^2, x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_{2n}^2 = 1 - t^2\}$$

при $t \in [0, 1]$. Очевидно, что орбита M_0 диффеоморфна сфере S^{2n-3} , орбита M_1 диффеоморфна S^1 , а орбиты M_t при $t \in (0, 1)$ диффеоморфны $S^1 \times S^{2n-3}$. В силу инвариантности функций f^q относительно действия группы $SO(2) \times SO(2n-2)$, метрики g^q также инвариантны относительно действия этой группы, а значит, имеют координатность 1.

Отметим, что любая орбита M_t , $t \in (0, 1)$, относительно метрики, индуцированной метрикой g^q , изометрична прямому метрическому произведению одномерной и $(2n-3)$ -мерной евклидовых сфер подходящего радиуса. Сингулярные орбиты M_1 и M_0 являются вполне

геодезическими в (S^{2n-1}, g^q) при любом натуральном q . Более того, M_1 изометрична $S^1(1)$, а M_0 изометрична $S^{2n-3}(\frac{q}{q+1})$, где через $S^m(r)$ обозначена сфера радиуса r в $(m+1)$ -мерном евклидовом пространстве с индуцированной римановой метрикой.

Докажем теперь, что при $q \rightarrow \infty$ секционные кривизны метрик g^q сходятся к секционным кривизнам канонической метрики can равномерно по всем точкам сферы и всем двумерным направлениям.

Напомним, как изменяется секционная кривизна римановой метрики при конформной деформации. Пусть g и $\bar{g} = \theta \cdot g$ конформно эквивалентные римановы метрики на многообразии M , $\theta : M \rightarrow \mathbb{R}$ — положительная гладкая функция. Пусть σ — двумерная касательная площадка в некоторой точке $x \in M$, а векторы V и W образуют ортонормированный базис относительно g в σ . Секционные кривизны K_σ и $\bar{K}_\sigma$ площадки σ относительно метрик g и $\bar{g}$ связаны формулой (см. [37, § 3.6])

$$\begin{aligned} \theta \bar{K}_\sigma = K_\sigma - \frac{1}{2} \Big(h_\psi(V, V) + h_\psi(W, W) + \\ + \frac{\|\nabla \psi\|^2 - (V\psi)^2 - (W\psi)^2}{2} \Big), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $\psi = \ln \theta$, h_ψ — гессиан функции ψ , определяемый равенством $h_\psi(X, Y) = g(\nabla_X \nabla \psi, Y)$.

В интересующем нас случае $M = S^{2n-1}$, $g = \text{can}$, и, кроме того,

$$\theta(x) = \frac{1}{f^q(x)}, \quad \psi(x) = -\ln f^q(x) = -\ln \left(1 + \frac{2q+1}{q^2} \varphi(x) \right). \quad (3.18)$$

Для любого $x \in S^{2n-1}$ имеет место неравенство $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, поэтому функции f^q равномерно сходятся к функции, тождественно равной 1 на S^{2n-1} .

В силу компактности сферы S^{2n-1} нормы ковариантных дифференциалов $\nabla \varphi$ и $\nabla^2 \varphi$ (относительно метрики can) ограничены сверху на S^{2n-1} некоторыми константами. Отсюда и из формул (3.17) и (3.18) мы легко получаем, что $\bar{K}_\sigma \rightarrow K_\sigma$ при $q \rightarrow \infty$ равномерно по всем точкам сферы и всем двумерным касательным площадкам.

Таким образом, в качестве метрики g в формулировке теоремы можно рассмотреть метрику g^q при достаточно большом q , а в качестве поля X при этом можно взять $\tilde{V}$. Действительно, с одной стороны при достаточно большом q все секционные кривизны (S^{2n-1}, g^q)

отличаются от 1 не более чем на ε . Далее, нетрудно понять, что длина каждой регулярной интегральной траектории поля $\tilde{V}$ на (S^{2n-1}, g^q) равна $2\pi q$. Длины же сингулярных интегральных траекторий равны либо 2π , либо $2\pi \frac{q}{q+1}$. Таким образом, $L = 2\pi q$ и $l = 2\pi \frac{q}{q+1}$, где L и l — максимальная и минимальная из длин интегральных траекторий поля $\tilde{V}$ на (S^{2n-1}, g^q) соответственно. Поэтому при достаточно больших q имеет место неравенство $L/l = q + 1 > 1/\varepsilon$. $\triangleright$

Результаты теоремы 3.22 полезно сравнить с результатами работы [80]. В процитированной работе доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, m) > 0$ со следующим свойством: любая простая замкнутая геодезическая на сфере S^m , снабженной римановой метрикой g с условием $1 - \delta < K < 1 + \delta$ на секционную кривизну K , имеет длину l такую, что либо $l \in (2\pi - \varepsilon, 2\pi + \varepsilon)$, либо $l > \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. замкнутые геодезические бывают двух типов: «короткие» и «длинные». В примерах метрик на сфере S^{2n-1} из теоремы 3.22 среди замкнутых геодезических, являющихся интегральными кривыми поля X , есть геодезические как первого, так и второго типов.

Используя идеи доказательства теоремы 3.22, нетрудно получить следующий результат.

Теорема 3.23. На каждой сфере S^{2n-1} , $n \geq 2$, для любого $\varepsilon > 0$ существует (вещественно аналитическая) риманова метрика g координатности 1 и (вещественно аналитическое) векторное поле Киллинга X единичной длины на (S^{2n-1}, g) такие, что

- 1) все секционные кривизны (S^{2n-1}, g) отличаются от 1 не более чем на ε ;
- 2) поле X имеет как замкнутые, так и незамкнутые интегральные траектории.

$\triangleleft$ Можно представить сферу S^{2n-1} с канонической метрикой как постоянную секционную кривизны 1 как подмногообразие $S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = 1\}$ с римановой метрикой, индуцированной стандартной евклидовой метрикой в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим поток $\mu : \mathbb{R} \times S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$, заданный следующим образом:

$$\mu(s, z) = (e^{s\sqrt{-1}}z_1, e^{sq\sqrt{-1}}z_2, \dots, e^{sq\sqrt{-1}}z_n),$$

где $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in S^{2n-1}$, $s \in \mathbb{R}$, а q — некоторое иррациональное число. Понятно, что поток μ изометричен относительно канонической метрики как на S^{2n-1} . Квадрат длины киллингова поля X на

(S^{2n-1}, can) , соответствующего потоку μ , вычисляется по формуле

$$\text{can}_x(X, X) = (x_1^2 + x_2^2) + q^2(x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})$, $x_{2k-1} + \sqrt{-1}x_{2k} = z_k \in \mathbb{C}$. При $q \rightarrow 1$ такие поля X сходятся к единичному киллингову полю на сфере (S^{2n-1}, can) . Рассмотрим теперь новую риманову метрику g^q на S^{2n-1} , определяемую формулой $g^q = (\text{can}(X, X))^{-1} \text{can}$ и являющуюся конформной деформацией канонической метрики на S^{2n-1} . Относительно метрики g^q поле X является единичным полем Киллинга (см. доказательство теоремы 3.20). Понятно, что метрика g^q вещественно аналитична и имеет кооднородность 1 на S^{2n-1} относительно изометрического действия группы $SO(2) \times SO(2n-2) \subset SO(2n)$ (см. доказательство теоремы 3.22). Рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве теоремы 3.22, показывают, что при q , достаточно близких к 1, метрика g^q удовлетворяет условию 1) в формулировке теоремы 3.23.

Условие 2) в формулировке теоремы выполняется для каждой метрики g^q в силу иррациональности числа q . Таким образом, в качестве метрики g в формулировке теоремы 3.23 можно выбрать метрику g^q при некотором иррациональном q , достаточно близком к 1.

Отметим также, что множество точек конечного периода на (S^{2n-1}, g^q) относительно потока, порожденного киллинговым полем X , состоит из двух компонент связности (размерностей 1 и $2n-3$), изометричных некоторым евклидовым сферам. Все точки каждой из этих компонент имеют общий период, причем периоды разных компонент несоизмеримы. $\triangleright$

В свете вышесказанного определенный интерес представляет следующая

Теорема 3.24 (В. Тушманн [217]). Пусть $S(n, D)$ — класс односвязных n -мерных римановых многообразий (M, g) с секционной кривизной $|K_g| \leq 1$ и диаметром $\text{diam}(g) \leq D$ ($n \geq 2$, $D > 0$). Тогда существует положительное число $v = v(n, D)$ со следующим свойством: если $(M, g) \in S(n, D)$ удовлетворяет условию $\text{vol}(g) < v(n, D)$, то

1) существует гладкое локально свободное действие окружности S^1 на M ;

2) для каждого $\varepsilon > 0$ существует S^1 -инвариантная метрика g_ε на M такая, что

$$e^{-\varepsilon}g < g_\varepsilon < e^\varepsilon g, \quad |\nabla_g - \nabla_{g_\varepsilon}| < \varepsilon, \quad |\nabla_{g_\varepsilon}^i R_{g_\varepsilon}| < C(n, i, \varepsilon);$$

3) фактор-пространство индуцированного расслоения Зейферта на M является односвязным римановым орбифолдом.

В. Тушманн замечает, что вследствие теоремы Бонне, класс $PS(n, \delta)$ всех n -мерных римановых многообразий (M, g) с секционной кривизной $0 < \delta \leq K_g \leq 1$ является подклассом класса $S(n, D = \pi/\sqrt{\delta})$. Поэтому теорема 3.24 справедлива и для класса $PS(n, \delta)$. Если упомянутое S^1 -действие для многообразия (M, g) из теоремы 3.24 свободно (соответственно, локально свободно), то по теореме 3.20 на многообразии M можно задать риманову метрику g_1 такую, что указанное S^1 -действие индуцировано регулярным (квазирегулярным) единичным полем Киллинга на M . Если при этом $(M, g) \in PS(n, \delta)$, то по теореме М. Берже (теорема 3.9) n должно быть нечетным. Кроме того, вследствие замечания 0.6 в [217] M допускает $\delta/2$ -заземленную метрику $\tilde{g}$, инвариантную относительно рассматриваемого S^1 -действия. С другой стороны, в настоящее время не известно условий, гарантирующих существование свободных, или, напротив, почти свободных гладких S^1 -действий для многообразий из класса $PS(n, \delta)$.

3.7.3. Геодезические потоки и метрики Сасаки на касательных расслоениях римановых многообразий. Дополнительным источником киллинговых полей постоянной длины являются векторные поля геодезических потоков для римановых многообразий, все геодезические которых замкнуты. Такие многообразия являются предметом исследования книги [21].

В работе [205] С. Сасаки определил и исследовал в локальных координатах естественную и замечательную риманову метрику g^S на касательном расслоении TM риманова многообразия (M, g) , обычно называемую *метрикой Сасаки*. Позднее эта метрика была описана в терминах оператора связности как метрика g_1 в разделе 1К книги А. Бессе [21] без ссылок на [205]. Далее для каждого $u > 0$ мы будем обозначать через $T_u M$ сферическое расслоение векторов длины u на римановом многообразии (M, g) . Можно дать неявную, но полную характеристику g^S с помощью трех следующих свойств:

1) Метрика на каждом касательном пространстве $M_x \subset TM$, $x \in M$, индуцированная метрикой g^S , совпадает с естественной римановой метрикой евклидова пространства $(M_x, g(x))$.

2) Естественная проекция $p : (TM, g^S) \rightarrow (M, g)$ является римановой субмерсией.

3) Горизонтальные геодезические римановой субмерсии p в точности являются параллельными векторными полями вдоль геодезических в (M, g) .

В качестве простого следствия из этих свойств получается следующее свойство:

4) Векторное поле F геодезического потока риманова многообразия (M, g) , определенного на (TM, g^S) , является горизонтальным векторным полем римановой субмерсии p и касательно к расслоению $T_u M$ касательных векторов длины $u \neq 0$; интегральные кривые поля F являются специальными горизонтальными геодезическими в (TM, g^S) , являющимися касательными векторными полями к геодезическим в (M, g) .

Доказательство следующего свойства дано в предложении 1.102 из [21].

5) Вертикальные слои $p^{-1}(x)$, $x \in M$, субмерсии p являются вполне геодезическими относительно g^S .

Особый интерес для нас представляет теорема Е в [215]:

Теорема 3.25 (С. Танно [215]). *Риманово многообразие (M, g) имеет постоянную секционную кривизну $k > 0$ тогда и только тогда, когда ограничение векторного поля геодезического потока F на $T_u M$, $u = 1/\sqrt{k}$, является киллинговым векторным полем постоянной длины относительно индуцированной метрики (TM, g^S) .*

Следуя книге [21], под римановым многообразием, все геодезические которого замкнуты, или *P-многообразием*, мы понимаем риманово многообразие (M, g) со свойством, что каждая геодезическая в (M, g) является периодической (другими словами, замкнутой). Специальный класс *P-многообразий* составляют *SC-многообразия* — такие римановы многообразия (M, g) , что все геодезические в (M, g) имеют общий минимальный период l , $0 < l < \infty$, и каждая геодезическая длины l в (M, g) является простой замкнутой кривой. Если отбросить последнее требование в этом определении, мы получаем промежуточное понятие *C-многообразия*.

Классическими примерами SC -многообразий являются КРО-СПы, т. е. компактные симметрические пространства ранга один. Известны гладкие римановы SC -многообразия вращения (S^2, g) с неканонической метрикой, среди них можно выделить вещественно аналитический пример Цолля (1903). Много позже, используя этот пример, А. Вейнштейн построил неканонические гладкие римановы SC -метрики на каждой сфере S^n , $n \geq 3$ (см. [21]).

Важным для нас является следующее наблюдение. Если (M, g) — P -многообразие, а Γ — конечная свободная группа изометрий на (M, g) , то фактор-пространство M/Γ , снабженное естественной римановой фактор-метрикой, также является P -многообразием [21]; эта конструкция является дополнительным источником P -многообразий.

Предложение 3.8. *Имеют место следующие утверждения:*

- 1) Ограничение X векторного поля геодезического потока F произвольного гладкого риманова P -многообразия M на (T_1M, g^S) является единичным касательным векторным полем, и его интегральные траектории являются простыми периодическими геодезическими на (T_1M, g^S) , параметризованными длиной дуги.
- 2) Поле X порождается эффективным гладким действием группы S^1 на T_1M и является единичным киллинговым полем некоторой гладкой римановой метрики g_0 на T_1M .
- 3) Если (M, g) имеет постоянную секционную кривизну $k = 1$, можно взять $g_0 = g^S$.
- 4) Каждое риманово P -многообразие компактно, и все его геодезические имеют общий (не обязательно минимальный) период.
- 5) Упомянутое действие S^1 свободно тогда и только тогда, когда (M, g) является C -многообразием.

◁ Первое утверждение следует из указанных выше свойств 2) и 4) метрики Сасаки g^S на TM .

Для доказательства второго утверждения нам понадобится теорема А. 26 из книги [21], утверждающая, что каждое поле Y единичных касательных векторов на произвольном римановом многообразии $\widetilde{M}$ такое, что все интегральные траектории поля Y являются геодезическими окружностями, порождается некоторым гладким действием S^1 (окружность S^1 при этом отождествляется с $\mathbb{R}/c\mathbb{Z}$, где $c > 0$ является константой, не обязательно совпадающей с единицей).

Этот результат, а также утверждение 1) предложения и теорема 3.20, влекут второе утверждение предложения.

Третье утверждение является следствием теоремы 3.25.

Докажем теперь последние два утверждения предложения. Многообразие M компактно, поскольку оно является образом соответствующего (гладкого) отображения $p \circ \varphi : S^1 \times T_1 M \rightarrow M$, ограниченного на компактное подмножество $S^1 \times (T_1 M \cap M_x)$, где x — произвольная точка в M , и $\varphi : S^1 \times T_1 M \rightarrow T_1 M$ — поток векторного поля X .

Согласно утверждениям 1) и 2) предложения все геодезические на произвольном P -многообразии (M, g) имеют общий (не обязательно минимальный) период s . Понятно, что период s является минимальным для всех геодезических тогда и только тогда, когда (M, g) является C -многообразием. $\triangleright$

Следствие 3.13. *Если риманово P -многообразие (M, g) не является C -многообразием, то в обозначениях предложения 3.8 поле X является квазирегулярным единичным полем Киллинга на $(T_1 M, g_0)$. Если (M, g) — произвольное однородное риманово многообразие постоянной секционной кривизны 1, отличное от евклидовой сферы и вещественного проективного пространства, то векторное поле X является квазирегулярным единичным полем Киллинга на $(T_1 M, g^S)$.*

$\triangleleft$ Первое утверждение следует из четвертого утверждения предложения 3.8.

Пусть (M, g) — однородное риманово многообразие постоянной секционной кривизны 1, отличное от евклидовой сферы и вещественного проективного пространства. По теореме 3.31 на (M, g) существует квазирегулярное киллингово поле X постоянной длины. Очевидно, что замкнутые геодезические, являющиеся интегральными кривыми поля X , не имеют общего минимального периода. Следовательно, (M, g) не является C -многообразием. Теперь второе утверждение следствия 3.13 вытекает из утверждений 1), 2), 5) предложения 3.8. $\triangleright$

В связи с вышесказанным будет уместным привести теорему 3.1 из [100].

Теорема 3.26 (А. Болсинов — Б. Йованович [100]). *Геодезический поток на римановом P -многообразии является вполне интегрируемым.*

Из этой теоремы и следствия 3.13 видно, что в общем случае наличие квазирегулярного поля Киллинга постоянной длины на римановом многообразии (M, g) не является препятствием для полной интегрируемости геодезического потока на (M, g) . Дополнительную информацию о вполне интегрируемых геодезических потоках, а также о необходимых определениях и конструкциях можно найти в работах [99] и [100]. Читатель также может найти рассуждения о недостатках результатов, подобных теореме 3.26, в обсуждении на с. 4196 работы [99].

3.8. Киллинговы векторные поля постоянной длины на локально симметрических многообразиях

Основной объект исследования этого раздела — *киллинговы векторные поля постоянной длины* на локально симметрических римановых многообразиях. Предложение 3.4 устанавливает связь между такими полями и 1-параметрическими группами $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (потоками), *переносов Клиффорда — Вольфа*: 1-параметрические группы переносов Клиффорда — Вольфа порождаются киллинговыми полями постоянной длины. Естественным является следующий вопрос: когда верно обратное утверждение? Если X — некоторое единичное киллингово векторное поле на некотором компактном (или однородном) римановом многообразии M , то все изометрии из 1-параметрической группы $\gamma(t)$, порожденной X ($t \in \mathbb{R}$) с достаточно малым $|t|$, являются переносами Клиффорда — Вольфа на M (предложение 3.5). Но данное условие не выполняется в общем случае для произвольных чисел $t \in \mathbb{R}$. Это ясно в случае, когда единичное киллингово векторное поле X квазирегулярно или имеет и замкнутые и незамкнутые интегральные кривые.

Примечательным является то, что поток на симметрическом пространстве, порожденный единичным киллинговым векторным полем, целиком состоит из переносов Клиффорда — Вольфа (см. теорему 3.27), в то время как существуют квазирегулярные киллинговы векторные поля единичной длины на однородных сферических пространственных формах (следовательно, локально симметрических римановых многообразиях) (теорема 3.31). Изложение в этом разделе (состоящем из четырех параграфов) основано на работе [89].

3.8.1. Симметрические пространства. В этом параграфе мы покажем, что на симметрических пространствах не существует квазирегулярных киллинговых векторных полей постоянной длины. Более того, справедлива следующая

Теорема 3.27. Пусть M — симметрическое риманово пространство, X — киллингово векторное поле постоянной длины на M . Тогда 1-параметрическая группа изометрий $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, пространства M , порождаемая полем X , состоит из переносов Клиффорда — Вольфа. Если, кроме того, пространство M имеет положительную секционную кривизну, то поток $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, индуцирует некоторое свободное изометрическое S^1 -действие на M .

Предварительно мы докажем серию вспомогательных результатов.

Лемма 3.5. Пусть M — компактное симметрическое пространство с полной группой изометрий $\text{Isom}(M)$, $\text{Isom}_0(M)$ — компонента связности единицы в $\text{Isom}(M)$, X — киллингово векторное поле постоянной длины на M , порождающее 1-параметрическую группу изометрий $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда Z_μ , централизатор потока μ в $\text{Isom}_0(M)$, действует транзитивно на M .

◁ Основой доказательства является следующее наблюдение. Для произвольного переноса Клиффорда — Вольфа γ на компактном симметрическом пространстве M , рассмотрим Z_γ , компоненту связности единицы централизатора элемента γ в группе $\text{Isom}(M)$. Согласно результатам В. Озолса [193, следствие 2.7], группа Z_γ действует транзитивно на M .

Вследствие однородности M радиус инъективности многообразия M является постоянным положительным числом s . Согласно доказательству предложения 3.5 для всех t таких, что $|t| < s$, изометрия $\mu(t)$ является переносом Клиффорда — Вольфа на M . Положим $s_i = s/i!$ для любого $i \in \mathbb{N}$, и пусть Z_i — компонента связности единицы элемента $\mu(s_i)$ в группе $\text{Isom}(M)$. Ясно, что для всех i справедливо включение $Z_{i+1} \subset Z_i$. Кроме того, все группы Z_i действуют транзитивно на M . Поэтому не возрастающая по включению последовательность групп $\{Z_i\}$ стабилизируется, начиная с некоторого номера. Пусть Z — пересечение всех групп Z_i для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда вследствие сказанного выше Z действует транзитивно на M . С другой стороны, все элементы группы Z коммутируют со всеми

элементами $\mu(s_i)$. Следовательно, легко видеть, что группа Z централизует каждую изометрию из потока μ . Очевидно, что $Z \subset Z_\mu$. Поэтому Z_μ действует транзитивно на M . $\triangleright$

Далее мы исследуем свойства киллинговых векторных полей постоянной длины на произвольном односвязном симметрическом пространстве M . Такое пространство имеет разложение в прямое метрическое произведение

$$M = M_0 \times M_+ \times M_-,$$

где M_0 — некоторое евклидово пространство, M_+ (M_-) — односвязное симметрическое пространство компактного (соответственно, некомпактного) типа. Согласно теореме Хано ([42, гл. VI, теорема 3.5]), имеется разложение

$$\text{Isom}_0(M) = \text{Isom}_0(M_0) \times \text{Isom}_0(M_+) \times \text{Isom}_0(M_-)$$

для компонент связности единиц полных групп изометрий этих пространств, и, кроме того, имеется соответствующее разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$$

для их алгебр Ли, естественно отождествляемых с алгебрами Ли киллинговых полей. Напомним, что *трансвекцией* на симметрическом пространстве называется изометрия, индуцирующая некоторый параллельный перенос вдоль какой-нибудь геодезической [34]. Можно также определить трансвекцию на симметрическом пространстве M как композицию двух геодезических симметрий s_x и s_y для $x, y \in M$ [42]. Пусть G — некоторая замкнутая группа изометрий, порожденная всеми трансвекциями некоторого односвязного симметрического пространства M . Тогда

$$G = V \times \text{Isom}_0(M_+) \times \text{Isom}_0(M_-),$$

где V — векторная группа параллельных переносов евклидова пространства M_0 [34, теорема 8.3.12]. Хорошо известно, что группа G действует транзитивно на M . Кроме того, справедлива следующая

Лемма 3.6. Пусть X — киллингово векторное поле постоянной длины на некотором односвязном симметрическом пространстве M ,

порождающее 1-параметрическую группу изометрий $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда образ потока μ содержится в группе трансвекций G пространства M , и Z_μ^G , централизатор потока μ в группе G , действует транзитивно на M .

◁ Для киллингова поля X имеется разложение $X = X_0 \oplus X_+ \oplus X_-$, где X_i — некоторое киллингово поле на симметрическом пространстве M_i , $i \in \{0, +, -\}$. Так как X имеет постоянную длину на M , то каждое поле X_i порождает некоторую 1-параметрическую подгруппу ограниченных изометрий, т. е. изометрий с ограниченным смещением на M_i . Тогда поле X_0 параллельно на евклидовом пространстве M_0 , в то время как поле X_- тривиально на M_- , потому что M_- имеет неположительную секционную кривизну и отрицательную кривизну Риччи (см. предложение 3.7, следствие 3.3, а также [231]). Пусть $\mu_i(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — некоторая 1-параметрическая группа изометрий на M_i , порожденная полем X_i . Ясно, что $\mu_0(t)$ — некоторая группа параллельных переносов, а $\mu_-(t)$ — тривиальная группа. Поэтому каждая изометрия $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, входит в группу трансвекций G и $\mu(t) = \mu_0(t) \times \mu_+(t) \times e$, где e — единица группы $\text{Isom}_0(M_-)$.

Заметим теперь, что централизатор потока μ_0 в группе V совпадает с группой V , а централизатор потока μ_+ в группе $\text{Isom}_0(M_+)$ транзитивен на M_+ согласно лемме 3.5. Поэтому централизатор потока μ в группе трансвекций G транзитивен на симметрическом пространстве M . ▷

Лемма 3.7. Пусть N — симметрическое риманово пространство, Y — киллингово векторное поле постоянной длины на N , порождающее 1-параметрическую группу изометрий $\nu(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда существует транзитивная подгруппа S полной группы изометрий пространства N , коммутирующая с каждой изометрией из потока ν .

◁ Пусть M — универсальное локально изометричное накрытие симметрического пространства N . Тогда M — односвязное симметрическое пространство. Обозначим через G группу трансвекций пространства M и рассмотрим Δ — централизатор группы G в полной группе изометрий $\text{Isom}(M)$ симметрического пространства M . Известно (см. [34, теорема 8.3.11]), что существует дискретная подгруппа Γ группы Δ такая, что $N = M/\Gamma$. Рассмотрим теперь киллингово поле X на M , полученное подъемом поля Y на N , и 1-параметрическую группу изометрий $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, на M , порожденную этим

полем. Очевидно, поле X имеет постоянную длину. Согласно лемме 3.6, существует некоторая подгруппа K в группе трансвекций G , действующая транзитивно на M и коммутирующая с каждой изометрией из потока μ . Рассмотрим теперь централизатор H группы Γ в группе $\text{Isom}(M)$. Так как подгруппа трансвекций G группы $\text{Isom}(M)$ централизует каждую изометрию из группы Γ , то $K \subset H$. Поскольку Γ — нормальная подгруппа в H , то можно определить естественный эпиморфизм $\pi : H \rightarrow H/\Gamma = \tilde{H}$. Ясно, что группа $\tilde{H}$ — подгруппа группы всех изометрий симметрического пространства N . Пусть $S = \pi(K)$. Так как группа K транзитивна на M , то группа $S = \pi(K)$ транзитивна на N . Поскольку K коммутирует с каждой изометрией из потока μ , то алгебра Ли группы K коммутирует с киллинговым полем X . Алгебра Ли группы S изоморфна алгебре Ли группы K и очевидно коммутирует с киллинговым полем Y на N . Это значит, что группа S коммутирует с каждой изометрией из потока ν , порожденного киллинговым полем Y . $\triangleright$

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.27. Согласно лемме 3.7, существует подгруппа S группы всех изометрий симметрического пространства M , действующая транзитивно на M и коммутирующая с каждой изометрией из потока μ . Покажем, что для каждого $t \in \mathbb{R}$ изометрия $\mu(t)$ является переносом Клиффорда — Вольфа на M . В самом деле, если $x, y \in M$, то существует изометрия $s \in S$ такая, что $s(x) = y$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \rho(x, \mu(t)(x)) &= \rho(s(x), s(\mu(t)(x))) = \\ &= \rho(s(x), \mu(t)(s(x))) = \rho(y, \mu(t)(y)). \end{aligned}$$

Докажем второе утверждение теоремы. Если секционная кривизна пространства M положительна, то M компактно и имеет ранг 1 (см. [58]). Пусть K — образ 1-параметрической подгруппы $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, при естественном гомоморфизме в полную (компактную) группу изометрий $\text{Isom}(M)$ пространства M . Рассмотрим замыкание $\tilde{K}$ группы K в $\text{Isom}(M)$. Каждая изометрия, являющаяся пределом последовательности переносов Клиффорда — Вольфа, сама является переносом Клиффорда — Вольфа. Поэтому группа $\tilde{K}$ состоит из переносов Клиффорда — Вольфа пространства M и следовательно действует свободно на M . Кроме того, группа $\tilde{K}$ связна и коммутативна. Следовательно, если $\dim(\tilde{K}) \geq 2$, то ранг симметрического пространства

M не меньше 2 [58]. Но в этом случае M не имеет положительную секционную кривизну. Поэтому $\dim \tilde{K} = 1$ и $\tilde{K} = K$ изоморфна группе S^1 вследствие компактности группы $\text{Isom}(M)$. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Заметим, что в статье [126] авторы классифицировали все свободные изометрические действия группы S^1 на компактных односвязных неприводимых симметрических римановых пространствах.

Следствие 3.14. Пусть M — симметрическое риманово пространство, X — некоторое киллингово векторное поле постоянной длины на M . Тогда либо поле X регулярно, либо все его интегральные кривые не замкнуты.

Достаточно сослаться на теорему 3.27 и предложение 3.6.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Результаты § 3.8.3 показывают, что утверждения выше не верны для локально симметрических пространств. В § 3.8.4 мы покажем, что существуют квазирегулярные киллинговы векторные поля постоянной длины на некоторых компактных однородных локально симметрических римановых многообразиях.

Представляется интересным найти некоторые (естественные) более широкие классы римановых многообразий, не допускающих квазирегулярных киллинговых полей постоянной длины.

3.8.2. Неодносвязные многообразия. В этом параграфе мы покажем, как можно свести исследование поведения интегральных траекторий киллинговых векторных полей постоянной длины на неодносвязных римановых многообразиях к исследованию того же вопроса на их универсальных римановых накрытиях. В частности, мы получим некоторые достаточные условия существования квазирегулярных киллинговых векторных полей постоянной длины на неодносвязных римановых многообразиях.

Нетрудно доказать следующий известный результат.

Теорема 3.28. Пусть $M = \tilde{M}/\Gamma$ риманово фактор-многообразие некоторого риманова многообразия $\tilde{M}$ по его дискретной свободной группе движений Γ , а $p : \tilde{M} \rightarrow M$ — каноническая проекция. Векторное поле X на M киллингово (постоянной длины) тогда и только тогда, когда оно p -связано с некоторым Γ -инвариантным киллинговым векторным полем Y на $\tilde{M}$ (постоянной длины). Кроме того, каждая изометрия $f \in \Gamma$ коммутирует со всеми элементами в $\tilde{\gamma}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, 1-параметрической группы движений, порожденной полем Y .

Следующая теорема позволяет понять поведение интегральных кривых киллинговых векторных полей постоянной длины на неодносвязных римановых многообразиях.

Теорема 3.29. *В обозначениях теоремы 3.28, поле X на M квазирегулярно или имеет и замкнутые и незамкнутые траектории тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

- 1) соответствующее векторное поле Y имеет это свойство;
- 2) существуют нетривиальный элемент $f \in \Gamma$, $\tilde{\gamma}(t)$ (для некоторого $t \in \mathbb{R}$) и точка $y \in \widetilde{M}$ такая, что $f(y) = \tilde{\gamma}(t)(y)$, но $f \neq \tilde{\gamma}(t)$.

В последнем случае орбита поля X , проходящая через точку $x = p(y)$ замкнута. Кроме того, поле X квазирегулярно и эта орбита особая (соответственно, поле X имеет и замкнутые и незамкнутые орбиты) тогда и только тогда, когда изометрия $f^{-1}\tilde{\gamma}(t)$ имеет конечный (соответственно, бесконечный) порядок.

◁ Нужно рассмотреть три возможных случая:

- 1) Для каждого нетривиального элемента $f \in \Gamma$ и каждой точки $y \in \widetilde{M}$, $f(y)$ не лежит на интегральной траектории поля Y , проходящей через точку y .
- 2) Существуют нетривиальные элементы $f \in \Gamma$ и $\tilde{\gamma}(t)$ (для некоторого $t \in \mathbb{R}$) и точка $y \in \widetilde{M}$ такие, что $f(y) = \tilde{\gamma}(t)(y)$; но в этом случае всегда $f = \tilde{\gamma}(t)$.
- 3) Существуют нетривиальные элементы $f \in \Gamma$, $\tilde{\gamma}(t_0)$ (для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$), и некоторая точка $y \in \widetilde{M}$ такие, что $f(y) = \tilde{\gamma}(t_0)(y)$, но $f \neq \tilde{\gamma}(t_0)$.

Теперь мы исследуем каждый из этих случаев отдельно.

1) Так как группа Γ действует свободно на $\widetilde{M}$, то условие 1) эквивалентно условию, что естественное индуцированное действие группы Γ на пространстве орбит $\widetilde{M}/\tilde{\gamma}$, где $\tilde{\gamma} = \{\tilde{\gamma}(t) | t \in \mathbb{R}\}$, также свободно. Нетрудно увидеть, что в этом случае поле X на M квазирегулярно (имеет и замкнутые и незамкнутые траектории) тогда и только тогда, когда поле Y имеет это свойство.

2) Из последнего утверждения теоремы 3.28 следует, что при условии 2) группа $\Delta = \Gamma \cap \tilde{\gamma}$ — дискретная нетривиальная центральная подгруппа и в группе Γ и в группе $\tilde{\gamma}$; кроме того, определены естественные индуцированные изометрические действия факторгрупп Γ/Δ и $\tilde{\gamma}/\Delta \cong S^1$ на римановом фактор-многообразии $P = \widetilde{M}/\Delta$ с фактор-пространствами $P/(\Gamma/\Delta) = M$ и $P/(\tilde{\gamma}/\Delta) = \widetilde{M}/\tilde{\gamma}$.

Ясно, что векторное поле Y индуцирует киллингово векторное поле Z постоянной длины на P , и Z индуцировано некоторым изометрическим гладким действием группы S^1 на P . Поэтому векторное поле Z регулярно или квазирегулярно. Тогда и векторное поле X регулярно или квазирегулярно. Помимо этого, действие группы Γ/Δ на P и $\widetilde{M}/\widetilde{\gamma}$ свободно. Поэтому векторное поле X на M регулярно (квазирегулярно) тогда и только тогда, когда поле Z регулярно (квазирегулярно).

В этом случае остается доказать, что векторное поле Z регулярно тогда и только тогда, когда векторное поле Y индуцируется некоторым свободным действием групп $\mathbb{R}$ или S^1 .

Существует наименьшее число $t_0 > 0$ такое, что $\widetilde{\gamma}(t_0) \in \Delta$ (поэтому $\widetilde{\gamma}(t_0)$ порождает Δ). Нетрудно понять, что t_0 — максимальное значение периода для векторного поля Z .

Предположим, что Z регулярно и Y не порождается никаким свободным действием ни группы $\mathbb{R}$, ни группы S^1 . Тогда существуют некоторые точка $y \in M$ и число $T > 0$ такие, что $\widetilde{\gamma}(T)(y) = y$ и $\widetilde{\gamma}(T) \neq I$, где I — тождественное отображение. Следовательно, $\bar{\gamma}(T)(z) = z$, где $\bar{\gamma}$ — соответствующее индуцированное действие группы $\widetilde{\gamma}$ на P , а $z \in P$ — проекция точки y . Так как векторное поле Z регулярно, то $T = kt_0$ для некоторого натурального числа k . Поэтому

$$I \neq \widetilde{\gamma}(T) = (\widetilde{\gamma}(t_0))^k \in \Delta \subset \Gamma, \quad \widetilde{\gamma}(T)(y) = y.$$

Но этого не может быть при свободном действии группы Γ на $\widetilde{M}$.

Предположим, что Z квазирегулярно. Тогда существуют некоторые число $t_1 > 0$ и точка $z \in P$ такие, что $t_1 = t_0/k$, $k \geq 2$ и $\bar{\gamma}(t_1)(z) = z$. Тогда для некоторой точки $y \in \widetilde{M}$, которая проектируется в точку z , существует наименьшее положительное число вида $t_0/k + nt_0$ (с целым n) такое, что $\widetilde{\gamma}(t_0/k + nt_0)(y) = y$. Если предположить теперь, что Y порождается свободным действием одной из групп $\mathbb{R}$ или S^1 , то ясно, что это должна быть группа S^1 , и периоды всех орбит поля Y будут равны числу $t_0/k + nt_0$. Из определения числа t_0 следует, что это должен быть делитель числа $t_0/k + nt_0$. Противоречие.

3) Предположим, что выполняется условие 3). Очевидно, можно предполагать, что $t_0 > 0$. Группа $\widetilde{\gamma}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, накрывает 1-парамет-

рическую группу изометрий $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, пространства M , которая порождает векторное поле X , т. е.

$$p \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) \circ p, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Кроме того,

$$p \circ f = p. \quad (3.20)$$

Тогда $p(y) = p(f(y)) = p(\tilde{\gamma}(t_0)(y))$. Это значит, что орбита векторного поля X , проходящая через точку $x = p(y) \in M$, замкнута и кривая

$$c = c(t) = \gamma(t)(x), \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (3.21)$$

(замкнутая), вообще говоря, непростая, геодезическая траектория поля X .

Пусть

$$v = \{v_1 = dp(y)(e_1), \dots, v_n = dp(y)(e_n)\}$$

— некоторый ортонормированный базис в касательном евклидовом векторном пространстве M_x , полученный проектированием некоторого ортонормированного базиса $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ в $\tilde{M}_y$. Из соотношений (3.19) и (3.20) следует, что

$$\begin{aligned} d\gamma(t_0)(x) \circ dp(y) &= (d\gamma(t_0) \circ dp)(y) = d(\gamma(t_0) \circ p)(y) = \\ &= d(p \circ \tilde{\gamma}(t_0))(y) = d((p \circ f) \circ (f^{-1} \circ \tilde{\gamma}(t_0)))(y) = \\ &= d(p \circ (f^{-1} \circ \tilde{\gamma}(t_0)))(y) = dp(y) \circ d(f^{-1} \circ \tilde{\gamma}(t_0))(y). \end{aligned}$$

Это значит, что матрица линейной изометрии $d\gamma(t_0)(x)$ пространства M_x в его базисе v совпадает с матрицей B линейной изометрии $d(f^{-1} \circ \tilde{\gamma}(t_0))(y)$ в базисе e пространства $\tilde{M}_y$. Так как $f \neq \tilde{\gamma}(t_0)$, то $A \neq E$, где E — единичная матрица. Ясно, что X квазирегулярно (соответственно, имеет и замкнутые и незамкнутые орбиты) тогда и только тогда, когда A имеет конечный (соответственно, бесконечный) порядок. Очевидно, это эквивалентно тому, что элемент $f^{-1}\tilde{\gamma}(t_0)$ имеет конечный (соответственно, бесконечный) порядок. Теорема доказана. $\triangleright$

Следствие 3.15. Если в условиях предыдущей теоремы все орбиты поля Y замкнуты и существуют нетривиальные элементы $f \in \Gamma$ и $\tilde{\gamma}(t)$ (для некоторого $t \in \mathbb{R}$) и точка $y \in \tilde{M}$ такие, что $f(y) = \tilde{\gamma}(t)(y)$, то элемент $f^{-1}\tilde{\gamma}(t)$ имеет конечный порядок.

Теперь мы рассмотрим еще одну конструкцию неодносвязных римановых многообразий с квазирегулярными киллинговыми векторными полями постоянной длины.

Предположим, что группа S^1 переносов Клиффорда — Вольфа действует (свободно) на каком-нибудь компактном римановом многообразии M . Тогда можно корректно определить риманово многообразие $N = M/S^1$; кроме того, естественная проекция

$$p : M \rightarrow N = M/S^1 \quad (3.22)$$

есть риманова субмерсия. Пусть теперь Γ — конечная свободная группа изометрий на многообразии M . Тогда фактор-пространство $\bar{M} = M/\Gamma$ является римановым многообразием.

Предположим далее, что группы S^1 и Γ коммутируют. Тогда действие группы Γ на M индуцирует изометрическое действие на многообразии N . Более точно, рассмотрим группу $\Gamma_1 = S^1 \cap \Gamma$. Она нормальна в Γ . Поэтому можно определить фактор-группу $\bar{\Gamma} = \Gamma/\Gamma_1$. Естественная проекция (3.22) определяет некоторое изометрическое действие группы $\bar{\Gamma}$ на многообразии N . Кроме того, фактор-пространство $\bar{N} = N/\bar{\Gamma}$ является римановым орбифолдом (см. § 3.7.1).

Предложение 3.9. *Предположим, что при упомянутых выше условиях, орбифолд $\bar{N} = N/\bar{\Gamma}$ не является римановым многообразием. Тогда риманово многообразие $\bar{M}$ допускает некоторое квазирегулярное киллингово векторное поле постоянной длины.*

◁ Факторизация проекции расслоения (3.22) относительно действия группы Γ дает некоторую проекцию

$$p_1 : \bar{M} \rightarrow \bar{N}, \quad (3.23)$$

являющуюся субметрией. Согласно предложению 3.4 и теореме 3.28, единичное векторное поле X , касающееся слоев проекции (3.23), есть киллингово векторное поле. Если, кроме того, орбифолд $\bar{N}$ не является римановым многообразием (т. е. имеет особенности), то среди слоев-окружностей проекции (3.23) есть окружности различной длины (см. § 3.7.1). Это эквивалентно квазирегулярности векторного поля X . ▷

3.8.3. Локально евклидовы пространства. Структура (полных) локально евклидовых пространств, т. е. римановых многообразий нулевой секционной кривизны, хорошо известна. Каждое такое

многообразие является фактор-пространством $\mathbb{R}^n/\Gamma$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ по действию некоторой дискретной свободной группы изометрий Γ [34]. В этом параграфе мы дадим некоторую (в основном хорошо известную) информацию о киллинговых векторных полях на локально евклидовых пространствах, в частности о киллинговых векторных полях постоянной длины. На основе этого мы выведем некоторый критерий существования квазирегулярного (или имеющего и замкнутые и незамкнутые траектории) киллингова векторного поля постоянной длины на локально евклидовом пространстве (теорема 3.30).

Напомним читателю о структуре киллинговых векторных полей на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (мы предполагаем, что оно снабжено стандартной метрикой). Группа всех изометрий $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ евклидова пространства изоморфна полупрямому произведению $O(n) \ltimes V^n$, где $O(n)$ — группа ортогональных преобразований, а V^n — векторная группа параллельных переносов в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, каждая изометрия $g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ действует по правилу: $g(x) = A(x) + a$, где $A \in O(n)$, $a \in \mathbb{R}^n$. Условимся использовать для этого следующее обозначение: $g = (A, a)$. Если есть две изометрии $g = (A, a)$ и $f = (B, b)$ евклидова пространства, то их композиция равна $g \cdot f = (AB, A(b) + a)$.

Так как группа V^n параллельных переносов является нормальной подгруппой в $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$, то можно определить естественный эпиморфизм

$$d: \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{R}^n)/V^n = O(n). \quad (3.24)$$

Легко видно, что произвольное киллингово векторное поле X на $\mathbb{R}^n$ определяется парой (W, w) , где $w \in \mathbb{R}^n$, а W — кососимметричное отображение в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, $X(x) = W(x) + w$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что поле X ограничено на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда отображение W нулевое.

Теперь мы выведем критерий инвариантности киллингова векторного поля X относительно некоторой изометрии $g = (A, a) \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 3.10. *Изометрия $g = (A, a) \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ сохраняет киллингово векторное поле $X = (W, w)$ тогда и только тогда, когда выполняются неравенства $[A, W] = AW - WA = 0$ и $W(a) + w = A(w)$. В частности, если $W = 0$, то эти условия эквивалентны тому, что вектор w неподвижен относительно A .*

◁ Ясно, что условие инвариантности поля X относительно изометрии g эквивалентно равенству

$$dg(X(x)) = X(g(x)),$$

т. е. $[A, W](x) = W(a) - A(w) + w$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Поэтому g сохраняет киллингово поле X тогда и только тогда, когда $[A, W] = 0$ и $W(a) + w = A(w)$. Второе утверждение предложения есть очевидное следствие первого. ▷

Пусть теперь M — локально евклидово пространство, т. е. $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$, где Γ — дискретная свободная группа изометрий евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $d\Gamma$ обозначает образ группы Γ относительно эпиморфизма d (см. (3.24)).

Предложение 3.11. *Локально евклидово пространство M допускает нетривиальное киллингово векторное поле постоянной длины тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $a \in \mathbb{R}^n$, инвариантный относительно всех преобразований группы $d\Gamma$. Кроме того, каждое такое поле на M является проекцией параллельного киллингова поля $X = (\mathbf{0}, a)$ на $\mathbb{R}^n$, где вектор a инвариантен относительно всех преобразований в $d\Gamma$.*

◁ Пусть Y — киллингово векторное поле постоянной длины на M . Оно поднимается до единственного киллингова поля X на $\mathbb{R}^n$, которое также имеет постоянную длину, следовательно, имеет вид $X = (\mathbf{0}, a)$. Далее, согласно предложению 3.10, вектор a должен быть инвариантным относительно преобразований группы $d\Gamma$. И если некоторый ненулевой вектор $a \in \mathbb{R}^n$ инвариантен относительно группы $d\Gamma$, то можно корректно определить проекцию на M киллингова поля $X = (\mathbf{0}, a)$ на $\mathbb{R}^n$, которая очевидно будет киллинговым векторным полем постоянной длины на M . ▷

Предложение 3.12. *Существует трехмерное компактное ориентируемое локально евклидово пространство M^3 , не имеющее нетривиальных киллинговых полей.*

◁ Можно взять пространство типа $\mathcal{G}_6$ из теоремы 3.5.5 в [34] в качестве пространства M^3 . Соответствующая группа $d\Gamma$ этого пространства порождена преобразованиями $d_i \in O(3)$, $1 \leq i \leq 3$; в подходящем ортонормированном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ эти преобразования имеют вид:

$$d_1 = \text{diag}(1, -1, -1), \quad d_2 = \text{diag}(-1, 1, -1), \quad d_3 = \text{diag}(-1, -1, 1).$$

Поэтому не существует ненулевых векторов $a \in \mathbb{R}^3$, инвариантных относительно всех преобразований из группы $d\Gamma$. Согласно предложению 3.11 и следствию 4.2 главы II в книге [41], пространство M^3 не имеет нетривиальных киллинговых векторных полей. $\triangleright$

Предложение 3.13. *Существует трехмерное некомпактное ориентируемое локально евклидово пространство M^3 с единичным киллинговым векторным полем, только одна интегральная траектория которого замкнута.*

$\triangleleft$ Рассмотрим метрику произведения на $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$, где $\mathbb{R}^2$ — евклидова плоскость. Пусть f — вращение плоскости $\mathbb{R}^2$ вокруг начальной точки на угол α , несоизмеримый с π . отождествим теперь каждую точку вида $(x, 0)$ с точкой $(f(x), 1)$. Полученное многообразие является локально евклидовым пространством и принадлежит к классу $\mathcal{J}_1^\alpha$ по классификации Вольфа [34, теорема 3.5.1]. Рассмотрим теперь единичное киллингово векторное поле, ортогональное к слоям $\mathbb{R}^2$. Очевидно, в точности одна интегральная траектория этого поля замкнута. $\triangleright$

Заметим, что среди локально евклидовых пространств только пространства вида $\mathbb{R}^m \times T^l$, где T^l — l -мерный плоский тор, однородны [34, теорема 2.7.1]. Так как все эти многообразия являются симметрическими римановыми пространствами, они не допускают квазирегулярных векторных полей постоянной длины (следствие 3.14). С другой стороны, многие неоднородные локально евклидовы пространства допускают квазирегулярные киллинговы векторные поля постоянной длины. Например, лента Мебиуса и бутылка Клейна допускают такие поля, так же как многие трехмерные локально евклидовы пространства. Так как классификация локально евклидовых пространств в размерностях не меньше 5 не известна, некоторый интерес представляет следующая

Теорема 3.30. *Локально евклидово пространство $M = \mathbb{R}^n / \Gamma$ допускает квазирегулярное (соответственно, имеющее и замкнутые и незамкнутые траектории) киллингово векторное поле постоянной длины тогда и только тогда, когда группа Γ содержит некоторый элемент вида $f = (A, (I - A)b + a)$, где I — тождественное отображение, вектор $a \neq 0$ инвариантен относительно всех преобразований группы $d\Gamma$, вектор b ортогонален вектору a , а $A \neq I$ имеет конечный (соответственно, бесконечный) порядок. Кроме того, соответствующий*

щее киллингово векторное поле есть поле $dp(\mathbf{0}, a)$; его сингулярная (особая) траектория проходит через точку $p(b)$, где $p : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ — каноническая проекция.

◁ Мы будем доказывать оба утверждения одновременно.

Необходимость. Пусть M допускает некоторое квазирегулярное (соответственно, имеющее и замкнутые и незамкнутые траектории) киллингово векторное поле X постоянной длины. Тогда по предложению 3.11, векторное поле X является проекцией некоторого параллельного киллингова поля $Y = (\mathbf{0}, a)$ на $\mathbb{R}^n$, а вектор $a \neq 0$ инвариантен относительно всех преобразований группы $d\Gamma$. Так как поле Y на $\widetilde{M} = \mathbb{R}^n$ индуцируется некоторым свободным изометрическим действием группы $\tilde{\gamma}(t) = (I, ta)$, $t \in \mathbb{R}$, то из доказательства теоремы 3.29 следует, что условие 2) теоремы 3.29 должно выполняться, т. е. существуют нетривиальные элементы $f = (A, c) \in \Gamma$ и $\tilde{\gamma}(t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, а также вектор $b \in \mathbb{R}^n$ такие, что $f(b) = Ab + c = \tilde{\gamma}(t_0)(b) = b + t_0a$, но $f = (A, c) \neq \tilde{\gamma}(t_0) = (I, t_0a)$. Тогда $c = (I - A)b + t_0a$. Если $A = I$, то $c = t_0a$ и $(A, c) = (I, t_0a)$, что невозможно. Поэтому $A \neq I$. Так как $A(a) = a$, можно взять вместо b произвольный вектор вида $b + \tau a$. Поэтому можно предполагать, что вектор b ортогонален вектору a . Все предыдущие соотношения также сохраняются. Наконец, умножая векторное поле X на константу, можно заменить t_0a на a . Если взять канонический базис пространства $\mathbb{R}^n$ в точке $y = b$ как базис e , то матрица B из доказательства теоремы 3.29 будет совпадать с матрицей A^{-1} . Тогда по теореме 3.29 векторное поле X на M квазирегулярно и его орбита, содержащая точку $x = p(b)$, сингулярна (соответственно, поле X имеет и замкнутые и незамкнутые орбиты) тогда и только тогда, когда матрица A имеет конечный (соответственно, бесконечный) порядок.

Достаточность. Предположим, что Γ содержит элемент вида $f = (A, (I - A)b + a)$, где вектор $a \neq 0$ инвариантен относительно всех преобразований группы $d\Gamma$, вектор b ортогонален вектору a и $A \neq E$ имеет конечный (соответственно, бесконечный) порядок.

По предложению 3.11 параллельное нетривиальное векторное поле $Y = (\mathbf{0}, a)$ на $\mathbb{R}^n$ p -связано с некоторым киллинговым полем X постоянной длины $|a| > 0$ на M , т. е. $dp \circ Y = X \circ p$, в то время как соответствующие 1-параметрические группы движений $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и $\tilde{\gamma}(t) = (I, ta)$, $t \in \mathbb{R}$, пространств M и $\mathbb{R}^n$ связаны соотношениями (3.19). Очевидно, $f(b) = A(b) + (I - A)b + a = b + a = \tilde{\gamma}(1)(b) =$

$(I, a)(b)$, но $f \neq \tilde{\gamma}(1)$. Тогда по теореме 3.29 выполняется одно из следующих двух условий:

- 1) поле X квазирегулярно;
- 2) поле X имеет и замкнутые и незамкнутые орбиты.

Так как матрица A имеет тот же смысл, что и в доказательстве необходимости, условие 1) (соответственно, 2)) соблюдается тогда и только тогда, когда A имеет конечный (бесконечный) порядок; соответствующие сингулярные орбиты проходят через точку $x = p(b)$. $\triangleright$

3.8.4. Однородные сферические пространственные формы. Согласно результатам §3.8.2 мы построим здесь примеры компактных однородных римановых многообразий с квазирегулярными киллинговыми полями постоянной длины. Основной результат этого параграфа — следующая

Теорема 3.31. *Однородное риманово многообразие M постоянной положительной секционной кривизны не допускает квазирегулярных киллинговых полей постоянной длины тогда и только тогда, когда M — евклидова сфера или вещественное проективное пространство.*

Не ограничивая общности, можно рассматривать однородные римановы многообразия постоянной секционной кривизны 1 (общий случай сводится к этому пропорциональным изменением метрики). В односвязном случае получаем сферу S^m с римановой метрикой постоянной секционной кривизны 1, которую можно рассматривать как подмногообразие $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|x\| = 1\}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^{m+1}$ с индуцированной римановой метрикой. Группа изометрий сферы S^m совпадает с $O(m+1)$, группой ортогональных преобразований евклидова пространства $\mathbb{R}^{m+1}$. Согласно теореме 7.6.6 из [34] однородное риманово многообразие M размерности $m \geq 2$ имеет постоянную секционную кривизну 1 тогда и только тогда, когда оно является фактор-многообразием $\Gamma \backslash S^m$ сферы S^m с постоянной секционной кривизной 1 по некоторой дискретной группе переносов Клиффорда — Вольфа Γ . Классификацию однородных римановых многообразий постоянной положительной кривизны получил Дж. Вольф [34, теорема 7.6.6].

Теорема 3.32. *Предположим, что $\tilde{M}$ — круглая сфера размерности m . Тогда $M = \Gamma \backslash \tilde{M}$ однородно только в следующих случаях (с точностью до сопряженности в $O(m+1)$):*

- 1) Γ тривиальна;
- 2) $\Gamma = \{\pm I_{(m+1)}\} \subset O(m+1)$;
- 3) $\widetilde{M} \subset \mathbb{C}^n$, где $m+1 = 2n$, $\Gamma = \{\text{diag}(e^{2\pi i(p/q)}, \dots, e^{2\pi i(p/q)})\} \subset U(n)$, $0 \leq p < q$, с целым p для фиксированного натурального числа $q \geq 3$;
- 4) $m+1 = 4l$, $\widetilde{M} \subset \mathbb{H}^l$, где $\Gamma = \{\text{diag}(z, \dots, z)\} \subset Sp(l)$, а z — элементы бинарно диэдральной или бинарно полиэдральной подгруппы мультипликативной группы $Sp(1)$ единичных кватернионов в $\mathbb{H}$, и Γ действует на вектор-строках умножением справа.

Описание бинарно диэдральной и бинарно полиэдральной групп можно найти в [34, § 2.6].

Следующий результат дает точное описание переносов Клиффорда — Вольфа евклидовой сферы S^m .

Лемма 3.8 [34, лемма 7.6.1]. *Линейное преобразование $A \in O(m+1)$ есть перенос Клиффорда — Вольфа сферы S^m тогда и только тогда, когда $A = \pm I$ или существует унимодулярное комплексное число λ такое, что половина собственных значений преобразования A равна λ , а другая половина равна $\bar{\lambda}$.*

Используя теорему 3.29, мы получаем следующий результат.

Предложение 3.14. *Пусть Γ — циклическая группа переносов Клиффорда — Вольфа нечетномерной сферы S^{2n-1} , $n \geq 2$, постоянной секционной кривизны, отличная от групп $\{I\}$ и $\{\pm I\}$. Тогда однородное риманово пространство $M = \Gamma \backslash S^{2n-1}$ допускает некоторое квазирегулярное киллингово поле постоянной длины.*

$\triangleleft$ Пусть $p : S^{2n-1} \rightarrow M = \Gamma \backslash S^{2n-1}$ — каноническая проекция. Согласно теореме 7.6.6 из [34] группа Γ порождается некоторым элементом $f \in O(2n)$, который имеет следующую форму в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства $\mathbb{R}^{2n}$:

$$f = \text{diag}(B, B, \dots, B),$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/q) & \sin(2\pi/q) \\ -\sin(2\pi/q) & \cos(2\pi/q) \end{pmatrix},$$

для некоторого $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$. Рассмотрим теперь 1-параметрическую группу переносов Клиффорда — Вольфа (см. лемму 3.8), которая в

том же базисе задается следующим образом:

$$\mu(t) = \text{diag}(A(t), \dots, A(t), A^{-1}(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & \sin(2\pi t) \\ -\sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix}.$$

Пусть Y — киллингово векторное поле постоянной длины на S^{2n-1} , порождающее поток μ . Заметим, что каждый элемент группы Γ коммутирует с каждым элементом потока μ . Очевидно, $\mu(1/q) \neq f$, но $\mu(1/q)(y) = f(y)$, где $y = (1, 0, \dots, 0) \in S^{2n-1}$. Кроме того, ясно, что элемент $g = f^{-1}\mu(1/q) \in O(2n)$ имеет конечный порядок. Следовательно, по теореме 3.29 существует некоторое квазирегулярное киллингово векторное поле постоянной длины на однородном пространстве $M = \Gamma \backslash S^{2n-1}$. Именно, в качестве такого поля можно взять киллингово поле X на M , p -связанное с полем Y на S^{2n-1} . $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Заметим, что для квазирегулярных киллинговых векторных полей постоянной длины, построенных в доказательстве предложения 3.14, одна компонента связности множества сингулярных точек относительно соответствующего действия группы S^1 имеет коразмерность 2 в многообразии $\Gamma \backslash S^{2n-1}$. В самом деле, такая компонента есть образ множества S относительно канонической проекции $p: S^{2n-1} \rightarrow \Gamma \backslash S^{2n-1}$, где

$$S = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_{2n-1}, y_{2n}) \in S^{2n-1} \mid y_{2n-1} = 0, y_{2n} = 0\}.$$

Нам нужен еще один вспомогательный результат.

Лемма 3.9. В полной группе изометрий евклидовой сферы S^{4n-1} , $n \geq 1$, существует две взаимно коммутирующих подгруппы F_1 и F_2 переносов Клиффорда — Вольфа, обе изоморфных мультипликативной группе всех единичных кватернионов F . Кроме того, пересечением этих двух групп является группа $\{\pm I\}$, порожденная антиподальным отображением сферы.

$\triangleleft$ Рассмотрим n -мерное (левое) векторное пространство $\mathbb{Q}^n$ над телом кватернионов $\mathbb{Q}$. Существует стандартное $\mathbb{Q}$ -эрмитово скалярное произведение в этом пространстве, вещественная часть которого совпадает со стандартным скалярным произведением в $\mathbb{R}^{4n}$ (мы фиксируем вложение $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^4$, определенное формулой $x_1 + ix_2 + jx_3 +$

$kx_4 \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$, и индуцированное вложение $\mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$. В терминах нормы $\|\cdot\|$, порожденной этим скалярным произведением, сфера S^{4n-1} определяется уравнением $\|z\| = 1$, где $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{Q}^n$.

Заметим, что умножение кватерниона $y = y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4$ на кватернион $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ слева соответствует линейному преобразованию в $\mathbb{R}^4$, определенному формулой

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

в то время как умножение на кватернион $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ справа соответствует преобразованию

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_2 & x_1 & x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Заметим, что матрицы в этих преобразованиях имеют в точности два собственных значения $x_1 \pm i\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ с кратностью 2.

Далее, рассмотрим следующее действие группы единичных кватернионов F на S^{4n-1} :

$$f((z_1, z_2, \dots, z_n)) = (fz_1, fz_2, \dots, fz_n). \quad (3.27)$$

Легко видно, что это действие изометрично и мы получаем некоторую подгруппу F_1 полной группы изометрий сферы S^{4n-1} , изоморфную группе единичных кватернионов F .

Рассмотрим теперь следующее действие группы F единичных кватернионов на S^{4n-1} :

$$f((z_1, z_2, \dots, z_n)) = (z_1f, z_2f, \dots, z_nf). \quad (3.28)$$

Это действие также изометрично и мы получаем другую подгруппу F_2 полной группы изометрий сферы S^{4n-1} , изоморфную группе F единичных кватернионов.

Так как умножение на кватернионы слева всегда коммутирует с умножением на кватернионы справа, группа F_1 коммутирует с группой F_2 .

Проверим теперь, что группы F_1 и F_2 состоят из переносов Клиффорда — Вольфа. Каждый элемент группы F_1 (F_2) порождает некоторое ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^{4n}$ с матрицей $\tilde{D} = \text{diag}(D, D, \dots, D)$, где D — матрица преобразования (3.25) (соответственно, (3.26)). Ясно, что матрица $\tilde{D}$ имеет собственные значения $f_1 \pm i\sqrt{f_2^2 + f_3^2 + f_4^2}$, каждое с кратностью $2n$ (мы производим умножение на кватернион $f = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4$). Согласно лемме 3.8, такое преобразование есть перенос Клиффорда — Вольфа на сфере S^{4n-1} . Поэтому группы F_1 и F_2 состоят из переносов Клиффорда — Вольфа.

Заметим, что умножение на кватернион $f = \pm 1$ слева совпадает с умножением на этот кватернион справа. Нетрудно проверить, что пересечение подгрупп F_1 и F_2 есть в точности группа $\{\pm I\} = \mathbb{Z}_2$. В самом деле, это пересечение есть центральная подгруппа в каждой из групп F_i . Но центр группы единичных кватернионов изоморфен группе $\mathbb{Z}_2$. $\triangleright$

Используя лемму выше, легко получить следующее

Предложение 3.15. *На каждом однородном римановом многообразии $\Gamma \backslash S^{4n-1}$, $n \geq 1$, где Γ — дискретная группа переносов Клиффорда — Вольфа на S^{4n-1} , изоморфная бинарно диэдральной группе или бинарно полиэдральной группе, существует квазирегулярное киллингово векторное поле постоянной длины.*

$\triangleleft$ Рассмотрим в полной группе изометрий сферы S^{4n-1} подгруппы переносов Клиффорда — Вольфа F_1 и F_2 из леммы 3.9. Выберем произвольно подгруппу S^1 в F_1 и конечную подгруппу Γ из F_2 , изоморфную бинарно диэдральной или бинарно полиэдральной группе. Рассмотрим теперь конструкцию расслоенного пространства (3.22), где $M = S^{4n-1}$ и группа $S^1 \subset F_1$ выбрана, как указано.

В этом случае мы получаем расслоение Хопфа, где $N = S^1 \backslash S^{4n-1} = \mathbb{C}P^{2n-1}$ — комплексное проективное пространство вещественной размерности $4n - 2$. Ясно, что группа $\Gamma_1 = S^1 \cap \Gamma$ изоморфна $\{\pm I\}$ и группа $\tilde{\Gamma} = \Gamma/\Gamma_1$ — диэдральная или полиэдральная группа. В любом случае порядок группы $\tilde{\Gamma}$ не меньше 3.

Факторизуя по действию группы S^1 , мы получаем, что группа $\tilde{\Gamma}$ действует изометрично на комплексном проективном пространстве $N = \mathbb{C}P^{2n-1}$. Согласно теореме 9.3.1 из [34], существует только две конечных группы, группа $\mathbb{Z}_2$ и тривиальная группа, которые

действуют свободно изометриями на комплексном проективном пространстве. Так как группа $\tilde{\Gamma}$ не является такой, то ее действие на N не свободно. Поэтому фактор-пространство $\tilde{\Gamma} \backslash N$ не является многообразием. Согласно предложению 3.9 на пространстве $\Gamma \backslash S^{4n-1}$ существует квазирегулярное киллингово поле постоянной длины. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.31. По следствию 3.14 на евклидовых сферах и вещественных проективных пространствах не существует квазирегулярных киллинговых полей постоянной длины.

Пусть $M = \Gamma \backslash S^m$ — однородное риманово пространство, полученное факторизацией сферы S^m по конечной группе переносов Клиффорда — Вольфа Γ , отличной от групп $\{I\}$ и $\{\pm I\}$. Тогда согласно теореме 7.6.6 в [34] либо m нечетно и Γ изоморфна $\mathbb{Z}_k$ для некоторого $k \geq 3$; или $m+1 \equiv 0 \pmod{4}$ и Γ изоморфна бинарно диэдральной или бинарно полиэдральной группе. В первом случае существование квазирегулярного киллингова поля постоянной длины следует из предложения 3.14, во втором случае получаем то же самое из предложения 3.15. $\triangleright$

3.9. Открытые вопросы

В свете изложенных в этой главе результатов мы поставим некоторые вопросы, ответы на которые нам не известны.

Вопрос 1. Пусть X — некоторое единичное киллингово векторное поле на компактном односвязном однородном римановом многообразии M (неотрицательной секционной кривизны), все интегральные кривые которого замкнуты. Верно ли, что поле X регулярно?

Отметим, что ответ на этот вопрос положительный для двумерных многообразий (даже без предположений об однородности и неотрицательности секционной кривизны). Согласно следствию 3.14, ответ на этот вопрос также положителен, если M — компактное симметрическое пространство. Напротив, мы построили примеры односвязных многообразий кооднородности 1 (теорема 3.22) и не односвязных однородных многообразий постоянной положительной кривизны (теорема 3.31), допускающих квазирегулярные киллинговы векторные поля постоянной длины.

Вопрос 2. Пусть X — единичное киллингово векторное поле на компактном односвязном однородном римановом многообразии M

такое, что существует некоторая замкнутая интегральная кривая этого поля. Верно ли, что все интегральные кривые этого поля замкнуты?

Как следует из теоремы 3.23, ответ на этот вопрос отрицательный при ослаблении условия однородности (например, если мы заменим его условием кооднородности 1).

Представляется интересным поиск условий на риманово многообразии, позволяющих обратить предложение 3.6. Следующее рассуждение показывает некоторые препятствия для такого обращения. Рассмотрим произвольное риманово многообразие M , допускающее некоторое квазирегулярное киллингово векторное поле постоянной длины. Тогда легко видеть, что на прямом метрическом произведении $\mathbb{R} \times M$ существует киллингово векторное поле постоянной длины такое, что все его интегральные кривые не замкнуты и существует некоторая изометрия в 1-параметрической группе, порожденной этим полем, не являющаяся переносом Клиффорда — Вольфа. Более интересен следующий

Вопрос 3. Пусть X — регулярное киллингово векторное поле постоянной длины на некотором однородном римановом многообразии M . Верно ли, что 1-параметрическая группа, порожденная полем X , состоит из переносов Клиффорда — Вольфа?

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Вопросы 2 и 3 интересны и при дополнительном предположении, что M односвязно.

Заметим, что без предположения однородности ответ на вопрос 3 отрицательный. Следующий пример принадлежит П. Д. Андрееву.

ПРИМЕР 8. Пусть N — некоторое компактное риманово многообразие, допускающее свободное изометрическое действие конечной циклической группы $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 2$, такое, что генератор β этой группы не является переносом Клиффорда — Вольфа на N . Простейший пример такого пространства N — круглый тор (тор, изометричный тору вращения в трехмерном евклидовом пространстве). Рассмотрим теперь прямое метрическое произведение $P = N \times \mathbb{R}$. Оно допускает следующее действие группы $\mathbb{Z}$: генератор группы $\mathbb{Z}$ действует на сомножителе N как генератор β группы $\mathbb{Z}_n$, а на сомножителе $\mathbb{R}$ переносом с достаточно большим сдвигом l . Достаточно взять сдвиг l больше, чем внутренний диаметр риманова многообразия N . Наконец, пусть $M = P/\mathbb{Z}$ — соответствующее фактор-многообразие.

Очевидно, что единичное векторное поле $\tilde{X}$ на P , касательное к сомножителю $\mathbb{R}$, есть киллингово векторное поле, проектирующееся дифференциалом фактор-отображения на единичное регулярное киллингово векторное поле X на M . Пусть $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — 1-параметрическая группа изометрий на M , порожденная полем X . Тогда изометрия $g = \gamma(l)$ не является переносом Клиффорда — Вольфа на M . В самом деле, если g было бы переносом Клиффорда — Вольфа, то вследствие предположений мы получили бы, что β (образующий группы $\mathbb{Z}_n$) является переносом Клиффорда — Вольфа на N , так как расстояние между z и $g(z)$ в M равно расстоянию между y и $\beta(y)$ в N , где y — первая компонента любого прообраза точки z относительно фактор-отображения $P = N \times \mathbb{R} \rightarrow M$.

ГЛАВА 4

ОДНОРОДНЫЕ РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

4.1. Группа движений риманова многообразия

Далее через $\text{Isom}(M, g)$ и $\text{Isom}_0(M, g)$ мы будем обозначать полную группу движений (соответственно, компоненту единицы полной группы движений или, другими словами, полную связную группу движений) риманова многообразия (M, g) . Чрезвычайно важным является следующий результат.

Теорема 4.1 (С. Б. МАЙЕРС, Н. СТИНРОД [181]). Пусть (M, g) — связное гладкое риманово многообразие. Тогда справедливы утверждения:

(a) Группа $\text{Isom}(M, g)$ всех изометрий является группой Ли, гладко действующей на M .

(b) Для любой точки $x \in M$ стационарная подгруппа $I_x(M, g) = \{f \in \text{Isom}(M, g) : f(x) = x\}$ замкнута в $\text{Isom}(M, g)$. Кроме того, представление изотропии $\rho : I_x(M, g) \rightarrow GL(M_x)$, $f \mapsto \rho(f) = T_x f$ задает изоморфизм группы $I_x(M, g)$ на замкнутую подгруппу ортогональной группы $O(M_x, g_x) \subset GL(M_x)$.

В следствии 4.2 из книги [52, гл. VII] доказано, что группа автоморфизмов G -структуры конечного типа (частным случаем которой является риманова структура) является группой Ли. Непосредственно из теоремы Майерса — Стинрода получается

Следствие 4.1. Если (M^n, g) — гладкое риманово многообразие, то

(a) $I_x(M, g)$ — компактная подгруппа группы $\text{Isom}(M, g)$. Более того, если M компактно, то и $\text{Isom}(M, g)$ компактна;

(b) $\dim \text{Isom}(M, g) \leq \frac{n(n+1)}{2} = \dim O(n) + \dim M$, причем в односвязном случае равенство возможно тогда и только тогда, когда (M, g) имеет постоянную секционную кривизну.

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Изометрия f связного риманова многообразия (M, g) однозначно определяется образом $f(x)$ одной точки x и соответствующим касательным отображением $T_x f$, так как $f \circ \text{Exp}_x = \text{Exp}_{f(x)} \circ T_x f$. При этом $T_x f$ является линейной изометрией евклидова пространства (M_x, g_x) на евклидово пространство $(M_{f(x)}, g_{f(x)})$. Отсюда непосредственно следует утверждение (b) теоремы 4.1.

Поскольку изометрия сохраняет метрику g , то она сохраняет связность Леви-Чивита, геодезические, элемент объема, кривизны. Из теорем 3.2 и 4.1 следует

Теорема 4.2. На полном римановом многообразии (M, g) киллингово векторное поле X характеризуется условием $L_X g = 0$; любое поле с таким условием полно, т. е. порождает однопараметрическую группу изометрий, а алгебра Ли киллинговых векторных полей есть алгебра Ли группы Ли $\text{Isom}(M, g)$.

4.2. Однородные пространства

Начнем с определения однородных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 81. Гладкое многообразие M называется *однородным (G) -пространством*, если определено гладкое транзитивное действие $\mu : G \times M \rightarrow M$ (см. определение 54).

Подгруппы изотропии G_x и G_y произвольных точек x, y однородного G -пространства M сопряжены в группе G . Действительно, пусть $a \in G$ такой, что $a(x) = y$. Тогда $G_y = aG_x a^{-1}$. На заданном многообразии M могут гладко и транзитивно действовать различные группы Ли. Примеры таких действий мы еще приведем. Более подробно соответствующий материал излагается в книгах [23, 50, 54], где также приведена обширная библиография.

Условие простой транзитивности (см. определение 54) равносильно тривиальности стационарных групп точек многообразия. Отметим, что при просто транзитивном действии многообразие M диффеоморфно группе G (для построения нужного диффеоморфизма зафиксируем точку $x \in M$ и произвольной точке $y \in M$ поставим в соответствие тот (единственный) элемент группы G , который переводит x в y).

Рассмотрим теперь универсальную модель однородного пространства. Напомним, что вследствие теоремы 2.7 каждая замкнутая подгруппа H группы Ли G является подгруппой Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 82. Пусть G — группа Ли, и H — ее замкнутая подгруппа. Тогда фактор-пространство $G/H = \{aH \mid a \in G\}$ левых смежных классов с естественной топологией и канонической проекцией $\pi : G \rightarrow G/H$, определяемой равенством $\pi(a) = aH$, называется *однородным пространством (группы G по подгруппе H)*.

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Отметим, что аналогично может быть определено однородное пространство правых смежных классов $H \backslash G = \{Ha \mid a \in G\}$.

Однородное пространство G/H обладает единственной аналитической структурой такой, что группа G является группой Ли преобразований многообразия G/H (см. подробности [58, теорема 4.2]). Соответствующее действие группы Ли G на G/H порождается левыми сдвигами:

$$(a, bH) \rightarrow (ab)H = a(bH) =: l_a(bH), \quad a, b \in G. \quad (4.1)$$

Стабилизатор этого действия в точке $H \in G/H$ — группа H , линейная группа изотропии — $T(H) = \{Tl_a, a \in H\}$, а ядро неэффективности — нормальная подгруппа $G_{G/H} = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ группы G . Группа G действует на G/H (почти) эффективно тогда и только тогда, когда H не содержит (недискретных) нетривиальных нормальных подгрупп группы G .

Отметим, что правые сдвиги в группе G в общем случае не порождают естественного действия на однородном пространстве G/H . Тем не менее, для однородного пространства G/H можно рассмотреть естественное действие (справа) группы $N_G(H) = \{n \in G \mid nHn^{-1} = H\}$ — нормализатора H в группе G . Нормализатор $N_G(H)$ действует на однородном пространстве G/H G -эквивариантными диффеоморфизмами

$$(bH, n) \rightarrow bnH = bHn =: R_n(bH), \quad (4.2)$$

$$b \in G, \quad n \in N_G(H).$$

Более того, каждый G -эквивариантный диффеоморфизм G/H имеет такой вид [23]. Также мы имеем естественное действие

$$(aH, nH) \rightarrow aHn = anH, \quad a \in G, \quad n \in N_G(H),$$

группы $N_G(H)/H$ на G/H .

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Отметим, что для тривиальной группы изотропии $H = \{e\}$ нормализатор $N_G(H)$ совпадает с G . Это означает ровно то, что на группе Ли $G = G/H$ корректно определено действие посредством правых сдвигов на любой элемент группы.

ПРИМЕР 9. Рассмотрим $\mathbb{CP}^n = SU(n+1)/S(U(1)U(n))$. Тогда группа $SU(n+1)/\mathbb{Z}_{n+1}$, где $\mathbb{Z}_{n+1}$ — центр группы $SU(n+1)$, действует на $\mathbb{CP}^n$ эффективно, в то время как группа $SU(n+1)$ действует на $\mathbb{CP}^n$ лишь почти эффективно.

Понятно, что в принципе достаточно ограничиться исследованием лишь эффективных пространств, но в ряде случаев технически удобно (см. пример выше) работать с пространствами, не являющимися эффективными (например, с почти эффективными).

ПРИМЕР 10. В работах Д. Монтгомери и Х. Самельсона [178], А. Бореля [101, 102] классифицированы все транзитивные и эффективные действия компактных (связных) групп Ли на сферах (см. также [22, гл. 7], [50] или [240]). А именно, сферы могут быть реализованы как однородные пространства G/H одним из следующих способов:

- 1) $S^{n-1} = SO(n)/SO(n-1)$;
- 2) $S^{2n-1} = SU(n)/SU(n-1)$;
- 3) $S^{2n-1} = U(n)/U(n-1)$;
- 4) $S^{4n-1} = Sp(n)/Sp(n-1)$;
- 5) $S^{4n-1} = Sp(n)Sp(1)/Sp(n-1)Sp(1)$;
- 6) $S^{4n-1} = Sp(n)U(1)/Sp(n-1)U(1)$;
- 7) $S^{15} = Spin(9)/Spin(7)$;
- 8) $S^7 = Spin(7)/G_2$;
- 9) $S^6 = G_2/SU(3)$.

ПРИМЕР 11. Другим важным примером однородных пространств являются проективные пространства:

$$\begin{aligned}\mathbb{RP}^n &= SO(n+1)/O(n), & \mathbb{CP}^n &= SU(n+1)/S(U(1)U(n)), \\ \mathbb{HP}^n &= Sp(n+1)/Sp(n)Sp(1), & \mathbb{CaP}^2 &= F_4/Spin(9).\end{aligned}$$

Все группы, транзитивно действующие на сферах S^n , также транзитивно действуют на $\mathbb{RP}^n$, кроме того, $Sp(n)$ действует транзитивно на $\mathbb{CP}^{2n-1}$ (при отождествлении $\mathbb{H}^n$ с $\mathbb{C}^{2n}$) со стационарной подгруппой $Sp(n-1)U(1)$. Этим исчерпывается весь список компактных

связных групп Ли (с точностью до локальной изоморфности), действующих транзитивно и почти эффективно на проективных пространствах (подробнее см. [50]).

ПРИМЕР 12. Единственной компактной связной группой Ли, действующей транзитивно и эффективно на торе T^n , является T^n [177].

ПРИМЕР 13. Примерами простейших некомпактных однородных пространств являются следующие:

1) гиперболическое пространство $H^n = SO_0(n, 1)/SO(n)$, где $SO_0(n, 1)$ — связная компонента единицы группы $O(n, 1)$, сохраняющей квадратичную форму сигнатуры $(n, 1)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$;

2) комплексный, кватернионный, октавный аналоги гиперболического пространства

$$\mathbb{CH}^n = SU(n, 1)/S(U(n)U(1)),$$

$$\mathbb{HH}^n = Sp(n, 1)/Sp(n)Sp(1),$$

$$\mathbb{CaH}^2 = F_4^{-20}/Spin(9).$$

Далее через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ мы обозначаем алгебры Ли (точнее, LG и LH) группы G и ее подгруппы H соответственно. Пусть $o = eH = \pi(e)$, где e — единица группы Ли G .

Далее мы выделим специальный класс однородных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 83. Однородное пространство G/H называется *редуктивным*, если в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует подпространство $\mathfrak{p}$ такое, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}, \quad \text{Ad}(H)(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}. \quad (4.3)$$

При этом разложение (4.3) также называется *редуктивным*.

Теорема 4.3. Однородное пространство G/H редуктивно при выполнении любого из следующих условий:

1) На алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G существует $\text{Ad}_G(H)$ -инвариантная билинейная форма Q , сужение которой на алгебру Ли $\mathfrak{h}$ невырождено.

2) Группа H компактна.

3) Замыкание $\overline{\text{Ad}(H)}$ группы $\text{Ad}(H) = \text{Ad}_G(H)$ в $GL(\mathfrak{g})$ компактно.

◁ При условии 1) в качестве $\mathfrak{p}$ можно взять Q -ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Легко видно, что вследствие невырожденности

сужения формы Q на $\mathfrak{h}$ получается разложение в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Тогда группа $\text{Ad}_G(H)$ сохраняет форму Q и алгебру $\mathfrak{h}$, а следовательно, и подпространство $\mathfrak{p}$, т. е. пространство G/H редутивно.

Ясно, что из условия 2) следует условие 3). Поэтому осталось доказать теорему при условии 3). Рассмотрим на $\mathfrak{g}$ скалярное произведение Q , построенное из произвольного скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ с помощью процедуры усреднения по компактной группе $\overline{\text{Ad}(H)}$. Относительно Q все операторы $\text{Ad}(a)$, $a \in H$, являются изометриями. Следовательно, выполнено условие 1) и по доказанному G/H редутивно. $\triangleright$

ПРИМЕР 14. Пусть G — полупростая (не обязательно компактная) группа Ли, а H — ее компактная подгруппа. Тогда для однородного пространства G/H можно рассмотреть редутивное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, ортогональное относительно формы Киллинга $B_{\mathfrak{g}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Корректность задания такого разложения получается из следствия 2.10 и пункта 1) теоремы 4.3 (в данном случае можно взять $Q = B_{\mathfrak{g}}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Вследствие теоремы 2 из статьи [204] утверждение теоремы 4.3 верно, если G — связная простая группа Ли, а H — ее замкнутая связная полупростая подгруппа. В статье [128] классифицированы все нередутивные однородные псевдоримановы пространства размерности 4; такие пространства существуют. Из леммы 4.2 той же статьи следует существование нередутивных пространств G/H с полупростой группой Ли G .

Пространство $\mathfrak{p}$ из определения 83 естественным образом отождествляется с касательным пространством к G/H в точке $o = eH \in G/H$ посредством отображения $T_e\pi$, где $\pi : G \rightarrow G/H$ — каноническая проекция. При этом ограничение действия группы $\text{Ad}(H) = \text{Ad}_G(H)$ на $\mathfrak{p}$ совпадает с действием линейной группы изотропии.

4.3. О топологии однородных пространств

Принципиальна неотрицательность эйлеровой характеристики $\chi(M)$ для (компактных) однородных пространств $M = G/H$.

Теорема 4.4 (Хопф — Самельсон [50, 142]). Пусть $M = G/H$ — однородное пространство, где G , H — связные компактные группы Ли. Тогда $\chi(M) \geq 0$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\chi(M) > 0$;
- (ii) $\text{rk}(G) = \text{rk}(H)$.

Если $\chi(M) > 0$, то $\chi(M) = \frac{|W_G|}{|W_H|}$, где $|W_G|$ (соответственно, $|W_H|$) есть порядок группы Вейля W_G (соответственно, W_H) группы Ли G (соответственно, H).

Докажем эту теорему, следуя статье [142].

Лемма 4.1. Пусть задано гладкое действие $G \times M \rightarrow M$ компактной связной группы Ли G на гладком связном компактном многообразии M^n , $g \in G$ и множество F всех неподвижных точек отображения g в M состоит из изолированных точек. Тогда множество F конечно и $\chi(M) = |F|$, где $|F|$ — мощность множества F . Если $|F| > 0$, то n четно.

◁ Конечность множества F очевидна. Последнее утверждение следует из того, что для каждой точки $x \in F$ $T_x g$ должно быть сохраняющим ориентацию преобразованием пространства M_x , не имеющим неподвижных ненулевых векторов; вследствие компактности группы G это может быть только когда n четно [35].

В [74, с. 534, 542] доказано, что если f — гомотопное тождественному непрерывное отображение n -мерного связного компактного полиэдра P в себя, имеющее только конечное множество F неподвижных точек в P , то сумма индексов неподвижных точек равна $(-1)^n \chi(P)$. Ясно, что условия этого утверждения выполнены для $P = M^n$ и $f = g$. Кроме того, в этом случае индекс каждой точки $x \in F$ равен $(-1)^n$. Отсюда следует равенство $\chi(M) = |F|$. ▷

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.4. Предположим, что выполняется неравенство $\text{rk}(G) > \text{rk}(H)$. Тогда существует элемент $U \in \mathfrak{g}$ такой, что размерность замыкания в G однопараметрической подгруппы $\exp(tU)$ совпадает с $\text{rk}(G)$, что, в свою очередь, больше, чем $\text{rk}(H)$. Мы утверждаем, что $\text{Ad}(s)(U) \notin \mathfrak{h}$ для всех $s \in G$. Действительно, предположим, что $V := \text{Ad}(s)(U) \in \mathfrak{h}$. Так как $\text{Ad}(s)$ — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то размерность замыкания в G однопараметрической подгруппы $\exp(tV)$ также равна $\text{rk}(G)$. С другой стороны, это замыкание есть тор в H , потому что H — компактная подгруппа Ли группы Ли G . Это противоречит неравенству $\text{rk}(H) < \text{rk}(G)$. Из сопряженности стабилизаторов точек в G/H следует, что U не содержится в алгебре Ли группы изотропии каждой из точек в G/H . При этом на основании теоремы 4.8 пространство G/H допускает неко-

тору G -инвариантную риманову метрику. Тогда вследствие теоремы 3.12 и компактности G/H существует число $t \in \mathbb{R}$ такое, что $g = \exp(tU)$ не имеет неподвижных точек в G/H . На основании леммы 4.1 $\chi(M) = 0$.

Предположим, что $\text{rk}(G) = \text{rk}(H)$. Вследствие определения 69 и теоремы 2.23 существует максимальный тор $T \subset G$, содержащийся в H . Пусть $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$ — касательная к тору T подалгебра Картана и $U \in \mathfrak{t}$ — элемент со всюду плотной в T однопараметрической подгруппой $\exp(tU)$, $t \in \mathbb{R}$. Выясним, когда точка gH неподвижна относительно действия этой подгруппы. Пусть $\mathfrak{h}_{gH} = \text{Ad}(g)(\mathfrak{h})$ — алгебра Ли группы изотропии в точке gH . Очевидно, $U \in \mathfrak{h}_{gH} \Leftrightarrow \text{Ad}(g^{-1})(U) \in \mathfrak{h}$. Тогда вследствие включения $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$ и теоремы 2.23 существует элемент $h \in H$ такой, что $\text{Ad}(hg^{-1})(U) \in \mathfrak{t}$ или

$$\begin{aligned} hg^{-1} \in N_G(T) &\Leftrightarrow gh^{-1} \in N_G(T) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g \in N_G(T)H \Leftrightarrow g \in N_G(T)N_H(T)H. \end{aligned}$$

Ясно, что верно и обратное: из последнего включения следует, что $U \in \mathfrak{h}_{gH}$. Следовательно, число таких точек gH конечно и равно

$$|N_G(T)/N_H(T)| = |(N_G(T)/T)/(N_H(T)/T)| = |W_G/W_H| = \frac{|W_G|}{|W_H|}.$$

Вследствие теоремы 3.12 и компактности G/H существует число $t \in \mathbb{R}$ такое, что $g = \exp(tU)$ не имеет других неподвижных точек в G/H . На основании леммы 4.1, $\chi(M) = \frac{|W_G|}{|W_H|}$. $\triangleright$

4.4. Основные свойства однородных римановых многообразий

В этом разделе мы приведем определения и обсудим основные свойства однородных римановых многообразий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 84. Риманово многообразие (M, g) называется *однородным римановым многообразием* (кратко ОРМ), если группа $\text{Isom}(M, g)$ его изометрий транзитивна на M (т. е. для любых точек $x, y \in M$ существует изометрия, переводящая x в y).

Нетрудно понять, что на заданном однородном римановом многообразии может транзитивно действовать и некоторая собственная

подгруппа группы $\text{Isom}(M, g)$. Например, нетрудно доказать, что $\text{Isom}_0(M, g)$ действует транзитивно на любом связном ОРМ (M, g) . Другой простой пример доставляет евклидово пространство, на котором транзитивно действует не только его полная группа движений, но и ее собственная подгруппа параллельных переносов.

Для большей детализации полезно

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 85. Риманово многообразие (M, g) называется *G-однородным* (или однородным относительно действия группы Ли G), если G есть (возможно, виртуальная) подгруппа Ли в $\text{Isom}(M, g)$, действующая на M транзитивно.

Иногда в этом определении в качестве G рассматривают лишь собственно подгруппы Ли в группе $\text{Isom}(M, g)$, исключая виртуальные подгруппы Ли (см., например, [22]). Это требование несущественно ограничивает общность. Действительно, если G есть транзитивная и эффективная группа преобразований многообразия M , сохраняющая риманову метрику g , то ее замыкание $\overline{G}$ в группе $\text{Isom}(M, g)$ транзитивно действует на M , являясь при этом подгруппой Ли в группе Ли $\text{Isom}(M, g)$. Более детальное обсуждение можно найти в [115].

Если G — замкнутая подгруппа группы $\text{Isom}(M, g)$, то на основании следствия 4.1 группа изотропии H произвольной точки $x \in M$ является компактной. Если к тому же G транзитивна на M , то компактность M равносильна компактности G . Линейное представление изотропии $\chi(f) = T_x f$ стационарной группы H в $GL(M_x)$ (см. теорему 4.1) является точным (т. е. инъективным).

Важным примером однородных пространств являются римановы симметрические пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 86. Риманово многообразие (M, g) называется *симметрическим*, или *римановым симметрическим* пространством, если для любой точки $x \in M$ существует изометрия s_x многообразия (M, g) такая, что $s_x(x) = x$, $T_x(s_x) = -\text{Id}_{T_x M}$. Изометрия s_x (определенная однозначно, если M связно) называется (*центральной*) *симметрией* с центром в точке x .

Теорема 4.5. Риманово симметрическое пространство (M, g) однородно.

◁ Во-первых, (M, g) полно, поскольку любой отрезок геодезической можно продолжить с помощью симметрий с центром в его

концах. Далее, для любых точек $x, y \in M$ симметрия относительно середины любого отрезка геодезической, соединяющего x и y (существующего в силу полноты), переставляет x и y . Таким образом, группа изометрий действует транзитивно. $\triangleright$

Классификация римановых симметрических пространств впервые получена Э. Картаном [40] и содержится во многих книгах (см., например, [22, 34, 58]). Много полезной информации о симметрических пространствах приведено в разделе 3.8.1.

Из локальной компактности многообразия легко следует

Теорема 4.6. *Однородное риманово многообразие полно.*

4.5. Инфинитезимальное строение однородного риманова пространства

Пусть G — (возможно, виртуальная) подгруппа Ли группы $\text{Isom}(M, g)$, транзитивная на однородном римановом многообразии (M, g) , и пусть $H = H_x$ — ее группа изотропии в точке $x \in M$. В этом разделе мы опишем структуру множества G -инвариантных римановых метрик на однородном пространстве G/H . Через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ обозначаются алгебра Ли LG группы G и алгебра Ли LH группы H соответственно ($\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ в силу включения $H \subset G$). При этом, как уже отмечалось, M диффеоморфно однородному пространству G/H .

Для любого $X \in \mathfrak{g}$ обозначим через $\exp(tX)$ однопараметрическую подгруппу группы G , порожденную X . Действие $\exp(tX)$ на M позволяет рассмотреть ее как однопараметрическую группу $\varphi(t) = \exp(tX)$ диффеоморфизмов многообразия M , где $\varphi(t)(y) = \exp(tX)y$. Отождествим $X \in \mathfrak{g}$ с векторным полем на M , порожденным $\varphi(t)$. Тогда $\mathfrak{g}$ отождествляется с множеством киллинговых векторных полей на (M, g) , которые порождаются однопараметрическими подгруппами, лежащими в G . Подалгебра Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ подгруппы H отождествляется с подалгеброй киллинговых векторных полей из $\mathfrak{g}$, которые обращаются в нуль в точке $x \in M$.

Предложение 4.1. *Каждое G -однородное риманово пространство $(M = G/H, g)$ редуکتивно. Кроме того, группа Ли G допускает левоинвариантную и H -правоинвариантную риманову метрику g_0 такую, что естественная проекция $\pi : (G, g_0) \rightarrow (G/H, g)$ является римановой сублимерсией с вполне геодезическими слоями.*

◁ Пусть $G^* = \text{Isom}(M, g)$, H^* — подгруппа изотропии точки $o = eH \in M$ в группе G^* . Тогда H^* компактна по теореме 4.1. Следовательно, группа $\text{Ad}_{G^*}(H^*)$ компактна в $GL(\mathfrak{g}^*)$ ($\mathfrak{g}^* = LG^*$), а ее подгруппа $\text{Ad}_{G^*}(H)$ предкомпактна в $GL(\mathfrak{g}^*)$. Поскольку же $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^*$ и $G \subset G^*$, то и $\text{Ad}(H) = \text{Ad}_G(H)$ предкомпактна в $GL(\mathfrak{g})$, т. е. ее замыкание $\overline{\text{Ad}(H)}$ в $GL(\mathfrak{g})$ является компактным. Теперь достаточно применить пункт 3) теоремы 4.3. Согласно доказательству этой теоремы, в качестве $\text{Ad}(H)$ -инвариантного дополнения $\mathfrak{p}$ можно взять Q -ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ относительно некоторого $\text{Ad}(H)$ -инвариантного скалярного произведения Q .

Далее рассмотрим отождествление $\mathfrak{p}$ с касательным пространством M_x , сопоставляя элементу $X \in \mathfrak{p}$ вектор $T\pi(X)$, где $\pi : G \rightarrow G/H = M$ — каноническая проекция. Тогда представление изотропии χ группы H в M_x отождествляется с ограничением присоединенного представления Ad_G подгруппы H на $\mathfrak{p}$. Пусть теперь $(\cdot, \cdot) = g_x(\cdot, \cdot)$ — $\text{Ad}(H)$ -инвариантное скалярное произведение на пространстве $\mathfrak{p}$. Его можно распространить до $\text{Ad}(H)$ -инвариантного скалярного произведения на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, полагая $(\mathfrak{p}, \mathfrak{h}) = 0$ и $(\cdot, \cdot)|_{\mathfrak{h}} = Q|_{\mathfrak{h}}$. Это скалярное произведение порождает левоинвариантную и H -правоинвариантную риманову метрику g_0 на группе Ли G . Нетрудно убедиться в том, что при этом естественная проекция $\pi : (G, g_0) \rightarrow (G/H, g)$ действительно является римановой субмерсией с вполне геодезическими слоями. ▷

Используя символ $\mathfrak{p}$ для $\text{Ad}(H)$ -инвариантного дополнения к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ (которое отождествляется с касательным пространством M_x как в доказательстве предыдущего предложения), через $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}}$ и $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}}$ будем далее обозначать соответственно $\mathfrak{p}$ -компоненту и $\mathfrak{h}$ -компоненту скобки Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Заметим, что $\text{Ad}(H)$ -инвариантность скалярного произведения $(\cdot, \cdot) : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathbb{R}$ влечет его $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -инвариантность, что означает выполнение равенства

$$([Z, X], Y) + (X, [Z, Y]) = 0$$

для любых $Z \in \mathfrak{h}$, $X, Y \in \mathfrak{p}$. Последнее условие можно интерпретировать как кососимметричность операторов $\text{ad}_Z : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ относительно $(\cdot, \cdot)$. Отметим также, что в случае связной группы H условия $\text{Ad}(H)$ -инвариантности и $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -инвариантности, а также $\text{Ad}(H)$ -неприводимости и $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -неприводимости модулей эквивалентны.

4.6. Особые инвариантные метрики

Теперь опишем некоторые специальные классы инвариантных метрик, вычисление кривизн на которых существенно упрощается. Нам будет удобно использовать отображение $U : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$, определяемое с помощью равенства

$$2(U(X, Y), Z) = ([Z, X]_{\mathfrak{p}}, Y) + (X, [Z, Y]_{\mathfrak{p}}) \quad (4.4)$$

для всех $Z \in \mathfrak{p}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 87. Пусть $(M = G/H, g)$ — однородное риманово многообразие, $\mathfrak{p}$ — некоторое $\text{Ad}(H)$ -инвариантное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Метрика g называется *естественно редуктивной* относительно $\mathfrak{p}$, если $U \equiv 0$.

Заметим, что естественно редуктивными являются большинство примеров инвариантных эйнштейновых метрик на компактных однородных пространствах. Удобная характеристика естественно редуктивных метрик была получена Б. Костантом в [156] (см. также [113]).

Теорема 4.7 (Б. КОСТАНТ [156]). *Инвариантная риманова метрика g на однородном пространстве $M = G/H$ естественно редуктивна относительно $\mathfrak{p}$ тогда и только тогда, когда на идеале $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует $\text{Ad}(G_1)$ -инвариантная невырожденная квадратичная форма Q , где G_1 — (транзитивная на M) подгруппа группы G , соответствующая подалгебре $\mathfrak{g}_1$, такая, что риманова метрика g порождается сужением формы Q на $\mathfrak{p}$.*

Отметим, что для исследования большинства геометрических задач можно заранее предполагать, что $G_1 = G$.

Приведем еще два определения более узких классов инвариантных метрик.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 88. G -однородное риманово многообразие (M, g) называется *нормальным*, если в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует такое $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение Q , что $\mathfrak{p}$ есть Q -ортogonalное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ и метрика g определяется ограничением Q на $\mathfrak{p}$.

Нетрудно видеть, что нормальные однородные пространства естественно редуктивны. В то же время важно отметить, что естественно редуктивная метрика не обязательно является нормальной

однородной. Исключения составляют лишь компактные пространства положительной эйлеровой характеристики (см. теорему 4.15).

Частным случаем нормальных однородных римановых многообразий являются киллинговы или стандартные однородные римановы многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 89. Нормальное G -однородное риманово многообразие (M, g) называется *стандартным* или *киллинговым*, если в определении 88 группа G полупроста, а $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение Q является взятой со знаком минус формой Киллинга алгебры Ли LG (это условие влечет компактность группы G).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 90. Редуктивное однородное пространство G/H (с $\text{Ad}(H)$ -инвариантным разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$) называется *изотропно неприводимым* (*строго изотропно неприводимым*), если линейная группа изотропии $\text{Ad}_G(H)$ (соответственно, подгруппа линейной группы изотропии $\text{Ad}_G(H_0)$, где H_0 — компонента связности единицы группы H) действует неприводимо на $\mathfrak{p}$. G -однородное риманово многообразие $(G/H, g)$ называется *изотропно неприводимым* (*строго изотропно неприводимым*), если таковым является однородное (заведомо редуктивное по предложению 4.1) пространство G/H .

Отметим, что на каждом изотропно неприводимом пространстве инвариантные римановы метрики образуют в точности однопараметрическое семейство попарно пропорциональных метрик. Для компактного пространства G/H группа Ли G полупроста и каждая такая метрика пропорциональна стандартной, в частности, является нормальной. Примерами строго изотропно неприводимых римановых многообразий являются неприводимые симметрические пространства. Нетрудно показать (см. [22, предложение 4.76]), что симметрическими примерами исчерпываются все некомпактные изотропно неприводимые пространства. Компактные строго изотропно неприводимые пространства классифицированы независимо О. В. Мантуровым [46] и Дж. Вольфом [236] (с некоторыми упущениями в их первоначальных списках, но объединение списков дает полную классификацию). Позже полная классификация была другим методом получена М. Кремером в [163] (см. также [22, гл. 7]). Классификацию всех односвязных изотропно неприводимых пространств получили М. Ван и В. Циллер [223].

4.7. Структура множества инвариантных метрик

В этом разделе мы опишем структуру G -инвариантных римановых метрик на однородном пространстве G/H с компактной группой H (информацию о более общих пространствах римановых метрик можно найти в обзоре [51]). Напомним, что такое пространство редуктивно, т. е. алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G допускает $\text{Ad}(H)$ -инвариантное редуктивное разложение (4.3)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}, \quad \text{Ad}(H)(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}.$$

Более того, для многих утверждений в этом разделе от однородного пространства G/H нам потребуется лишь наличие такого разложения, поэтому условие компактности группы H в ряде случаев может быть ослаблено.

Если $o = eH \in G/H$, то пространство $\mathfrak{p}$ отождествляется с касательным пространством к G/H в точке o посредством отображения $X \rightarrow \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX)(o)$.

Понятно, что любое $\text{Ad}(H)$ -инвариантное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{p}$ разносится дифференциалами левых сдвигов по всему пространству G/H , порождая при этом G -инвариантную риманову метрику g на G/H . Действительно, полагаем $g_o = (\cdot, \cdot)$. Пусть теперь $x \in G/H$, тогда существует $a \in G$ такой, что $aH = x$. Рассмотрим левый сдвиг $l_a : G/H \rightarrow G/H$, $l_a(yH) = ayH$, и его дифференциал в точке o : $dl_a(o) : (G/H)_o \rightarrow (G/H)_x$, и положим $g_x(dl_a \cdot, dl_a \cdot) = g_o(\cdot, \cdot)$. Из $\text{Ad}(H)$ -инвариантности скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ следует как корректность этого определения, так и G -инвариантность получившейся римановой метрики. Обратно, любая G -инвариантная риманова метрика g на пространстве G/H порождает $\text{Ad}(H)$ -инвариантное скалярное произведение $(\cdot, \cdot) = g_o(\cdot, \cdot)$ при отождествлении $(G/H)_o$ с $\mathfrak{p}$. Таким образом, получается следующая

Теорема 4.8. Множество G -инвариантных римановых метрик на G/H находится в (описанном выше) естественном взаимно-однозначном соответствии с множеством $\text{Ad}(H)$ -инвариантных скалярных произведений на $\mathfrak{p}$.

Благодаря этой теореме мы можем отождествлять (и часто будем это делать) множество G -инвариантных римановых метрик на однородном пространстве G/H с множеством $\text{Ad}(H)$ -инвариантных

скалярных произведений на некотором $\text{Ad}(H)$ -инвариантном дополнении $\mathfrak{p}$ к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Исследуем теперь более подробно строение произвольного $\text{Ad}(H)$ -инвариантного скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{p}$. Для этого мы воспользуемся тем фактом, что представление $\text{Ad}(H)$ на $\mathfrak{p}$ является вполне приводимым. Действительно, если $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ — произвольное $\text{Ad}(H)$ -инвариантное подпространство, то его $(\cdot, \cdot)$ -ортогональное дополнение в $\mathfrak{p}$ также является $\text{Ad}(H)$ -инвариантным.

Рассмотрим теперь некоторое $(\cdot, \cdot)$ -ортогональное $\text{Ad}(H)$ -инвариантное разложение (декомпозицию)

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_r \quad (4.5)$$

такое, что $\text{Ad}(H)|_{\mathfrak{p}_0} = \text{Id}_{\mathfrak{p}_0}$ и $\text{Ad}(H)|_{\mathfrak{p}_i}$ неприводимо для $1 \leq i \leq r$. Такое разложение не является единственным в случае, когда представления $\text{Ad}(H)$ на некоторых $\text{Ad}(H)$ -инвариантных модулях $\mathfrak{p}_i$ и $\mathfrak{p}_j$ ($1 \leq i < j \leq r$) эквивалентны. В то же время подпространство $\mathfrak{p}_0$ и набор чисел $d_i = \dim(\mathfrak{p}_i)$ не зависят от выбора разложения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 91. Два неприводимых $\text{Ad}(H)$ -модуля ($\text{ad}(\mathfrak{h})$ -модуля) $\mathfrak{p}_i$ и $\mathfrak{p}_j$ будем называть $\text{Ad}(H)$ -изоморфными ($\text{ad}(\mathfrak{h})$ -изоморфными), если соответствующие представления на них эквивалентны, т. е. существует $\text{Ad}(H)$ -эквивариантный ($\text{ad}(\mathfrak{h})$ -эквивариантный) изоморфизм $\mathfrak{p}_i$ на $\mathfrak{p}_j$.

Можно описать также параметризацию инвариантных метрик $\text{Ad}(H)$ -эквивариантными симметричными операторами на $\mathfrak{p}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 92. Пусть K — группа Ли, а $\mathfrak{k}$ — ее алгебра Ли. Рассмотрим некоторое представление $\Pi : K \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{p})$, и индуцированное им представление алгебры Ли $\pi : \mathfrak{k} \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{p})$. Линейный оператор $L : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ называется $\Pi(K)$ -эквивариантным ($\pi(\mathfrak{k})$ -эквивариантным), если он перестановочен с любым элементом из $\Pi(K)$ ($\pi(\mathfrak{k})$).

Обозначим через M_G множество $\text{Ad}(H)$ -инвариантных скалярных произведений на $\mathfrak{p}$. Это множество может быть просто описано в терминах фиксированного разложения. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — некоторое выделенное $\text{Ad}(H)$ -инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{p}$.

Рассмотрим произвольную $\text{Ad}(H)$ -инвариантную симметричную билинейную форму $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{p}$. Тогда, как нетрудно понять, существует $\text{Ad}(H)$ -эквивариантный $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -самосопряженный оператор $A : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ такой, что $(\cdot, \cdot) = \langle A \cdot, \cdot \rangle$.

Если рассматриваемая форма $(\cdot, \cdot)$ положительно определена, то A также положительно определен. В этом случае оператор A называют *метрическим эндоморфизмом* (для скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Таким образом, можно установить взаимно-однозначное соответствие между множеством инвариантных римановых метрик на однородном пространстве G/H и множеством $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -самосопряженных положительно определенных $\text{Ad}(H)$ -эквивариантных операторов на $\mathfrak{p}$. Последнее множество является выпуклым в пространстве всех линейных операторов, таким образом, оно (а, значит, и множество M_G) допускает C^∞ -гладкую структуру. Более того, нетрудно понять, что это множество диффеоморфно пространству положительно определенных элементов в

$$\mathbb{R}^r \times \left(\prod_{1 \leq i < j \leq r} \text{Hom}_{\text{Ad}(H)}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) \right) \times S^2(\mathfrak{p}_0),$$

где через $\text{Hom}_{\text{Ad}(H)}(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)$ обозначено множество $\text{Ad}(H)$ -эквивариантных гомоморфизмов из $\mathfrak{p}_i$ в $\mathfrak{p}_j$ с естественной дифференциальной структурой, а через $S^2(\mathfrak{p}_0)$ — множество билинейных форм на подпространстве $\mathfrak{p}_0$ [222]. Таким образом, множество M_G может быть снабжено структурой гладкого (класса C^∞) многообразия.

ПРИМЕР 15. В примере 10 приведена классификация Монтгомери — Самельсона — Бореля компактных связных групп Ли, транзитивно и эффективно действующие на сферах. В таблице 3 мы дополним эту классификацию информацией о $\dim M_G$ — размерности пространства инвариантных римановых метрик при каждой реализации.

Таблица 3

G	SO(n)	U(n)	SU(n)	Sp(n)Sp(1)	Sp(n)U(1)
H	SO(n-1)	U(n-1)	SU(n-1)	Sp(n-1)Sp(1)	Sp(n-1)U(1)
Сфера	S^{n-1}	S^{2n-1}	S^{2n-1}	S^{4n-1}	S^{4n-1}
$\dim M_G$	1	2	2	2	3
G	Sp(n)	G_2	Spin(7)	Spin(9)	
H	Sp(n-1)	SU(3)	G_2	Spin(7)	
Сфера	S^{4n-1}	S^6	S^7	S^{15}	
$\dim M_G$	7	1	1	2	

Наиболее удобными для исследования подмножествами M_G являются так называемые «диагональные» семейства метрик. Рассмотрим разложение (4.5) для скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Подпространство $\mathfrak{p}_0$ представим как прямую сумму попарно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональных одномерных подпространств $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_{r+1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{p}_s$. Рассмотрим теперь следующее семейство $\text{Ad}(H)$ -инвариантных метрик:

$$(\cdot, \cdot) = x_1 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_1} \oplus \dots \oplus x_r \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_r} \oplus \dots \oplus x_s \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_s},$$

где все числа $x_i > 0$. Для метрик такого «диагонального» семейства легко одновременно вычисляются их различные кривизны [222].

ЗАМЕЧАНИЕ 22. Отметим, что любой автоморфизм τ группы G , сохраняющий группу изотропии H однородного пространства G/H , индуцирует отображение $\tilde{\tau} : M_G \rightarrow M_G$, переводящее каждую G -инвариантную метрику ρ из M_G в изометричную ей метрику.

В оставшейся части раздела мы будем рассматривать только однородные пространства G/H с компактной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (для связной группы Ли G это означает, что $\mathfrak{g}$ допускает $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, что равносильно тому, что группа G допускает некоторую биинвариантную риманову метрику).

ЗАМЕЧАНИЕ 23. Отметим, что для связной группы Ли G группа $\text{Ad}(G)$ изоморфна группе внутренних автоморфизмов $\text{Int}(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. начало раздела 2.7).

ЗАМЕЧАНИЕ 24. Если связная группа Ли G компактна и полупроста, то в качестве $\text{Ad}(G)$ -инвариантного скалярного произведения на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ можно взять ее форму Киллинга с отрицательным знаком (для простых алгебр все такие скалярные произведения пропорциональны форме Киллинга). Для коммутативной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ любое скалярное произведение является $\text{Ad}(G)$ -инвариантным.

Зафиксируем на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, порожденное некоторой *биинвариантной* римановой метрикой на компактной группе Ли G . Рассмотрим теперь разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, ортогональное относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Как уже было отмечено, множество инвариантных метрик M_G на однородном пространстве G/H можно отождествить с множеством положительных $\text{Ad}(H)$ -эквивариантных, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -самосопряженных метрических эндоморфизмов пространства $\mathfrak{p}$: скалярному произведению $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{p}$ соответствует оператор $A : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ согласно формуле $(\cdot, \cdot) = \langle A \cdot, \cdot \rangle$.

Для однородного пространства G/H естественно рассмотреть действие группы $N_G(H)/H$ на M_G , где $N_G(H)$ — нормализатор H в группе G . Нормализатор $N_G(H)$ действует на однородном пространстве G/H G -эквивариантными диффеоморфизмами R_n , где $n \in N_G(H)$ (см. (4.2)): $R_n(bH) = bnH = bHn$, $b \in G$. Поскольку $N_G(H)$ нормализует H , мы можем рассмотреть ограничение присоединенного действия $N_G(H)$ на $\mathfrak{p}$. Таким образом, мы получаем действие $N_G(H)$ на M_G , заданное для каждого $n \in N_G(H)$ следующим образом:

$$(A, n) \rightarrow \tilde{A} = \text{Ad}(n)|_{\mathfrak{p}} \circ A \circ \text{Ad}(n)^{-1}|_{\mathfrak{p}}, \quad (4.6)$$

где A принадлежит $S^2(\mathfrak{p})^{\text{Ad}(H)}$ — множеству положительных $\text{Ad}(H)$ -эквивариантных, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -самосопряженных эндоморфизмов $\mathfrak{p}$.

Отметим, что в силу $\text{Ad}(G)$ -инвариантности скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ выполнено равенство $\text{Ad}(n)^{-1}|_{\mathfrak{p}} = \text{Ad}(n)^t|_{\mathfrak{p}}$, и $\tilde{A} \in S^2(\mathfrak{p})^{\text{Ad}(H)}$. Очевидно, что инвариантные метрики, соответствующие операторам A и $\tilde{A}$, изометричны между собой. Таким образом, при исследовании инвариантных метрик на однородном пространстве G/H можно ограничиться изучением лишь одной из таких метрик. Как правило, при этом удобно для исследования выбрать метрику, порожденную наиболее простым в некотором естественном смысле оператором $\tilde{A}$, среди всех операторов вида $\text{Ad}(n)|_{\mathfrak{p}} \circ A \circ \text{Ad}(n)^{-1}|_{\mathfrak{p}}$, где $n \in N_G(H)$.

Поскольку мы интересуемся лишь $\text{Ad}(H)$ -эквивариантными метрическими эндоморфизмами, то мы можем редуцировать действие группы $N_G(H)$ на M_G (4.6) к действию группы $N_G(H)/H$.

4.8. Компактные однородные римановы многообразия положительной эйлеровой характеристики

Компактные однородные римановы многообразия положительной эйлеровой характеристики играют важную роль в этой книге. Сначала мы приведем некоторые структурные результаты об однородных пространствах положительной эйлеровой характеристики (см. [50, 19.5]).

Если не указано обратного, везде в этом разделе мы предполагаем, что G/H — почти эффективное компактное однородное пространство со связной группой Ли G .

Теорема 4.9. Пусть $M = (G/H, \mu)$ — компактное односвязное однородное риманово многообразие с компактными группами Ли G и H , и G связна. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $\chi(M) = 0$;

2) $\operatorname{rk} G > \operatorname{rk} H$;

3) существует правоинвариантное векторное поле на G , проектирующееся при каноническом отображении $p : G \rightarrow M$ на киллингово векторное поле на M без нулей;

4) все характеристические числа риманова многообразия M , определенные для главного расслоения $\pi : SO(M) \rightarrow M$ ортонормированных ориентированных базисов на M , равны нулю.

◁ Из гомотопической последовательности расслоения $p : G \rightarrow G/H$, связности G и односвязности G/H следует, что группа H связна. Таким образом, выполнены все условия теоремы 4.4. Тогда условия 1) и 2) эквивалентны.

Из теоремы 3.12 и леммы 4.1 следует, что $3) \Rightarrow 1)$.

Покажем, что $2) \Rightarrow 3)$. Пусть U — элемент из первой половины доказательства теоремы 4.4. Тогда ясно, что правоинвариантное векторное поле W на G с условием $W(e) = U$ проектируется при отображении p на киллингово векторное поле на M без нулей.

Характеристические числа из условия 4) определены только для четномерных римановых многообразий. В этом случае эйлера характеристика также является характеристическим числом (соответствующим характеристическому классу Эйлера) по теореме Гаусса — Бонне. Тогда в этом случае условие 1) следует из условия 4). Утверждение 4) следует из условия 3) (даже из более слабого условия существования киллингова векторного поля без нулей на произвольном компактном гладком ориентированном римановом многообразии четной размерности) по теореме Ботта [104] (доказательство также дано в [41, гл. 2, теорема 6.1]).

В нечетномерном случае $\chi(M) = 0$ и условие 1) выполнено, а следовательно условия 2) и 3), как было сказано ранее. Если предположить, что характеристические числа нечетномерного (компактного риманова) многообразия равны нулю по определению, то условие 4) автоматически выполняется. Поэтому в этом случае все 4 условия эквивалентны и всегда выполняются. ▷

Предложение 4.2 [221]. *Если компактная связная группа Ли G действует эффективно на пространстве $M = G/H$ положительной эйлеровой характеристики, то центр G тривиален; пространство $M = G/H$ односвязно тогда и только тогда, когда H связно.*

◁ Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ компактной группы Ли G компактна. Вследствие предложения 2.19 и теоремы 2.17 $\mathfrak{g}$ представляется в виде прямой суммы идеалов $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{l}$, где $\mathfrak{z}$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{l}$ — полупростая алгебра Ли.

Рассмотрим на многообразии $M = G/H$ произвольную G -инвариантную риманову метрику μ . Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ не полупроста, то любой нетривиальный вектор из ее центра $\mathfrak{z}$ порождает не обращающееся в нуль киллингово векторное поле на (M, μ) (см. доказательство теоремы 4.9). Но тогда M имеет нулевую эйлерову характеристику по теореме 4.9. Таким образом, группа Ли G (как и ее алгебра Ли) полупроста (это утверждение остается в силе и при почти эффективном действии группы G).

Вследствие теоремы 4.4 существует максимальный тор $T \subset G$ такой, что $T \subset H$; поэтому центр группы G тривиален, так как вследствие первых двух утверждений теоремы 2.24 центр группы G содержится в каждом максимальном торе группы G , а действие группы G эффективно.

Второе утверждение следует из первого и гомотопической последовательности расслоения $G \rightarrow G/H$. Действительно, необходимость второго утверждения получается сразу и без требования положительности эйлеровой характеристики пространства G/H . Для доказательства достаточности надо в гомотопической последовательности заменить группу G ее универсальной накрывающей $\tilde{G}$, а H — ее прообразом при универсальном накрытии $\tilde{G} \rightarrow G$; последняя группа связна вследствие положительности эйлеровой характеристики пространства G/H и аналогов рассуждений из предыдущего абзаца. ▷

Теорема 4.10 [157]. *Пусть $(G/H, \mu)$ — связное односвязное компактное почти эффективное однородное риманово многообразие положительной эйлеровой характеристики. Тогда $(G/H, \mu)$ неразложимо тогда и только тогда, когда G проста. В частности, простая и непростая компактные группы Ли не могут одновременно действо-*

вать транзитивно и эффективно как группы движений на компактном римановом многообразии M с положительной эйлеровой характеристикой.

Теперь мы рассмотрим случай транзитивного действия простых групп Ли.

Теорема 4.11 [50, 207, 208]. Пусть G и G' — связные простые компактные группы Ли, $H \subset G$ и $H' \subset G'$ — их связные подгруппы Ли максимального ранга, причем G и G' (естественно) действуют на $M = G/H$ и $M' = G'/H'$ почти эффективно. Если пространства $M = G/H$ и $M' = G'/H'$ диффеоморфны, то либо пары (G, H) и (G', H') локально изоморфны, либо они локально изоморфны (с точностью до перестановки) парам из следующего списка:

$$G = SU(2n) \ (n \geq 2), \ H = S(U(1) \times U(2n-1));$$

$$G' = Sp(n), \ H' = U(1) \cdot Sp(n-1); \quad M = M' = \mathbb{C}P^{2n-1}.$$

$$G = SO(7), \ H = SO(6); \quad G' = G_2, \ H' = SU(3); \quad M = M' = S^6.$$

$$G = SO(7), \ H = SO(5) \times SO(2); \quad G' = G_2, \ H' = SU(2) \cdot SO(2);$$

$$M = M' = Gr_{7,2}^+.$$

$$G = SO(2n) \ (n \geq 4), \ H = U(n); \quad G' = SO(2n-1), \ H' = U(n-1);$$

$$M = M' = I^0 Gr_{2n,n}^C.$$

Из теоремы 4.11 легко получить классификацию транзитивных действий компактных связных групп Ли на односвязных однородных пространствах положительной эйлеровой характеристики.

Теорема 4.12 [208]. Если M и M' — однородные пространства связных компактных групп Ли, $\chi(M) > 0$, $\chi(M') > 0$ и M гомотопно эквивалентно M' , то M и M' диффеоморфны.

Из результатов работ [192] и [207] получается

Теорема 4.13. Пусть $(G/H, g)$ — компактное односвязное однородное риманово многообразие положительной эйлеровой характеристики с простой группой движений G . Тогда полная связная группа движений $(G/H, g)$ есть G/C , где C — центр группы G , за исключением случаев, когда $(G/H, g)$ является одним из следующих многообразий:

1) $G/H = Sp(n)/U(1) \cdot Sp(n-1)$ ($n \geq 2$), μ — симметрическая метрика (Фубини) на $\mathbb{C}P^{2n-1} = SU(2n)/S(U(1) \times U(2n-1))$;

2) $G/H = SO(2n-1)/U(n-1)$ ($n \geq 4$), μ — симметрическая метрика на $I^0 Gr_{2n,n}^C = SO(2n)/U(n)$;

3) $G/H = G_2/SU(2) \cdot SO(2)$, μ — симметрическая метрика на $Gr_{7,2}^+ = SO(7)/SO(5) \times SO(2)$;

4) $G/H = G_2/SU(3)$ (строго изотропно неприводимое), μ — произвольная G -инвариантная риманова метрика.

В первых трех случаях метрика g не является G -нормальной однородной, в последнем случае g является метрикой постоянной кривизны на $S^6 = SO(7)/SO(6)$.

◁ Используя предложение 4.2 и теорему 4.11, мы сразу получаем основные утверждения. Остается лишь показать, что в случаях 1), 2) и 3) метрика μ не является G -нормальной однородной. Это следует из результатов работы [192] (см. также [150]). Действительно, в цитируемой работе показано, что полная связная группа движений односвязного G -нормального однородного пространства $M = G/H$ связной простой группы G , есть $G \cdot \text{Aut}_G(M)^0$ (локально прямое произведение), где

$$\text{Aut}_G(M) = \{f \in \text{Diff}(M) \mid f(gx) = gf(x), g \in G, x \in M\},$$

за исключением следующих случаев: $G_2/SU(3) = S^6$, $Spin(7)/G_2 = S^7$, $Spin(8)/G_2 = S^7 \times S^7$. Только одно из этих пространств (а именно, $G_2/SU(3) = S^6$) имеет положительную эйлерову характеристику. Кроме того, оно строго изотропно неприводимо. Необходимо отметить также, что $\text{Aut}_G(M)^0$ тривиально для пространств $M = G/H$ положительной эйлеровой характеристики (это легко следует из теоремы 4.10). ▷

Предложение 4.3 [220]. Каждое четномерное однородное риманово многообразие M положительной секционной кривизны имеет положительную эйлерову характеристику.

◁ Вследствие теоремы Майерса 1.22 M компактно. Согласно теореме Берже (теорема 3.9) любое киллингово векторное поле на четномерном римановом многообразии положительной секционной кривизны зануляется в некоторой точке. Если бы $M = G/H$ имело нулевую эйлерову характеристику, то по теореме 4.9 M допускало бы киллингово векторное поле без нулей. Поэтому $\chi(M) > 0$ по теореме Хопфа — Самельсона (теорема 4.4). ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 25. Пример плоского четномерного тора, имеющего нулевую эйлерову характеристику, показывает, что утверждение предложения 4.3 не верно при условии неотрицательности секционной кривизны. Заметим, что вследствие двойственности Пуанкаре любое компактное нечетномерное триангулированное (в частности, гладкое) многообразие имеет нулевую эйлерову характеристику.

Следствие 4.2. *Все КРОСП'ы, кроме нечетномерных, т. е. кроме S^{2k+1} и $\mathbb{R}P^{2k+1}$, имеют положительную эйлерову характеристику.*

А. Борель и Дж. де Зибенталь получили в статье [103] классификацию подгрупп Ли максимального ранга в компактных группах Ли (см. также [34, разд. 8.10] и [158]). Эта классификация дает нам описание компактных однородных многообразий с положительной эйлеровой характеристикой. Полное описание однородных пространств классических простых групп Ли с положительной эйлеровой характеристикой получил также Ван-Сянь-Чжун в статье [221].

Важным специальным случаем компактных однородных многообразий положительной эйлеровой характеристики являются (обобщенные) *флаговые многообразия*. Их можно характеризовать как орбиты M присоединенных представлений компактных связных групп Ли G . Другими словами, $M = G/H$, где $H = Z_G(S)$ — централизатор некоторого нетривиального тора $S \subset G$; группа Ли H всегда связна. При этом орбиты регулярных элементов в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G называются (*полными*) *флаговыми многообразиями*.

Глава 8 книги [22] содержит следующие утверждения: класс односвязных компактных однородных кэлеровых многообразий совпадает с классом (обобщенных) флаговых многообразий. Каждое из последних многообразий (допускающее единственную «каноническую» структуру Кэлера — Эйнштейна) есть рациональное комплексное алгебраическое (следовательно, комплексное проективное) многообразие. В специальном случае $G = Sp(l)$, подгруппы-стабилизаторы, центры которых одномерны, совпадают с подгруппами $U(l-m) \times Sp(m)$. Среди соответствующих орбит $M_{l-m}^{Sp(l)}$, единственными орбитами, для которых нормальные римановы метрики кэлеровы (следовательно, кэлерово-симметрические) являются пространства $M_1^{Sp(l)}$, т. е. $CP^{2l-1} = Sp(l)/U(1) \times Sp(l-1)$, и $M_l^{Sp(l)}$ изоморфно $Sp(l)/U(l)$, многообразию вполне изотропных комплексных l -подпространств

пространства $\mathbb{C}^{2l}$. Пространство $M_l^{SO(2l+1)} = SO(2l+1)/U(l)$ — многообразие комплексных флагов типа l .

Используя главу 15 из книги [50], можно сказать больше. Любое (компактное обобщенное) флаговое многообразие M , снабженное упомянутой канонической структурой Кэлера — Эйнштейна, изоморфно многообразию $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, где $\mathbb{G}$ — комплексная связная группа Ли и $\mathbb{H}$ — замкнутая комплексная параболическая подгруппа Ли в $\mathbb{G}$. Напомним, что связная комплексная подгруппа Ли группы Ли $\mathbb{G}$ называется *параболической*, если она содержит борелевскую подгруппу группы $\mathbb{G}$. *Борелевская подгруппа* группы $\mathbb{G}$ — любая ее максимальная связная разрешимая комплексная подгруппа Ли. Таким образом, M — так называемое *флаговое однородное пространство*. При этом соответствующая комплексная структура на M индуцируется комплексной структурой на $\mathbb{G}$. Любая параболическая подгруппа группы $\mathbb{G}$ включает подгруппу $\text{Rad}(\mathbb{G})$, являющуюся нормальной подгруппой группы $\mathbb{G}$. Следовательно, M — флаговое однородное пространство полупростой комплексной группы Ли $\mathbb{G}_0 := \mathbb{G}/\text{Rad}(\mathbb{G})$. При этом $M = G_0/H_0$, где G_0 — любая компактная вещественная форма группы $\mathbb{G}_0$ и $H_0 = G_0 \cap \mathbb{H}_0$ для $\mathbb{H}_0 = \mathbb{H}/\text{Rad}(\mathbb{G})$.

В следствии 7.12 книги [176, с. 301] доказано, что максимальная связная подгруппа Ли H максимального ранга в компактной связной группе Ли G есть компонента связности единицы нормализатора (=централизатора) некоторого элемента $g \in G$. На основании этого следствия и некоторых связанных с этим результатов, приводится таблица 5.1 в [176] всех максимальных связных компактных подгрупп H максимального ранга (более точно, их подалгебр Ли) компактных связных простых групп Ли G . В частности, G/H есть орбита упомянутого выше элемента $g \in G$ относительно действия группы $I(G)$ всех внутренних автоморфизмов группы Ли G . (Обобщенные) флаговые многообразия можно также рассматривать как такие орбиты, когда $g \in G$ берется в диффеоморфном образе $\exp_G(U)$, где U — открытый шар с центром $0 \in \mathfrak{g}$ относительно некоторой $\text{Ad}(G)$ -инвариантной евклидовой метрики на $\mathfrak{g}$.

Предложение 4.4. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$ связной группы Ли G такая, что $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, где $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ — нормализатор алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{h}$ является алгеброй Ли единственной связной подгруппы Ли H в G .

◁ Пусть $H_1 = \{g \in G : \text{Ad}(g)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}\}$. Тогда H_1 — замкнутая подгруппа группы G . Следовательно, ее компонента связности единицы H замкнута. По теореме Картана H — подгруппа Ли группы G . Очевидно, алгебра Ли группы H есть $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, что по условию совпадает с $\mathfrak{h}$, так что H — нужная подгруппа Ли. ▷

Нетрудно доказать следующее

Предложение 4.5. Если $\mathfrak{h}$ — редуктивная подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая максимальную коммутативную подалгебру Ли $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$, то $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Из предложений 4.2, 4.4 и 4.5 очевидно следует

Теорема 4.14. Пусть G — простая компактная связная группа Ли и $\mathfrak{t}$ — алгебра Ли максимального тора $T \subset G$. Тогда каждая собственная подалгебра Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ с условием $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$ является алгеброй Ли единственной связной подгруппы Ли $H \subset G$. При этом G/H — связное односвязное компактное однородное пространство положительной эйлеровой характеристики.

Теперь мы дадим простое описание естественно редуктивных однородных пространств с положительной эйлеровой характеристикой, основанное на теореме 4.10.

Теорема 4.15 [16]. Пусть M — компактное естественно редуктивное однородное риманово многообразие положительной эйлеровой характеристики. Тогда M G_1 -нормально однородно для некоторой (транзитивной на M) полупростой группы Ли $G_1 \subset G$, где G — полная связная группа изометрий пространства M .

◁ Группа G полупроста, так как $\chi(M) > 0$ (см. предложение 4.2).

В доказательстве теоремы можно без ограничения общности предполагать, что M односвязно. Действительно, универсальное риманово накрытие $\tilde{M}$ пространства M имеет полупростую транзитивную группу движений $\tilde{G}$, накрывающую группу G . Так как G и $\tilde{G}$ имеют одну и ту же алгебру Ли и $\tilde{G}$ компактна вследствие теоремы 2.22, то $\tilde{M}$ также компактно. Если $\tilde{M}$ нормально однородно относительно некоторой полупростой подгруппы $\tilde{G}_1 \subset \tilde{G}$, то M — G_1 -нормальное однородное, где $G_1 \subset G$ есть образ группы $\tilde{G}_1$ при естественном накрывающем эпиморфизме $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$.

Далее, можно предполагать дополнительно, что M неразложимо. Действительно, если $M = M_1 \times \dots \times M_s$ — разложение де Рама

для M , то каждое M_i — естественно редуктивное однородное риманово многообразие ([156, следствие 7]; см. также [42, гл. X, теорема 5.2]). Если мы докажем, что каждое M_i нормально однородно (относительно некоторой транзитивной подгруппы своей полной связной группы изометрий), то M также нормально однородно.

Пусть M — компактное односвязное неразложимое естественно редуктивное однородное риманово многообразие с условием $\chi(M) > 0$, и G — его (полупростая) наибольшая связная группа изометрий. Из теоремы Костанта (теорема 4.7) мы получаем, что найдется некоторая подгруппа $G_1 \subset G$, транзитивная на M , со следующим свойством: существует некоторая $\text{Ad}(G_1)$ -инвариантная невырожденная квадратичная форма Q на алгебре Ли $\mathfrak{g}_1$ группы Ли G_1 такая, что риманова метрика пространства M порождается сужением формы Q на Q -ортогональное дополнение $\mathfrak{p}$ к $\mathfrak{h}_1$ в $\mathfrak{g}_1$ (H_1 — стабилизатор некоторой точки из M относительно действия группы G_1 , а $\mathfrak{h}_1$ — соответствующая подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$).

Заметим, что группа G_1 проста согласно теореме 4.10. Но так как G_1 простая, то Q кратна форме Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$, поэтому Q положительно определена на $\mathfrak{g}_1$, и M G_1 -нормально. $\triangleright$

Закончим этот раздел примером важного для нас однородного пространства положительной эйлеровой характеристики с двухпараметрическим семейством инвариантных метрик.

ПРИМЕР 16. Рассмотрим однородное пространство $SO(5)/U(2)$, где $U(2) \subset SO(4) \subset SO(5)$, и пары $(SO(5), SO(4))$, $(SO(4), U(2))$ являются неприводимыми симметрическими. Явно реализовать это однородное пространство можно следующим образом. Рассмотрим $\text{Ad}(SO(5))$ -инвариантное скалярное произведение

$$\langle A, B \rangle = -\frac{1}{2} \text{trace}(A \cdot B)$$

на алгебре Ли $\mathfrak{so}(5)$. Для матриц вида $A + \sqrt{-1}B \in \mathfrak{u}(2)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим вложение

$$A + \sqrt{-1}B \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

в $so(4)$, которое соответствует симметрической паре $(so(4), u(2))$ (см., например, [22]). Также мы используем стандартное вложение $so(4)$ в $so(5)$: $A \mapsto \text{diag}(A, 0)$.

Рассмотрим следующее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональное разложение:

$$\mathfrak{g} = so(5) = so(4) \oplus \mathfrak{p}_1 = u(2) \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2,$$

где

$$u(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c & a & d & 0 \\ -c & 0 & d & b & 0 \\ -a & -d & 0 & c & 0 \\ -d & -b & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathfrak{p}_1 = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ -k & -l & -m & -n & 0 \end{pmatrix}; \quad k, l, m, n \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathfrak{p}_2 = \left\{ Y = \begin{pmatrix} 0 & e & 0 & f & 0 \\ -e & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & -e & 0 \\ -f & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e, f \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ясно, что модули $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ являются $\text{Ad}(U(2))$ -инвариантными и $\text{Ad}(U(2))$ -неприводимыми. Отметим, что для векторов X из $\mathfrak{p}_1$ имеет место равенство $\langle X, X \rangle = k^2 + l^2 + m^2 + n^2$, а для векторов $Y \in \mathfrak{p}_2$ справедливо равенство $\langle Y, Y \rangle = 2e^2 + 2f^2$.

Произвольная $SO(5)$ -инвариантная риманова метрика на $SO(5)/U(2)$ является метрикой $g = g_{x_1, x_2}$, порождаемой скалярным произведением

$$(\cdot, \cdot) = x_1 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_1} + x_2 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_2}$$

на $\mathfrak{p}$ при некоторых положительных числах x_1 и x_2 .

Нетрудно понять, что однородное пространство $SO(5)/U(2)$ совпадает с пространством $Sp(2)/U(1) \cdot Sp(1)$ и открывает две серии важных для нас пространств $SO(2n+1)/U(n)$ и $Sp(n)/U(1) \cdot Sp(n-1)$, $n \geq 2$.

4.9. Кривизны однородных римановых пространств

Впервые специальные формулы для вычисления секционной кривизны однородных римановых многообразий были получены К. Номидзу в работе [189]. В дальнейшем появились более простые варианты вывода таких формул (см., например, [22] или [85]). Здесь мы получим соответствующую формулу непосредственно из следствия 3.1, которое относится к полям Киллинга на произвольном римановом многообразии (см. [47]).

Нетрудно видеть, что ввиду инвариантности кривизны относительно изометрий, достаточно вычислить ее только в некоторой точке x риманова многообразия $(M = G/H, g)$, поэтому, далее, тензор кривизны R в точке $x \in M$ отождествляется с $\text{Ad}_G(H)$ -инвариантным тензором пространства $\mathfrak{p}$ (см. определение 83 и теорему 4.3). Через $(\cdot, \cdot)$ будем обозначать $\text{Ad}(H)$ -инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{p}$, соответствующее римановой метрике g (будем использовать также обозначение $|X|$ вместо $\sqrt{(X, X)}$, $X \in \mathfrak{p}$). Это скалярное произведение может быть расширено до $\text{Ad}(H)$ -инвариантного скалярного произведения на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (достаточно выбрать какое-нибудь $\text{Ad}(H)$ -инвариантное скалярное произведение на алгебре Ли $\mathfrak{h}$ и положить $(\mathfrak{p}, \mathfrak{h}) = 0$), которое мы будем обозначать тем же символом. Кривизны однородного риманова многообразия (M, g) можно выразить через $(\cdot, \cdot)$ и скобку Ли в алгебре $\mathfrak{g}$.

В этом разделе мы будем обозначать скобку Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ через $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$ (также используем обозначения $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{p}}$ и $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}}$ для $\mathfrak{p}$ -компоненты и $\mathfrak{h}$ -компоненты скобки $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}}$), сохраняя обозначение $[\cdot, \cdot]$ для скобки Ли векторных полей на многообразии M . Отметим, что дифференциал $T\pi$ канонической проекции $\pi : G \rightarrow G/H = M$ является мономорфизмом алгебры Ли RG правоинвариантных векторных полей на G в алгебру Ли киллинговых векторных полей на (M, g) (изоморфизмом, если G содержит полную связную группу изометрий пространства (M, g)). Отождествляя $X \in RG$ с его значением $X(e) \in G_e = \mathfrak{g}$, получим, что $[X, Y] = -[X, Y]_{\mathfrak{g}}$ для любых $X, Y \in RG$ вследствие теоремы 2.5, что надо учитывать во всех преобразованиях. Сначала мы определим оператор $U : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ по формуле

$$2(U(X, Y), Z) = ([Z, X]_{\mathfrak{p}}, Y) + (X, [Z, Y]_{\mathfrak{p}}). \quad (4.7)$$

Легко понять, что $U(X, Y) = \mathcal{U}(X, Y)|_x$ (см. формулы (3.3) и (3.4)),

учитывая отождествление M_x с $\mathfrak{p}$. При этом в точке $x \in M$ справедлива формула (см. лемму 3.1)

$$\nabla_X Y = -\frac{1}{2} [X, Y]_{\mathfrak{p}} + U(X, Y). \quad (4.8)$$

Теперь, с учетом всех принятых отождествлений, из следствия 3.1 немедленно получаем следующий важный результат (см., например, [22, 42]).

Теорема 4.16. Пусть $(M = G/H, g)$ — G -однородное риманово многообразие, $X, Y \in \mathfrak{p} = M_x$. Тогда

$$\begin{aligned} (R(X, Y)Y, X) &= -\frac{3}{4} |[X, Y]_{\mathfrak{p}}|^2 - \frac{1}{2} ([X, [X, Y]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, Y) - \\ &- \frac{1}{2} ([Y, [Y, X]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, X) + |U(X, Y)|^2 - (U(X, X), U(Y, Y)). \end{aligned}$$

Пусть $\{X_i\}$ — ортонормированный базис пространства $(\mathfrak{p}, (\cdot, \cdot))$. Положим

$$Z = \sum_i U(X_i, X_i). \quad (4.9)$$

Из равенства (4.7) ясно, что $(Z, X) = \text{trace}(\text{ad}(X))$ для любого $X \in \mathfrak{p}$ (последнее равенство полностью определяет вектор Z , который, соответственно, не зависит от выбора базиса $\{X_i\}$). Таким образом, $Z = 0$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ унимодулярна. Отметим также, что $\text{trace}(\text{ad}(Z)) = (Z, Z)$.

С учетом введенных обозначений справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.17. Кривизна Риччи Ric в точке x задается формулой

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, X) &= -\frac{1}{2} B(X, X) - \frac{1}{2} \sum_i |[X, X_i]_{\mathfrak{p}}|^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i,j} ([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}, X)^2 - ([Z, X]_{\mathfrak{p}}, X), \end{aligned}$$

где B — форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся две леммы. Далее для $X \in \mathfrak{g}$ через ad_X^* мы обозначаем оператор, сопряженный оператору $\text{ad}_X = \text{ad}(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$, т. е. $(\text{ad}_X^*(Y), Z) = (Y, \text{ad}_X(Z))$ для всех $Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Лемма 4.2. Для произвольного $X \in \mathfrak{p}$ справедливо равенство

$$4 \sum_i |U(X, X_i)|^2 = \sum_i |[X, X_i]_{\mathfrak{p}}|^2 + \sum_{i,j} ([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}, X)^2 + \\ + 2 \sum_i ([X_i, [X_i, X]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, X) - 2 \sum_i ([X, [X, X_i]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{p}}, X_i).$$

◁ Согласно формуле (4.7) получаем

$$4 \sum_i |U(X, X_i)|^2 = 4 \sum_{i,j} (U(X, X_i), X_j)^2 = \\ = \sum_i (([X_j, X]_{\mathfrak{p}}, X_i) + (X, [X_j, X_i]_{\mathfrak{p}}))^2 = \sum_j |[X_j, X]_{\mathfrak{p}}|^2 + \\ + \sum_{i,j} ([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}, X)^2 + 2 \sum_{i,j} ([X_j, X]_{\mathfrak{p}}, X_i)(X, [X_j, X_i]_{\mathfrak{p}}).$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{i,j} ([X_j, X]_{\mathfrak{p}}, X_i)(X, [X_j, X_i]_{\mathfrak{p}}) = \sum_{i,j} ([X_j, X]_{\mathfrak{g}}, X_i)(\text{ad}_{X_j}^*(X), X_i) = \\ = \sum_j ([X_j, X]_{\mathfrak{g}}, \text{ad}_{X_j}^*(X)) - \sum_j ([X_j, X]_{\mathfrak{h}}, \text{ad}_{X_j}^*(X)) = \\ = \sum_j ([X_j, [X_j, X]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, X) + \sum_j ([X_j, X]_{\mathfrak{h}}, X_j]_{\mathfrak{p}}, X) = \\ = \sum_j ([X_j, [X_j, X]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, X) - \sum_j ([X, [X, X_j]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{p}}, X_j). \triangleright$$

Пусть $\{V_j\}$ — ортонормированный базис подалгебры $(\mathfrak{h}, (\cdot, \cdot))$. Отметим, что для формы Киллинга выполнено равенство

$$B(X, X) = \sum_i ([X, [X, X_i]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}, X_i) + \sum_j ([X, [X, V_j]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}, V_j).$$

В частности, в силу $\text{Ad}(H)$ -инвариантности скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{g}$, для $X \in \mathfrak{h}$ имеем

$$B(X, X) = - \sum_i ([X, X_i]_{\mathfrak{g}}, [X, X_i]_{\mathfrak{g}}) - \sum_j ([X, V_j]_{\mathfrak{g}}, [X, V_j]_{\mathfrak{g}}).$$

Таким образом, форма Киллинга B отрицательно определена на $\mathfrak{h}$ ($B(X, X) = 0$ для $X \in \mathfrak{h}$ означает, что X находится в центре алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. $X = 0$ в силу (почти) эффе́ктивности пространства G/H).

Лемма 4.3. Для произвольного $X \in \mathfrak{p}$ справедливо равенство

$$\sum_i ([X, [X, X_i]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{p}}, X_i) = \sum_j ([X, [X, V_j]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{h}}, V_j).$$

◁ Пользуясь $\text{Ad}(H)$ -инвариантностью скалярного произведения на $(\cdot, \cdot)$ и тем, что $[X, V_j] \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{p}$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_i ([X, [X, X_i]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{p}}, X_i) &= \sum_i ([X, X_i]_{\mathfrak{h}}, \text{ad}_X^*(X_i)) = \\ &= \sum_{i,j} ([X, X_i]_{\mathfrak{g}}, V_j) (\text{ad}_X^*(X_i), V_j) = \\ &= \sum_{i,j} (X_i, \text{ad}_X^*(V_j)) (X_i, [X, V_j]_{\mathfrak{g}}) = \sum_j (\text{ad}_X^*(V_j), [X, V_j]_{\mathfrak{g}}) = \\ &= \sum_j (V_j, [X, [X, V_j]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}) = \sum_j ([X, [X, V_j]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{h}}, V_j). \triangleright \end{aligned}$$

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.17. Используя теорему 4.16, лемму 4.2, лемму 4.3 и формулу (4.9), получаем

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, X) &= \sum_i (R(X, X_i)X_i, X) = -\frac{3}{4} \sum_i |[X, X_i]_{\mathfrak{p}}|^2 - \\ &- \frac{1}{2} \sum_i ([X, [X, X_i]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, X_i) - \frac{1}{2} \sum_i ([X_i, [X_i, X]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, X) + \\ &+ \sum_i |U(X, X_i)|^2 - \left(U(X, X), \sum_i U(X_i, X_i) \right) = \\ &= -\frac{3}{4} \sum_i |[X, X_i]_{\mathfrak{p}}|^2 - \frac{1}{2} \sum_i ([X, [X, X_i]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, X_i) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_i ([X_i, [X_i, X]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, X) + \frac{1}{4} \sum_i |[X, X_i]_{\mathfrak{p}}|^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i,j} ([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}, X)^2 + \frac{1}{2} \sum_i ([X_i, [X_i, X]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, X) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_i ([X, [X, X_i]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{p}}, X_i) - (U(X, X), Z) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sum_i |[X, X_i]_{\mathfrak{p}}|^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j} ([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}, X)^2 - \\
&- \frac{1}{2} \sum_i ([X, [X, X_i]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, X_i) - \frac{1}{2} \sum_k ([X, [X, V_k]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{h}}, V_k) - \\
&- (U(X, X), Z) = -\frac{1}{2} \sum_i |[X, X_i]_{\mathfrak{p}}|^2 + \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{i,j} ([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}, X)^2 - \frac{1}{2} B(X, X) - ([Z, X]_{\mathfrak{p}}, X). \triangleright
\end{aligned}$$

Теорема 4.18. *Скалярная кривизна sc в точке x задается формулой*

$$sc = -\frac{1}{4} \sum_{i,j} |[X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}|^2 - \frac{1}{2} \sum_i B(X_i, X_i) - |Z|^2.$$

$\triangleleft$ По теореме 4.17 получаем

$$\begin{aligned}
sc &= \sum_i \text{Ric}(X_i, X_i) = -\frac{1}{2} \sum_i B(X_i, X_i) - \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} ([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}, X_k)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k} ([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}, X_k)^2 - \\
&- \sum_i ([Z, X_i]_{\mathfrak{p}}, X_i) = -\frac{1}{4} \sum_{i,j} |[X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}|^2 - \frac{1}{2} \sum_i B(X_i, X_i) - |Z|^2,
\end{aligned}$$

поскольку $\sum_i ([Z, X_i]_{\mathfrak{p}}, X_i) = \text{trace}(\text{ad}(Z)) = (Z, Z)$ согласно определению вектора Z . $\triangleright$

Выражение для секционной кривизны и кривизны Риччи существенно упрощаются для естественно редутивных (в частности, нормальных) однородных римановых многообразий. Допустим, что скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ является ограничением на $\mathfrak{p}$ некоторой $\text{Ad}(G)$ -инвариантной невырожденной квадратичной формы Q . Тогда $U \equiv 0$ (см. формулу (4.7), предложение 2.7 и теорему 2.4), в частности, $Z = 0$ (формула (4.9)). Из теорем 4.16 и 4.17 получаем следующее утверждение.

Теорема 4.19. *Пусть $(M = G/H, g)$ — естественно редутивное однородное риманово пространство, т. е. $(\cdot, \cdot)$ — ограничение на $\mathfrak{p}$*

некоторой $\text{Ad}(G)$ -инвариантной невырожденной квадратичной формы Q на $\mathfrak{g}$ такой, что $Q(\mathfrak{p}, \mathfrak{h}) = 0$. Тогда справедливы формулы

$$(R(X, Y)Y, X) = \frac{1}{4} |[X, Y]_{\mathfrak{p}}|^2 + Q([X, Y]_{\mathfrak{h}}, [X, Y]_{\mathfrak{h}}),$$

$$\text{Ric}(X, X) = -\frac{1}{4}B(X, X) + \frac{1}{2} \sum_i Q([X, X_i]_{\mathfrak{h}}, [X, X_i]_{\mathfrak{h}}),$$

где B — форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В частности, для любой нормальной однородной метрики (что эквивалентно положительной определенности формы Q на $\mathfrak{g}$) секционная кривизна является неотрицательной.

◁ Поскольку

$$\begin{aligned} ([X, [X, Y]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, Y) &= ([X, [X, Y]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}}, Y) + ([X, [X, Y]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{g}}, Y) - \\ &\quad - ([X, Y]_{\mathfrak{p}}, [X, Y]_{\mathfrak{p}}) - Q([X, Y]_{\mathfrak{h}}, [X, Y]_{\mathfrak{g}}) = \\ &= -|[X, Y]_{\mathfrak{p}}|^2 - Q([X, Y]_{\mathfrak{h}}, [X, Y]_{\mathfrak{h}}) \end{aligned}$$

и, аналогично, $([Y, [Y, X]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, X) = -|[X, Y]_{\mathfrak{p}}|^2 - Q([X, Y]_{\mathfrak{h}}, [X, Y]_{\mathfrak{h}})$, то из теоремы 4.16 с учетом равенства $U \equiv 0$ получаем

$$\begin{aligned} (R(X, Y)Y, X) &= -\frac{3}{4} |[X, Y]_{\mathfrak{p}}|^2 - \frac{1}{2} ([X, [X, Y]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, Y) - \\ &\quad - \frac{1}{2} ([Y, [Y, X]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{p}}, X) = \frac{1}{4} |[X, Y]_{\mathfrak{p}}|^2 + Q([X, Y]_{\mathfrak{h}}, [X, Y]_{\mathfrak{h}}). \end{aligned}$$

Поскольку (помимо определений используем лемму 4.3)

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} ([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}, X)^2 &= \sum_{i,j} (X_j, [X_i, X]_{\mathfrak{p}})^2 = \sum_i |[X, X_i]_{\mathfrak{p}}|^2, \\ -B(X, X) &= -\sum_i Q([X, [X, X_i]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}, X_i) - \sum_j ([X, [X, V_j]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}}, V_j) = \\ &= \sum_i Q([X, X_i]_{\mathfrak{g}}, [X, X_i]_{\mathfrak{g}}) - \sum_i ([X, [X, X_i]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{p}}, X_i) = \\ &= \sum_i Q([X, X_i]_{\mathfrak{g}}, [X, X_i]_{\mathfrak{g}}) + \sum_i Q([X, X_i]_{\mathfrak{h}}, [X, X_i]_{\mathfrak{h}}) = \\ &= \sum_i |[X, X_i]_{\mathfrak{p}}|^2 + 2 \sum_i Q([X, X_i]_{\mathfrak{h}}, [X, X_i]_{\mathfrak{h}}), \end{aligned}$$

то по теореме 4.17 получаем

$$\begin{aligned}
\text{Ric}(X, X) &= -\frac{1}{2} B(X, X) - \frac{1}{2} \sum_i |[X, X_i]_{\mathfrak{p}}|^2 + \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{i,k} ([X_i, X_k]_{\mathfrak{p}}, X)^2 = -\frac{1}{2} B(X, X) - \\
&- \frac{1}{4} \sum_i Q([X, X_i]_{\mathfrak{g}}, [X, X_i]_{\mathfrak{g}}) + \frac{1}{4} \sum_i Q([X, X_i]_{\mathfrak{h}}, [X, X_i]_{\mathfrak{h}}) = \\
&= -\frac{1}{4} B(X, X) + \frac{1}{2} \sum_i Q([X, X_i]_{\mathfrak{h}}, [X, X_i]_{\mathfrak{h}}),
\end{aligned}$$

что и требовалось. $\triangleright$

4.10. Однородные римановы многообразия с ограничениями на кривизну

Известно много различных топологических, геометрических и аналитических ограничений на однородное риманово многообразие с некоторыми заданными ограничениями на кривизну. Некоторые из них мы рассмотрим в этом разделе. Также известны ограничения на структуру однородного пространства, все инвариантные метрики которого обладают общим ограничением на кривизну. Чтобы проиллюстрировать последнее, рассмотрим характеризацию однородных пространств, все инвариантные римановы метрики на которых имеют положительную скалярную кривизну. Соответствующий результат в окончательной форме получен в работе [8], хотя в несколько иных вариантах был известен и ранее (см., например, работы [85, 222]).

Теорема 4.20. Пусть G/H — компактное односвязное эффективное однородное пространство компактной связной группы G по ее замкнутой подгруппе H . Тогда следующие условия равносильны:

- 1) Всякая G -инвариантная риманова метрика на G/H G -нормальна.
- 2) Все G -инвариантные римановы метрики на G/H имеют положительные кривизны Риччи.
- 3) Все G -инвариантные римановы метрики на G/H имеют положительную скалярную кривизну.

4) Пространство G/H является прямым произведением некоторого количества компактных строго изотропно неприводимых пространств.

5) Каждое инвариантное распределение на G/H вполне интегрируемо.

6) Пространство G/H не допускает инвариантных субримановых метрик [82].

При нарушении любого из этих условий G/H допускает инвариантную риманову метрику произвольной скалярной кривизны.

Далее в этом разделе мы приведем некоторые сведения об однородных римановых многообразиях положительной (неположительной) секционной кривизны, а также положительной (неположительной) кривизны Риччи. Все эти результаты представляют несомненный самостоятельный интерес, но некоторые из них понадобятся нам также и для дальнейшего изложения.

4.10.1. Однородные римановы пространства положительной секционной кривизны. Наиболее известными примерами однородных многообразий положительной секционной кривизны являются КРОСПы — компактные ранга один симметрические пространства. К этим пространствам (а все они изотропно неприводимы, и допускают единственную инвариантную метрику, с точностью до пропорциональности) относятся сферы

$$S^n = SO(n+1)/SO(n),$$

а также проективные пространства

$$\mathbb{R}P^n = SO(n+1)/O(n), \quad \mathbb{C}P^n = SU(n+1)/S(U(n) \cdot U(1)),$$

$$\mathbb{H}P^n = Sp(n+1)/Sp(n) \cdot Sp(1), \quad \mathbb{C}aP^2 = F_4/Spin(9)$$

(см., например, [34, 42, 58]). Напомним, что сферы, вещественные и комплексные проективные пространства могут быть реализованы в виде однородных пространств различными способами (см. подробности в [240]). Естественно, что δ -заземленность симметрических метрик на сферах и вещественных проективных пространствах равна 1. Для симметрических метрик на остальных проективных пространствах δ -заземленность равна $1/4$. Несмотря на то, что в недавней работе Л. Вердиани и В. Циллера [218] классифицированы все инвариантные метрики положительной секционной кривизны на сферах,

вопрос о δ -защемленности этих метрик в общем случае остается открытым (это же замечание относится и к вещественным проективным пространствам). Для комплексных проективных пространств есть только одна дополнительная возможность представления их в виде однородного пространства:

$$\mathbb{C}P^{2n-1} = Sp(n)/S(n-1) \cdot U(1).$$

Однородное пространство $Sp(n)/S(n-1) \cdot U(1)$ допускает двухпараметрическое семейство инвариантных метрик (см. раздел 6.9.3). Метрики положительной секционной кривизны вместе с их δ -защемленностями из этого семейства найдены в работе Д. Е. Вольпера [32]. Отметим также, что δ -защемленность однородных римановых многообразий, диффеоморфных КРОСПам, вычислялась многими математиками (см., например, [13, 27, 31, 32, 33, 203, 218]).

В работе М. Берже [92] была получена классификация односвязных компактных нормальных однородных пространств положительной секционной кривизны. Необходимо отметить, что в этой классификации было упущено одно нормальное однородное пространство, как позже было отмечено Б. Вилкингом (см. подробности в работе [227]).

Позднее усилиями Н. Уоллаха и Л. Берара-Бержери была получена классификация (с точностью до диффеоморфизма) произвольных однородных римановых многообразий положительной секционной кривизны [84, 220]. До этого Н. Уоллахом в работе [220] были построены инвариантные римановы метрики положительной секционной кривизны на пространствах (пространствах Уоллаха)

$$SU(3)/T_{\max}, \quad Sp(3)/Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(1), \quad F_4/Spin(8),$$

а С. Алоффом и Н. Уоллахом были впервые построены однородные римановы метрики положительной секционной кривизны на пространствах (пространствах Алоффа — Уоллаха) $W_{k,l} = SU(3)/S_{k,l}^1$ (см. [75]).

Пространства Алоффа — Уоллаха $W_{k,l} = SU(3)/S_{k,l}^1$ определяются вложениями S^1 в $SU(3)$ вида

$$e^{2\pi i\theta} \mapsto \text{diag}(e^{2\pi i k\theta}, e^{2\pi i l\theta}, e^{2\pi i m\theta}),$$

где k, l, m — целые числа с наибольшим общим делителем 1, дополнительно удовлетворяющие соотношению $k + l + m = 0$. С. Алофф

и Н. Уоллах в работе [75] доказали, что пространства $W_{k,l}$ при $kl(k+l) \neq 0$ допускают метрики положительной секционной кривизны. Кроме того, $H^4(W_{k,l}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/|k^2 + l^2 + kl|\mathbb{Z}$. Таким образом, на пространствах $W_{k,l}$ реализуется бесконечно много гомотопических типов. Позже М. Крек и С. Штольц показали в [165], что среди пространств Алоффа — Уоллаха существуют гомеоморфные, но не диффеоморфные между собой пространства. Принимая в расчет действие группы Вейля для $SU(3)$, можно считать также, что $k \geq l \geq 0$. Отметим, что пространство инвариантных метрик на $W_{k,l}$ четырехмерно, за исключением случаев $(k, l) = (1, 1)$ и $(k, l) = (1, 0)$, когда размерность этого пространства равна 7 и 5 соответственно. Подробное описание инвариантных метрик для всех пространств Алоффа — Уоллаха $W_{k,l}$ приведено в работе [187].

Отметим, что между любым пространством Алоффа — Уоллаха $W_{k,l} = SU(3)/S_{k,l}^1$ и пространством Уоллаха $SU(3)/T_{\max}$ существует следующая связь: первое из них является расслоенным пространством, а другое — базой естественного расслоения $\pi : SU(3)/S_{k,l}^1 \rightarrow SU(3)/T_{\max}$ со слоем S^1 .

Теорема 4.21 (Л. БЕРАР-БЕРЖЕРИ — Н. УОЛЛАХ). Пусть $M = (G/H, g)$ — односвязное однородное риманово пространство с $K_\sigma > 0$. Тогда M либо диффеоморфно КРОСПу, либо M есть одно из многообразий следующего списка:

$$\begin{aligned} & Sp(2)/SU(2), \quad SU(5)/Sp(2) \times S^1, \\ & (SU(3) \times U(2)/S_{1,1}^1)/U(2), \quad (SU(3) \times T^2/S_{1,1}^1)/T^2, \\ & SU(3)/S_{1,1}^1, \quad (SU(3) \times T^2/S_{k,l}^1)/T^2, \quad SU(3)/S_{k,l}^1, \\ & SU(3)/T_{\max}, \quad Sp(3)/Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(1), \quad F_4/Spin(8). \end{aligned}$$

Заметим, что пространства

$$\begin{aligned} & (SU(3) \times U(2)/S_{1,1}^1)/U(2), \quad (SU(3) \times T^2/S_{1,1}^1)/T^2, \\ & (SU(3) \times T^2/S_{k,l}^1)/T^2 \end{aligned}$$

диффеоморфны $SU(3)/S_{k,l}^1$ для соответствующих пар чисел (k, l) . Поясним это на примере пространства $(SU(3) \times T^2/S_{k,l}^1)/T^2$. В этом случае $S_{k,l}^1$ косо вкладывается в тор T^2 , где

$$T^2 = \text{diag}(e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{-i(\alpha+\beta)}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

группа $SU(3) \times (T^2/S_{k,l}^1)$ действует на $SU(3)/S_{k,l}^1$ транзитивно, причем $SU(3)$ действует на $SU(3)/S_{k,l}^1$ слева, а $T^2/S_{k,l}^1$ — справа. Тогда группа изотропии точки $S_{k,l}^1$ представляет собой диагонально вложенный тор T^2 .

В случае однородных римановых многообразий более удобно ввести следующую величину [199]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 93. δ -защемленностью пары (G, H) называется число $\delta(G, H) = \sup\{\delta(G/H, g) \mid g \in \mathcal{M}(G, H)\}$, где $\mathcal{M}(G, H)$ — пространство всех G -инвариантных метрик на G/H .

В четномерном однородном римановом случае (за исключением пространств, диффеоморфных КРОСПам) δ -защемленность пары была найдена Ф. М. Валиевым [27]. Результаты данной работы для пространств Уоллаха приведены в таблице 4. Отметим также, что в работе [27] определены δ -защемленности для всех инвариантных метрик на каждом из трех четномерных пространств Уоллаха (пространство инвариантных метрик для каждого из этих пространств трехмерно).

Таблица 4

G	H	$\dim G/H$	$\dim \mathcal{M}(G/H)$	$\delta(G, H)$
$SU(3)$	T^2	6	3	1/64
$Sp(3)$	$Sp(1)^3$	12	3	1/64
F_4	$Spin(8)$	24	3	1/64

Для дальнейшего нам понадобится специальная функция [199].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 94. Непрерывная функция $\Delta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ определяется равенством $\Delta(k/l) = \delta(SU(3), S_{k,l}^1) \in (0, 1)$ (см. определение 93) для рациональных чисел $l/k \in (0, 1)$, и с помощью предельного перехода в остальных точках отрезка $[0, 1]$.

Отметим, что $\Delta(0) = 0$ и функция $\Delta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, как следует из работы [199], является строго возрастающей. Ее значение в точке 1, а именно $\Delta(1) = 1/37$, дает ограничение снизу для δ -защемленности пары $(SU(3), S_{1,1}^1)$ (напомним, что размерность пространства инвариантных метрик для $W_{1,1} = SU(3)/S_{1,1}^1$ больше, чем для остальных пространств $W_{k,l} = SU(3)/S_{k,l}^1$).

В нечетномерном случае δ -защемленность пары исследовалась Г. Элиассоном [123], Э. Хайнтце [139], Г. Хуангом [143], Т. Путт-

маном [199]. Г. Элиассон показал, что $\delta(Sp(2), SU(2)) = 1/37$ для пары Берже $(Sp(2), SU(2))$. Далее, Э. Хайнтце и Г. Хуанг нашли δ -защемленность пары Берже $(SU(5), Sp(2) \times S^1)$ при ограничении на некоторые специальные классы инвариантных римановых метрик. Завершил эти исследования Т. Путтман, показав, что $\delta(SU(5), Sp(2) \times S^1) = 1/37$. Кроме того, в работе Т. Путтмана [199] исследован вопрос о δ -защемленности пары для пространств Алоффа — Уоллаха, а также других несимметрических пространств, допускающих однородную риманову метрику положительной секционной кривизны. Результаты этой работы приведены в таблице 5.

Таблица 5

G	H	$\dim G/H$	$\dim \mathcal{M}(G/H)$	$\delta(G, H)$
$Sp(2)$	$SU(2)$	7	1	$1/37$
$SU(5)$	$Sp(2) \times S^1$	13	2	$1/37$
$SU(3) \times U(2)/S^1_{1,1}$	$U(2)$	7	2	$\Delta(1) = 1/37$
$SU(3) \times T^2/S^1_{1,1}$	T^2	7	4	$\Delta(1) = 1/37$
$SU(3)$	$S^1_{1,1}$	7	7	$\geq \Delta(1) = 1/37$
$SU(3) \times T^2/S^1_{k,l},$ $k > l$	T^2	7	4	$\Delta(k/l) < \Delta(1),$ $\lim_{k/l \rightarrow 1} \Delta(k/l) =$ $\Delta(1) = 1/37$
$SU(3)$	$S^1_{k,l}, k > l$	7	4	$\Delta(k/l) < \Delta(1),$ $\lim_{k/l \rightarrow 1} \Delta(k/l) =$ $\Delta(1) = 1/37$

В последнем столбце таблицы 5 указана информация о δ -защемленности соответствующей пары (для двух последних пар указана асимптотика функции δ -защемленности пары).

4.10.2. Однородные римановы пространства положительной кривизны Риччи. Однородные римановы метрики положительной или неотрицательной кривизны Риччи изучались в работах [12, 85, 175]. В частности, в [175] была доказана

Теорема 4.22 (Дж. Милнор). *Связная группа Ли G допускает G -инвариантную риманову метрику положительной кривизны Риччи тогда и только тогда, когда G компактна, а фундаментальная группа $\pi_1(G)$ конечна. Если так, то в качестве такой метрики подходит любая биинвариантная риманова метрика.*

Следующая теорема является обобщением данной теоремы на случай произвольного однородного пространства.

Теорема 4.23 [12]. Однородное эффективное пространство $M^n = G/H$, где G связна, а H компактна, допускает G -инвариантную риманову метрику положительной кривизны Риччи тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

- 1) M компактно и $\pi_1(M)$ конечна;
- 2) G компактна и подгруппа Леви LG (т. е. максимальная связная полупростая подгруппа G) действует транзитивно на M .

При этом G компактна и в качестве нужной метрики можно взять любую нормальную G -инвариантную метрику на M .

Необходимость условия 1). Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — произвольная G -инвариантная риманова метрика на $M = G/H$ с положительной кривизной Риччи ric . Непрерывная функция $\text{ric}(v)$ достигает на компактном множестве $T_x^1 M$ единичных касательных векторов v к M в точке $x \in M$ положительного минимума $(n-1)k^2$. Вследствие однородности пространства $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ для всех единичных касательных векторов $v \in T^1(M)$ к M , $\text{ric}(v) \geq (n-1)k^2$. По теореме 1.22 С. Майерса пространство M компактно и имеет конечную фундаментальную группу $\pi_1(M)$. Отсюда и из предложения 4.1 и теоремы 1.25 легко вывести, что группа G компактна.

Достаточность условия 1). Пусть однородное пространство $M = G/H$ компактно и имеет конечную фундаментальную группу $\pi_1(M)$. Тогда группа Ли G компактна и вследствие предложения 2.19 допускает биинвариантную риманову метрику g_0 , порождаемую некоторым $\text{Ad}(G)$ -инвариантным скалярным произведением Q на $\mathfrak{g} = LG$. Достаточно доказать, что кривизна Риччи ric индуцированной римановой метрики $g = (\cdot, \cdot)$ на M (т. е. такой, что каноническая проекция $q : (G, g_0) \rightarrow (G/H, g)$ — риманова субмерсия) положительна. Но метрика $g = (\cdot, \cdot)$ является нормальной однородной, и по теореме 4.19 мы получаем

$$\text{Ric}(X, X) = -\frac{1}{4} B(X, X) + \frac{1}{2} \sum_i Q([X, X_i]_{\mathfrak{h}}, [X, X_i]_{\mathfrak{h}}),$$

где B — форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $X \in \mathfrak{p} = M_x$, $x = eH$, $\mathfrak{p}$ — Q -ортогональное дополнение к $\mathfrak{h} = LH$ в $\mathfrak{g}$. Поскольку алгебра Ли $\mathfrak{g}$ компактна, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{l}$, $\mathfrak{c}$ — центр, $\mathfrak{l}$ — максимальный полупростой

идеал (совпадающий с подалгеброй Леви). Ясно, что форма Киллинга B зануляется на $\mathfrak{c}$ и отрицательно определена на $\mathfrak{l}$ (теорема 2.19).

Пусть $C(\mathfrak{p}) = \{X \in \mathfrak{p} \mid \text{Ric}(X, X) = 0\}$. Понятно, что $C(\mathfrak{p}) = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}$. Нам достаточно показать, что это подпространство тривиально.

Поскольку модули $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{c}$ являются $\text{Ad}(H)$ -инвариантными (второй даже $\text{Ad}(G)$ -инвариантен, поскольку является центром $\mathfrak{g}$), то $\text{Ad}(H)$ -инвариантными являются и модуль $C(\mathfrak{p}) = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}$ и его Q -ортогональное дополнение $C(\mathfrak{p})^\perp$ в $\mathfrak{p}$. Более того, $C(\mathfrak{p})$ — идеал в $\mathfrak{g}$, и его Q -ортогональное дополнение $\mathfrak{h} \oplus C(\mathfrak{p})^\perp$ в $\mathfrak{g}$ также является идеалом. Отметим, что подпространство $C(\mathfrak{p})^\perp$ нетривиально в силу эффективности пространства G/H .

Таким образом, $\mathfrak{g}$ раскладывается в $\text{Ad}(H)$ -инвариантную Q -ортогональную прямую сумму двух векторных подпространств

$$\mathfrak{g} = C(\mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h} \oplus C(\mathfrak{p})^\perp),$$

являющихся идеалами в $\mathfrak{g}$. Эти идеалы определяют G -левоинвариантные и H -правоинвариантные взаимно ортогональные трансверсальные интегрируемые распределения и тем самым слоения $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ на G .

Риманова субмерсия $q : (G, g_0) \rightarrow (M = G/H, g)$ проектирует эти слоения на G -инвариантные взаимно ортогональные и трансверсальные слоения $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ на (M, g) . При этом каждый слой слоения $\mathfrak{A}$ локально изометрично отображается на некоторый слой слоения $\overline{\mathfrak{A}}$. Вследствие биинвариантности метрики g_0 каждая 1-параметрическая подгруппа в G и ее левые и правые сдвиги являются геодезическими в (G, g_0) . Отсюда вытекает вполне геодезичность слоений $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ в (G, g_0) . Кроме того, на основании следствия 1.5, каждая 1-параметрическая подгруппа в G , касающаяся $\mathfrak{p}$ в e , является на всем своем протяжении горизонтальной геодезической в (G, g_0) , т. е. ортогональной во всякой своей точке к слоям римановой субмерсии q , и ее образ относительно q — геодезическая в (M, g) . Поэтому слоения $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ также вполне геодезические. При этом вследствие определения пространств $C(\mathfrak{p})$, $C(\mathfrak{p})^\perp$, все слои слоения $\overline{\mathfrak{A}}$ плоские, а все слои слоения $\overline{\mathfrak{B}}$ имеют положительную кривизну Риччи и поэтому (вследствие однородности и теоремы 1.22) компактны и имеют конечную фундаментальную группу. Кроме того, риманово пространство (M, g) локально изометрично прямому метрическому произведению (произвольно выделенных) слоев слоений $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, снабженных

индуцированной метрикой. Этого не может быть для компактного и односвязного многообразия M , противоречие.

Таким образом, подпространство $C(\mathfrak{p}) = \{X \in \mathfrak{p} \mid \text{Ric}(X, X) = 0\} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}$ тривиально, и нормальное однородное риманово многообразие $(M = G/H, g)$ действительно имеет положительную кривизну Риччи.

Необходимость условия 2). Если однородное эффективное пространство $M = G/H$ допускает G -инвариантную риманову метрику положительной кривизны Риччи, то вследствие необходимости условия 1) M и G компактны, а $\pi_1(M)$ конечна. Так как группа Ли G компактна, то вследствие предложения 2.19 и теоремы 2.17 ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{l}$ — полупростая алгебра Ли. При этом L имеет алгебру Ли $\mathfrak{l}$ и $G = L \cdot C$, где C — связная центральная подгруппа в G с алгеброй Ли $\mathfrak{c}$. Вследствие компактности и связности группы G $G = \exp(\mathfrak{g})$. Поэтому если подгруппа L Леви в G не транзитивна на M , то $G \neq L \cdot H$ и $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{l} + \mathfrak{h}$; тогда в обозначениях из доказательства достаточности условия 1) $\{0\} \neq (\mathfrak{l} + \mathfrak{h})^\perp \subset \mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}$ при любом $\text{Ad}(G)$ -инвариантном ($=\text{ad}(\mathfrak{g})$ -инвариантном) скалярном произведении Q . Как и в доказательстве достаточности условия 1), получим противоречие.

Достаточность условия 2) вытекает из достаточности условия 1) и следующей леммы.

Лемма 4.4. *Однородное пространство $M = G/H$ связной компактной полупростой группы Ли G по ее замкнутой подгруппе H имеет конечную фундаментальную группу.*

◁ Как известно, каноническая проекция $q : G \rightarrow G/H = M$ является локально тривиальным расслоением (см., например, предложение 4.1 и теорему 1.25). Рассмотрим следующий отрезок точной гомотопической последовательности этого расслоения [53, 59, 60]:

$$\pi_1(H) \rightarrow \pi_1(G) \rightarrow \pi_1(G/H) \rightarrow \pi_0(H) \rightarrow \pi_0(G).$$

Здесь $\pi_0(G) = G/G_e = \{1\}$, группа $\pi_0(H) = H/H_e$ конечна вследствие компактности H (H_e и G_e — компоненты связности единицы в группах H и G , являющиеся их открытыми нормальными подгруппами). По теореме 2.19 группа $\pi_1(G)$ конечна. Следовательно, и группа $\pi_1(G/H)$ конечна. ▷

Теорема 4.24. 1) В условиях теоремы 4.23 с неполупростой группой Ли G для любой G -инвариантной нормальной римановой метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $M = G/H$ орбиты наибольшей связной центральной подгруппы $C \subset G$ в M являются плоскими торическими вполне геодезическими слоями G -инвариантного нетривиального главного расслоения $p : M \rightarrow M/C$. Здесь M/C — пространство орбит группы C в M , снабженное естественной римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, для которой p является римановой субмерсией.

2) Кроме того, $(M/C, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ — однородное риманово пространство $G/HC = (G/C)/(HC/C)$ компактной полупростой группы Ли (G/C) с (G/C) -инвариантной нормальной римановой метрикой положительной кривизны Риччи.

◁ 1) Из предложения 2.19 и теоремы 2.17 следует, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ неполупростой группы Ли G имеет разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{z}$ с нетривиальным центром $\mathfrak{z}$ и полупростым идеалом $\mathfrak{l}$. При этом $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h} = \{0\} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{p}$. Первое равенство — следствие эффективности пространства G/H , второе — конечности группы $\pi_1(G/H)$. Если $\dim \mathfrak{z} = m$, то C изоморфна m -мерному тору $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$, где $\mathbb{Z}^m$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$.

Так как C — центральная подгруппа в G , то все ее элементы являются переносами Клиффорда — Вольфа в пространстве $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, а все орбиты являются плоскими вполне геодезическими торами $\mathbb{T}^m$ в $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, на которых C действует просто транзитивно.

Эти орбиты определяют G -инвариантное слоение на M , так как C — центральная подгруппа в G . Вследствие транзитивности G на M естественная проекция

$$p : M = G/H \rightarrow M/C = G/HC = (G/C)/(HC/C)$$

определяет главное G -инвариантное расслоение со структурной группой C . Расслоение нетривиально. Иначе пространство M имело бы бесконечную фундаментальную группу.

2) Группа Ли G/C компактна и полупроста. Поэтому на основании леммы 4.4 фундаментальная группа

$$\pi_1(M/C) = \pi_1((G/C)/(HC/C))$$

конечна. Пусть

$$p_1 : G \rightarrow G/C, \quad q_1 : G/C \rightarrow M/C$$

— естественные проекции. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (G, (\cdot, \cdot)) & \xrightarrow{q} & (M, \langle \cdot, \cdot \rangle) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p \\ (G/C, (\cdot, \cdot)_1)M & \xrightarrow{q_1} & (M/C, \langle \cdot, \cdot \rangle_1). \end{array}$$

Здесь метрика $(\cdot, \cdot)_1$ выбрана так, чтобы p_1 было римановой субмерсией. Поскольку q, p, p_1 — римановы субмерсии, то и q_1 — риманова субмерсия. Так как метрика $(\cdot, \cdot)$ на G биинвариантна, то $(\cdot, \cdot)_1$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ биинвариантны и нормальны. G/C -инвариантная метрика на G/C и M/C соответственно. Тогда вследствие теоремы 4.23 $(M/C, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ имеет положительную кривизну Риччи. $\triangleright$

ПРИМЕР 17. В случае сферы $S^{2n+1} = U(n+1)/U(n)$, $\mathfrak{u}(n+1) = \mathfrak{su}(n+1) \oplus \mathfrak{z}$ с одномерным центром $\mathfrak{z}$. Этот пример интересен тем, что каноническая риманова метрика на S^{2n+1} не является нормальной для $U(n+1)/U(n)$. В то же время, группа $U(n+1)$ содержит простую транзитивную на S^{2n+1} подгруппу $SU(n+1)$ специальных унитарных матриц. Присутствие одномерной связной центральной подгруппы C в $U(n+1)$ дает главное $U(n+1)$ -инвариантное нетривиальное расслоение (Хопфа) сферы S^{2n+1} на вполне геодезические торы (в данном случае окружности) — орбиты группы C . База $\mathbb{C}P^n = U(n+1)/U(n)C$ расслоения — неэффективное однородное пространство с транзитивной эффективной простой группой Ли $SU(n+1) = U(n+1)/C$, допускающее инвариантную нормальную риманову метрику Фубини — Штуди положительной секционной кривизны $1/4 \leq K \leq 1$.

Задача классификации однородных римановых многообразий положительной кривизны Риччи очень сложна, она не решена даже в случае однородных римановых многообразий постоянной положительной кривизны Риччи (однородных многообразий Эйнштейна).

Отметим также, что в работе [175] изучалось поведение кривизны Риччи, а также секционной кривизны на группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой, а в [203] были даны двусторонние оценки кривизны Риччи, других типов кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантными римановыми метриками. Исследованию сигнатуры кривизны Риччи левоинвариантных метрик на

четырёхмерных группах Ли посвящены работы [43, 44], в которых также приведена обширная библиография по соответствующей тематике.

4.10.3. Однородные римановы пространства неположительной секционной кривизны. Важными примерами многообразий неположительной секционной кривизны являются симметрические пространства евклидова и некомпактного типов. При этом симметрические пространства ранга 1 некомпактного типа имеют отрицательную секционную кривизну. Тем не менее, существуют и другие однородные римановы многообразия с указанным свойством. Они достаточно подробно изучены, но здесь мы приведем лишь некоторые важные результаты. Имеет место следующая

Теорема 4.25 (Дж. Вольф [231]). *Однородное риманово многообразие M неположительной секционной кривизны изометрично произведению односвязного риманова многообразия M' с тем же свойством и плоского тора T^m .*

Эта теорема обобщает результат Ш. Кобаяси о том, что однородное риманово многообразие неположительной секционной кривизны и отрицательной кривизны Риччи односвязно [153]. В качестве следствия теоремы 4.25 в работе [231] показано, что на произвольном римановом многообразии неположительной секционной кривизны транзитивно действует некоторая разрешимая группа. Этот результат был (независимо) уточнен в работах [4, 138]: односвязное однородное риманово многообразие неположительной кривизны допускает просто транзитивную разрешимую группу движений, т. е. может быть представлено в виде разрешимой группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой. При доказательстве последнего результата ключевую роль играет классическая теорема Ж. Адамара и Э. Картана, утверждающая, что любая компактная группа движений односвязного многообразия неположительной секционной кривизны имеет неподвижную точку [58].

Отметим, что разрешимая группа Ли G с левоинвариантной римановой метрикой g неположительной кривизны обязана иметь весьма специальное алгебраическое строение. Пусть $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение на $\mathfrak{g} = LG$, порождающее такую метрику g .

Теорема 4.26 (Д. В. АЛЕКСЕЕВСКИЙ [4]). *В приведенных выше обозначениях имеют место $(\cdot, \cdot)$ -ортогональные разложения*

$$\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s} = Z(\mathfrak{g}) \oplus N(\mathfrak{s}) \oplus \mathfrak{a},$$

где $Z(\mathfrak{g})$ — центр $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, $N(\mathfrak{s}) = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ — нильрадикал в $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$ — коммутативная подалгебра в $\mathfrak{s}$.

Размерность пространства $\mathfrak{a}$ называют рангом метрической алгебры Ли $(\mathfrak{g}, (\cdot, \cdot))$ неположительной кривизны. В случае отрицательной секционной кривизны центр $Z(\mathfrak{g})$ тривиален, $\dim \mathfrak{a} = 1$ и существует $A_0 \in \mathfrak{a}$ такой, что симметрическая часть оператора $\text{ad}(A_0)|_{\mathfrak{g}'} : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}'$ (где $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = N(\mathfrak{s})$) положительно определена [4, 138]. Кроме того, справедлива следующая

Теорема 4.27 (Э. ХАЙНТЦЕ [138]). *Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ — ее производная алгебра. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

- 1) $\mathfrak{g}$ допускает скалярное произведение с отрицательной секционной кривизной;
- 2) $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}' + 1$ и существует $A_0 \in \mathfrak{g}$ такой, что все собственные числа оператора $\text{ad}(A_0)|_{\mathfrak{g}'}$ имеют положительную вещественную часть.

Необходимо отметить, что однородное риманово многообразие неположительной секционной кривизны может быть по-разному представлено в виде разрешимой группы Ли с левоинвариантной метрикой (множество примеров этого обсуждаются в работе [4]). Изучить все такие представления можно, зная структуру полной (связной) группы движений рассматриваемого многообразия. Частичные результаты в этом направлении получены в [4]. В работе [77] найдены необходимые и достаточные условия (сформулированные в определении 6.2 из этой работы) на разрешимые алгебры Ли, допускающие скалярное произведение с неположительной секционной кривизной. В работе [78] содержится детальное исследование групп движений однородных римановых многообразий неположительной секционной кривизны.

4.10.4. Однородные римановы пространства неположительной кривизны Риччи. Условие неположительности кривизны Риччи позволяет сделать некоторые выводы об алгебраическом и топологическом строении однородного риманова многообразия. Снача-

ла мы выясним, насколько ограничительным является условие компактности. Имеет место следующая

Теорема 4.28 [65, теорема 2.10]. *Если киллингово поле X на компактном римановом многообразии (M, g) удовлетворяет условию $\text{Ric}(X, X) \leq 0$, то X параллельно на (M, g) , и автоматически $\text{Ric}(X, X) \equiv 0$.*

Из этой теоремы легко получается

Следствие 4.3. *Если компактное однородное риманово многообразие (M, g) имеет неположительную кривизну Риччи, то оно является евклидовым тором. В частности, его полная связная группа движений коммутативна.*

Из следствия 4.3 получаем, что любое однородное риманово многообразие (M, g) отрицательной кривизны Риччи обязано быть некомпактным (также как и любая его транзитивная группа движений).

Простое описание допускают однородные римановы многообразия с нулевой кривизной Риччи.

Теорема 4.29 (Д. В. АЛЕКСЕЕВСКИЙ, Б. Н. КИММЕЛЬ-ФЕЛЬД [5]). *Однородное риманово многообразие нулевой кривизны Риччи является плоским, т. е. изометрично прямому метрическому произведению евклидова пространства и плоского тора.*

Естественными примерами однородных римановых многообразий отрицательной кривизны Риччи являются симметрические пространства некомпактного типа. Помимо этих пространств, имеется множество примеров однородных римановых многообразий отрицательной кривизны Риччи с полупростой транзитивной группой движений. Инвариантные метрики отрицательной кривизны Риччи построены на многих полупростых группах Ли (см., например, построение левоинвариантных римановых метрик отрицательной кривизны Риччи на группах $SL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 3$, в работе [168]) и на более общих однородных пространствах полупростых групп Ли (например, в работе [85] построены инвариантные римановы метрики отрицательной кривизны Риччи на пространствах $SO_0(n, 2)/SO(n)$, $n \geq 2$).

Но гораздо более обильным источником примеров метрик отрицательной кривизны Риччи являются неунимодулярные разрешимые группы Ли со специальными левоинвариантными метриками.

Например, известно большое количество эйнштейновых левоинвариантных метрик на разрешимых неунимодулярных группах Ли (кривизна Риччи при этом автоматически отрицательна). Более подробно о таких многообразиях (так называемых *эйнштейновых солвмногообразиях*) можно узнать из работ [7, гл. 4] и [136].

Удобного описания однородных римановых многообразий отрицательной кривизны Риччи в настоящее время не получено. Не известен также и ответ на следующий

Вопрос 4. *Какие однородные пространства (в частности, группы Ли) допускают инвариантные римановы метрики отрицательной кривизны Риччи?*

ГЛАВА 5

МНОГООБРАЗИЯ С ОДНОРОДНЫМИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ

5.1. Однородные геодезические в римановых многообразиях

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 95. Геодезическая γ риманова многообразия (M, g) называется *однородной*, если она является орбитой однопараметрической подгруппы $\gamma(t) \subset \text{Isom}(M, g)$ (и, соответственно, интегральной кривой киллингова поля, порождающего эту подгруппу).

Пусть (M, g) — полное риманово многообразие, а X — поле Киллинга на (M, g) . Отметим, что интегральные кривые поля X являются в точности орбитами порождаемой полем X однопараметрической группы движений многообразия (M, g) . Рассмотрим произвольную точку $x \in M$, в которой $X(x) \neq 0$. Напомним, что согласно пункту 3) из теоремы 3.3 интегральная кривая поля X , проходящая через точку x , является геодезической тогда и только тогда, когда x является критической точкой функции $y \in M \mapsto g_y(X, X)$.

Известна следующая

Теорема 5.1 [161]. Каждое однородное риманово многообразие имеет по крайней мере одну однородную геодезическую, проходящую через любую наперед заданную точку.

В частном случае групп Ли этот результат был получен ранее в работе [39].

Отметим, что однородные геодезические соответствуют *относительным равновесиям* (*relative equilibria*) геодезического потока, рассматриваемого как гамильтонова система на кокасательном расслоении (см., например, работы [166, 216] с обширными списками литературы).

5.2. Геодезически орбитальные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 96. Риманово многообразие (M, g) называется многообразием с однородными геодезическими или геодезически орбитальным многообразием (кратко, *ГО-многообразием*), если любая геодезическая γ в M является орбитой однопараметрической подгруппы полной группы движений (M, g) (т. е. геодезическая γ однородна).

Очевидно, что любое связное геодезически орбитальное риманово многообразие является однородным. Поскольку на заданном многообразии могут транзитивно действовать различные группы движений, полезно рассмотреть следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 97. Риманово однородное пространство $(G/H, g)$, где H — компактная подгруппа группы Ли G и g — G -инвариантная риманова метрика, называется геодезически орбитальным пространством (кратко, *ГО-пространством*), если любая его геодезическая γ является орбитой однопараметрической подгруппы группы G .

Понятия геодезически орбитальных многообразий и пространств ввели О. Ковальский и Л. Ванхекке, инициировавшие их систематическое изучение, в работе [162].

ГО-пространства можно рассматривать как естественное обобщение симметрических пространств, классифицированных Э. Картаном [40]. Действительно, односвязное симметрическое пространство можно определить как риманово многообразие (M, g) , каждая геодезическая $\gamma \subset M$ которого является орбитой однопараметрической группы $g(t)$ трансвекций, т. е. однопараметрической группы изометрий, которая сохраняет γ и индуцирует параллельный перенос вдоль γ . Если отбросить предположение о порождении параллельного переноса, мы получаем определение ГО-пространства.

Но класс ГО-пространств гораздо шире класса симметрических пространств. Каждое однородное пространство $M = G/H$ компактной группы Ли G допускает метрику g такую, что (M, g) является ГО-пространством. Для этого достаточно взять инвариантную нормальную риманову метрику g на $M = G/H$. Более того, любое *естественно редуцируемое* однородное пространство является геодезически орбитальным.

Отметим, что О. Ковальский и Л. Ванхекке в [162] классифицировали геодезически орбитальные пространства размерности ≤ 6 . Оказалось, что все геодезически орбитальные пространства в размерности ≤ 5 являются естественно редуктивными. В то же время в размерности 6 существуют трех- и двухпараметрические семейства геодезически орбитальных пространств, которые не являются естественно редуктивными. Среди этих семейств фигурирует компактное однородное пространство $SO(5)/U(2)$ с двухпараметрическим семейством инвариантных метрик. В работах [119, 131] построены примеры семимерных геодезически орбитальных пространств, не являющихся естественно редуктивными.

Тесно связанным с классом геодезически орбитальных пространств является также класс *слабо симметрических* пространств, введенный А. Сельбергом [206].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 98. Риманово многообразие (M, g) называется *слабо симметрическим пространством*, если для каждой пары точек $p, q \in M$ существует изометрия M , переставляющая точки p и q .

Понятно, что любое симметрическое пространство является слабо симметрическим и естественно редуктивным. Также слабо симметрическими пространствами являются геодезические сферы в симметрических пространствах ранга 1. Отметим, что существуют слабо симметрические пространства, не являющиеся даже естественно редуктивными. Например, такими пространствами являются геодезические сферы в проективной плоскости Кэли $\mathbb{C}a\mathbb{P}^2$.

А. Сельберг доказал, что каждое слабо симметрическое риманово многообразие M *коммукативно*, т. е. допускает транзитивную группу Ли движений G такую, что алгебра всех G -инвариантных дифференциальных операторов на M коммутативна [206]. Если G связна и $M = G/H$, то это эквивалентно свойству, что функциональное пространство $L^1(H \backslash G/H)$ коммутативно, т. е. (G, H) — *пара Гельфанда*, или свойству, что для каждого унитарного неприводимого представления группы G размерность H -неподвижного множества не больше 1, т. е. (G, H) — *сферическая пара*. Х. Лоре в работе [167] построил некомпактное коммукативное, не слабо симметрическое риманово многообразие. В то же время при некоторых ограничениях на транзитивную группу движений классы слабо симметрических и коммукативных пространств совпадают [70]. В частности, если (G, H) — сферическая пара со связной компактной простой группой

Ли и замкнутой подгруппой H , то G/H слабо симметрично [185]. Все такие пары известны из [164, 185]. Классификация слабо симметрических редуктивных однородных пространств была получена О. С. Якимовой [64]. Более подробно со свойствами слабо симметрических пространств можно познакомиться по книге Дж. А. Вольфа [230]. Много примеров слабо симметрических пространств построено В. Циллером [242].

Принципиальным для нас является следующий результат, полученный Ю. Берндтом, О. Ковальским и Л. Ванхекке в работе [94].

Теорема 5.2. *Каждое слабо симметрическое пространство M является геодезически орбитальным.*

Оригинальный подход к изучению геодезически орбитальных пространств, основанный на понятии геодезического графа (см. следующий раздел) предложен О. Ковальским, С. Никцевич, З. Влашекком [159, 160].

Строение геодезически орбитальных пространств изучала также К. Гордон [131], получившая ряд структурных и классификационных результатов. В частности, она классифицировала все нильпотентные группы Ли с левоинвариантными римановыми метриками, являющиеся ГО-многообразиями. Оказалось, что такие метрики существуют лишь на двуступенно нильпотентных группах Ли. Также в работе [131] даны некоторые конструкции геодезически орбитальных пространств с компактной и некомпактной полупростой группами движений. Еще одним результатом (который мы рассмотрим отдельно) К. Гордон является классификация ГО-многообразий неположительной кривизны Риччи (см. теорему 5.10).

Среди других работ следует выделить работы Х. Тамару [213] и [214], результаты З. Душека [116, 117], а также статью Д. В. Алексеевского и А. Арванитоеоргоса [72], посвященную классификации инвариантных геодезически орбитальных метрик на (обобщенных) флаговых многообразиях. В частности, в [72] был получен следующий классификационный результат.

Теорема 5.3. *Пусть $(G/H, g)$ — риманово флаговое многообразие с простой группой Ли G и инвариантной метрикой g , являющееся геодезически орбитальным и отличным от естественно редуктивного. Тогда либо $G/H = SO(2l+1)/U(l)$, либо $G/H = Sp(l)/U(1) \cdot Sp(l-1)$,*

где $l \geq 2$. При этом в обоих случаях множество инвариантных метрик с таким свойством является однопараметрическим семейством (с точностью до подобия).

Отметим, что классификация общих флаговых многообразий сводится к классификации односвязных неприводимых флаговых многообразий, полная группа движений которых обязана быть простой группой Ли. Отметим также, что указанные в вышеприведенной теореме геодезически орбитальные метрики являются слабо симметрическими, что было показано ранее В. Циллером в работе [242]. В разделе 5.8 приводится классификация компактных геодезически орбитальных римановых многообразий положительной эйлеровой характеристики, полученная в работе [73] и обобщающая теорему 5.3.

Важный собственный подкласс класса геодезически орбитальных многообразий составляют обобщенные нормальные однородные римановы многообразия, которым посвящена следующая глава.

Отметим также следующий результат (см. подробности в [146]).

Теорема 5.4 [146]. *Геодезический поток на произвольном ГО-пространстве вполне интегрируем в некоммутативном смысле.*

5.3. Строение геодезически орбитальных пространств

Как обычно, символ M_x далее обозначает касательное пространство к многообразию M в точке $x \in M$.

Лемма 5.1. *Пусть (M, g) — риманово многообразие, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли его киллинговых полей. Тогда (M, g) является ГО-многообразием тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in M$ и любого вектора $v \in M_x$ существует поле Киллинга $X \in \mathfrak{g}$ такое, что $X(x) = v$ и x является критической точкой функции $y \in M \mapsto g_y(X, X)$. Если (M, g) однородно, то последнее условие эквивалентно такому: для любого поля $Y \in \mathfrak{g}$ выполнено равенство $g_x([Y, X], X) = 0$.*

◁ Согласно пункту 3) теоремы 3.3 интегральная кривая X , проходящая через точку $x \in M$, является геодезической тогда и только тогда, когда x — критическая точка функции $y \in M \mapsto g_y(X, X)$. Если многообразие (M, g) однородно (т. е. группа изометрий транзитивна на нем), то вследствие теоремы 3.2 это условие эквивалентно

равенству

$$Y \cdot g(X, X)|_x = 2g_x([Y, X], X) = 0$$

для каждого $Y \in \mathfrak{g}$. $\triangleright$

Пусть $(M = G/H, g)$ — произвольное однородное риманово пространство. Далее мы зафиксируем редуктивное разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} \quad (5.1)$$

алгебры Ли $\mathfrak{g} = LG$, где $\mathfrak{p}$ естественным образом отождествляется с касательным пространством M_o , $o = eH$, и скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{p}$ соответствует $g_o(\cdot, \cdot)$ на M_o . Для произвольного подпространства $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$ будем обозначать через $\mathfrak{m}^\perp$ его ортогональное дополнение в $\mathfrak{p}$ относительно $(\cdot, \cdot)$. Поскольку мы отождествляем элементы $X, Y \in \mathfrak{p}$ с соответствующими киллинговыми полями на (M, g) , то справедливы формулы (4.7) и (4.8).

Справедлив следующий результат, установленный Б. Костантом [154], Э. Б. Винбергом [28], О. Ковальским и Л. Ванхекке [162].

Теорема 5.5. Пусть $(M = G/H, g)$ — однородное риманово многообразие, $Y \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{p}$. Тогда $\gamma(t) = \exp(t(X + Y))(o)$ есть геодезическая линия тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

- 1) $[X, Y] = U(X, X)$;
- 2) $([Y, X], Z) = (X, [X, Z]_{\mathfrak{p}})$ для всех $Z \in \mathfrak{p}$;
- 3) $([X + Y, Z]_{\mathfrak{p}}, X) = 0$ для всех $Z \in \mathfrak{p}$.

$\triangleleft$ Ясно, что 1) эквивалентно 2) в силу формулы (4.7). Равенство 3) эквивалентно 2), так как $([Y, Z], X) = -(Z, [Y, X])$ в силу косимметричности оператора ad_Y на пространстве $\mathfrak{p}$. С другой стороны, из леммы 5.1. сразу следует, что равенство 3) эквивалентно тому, что кривая $\gamma(t) = \exp(t(X + Y))(o)$ является геодезической. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 99. Пусть $(M = G/H, g)$ — однородное риманово пространство. Вектор вида $X + Y$, где $X \neq 0 \in \mathfrak{p}$, $Y \in \mathfrak{h}$, называется *геодезическим*, если выполнено одно из следующих трех эквивалентных условий:

- 1) кривая $\gamma(t) = \exp(t(X + Y))(o)$ является геодезической;
- 2) $([X + Y, Z]_{\mathfrak{p}}, X) = 0$ для всех $Z \in \mathfrak{p}$;
- 3) $[X, Y] = U(X, X)$, где U определяется равенством (4.7).

В качестве непосредственного следствия получается

Теорема 5.6. *Однородное риманово многообразие $(M = G/H, g)$ является геодезически орбитальным пространством тогда и только тогда, когда для каждого $X \in \mathfrak{p}$ существует $H_X \in \mathfrak{h}$ такой, что $X + H_X$ — геодезический вектор.*

ЗАМЕЧАНИЕ 26. Если $(M = G/H, g)$ — однородное риманово многообразие с естественно редуцированной относительно $\mathfrak{p}$ метрикой g , то для каждого $X \in \mathfrak{p}$ сам вектор X является геодезическим (т. е. в этом случае $H_X = 0$). Таким образом, естественно редуцированные пространства являются в определенном смысле самыми простыми геодезически орбитальными пространствами.

Теорема 5.6 показывает, что свойство быть ГО-пространством полностью определяется редуцированным разложением (5.1) и евклидовой метрикой g_o на $\mathfrak{p}$. В частности, если $(M = G/H, g)$ — ГО-пространство, то и каждое его риманово накрытие $(M' = G'/H', g')$ также является геодезически орбитальным. Кроме того, прямое метрическое произведение римановых пространств является ГО-пространством тогда и только тогда, когда этим свойством обладает каждый из множителей в этом произведении.

ПРИМЕР 18. Компактная группа Ли G с левоинвариантной метрикой g является ГО-пространством тогда и только тогда, когда метрика g биинвариантна, т. е. соответствующее скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ Ad_G -инвариантно. Действительно, условие того, что (G, g) ГО-пространство, может быть записано в виде $0 = (X, [X, Y]) = -(\text{ad}_Y X, X) = 0$ (поскольку алгебра изотропии тривиальна). Это и показывает, что скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ Ad_G -инвариантно.

Отметим, что компактная группа Ли G может допускать и небиинвариантные левоинвариантные метрики g с однородными геодезическими. Но соответствующие ГО-пространства имеют вид L/H , где группа L содержит G в качестве собственной подгруппы (другими словами, G не является полной группой движений), см. подробности, например, в [113].

Далее мы приведем несколько полезных свойств общих ГО-пространств. Для произвольного подпространства $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ и любого вектора $V \in \mathfrak{g}$ будем использовать символ $\text{ad}_V^{\mathfrak{l}}$ для обозначения ограничения оператора ad_V на $\mathfrak{l}$, т. е. $\text{ad}_V^{\mathfrak{l}} : \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{l}$, $\text{ad}_V^{\mathfrak{l}}(X) = [V, X]_{\mathfrak{l}}$.

Лемма 5.2. Пусть $(M = G/H, g)$ — ГО-пространство, $\mathfrak{m}$ — $\text{Ad}(H)$ -инвариантное подпространство в $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{m}^\perp$ — его $(\cdot, \cdot)$ -ортогональное дополнение в $\mathfrak{p}$. Тогда для произвольного $V \in \mathfrak{m}$ оператор $\text{ad}_V^{\mathfrak{m}^\perp}$ является кососимметричным, что эквивалентно включению $U(\mathfrak{m}^\perp, \mathfrak{m}^\perp) \subset \mathfrak{m}^\perp$. Если дополнительно $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] = 0$, то и оператор $\text{ad}_V^{\mathfrak{p}}$ кососимметричен.

◁ Для произвольного $X \in \mathfrak{m}^\perp$ существует $H_X \in \mathfrak{h}$ такой, что $([H_X + X, Y]_{\mathfrak{p}}, X) = 0$ для всех $Y \in \mathfrak{p}$ (см. теорему 5.6). Следовательно,

$$0 = ([H_X + X, V]_{\mathfrak{p}}, X) = ([H_X, V]_{\mathfrak{p}}, X) + ([X, V]_{\mathfrak{p}}, X) = ([X, V]_{\mathfrak{p}}, X),$$

поскольку $[H_X, V] \in \mathfrak{m}$ и $X \in \mathfrak{m}^\perp$. Если к тому же $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] = 0$, то то же рассуждение годится для любого $X \in \mathfrak{p}$ (в этом случае $[H_X, V] \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] = 0$). ▷

Отметим примечательное свойство группы движений ГО-пространства (см. [131]).

Лемма 5.3. Для любого ГО-пространства $(M = G/H, g)$ группа G унимодулярна.

◁ Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g} = LG$ не является унимодулярной и рассмотрим ее собственное подпространство

$$\mathfrak{u} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{trace}(\text{ad}_X) = 0\}.$$

Очевидно, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{u}$. Поскольку $\text{ad}_{[X, Y]} = [\text{ad}_X, \text{ad}_Y]$ и $\text{trace}(\text{ad}_{[X, Y]}) = \text{trace}([\text{ad}_X, \text{ad}_Y]) = 0$, то $[\mathfrak{u}, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{u}$, следовательно, $\mathfrak{u}$ является идеалом в $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{u}$, и рассмотрим $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1^\perp$ — (нетривиальное) $(\cdot, \cdot)$ -ортогональное дополнение к $\mathfrak{p}_1$ в $\mathfrak{p}$. Поскольку $\mathfrak{u}$ является идеалом в $\mathfrak{g}$ и скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -инвариантно, $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ являются $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -инвариантными. С другой стороны, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}_2] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{u}$. Следовательно, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}_2] = 0$. Теперь рассмотрим некоторый ненулевой вектор $Y \in \mathfrak{p}_2$. По построению $\text{trace}(\text{ad}_Y) \neq 0$. Но с другой стороны, по теореме 5.6 для каждого $X \in \mathfrak{p}$ найдется $H_X \in \mathfrak{h}$ со свойством $([H_X + X, Y]_{\mathfrak{p}}, X) = 0$. Так как $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}_2] = 0$, мы получаем $([X, Y]_{\mathfrak{p}}, X) = 0$ (см. также лемму 5.2), что влечет $\text{trace}(\text{ad}_Y) = 0$, противоречие. ▷

Далее мы более детально изучим геодезические векторы. Необходимо отметить, что в общем случае по данному $X \in \mathfrak{p}$ геодезический вектор $X + H_X$ (где $H_X \in \mathfrak{h}$) не определяется однозначно (см. определение 99).

Для заданного $X \in \mathfrak{p}$ (на однородном римановом пространстве $(M = G/H, g)$) определим (следуя работам [159, 162, 212]) множества

$$q_X = \{A \in \mathfrak{h} \mid [A, X] = 0\}, \quad (5.2)$$

$$N_X = \{B \in \mathfrak{h} \mid [B, q_X] \subset q_X\}, \quad c'_X = \{B \in \mathfrak{h} \mid [B, q_X] = 0\}. \quad (5.3)$$

Я. Сенте в своей работе [212] получил для многообразий со связностью результаты, составляющие содержание следующей теоремы, для риманова случая изложение адаптировано в [162].

Теорема 5.7. *В вышеприведенных обозначениях справедливы следующие утверждения:*

1) Если $X + Y$ — некоторый геодезический вектор, где $X \in \mathfrak{p}$ и $Y \in \mathfrak{h}$, то множество всех геодезических векторов с такой же $\mathfrak{p}$ -компонентой имеет вид $X + Y + q_X$.

2) Если $X + Y$ — некоторый геодезический вектор с $\mathfrak{p}$ -компонентой X , то $Y \in N_X$.

3) Рассмотрим Q -ортогональное разложение $N_X = q_X \oplus c_X$ относительно произвольного $\text{Ad}(H)$ -инвариантного скалярного произведения Q на $\mathfrak{h}$. Тогда $c_X \subset c'_X$.

4) Если существует геодезический вектор $X + Y$ с $\mathfrak{p}$ -компонентой X , то существует и геодезический вектор вида $X + Y'$, где $Y' \in c_X \subset c'_X$.

◁ 1) Условие геодезичности вектора $X + Y$ может быть записано в виде $[X, Y] = U(X, X)$, откуда сразу получаем нужное утверждение.

2) Нам надо доказать, что $[Y, q_X] \subset q_X$, что равносильно равенству $[[X, Y], q_X] = [[X, Y], q_X] + [[q_X, X], Y] = -[[Y, q_X], X] = 0$ (мы воспользовались тождеством Якоби и определением q_X). Поскольку $[X, Y] = U(X, X) \in \mathfrak{p}$, то нам достаточно показать, что для любого $Z \in \mathfrak{p}$ и любого $A \in q_X$ выполнено равенство $0 = ([A, [X, Y]], Z) = ([A, U(X, X)], Z) = -(U(X, X), [A, Z]) = -([A, Z], X)_{\mathfrak{p}, X}$ (здесь мы воспользовались $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -инвариантностью скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ и определением формы U). Теперь из тождества Якоби получаем $[[A, Z], X]_{\mathfrak{p}} = -[[Z, X], A]_{\mathfrak{p}} - [[X, A], Z]_{\mathfrak{p}} = -[[Z, X]_{\mathfrak{p}}, A]$, поскольку $[X, A] = 0$. Таким образом, нам достаточно убедиться в истинности равенства $0 = ([Z, X]_{\mathfrak{p}}, A, X)$, но $([Z, X]_{\mathfrak{p}}, A, X) = ([Z, X]_{\mathfrak{p}}, [A, X]) = 0$, поскольку $A \in q_X \subset \mathfrak{h}$. Таким образом, утверждение доказано.

3) Очевидно, что q_X является алгеброй Ли и идеалом в алгебре Ли N_X (что легко следует из тождества Якоби), поэтому в силу $\text{Ad}(H)$ -инвариантности скалярного произведения Q , c_X также является идеалом в N_X (см. предложение 2.17), следовательно, $[c_X, q_X] = 0$, т. е. $c_X \subset c'_X$.

4) Пусть $Y' — Q$ -ортогональная проекция вектора $Y \in N_X$ на $c_X (\subset c'_X)$. Тогда $Y - Y' \in q_X$, и согласно утверждению 1) вектор $X + Y'$ является геодезическим. $\triangleright$

Предположим теперь, что однородное риманово пространство $(M = G/H, g)$ является геодезически орбитальным. Тогда для каждого нетривиального вектора $X \in \mathfrak{p}$ существует $Y \in \mathfrak{h}$ такой, что вектор $X + Y$ геодезичен, причем $Y \in N_X$ вследствие п. 2) теоремы 5.7. Пусть $\xi(X) — Q$ -ортогональная проекция вектора Y на c_X , как в доказательстве пункта 4) теоремы 5.7. Нетрудно убедиться в том, что $\xi(X)$ не зависит от выбора $\text{Ad}(H)$ -инвариантного скалярного произведения Q на $\mathfrak{h}$. Положим также $\xi(0) = 0$. Тем самым мы получаем отображение

$$\xi : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{h} \quad (5.4)$$

Нетрудно понять, что это отображение является $\text{Ad}(H)$ -эквивариантным, т. е. $\xi(\text{Ad}(a)(X)) = \text{Ad}(a)(\xi(X))$ для всех $a \in H$ и $X \in \mathfrak{p}$. Кроме того, по построению вектор $X + \xi(X)$ геодезичен для всех нетривиальных $X \in \mathfrak{p}$. Отображение (5.4) называется *геодезическим графом* для геодезически орбитального пространства $(M = G/H, g)$ [162, 212]. Отметим, что зависимость конструкции геодезического графа от выбора редуктивного разложения минимальна (граф легко пересчитывается для другого разложения). Необходимо также отметить, что это обстоятельство позволяет избежать рассмотрения различных редуктивных разложений для пары алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ при проверке инвариантной метрики на естественную редуктивность. Точнее, справедлив следующий результат [162, 212].

Теорема 5.8 (Я. СЕНТЕ). *Геодезический граф (как отображение линейных пространств) либо линеен, что эквивалентно естественной редуктивности риманова пространства $(M = G/H, g)$ относительно некоторого редуктивного разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}'$; либо не является дифференцируемым в точке $0 \in \mathfrak{p}$.*

Отметим, что явные конструкции геодезических графов для некоторых геодезически орбитальных пространств приведены в ра-

ботах [116, 117, 118, 159, 160, 162]. В этих же работах можно найти более подробную информацию о геодезических графах и познакомиться с рядом открытых проблем в этой области.

5.4. Киллинговы поля постоянной длины на ГО-многообразиях

В этом разделе мы поясним связь между векторными полями Киллинга постоянной длины на заданном геодезически орбитальном римановом многообразии (M, g) и структурой его полной группы изометрий. Как обычно, алгебра Ли RG полной связной группы движений $G = \text{Isom}_0(M, g)$ многообразия (M, g) отождествляется с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ векторных полей Киллинга на (M, g) . Имеет место следующий примечательный результат [188].

Теорема 5.9. Пусть (M, g) — геодезически орбитальное риманово многообразие, а $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли его киллинговых полей. Предположим, что $\mathfrak{a}$ — коммутативный идеал в $\mathfrak{g}$. Тогда любое поле $X \in \mathfrak{a}$ имеет постоянную длину на (M, g) .

◁ Зафиксируем некоторую точку x многообразия M . Мы покажем, что x является критической точкой функции $y \in M \mapsto g_y(X, X)$. Поскольку многообразие (M, g) однородно, то достаточно доказать, что $g_x([Y, X], X) = 0$ для любого поля $Y \in \mathfrak{g}$ (см. лемму 5.1).

Рассмотрим произвольное поле $Y \in \mathfrak{a}$, тогда

$$Y \cdot g(X, X) = 2g([Y, X], X) = 0$$

на M , поскольку идеал $\mathfrak{a}$ коммутативен.

Теперь рассмотрим поле $Y \in \mathfrak{g}$ такое, что $g_x(Y, U) = 0$ для любого $U \in \mathfrak{a}$. Покажем, что $g_x([Y, X], X) = 0$. По лемме 5.1 для вектора $X(x) \in M_x$ существует киллингово поле $Z \in \mathfrak{g}$ такое, что

$$Z(x) = X(x), \quad g_x([V, Z], Z) = 0$$

для всех $V \in \mathfrak{g}$. В частности, $g_x([Y, Z], Z) = 0$. Далее, $W = X - Z$ зануляется в точке x и мы имеем

$$\begin{aligned} g_x([Y, X], X) &= g_x([Y, Z + W], Z + W) = g_x([Y, Z + W], Z) = \\ &= g_x([Y, Z], Z) + g_x([Y, W], Z) = g_x([Y, W], Z). \end{aligned}$$

Отметим, что $g_x([Y, W], Z) = -g_x([W, Y], Z) = g_x(Y, [W, Z]) = 0$, поскольку $W(x) = 0$ ($0 = W \cdot g(Y, Z)|_x = g_x([W, Y], Z) + g_x(Y, [W, Z])$) и $[W, Z] = [X, Z] \in \mathfrak{a}$. Следовательно, $g_x([Y, X], X) = 0$. Таким образом, x является критической точкой функции $y \in M \mapsto g_y(X, X)$. Поскольку точка $x \in M$ выбиралась произвольно, то все точки многообразия M являются критическими точками функции $y \in M \mapsto g_y(X, X)$. Поскольку M предполагается связным, то векторное поле Киллинга X имеет постоянную длину на (M, g) . $\triangleright$

Отметим, что этот результат может быть легко обобщен для ряда случаев, когда $\mathfrak{g}$ является собственной подалгеброй алгебры Ли полной (связной) группы движений риманова многообразия (M, g) . Для этого достаточно, чтобы связная подгруппа G (с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$) полной связной группы движений $\text{Isom}_0(M, g)$ была такой, что $(M = G/H, g)$ является геодезически орбитальным римановым пространством.

5.5. Геодезически орбитальные многообразия неположительной кривизны Риччи

В этом разделе мы докажем теорему 5.10, характеризующую геодезически орбитальные римановы многообразия неположительной кривизны Риччи. Примерами таких многообразий являются евклидовы пространства, а также симметрические пространства некомпактного типа. Оказывается, что симметрическими пространствами список ГО-многообразий неположительной кривизны Риччи и исчерпывается.

Теорема 5.10 (К. Гордон [131]). *Каждое геодезически орбитальное риманово многообразие с неположительной кривизной Риччи является симметрическим пространством.*

ЗАМЕЧАНИЕ 27. Необходимо заметить, что оригинальное доказательство этой теоремы [131, теорема 5.1] содержит ошибку в утверждении «Поскольку U^*/L^* является компактным однородным пространством, его кривизна Риччи Ric^* неотрицательна». Тем не менее, доказательство в [131] может быть скорректировано. Но здесь мы приводим более простое доказательство из работы [188], в котором однако существенно используются некоторые конструкции из [131].

Достаточно доказать теорему 5.10 для *односвязных* многообразий. Действительно, если однородное риманово многообразие M име-

ет в качестве универсальной накрывающей риманово симметрическое пространство неположительной кривизны Риччи (или, что эквивалентно, неположительной секционной кривизны), то оно само является симметрическим [34, 58].

Пусть (M, g) — односвязное ГО-многообразие неположительной кривизны Риччи, и пусть G — его полная связная группа движений. Тогда G унимодулярна (лемма 5.3), а группа изотропии H является связной. Сначала мы сведем доказательство к случаю, когда группа G полупроста.

Предложение 5.1. *Пусть (M, g) — односвязное ГО-многообразие неположительной кривизны Риччи. Тогда оно является прямым метрическим произведением евклидова пространства $\mathbb{E}^m$ и односвязного ГО-многообразия (M_1, g_1) (неположительной кривизны Риччи) с полупростой группой движений.*

◁ В обозначениях теоремы 5.9, каждое киллингово поле $X \in \mathfrak{a}$ имеет постоянную длину на (M, g) . Поскольку кривизна Риччи неположительна, то по теореме 3.8 мы получаем, что $\text{Ric}(X, X) = 0$, и, более того, киллингово поле X параллельно на (M, g) , а риманово многообразие (M, g) является прямым метрическим произведением двух римановых многообразий, одно из которых одномерное многообразие, касательное к полю Киллинга X , а второе также является ГО-многообразием неположительной кривизны Риччи. Эту процедуру можно повторять до тех пор, пока второе из получающихся многообразий не будет иметь полупростую полную группу движений. ▷

Далее мы считаем, что группа G полупроста. Теперь мы рассмотрим редуктивное разложение (см. (5.1))

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p},$$

где $\mathfrak{g} = LG$, $\mathfrak{h} = LH$, и $\mathfrak{p}$ является ортогональным дополнением к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга $B_{\mathfrak{g}}$ (полупростой) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. пример 14). Риманова метрика g G -инвариантна и определяется $\text{Ad}(H)$ -инвариантным скалярным произведением $g = (\cdot, \cdot)$ на пространстве $\mathfrak{p}$. Теперь рассмотрим *максимальную компактно вложенную* подалгебру Ли $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ со свойством $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$.

Если $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$, то рассматриваемое нами многообразие является симметрическим пространством [34, 58]. Предположим теперь, что $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{k}$.

Тогда существуют $\text{Ad}(H)$ -инвариантные подпространства $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}$ такие, что $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = 0$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2$ и $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_1$.

Пусть K^* — связная компактная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{k}$, а H^* — ее подгруппа, соответствующая подалгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$. Поскольку $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_1$, пространство $\mathfrak{p}_1$ может быть отождествлено с касательным пространством в точке eH^* компактного однородного многообразия $M^* = K^*/H^*$. Мы рассмотрим K^* -инвариантную риманову метрику g^* на M^* , которая порождается скалярным произведением $(\cdot, \cdot)|_{\mathfrak{p}_1}$. Отметим, что K^* может действовать неэффективно на $M^* = K^*/H^*$, но это не имеет значения для вычисления кривизны Риччи многообразия (M^*, g^*) .

Выберем $(\cdot, \cdot)$ -ортонормированный базис $X_1, X_2, \dots, X_r$, $r = \dim(\mathfrak{p}_1)$, в $\mathfrak{p}_1$, и $(\cdot, \cdot)$ -ортонормированный базис $Y_1, Y_2, \dots, Y_s$, $s = \dim(\mathfrak{p}_2)$, в $\mathfrak{p}_2$. Обозначим тензор Риччи многообразия (M^*, g^*) через Ric^* , а формы Киллинга на $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{g}$ через $B_{\mathfrak{k}}$ и $B_{\mathfrak{g}}$ соответственно. Используя формулу для вычисления кривизны Риччи (см. теорему 4.17) и тот факт, что $\mathfrak{g}$ унимодулярна (для этого не обязательно обращаться к лемме 5.3, поскольку унимодулярной является любая полупростая алгебра Ли), мы получаем

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, X) &= -\frac{1}{2}B_{\mathfrak{g}}(X, X) - \frac{1}{2} \sum_i |[X, X_i]_{\mathfrak{p}}|^2 - \frac{1}{2} \sum_j |[X, Y_j]_{\mathfrak{p}}|^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i,j} ([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}, X)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j} ([Y_i, Y_j]_{\mathfrak{p}}, X)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} ([X_i, Y_j]_{\mathfrak{p}}, X)^2, \\ \text{Ric}^*(X, X) &= -\frac{1}{2}B_{\mathfrak{k}}(X, X) - \frac{1}{2} \sum_i |[X, X_i]_{\mathfrak{p}_1}|^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j} ([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}_1}, X)^2 \end{aligned}$$

для любого $X \in \mathfrak{p}_1$ ($\text{Ric}^*(X, X) = 0$ при $\dim(\mathfrak{p}_1) = 1$). По лемме 5.2

$$B_{\mathfrak{g}}(X, X) = B_{\mathfrak{k}}(X, X) + \sum_i ([X, [X, Y_i]_{\mathfrak{p}}, Y_i) = B_{\mathfrak{k}}(X, X) - \sum_i |[X, Y_i]_{\mathfrak{p}_2}|^2,$$

тогда, используя лемму 5.2 еще раз $(([X_i, Y_j]_{\mathfrak{p}}, X)^2 = ([Y_j, X_i]_{\mathfrak{p}_1}, X)^2 = ([Y_j, X]_{\mathfrak{p}_1}, X_i)^2, \sum_{i,j} ([X_i, Y_j]_{\mathfrak{p}}, X)^2 = \sum_j |[X, Y_j]_{\mathfrak{p}_1}|^2)$, мы получаем

Предложение 5.2 [131]. Для любого $X \in \mathfrak{p}_1$ выполнено равенство

$$\text{Ric}^*(X, X) = \text{Ric}(X, X) - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq s} ([Y_i, Y_j]_{\mathfrak{p}_1}, X)^2.$$

Поскольку $(M = G/H, g)$ имеет неположительную кривизну Риччи, то согласно предложению 5.2 мы получаем $\text{Ric}^*(X, X) \leq 0$ для любого $X \in \mathfrak{p}_1$, а равенство $\text{Ric}^*(X, X) = 0$ влечет $\text{Ric}(X, X) = 0$ и $([\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_2]_{\mathfrak{p}_1}, X) = 0$.

Так как $(M^* = K^*/H^*, g^*)$ является компактным однородным римановым многообразием с неположительной кривизной Риччи, то оно является евклидовым тором по следствию 4.3. Отсюда следует равенство $\text{Ric}^*(X, X) = \text{Ric}(X, X) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{p}_1$, то, что $\mathfrak{p}_1$ лежит в центре $\mathfrak{k}$, и $[\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_2] \subset \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_2$.

Пусть $\mathfrak{m} - B_{\mathfrak{g}}$ -ортогональное дополнение к $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{g}$. Хорошо известно (см., например, [58, гл. VI, § 2]), что $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$ и $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{m}$ (последнее равенство следует, например, из того, что симметрическое пространство некомпактного типа является прямым метрическим произведением (строго изотропно) неприводимых симметрических пространств); если $\mathfrak{h}_1 := [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$, то $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{m}$ является максимальным полупростым идеалом некомпактного типа в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Теперь мы покажем, что $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_2$. По последнему утверждению леммы 5.2 мы получаем, что для любого $U \in \mathfrak{p}_1$ оператор $\text{ad}_U^{\mathfrak{p}}$ кососимметричен ($[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}_1] = 0$ в силу того, что $\mathfrak{p}_1$ лежит в центре $\mathfrak{k}$). То же верно для любого $U \in \mathfrak{h}$ и, следовательно, для любого $U \in \mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_1$. Из соотношений $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}_1] = 0$ и $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{m}$ мы получаем

$$(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{m}) = (\mathfrak{p}_1, [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{p}}) = ([\mathfrak{k}, \mathfrak{p}_1]_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{m}) + (\mathfrak{p}_1, [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{p}}) = 0,$$

поскольку операторы $\text{ad}_U^{\mathfrak{p}}$ кососимметричны для всех $U \in \mathfrak{k}$. Это доказывает равенство $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_2$. Следовательно, $\mathfrak{h}_1 := [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = [\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_2] \subset \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_2$, и мы получаем включение $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$.

Пусть $\mathfrak{g}_2 - B_{\mathfrak{g}}$ -ортогональное дополнение к $\mathfrak{g}_1$ в $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{g}_2$ является максимальным компактным полупростым идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{h}_2 - B_{\mathfrak{g}}$ -ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}_1$ в $\mathfrak{h}$, то $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{p}_1$. Напомним, что $[\mathfrak{h}_2, \mathfrak{p}_1] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{p}_1] = 0$. Следовательно, $\mathfrak{h}_2$ является идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Поскольку пространство G/H эффективно, $\mathfrak{h}_2$ тривиально. Так как $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{g}_2$ коммутативно ($\mathfrak{p}_1$ лежит в центре $\mathfrak{k}$), то оно тоже тривиально (иначе алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ не была бы полупростой). Таким образом, $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$, и $(M = G/H, g)$ является симметрическим пространством. Теорема 5.10 полностью доказана.

5.6. Компактные геодезически орбитальные пространства

Пусть $(M = G/H, g)$ — однородное риманово пространство с компактной группой Ли G . В этом случае на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G существует (не единственное) $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Мы зафиксируем такое скалярное произведение (например, для полупростой группы G можно взять форму Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с отрицательным знаком), и далее будем считать, что редуктивное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ является b -ортогональным.

Для подпространства $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{g}$ через $X_{\mathfrak{m}}$ мы будем обозначать b -ортогональную проекцию вектора $X \in \mathfrak{g}$ на $\mathfrak{m}$, через $b_{\mathfrak{m}}$ — ограничение формы b на $\mathfrak{m}$ и через $L^{\mathfrak{m}} = \text{pr}_{\mathfrak{m}} \circ L \circ \text{pr}_{\mathfrak{m}}$ — проекцию на $\mathfrak{m}$ эндоморфизма L , заданного на более обширном пространстве.

Скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{p}$, соответствующее римановой метрике g (далее мы его тоже будем обозначать для краткости через g) определяется единственным b -симметричным положительно определенным $\text{Ad}(H)$ -эквивариантным метрическим эндоморфизмом A на $\mathfrak{p}$, заданным соотношениями

$$g = (\cdot, \cdot) = b_{\mathfrak{p}}(A \cdot, \cdot) = \langle A \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}}.$$

Как и в предыдущем разделе, для подпространства $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$ через $\mathfrak{m}^{\perp}$ обозначено его $(\cdot, \cdot)$ -ортогональное дополнение в $\mathfrak{p}$, а через $\mathbf{1}_{\mathfrak{m}}$ мы будем обозначать тождественный оператор на $\mathfrak{m}$.

Запишем в терминах оператора A критерий однородности геодезических и критерий геодезической орбитальности компактных однородных пространств.

Теорема 5.11. Пусть $(M = G/H, g)$ — компактное однородное риманово многообразие, $Y \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{p}$. Тогда $\gamma(t) = \exp(t(X + Y))(o)$ есть геодезическая линия тогда и только тогда, когда выполнено включение $[Y + X, AX] \in \mathfrak{h}$. Соответственно, $(M = G/H, g)$ является геодезически орбитальным пространством тогда и только тогда, когда для каждого $X \in \mathfrak{p}$ существует $H_X \in \mathfrak{h}$ со свойством $[X + H_X, AX] \in \mathfrak{h}$.

◁ По теореме 5.5 $\gamma(t)$ есть геодезическая линия тогда и только тогда, когда $([Y + X, Z]_{\mathfrak{p}}, X) = 0$ для всех $Z \in \mathfrak{p}$. Используя $\text{Ad}(G)$ -инвариантность формы $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$, получаем

$$0 = ([Y + X, Z]_{\mathfrak{p}}, X) = \langle [Y + X, Z]_{\mathfrak{p}}, AX \rangle = -\langle Z, [Y + X, AX]_{\mathfrak{p}} \rangle.$$

Поскольку $Z \in \mathfrak{p}$ может быть произвольным, $[Y + X, AX] \in \mathfrak{h}$. Второе утверждение теоремы — очевидное следствие первого. $\triangleright$

Лемма 5.4. Пусть $(M = G/H, g)$ — компактное однородное риманово пространство с метрическим эндоморфизмом A и

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_k, \quad (5.5)$$

— разложение $\mathfrak{p}$ в прямую сумму собственных подпространств оператора A , причем $A|_{\mathfrak{p}_i} = \lambda_i \cdot \mathbf{1}_{\mathfrak{p}_i}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тогда

$$(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) = \langle \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j \rangle = 0 \quad (5.6)$$

и $\text{Ad}(H)$ -модули $\mathfrak{p}_i$ удовлетворяют включению $[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j] \subset \mathfrak{p}$ для $i \neq j$.

$\triangleleft$ Поскольку A коммутирует с $\text{Ad}(H)$, собственные подпространства $\mathfrak{p}_i$ являются $\text{Ad}(H)$ -инвариантными, и для $X \in \mathfrak{p}_i$, $Y \in \mathfrak{p}_j$, $i \neq j$, мы получаем

$$\lambda_i \langle X, Y \rangle = \langle AX, Y \rangle = (X, Y) = \langle X, AY \rangle = \lambda_j \langle X, Y \rangle.$$

Это влечет равенство (5.6). Включение $[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j] \subset \mathfrak{p}$ следует из того факта, что $\mathfrak{p}_j$ $\text{Ad}(H)$ -инвариантно и $\langle [\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j], \mathfrak{h} \rangle = \langle \mathfrak{p}_i, [\mathfrak{p}_j, \mathfrak{h}] \rangle = 0$. $\triangleright$

Предложение 5.3. Пусть $(M = G/H, g)$ — компактное ГО-пространство с метрическим эндоморфизмом A . Тогда выполнены следующие утверждения:

1) Пусть $X, Y \in \mathfrak{p}$ — собственные векторы метрического эндоморфизма A , соответствующие различным собственным значениям $\lambda \neq \mu$. Тогда

$$[X, Y] = \frac{\lambda}{\lambda - \mu} [Z, X] + \frac{\mu}{\lambda - \mu} [Z, Y]$$

для некоторого $Z \in \mathfrak{h}$.

2) Предположим, что векторы X, Y принадлежат $\mathfrak{p}_\lambda$ — собственному пространству A с собственным значением λ , и X g -ортогонален к подпространству $[\mathfrak{h}, Y]$. Тогда

$$[X, Y] \in \mathfrak{h} + \mathfrak{p}_\lambda.$$

$\triangleleft$ 1) Выберем вектор $Z = H_{X+Y} \in \mathfrak{h}$ как в теореме 5.11. Тогда

$$\begin{aligned} [Z + X + Y, A(X + Y)] &= [Z + X + Y, \lambda X + \mu Y] = \\ &= \lambda [Z, X] + \mu [Z, Y] + (\mu - \lambda) [X, Y] \in \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

По лемме 5.4 получаем $[Z, X], [Z, Y], [X, Y] \in \mathfrak{p}$, и правая часть равенства зануляется.

2) Выберем собственный вектор Z эндоморфизма A с собственным значением $\mu \neq \lambda$. Тогда

$$\begin{aligned} ([X, Y]_{\mathfrak{p}}, Z) &= \mu \langle [X, Y], Z \rangle = \mu \langle X, [Y, Z] \rangle = \frac{\mu}{\lambda} (X, [Y, Z]_{\mathfrak{p}}) = \\ &= \frac{\mu}{\lambda} \left(X, \frac{\lambda}{\lambda - \mu} [H, Y] + \frac{\mu}{\lambda - \mu} [H, Z] \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем включение $[X, Y] \in \mathfrak{h} + \mathfrak{p}_{\lambda}$. $\triangleright$

Из этого предложения сразу получаем

Следствие 5.1. Пусть $(M = G/H, g)$ — компактное ГО-пространство с метрическим эндоморфизмом A и разложением (5.5). Тогда для любых $\text{Ad}(H)$ -подмодулей $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{m}_j \subset \mathfrak{p}_j$, $i \neq j$, имеет место включение

$$[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j.$$

Кроме того, если $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ являются g -ортогональными $\text{Ad}(H)$ -подмодулями в $\mathfrak{p}_i$, то

$$[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'] \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{p}_i.$$

$\text{Ad}(H)$ -модули $\mathfrak{m}, \mathfrak{l}$ называются *дизъюнктными*, если они не содержат нетривиальных эквивалентных подмодулей. Если $\text{Ad}(H)$ -модуль $\mathfrak{p}$ может быть разложен в прямую сумму

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_k$$

дизъюнктных подмодулей, то нетрудно показать, что любое $\text{Ad}(H)$ -инвариантное скалярное произведение g и соответствующий метрический эндоморфизм A имеют вид

$$g = g_{\mathfrak{p}_1} \oplus \cdots \oplus g_{\mathfrak{p}_k}, \quad A = A^{\mathfrak{p}_1} \oplus \cdots \oplus A^{\mathfrak{p}_k}.$$

5.7. Применение полной геодезичности

В этом разделе мы рассмотрим связь между геодезической орбитальностью и полной геодезичностью подмногообразий ГО-многообразий, а также смежные вопросы.

Согласно теореме 6.15 [90, теорема 11] каждое замкнутое вполне геодезическое подмногообразие геодезически орбитального риманова

многообразие само является геодезически орбитальным. Недостатком этой теоремы является то, что она не дает никакой информации о группе движений подмногообразия. Здесь мы получим некоторые результаты, частично ликвидирующие этот пробел.

Далее мы рассматриваем однородное риманово пространство $(M = G/H, g)$ с редуктивным разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ (5.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 100. Будем говорить, что подалгебра Ли $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ согласована с заданным редуктивным разложением, если $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{h}' = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{p}$. Связная (возможно, виртуальная) подгруппа Ли $K \subset G$ называется согласованной с редуктивным разложением, если таковой является ее подалгебра Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 101. Подпространство $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$ будем называть *вполне геодезическим*, если существует связная (возможно, виртуальная) подгруппа Ли $K \subset G$ такая, что ее алгебра Ли имеет вид $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ (в частности, она согласована с редуктивным разложением), и орбита $Ko \subset G/H = M$ этой группы, проходящая через точку $o = H$, является (возможно, виртуальным) вполне геодезическим подмногообразием в $(M = G/H, g)$.

Предложение 5.4. Подпространство $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$ является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

- 1) $\mathfrak{m}$ порождает подалгебру Ли вида $\mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{h}'$ — подалгебра в $\mathfrak{h}$;
- 2) эндоморфизм $\text{ad}_Z^{\mathfrak{m}} \in \text{End}(\mathfrak{m})$ для каждого $Z \in \mathfrak{m}^\perp$ является g -кососимметричным или, что эквивалентно, $U(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$.

◁ Ясно, что условие 1) эквивалентно тому, что $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$ является касательным пространством в o к орбите $N := Ko$ минимальной связной (возможно, виртуальной) подгруппы Ли $K \subset G$ указанного в последнем определении вида.

Отождествим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G с (соответствующей) подалгеброй алгебры Ли киллинговых векторных полей на $(M = G/H, g)$. Тогда нетрудно видеть, что каждый элемент X подалгебры Ли $\mathfrak{k}$ касается подмногообразия N , т. е. $X(x) \in N_x$ для каждой точки $x \in N$. Поэтому вследствие свойств связности Леви-Чивита ∇ на (M, g) и предложения 1.17 полная геодезичность орбиты N эквивалентна тому, что $\nabla_X Y$ касается N для всех $X, Y \in \mathfrak{k}$. Это на основании формулы (3.3) эквивалентно тому, что $\mathcal{U}(X, Y)$ касает-

ся N . Так как K является подгруппой движений и M и N , последнее условие достаточно проверить только для $X, Y \in \mathfrak{m}$ в точке o . Вследствие того, что $U(X, Y) = \mathcal{U}(X, Y)(o)$ (см. обсуждение сразу после формулы (4.7)), это эквивалентно включению $U(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$. $\triangleright$

Следствие 5.2. Пусть $(M = G/H, g)$ — однородное риманово многообразие с фиксированным редуктивным разложением (5.1), K — связная подгруппа Ли группы G , согласованная с этим разложением. Ее орбита $P = Ko = K/H'$ является вполне геодезическим подмногообразием тогда и только тогда, когда $U(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ или, что эквивалентно, эндоморфизмы $\text{ad}_Z^{\mathfrak{m}} \in \text{End}(\mathfrak{m})$, $Z \in \mathfrak{m}^\perp$, являются g -кососимметричными.

Отметим, что любая связная группа Ли $K \subset G$, содержащая H в качестве подгруппы, согласована с (произвольным) редуктивным разложением. В случае ГО-пространств можно утверждать и большее.

Предложение 5.5. Пусть $(M = G/H, g)$ — геодезически орбитальное риманово пространство с редуктивным разложением (5.1). Тогда любая связная подгруппа Ли $K \subset G$, содержащая H , имеет вполне геодезическую орбиту $P = Ko = K/H$, которая является ГО-пространством (с индуцированной метрикой).

$\triangleleft$ Рассмотрим редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{p}$. Ясно, что $\mathfrak{m}$ является $\text{Ad}(H)$ -инвариантным модулем. Поскольку $(M = G/H, g)$ — ГО-пространство (см. теорему 5.6 и определение 99), для любого $X \in \mathfrak{p}$ существует $Y \in \mathfrak{h}$ такой, что $[X, Y] = U(X, X)$, где U определяется равенством (4.7). Если к тому же $X \in \mathfrak{m}$, то $U(X, X) = [X, Y] \in \mathfrak{m}$ в силу $\text{Ad}(H)$ -инвариантности модуля $\mathfrak{m}$. Таким образом, этот модуль вполне геодезичен по предложению 5.4. Кроме того, в силу того же равенства $[X, Y] = U(X, X)$ пространство $P = Ko = K/H$ с индуцированной римановой метрикой является геодезически орбитальным (см. теорему 5.6). $\triangleright$

Далее мы рассмотрим случай компактных однородных римановых пространств $(M = G/H, g)$, что зачастую позволяет получить более детальную информацию. Мы предполагаем, что редуктивное разложение (5.1) ортогонально относительно некоторого зафиксированного $\text{Ad}(G)$ -инвариантного скалярного произведения $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а скалярное произведение $g = (\cdot, \cdot)$ порождается метрическим эндоморфизмом $A : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$, т. е. $g = (\cdot, \cdot) = b_p(A\cdot, \cdot) = \langle A\cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 102. Пусть $(M = G/H, g)$ — компактное однородное риманово многообразие с редуктивным разложением (5.1), K — связная подгруппа Ли группы Ли G , согласованная с этим разложением ($\mathfrak{k} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$, $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$). Будем говорить, что подгруппа Ли $K \subset G$ согласована с инвариантной римановой метрикой g , если модуль $\mathfrak{m}$ является A -инвариантным, т. е. $A\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$.

Предложение 5.6. Если подгруппа Ли K согласована с инвариантной римановой метрикой g , то (в обозначениях определения 102) справедливы следующие утверждения:

- 1) Подпространство $\mathfrak{m}^\perp$ (g -ортогональное дополнение к $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{p}$) A -инвариантно и b -ортогонально к подпространству $\mathfrak{m}$.
- 2) Подпространство $\mathfrak{m}$ вполне геодезично.
- 3) Если $(M = G/H, g)$ является геодезически орбитальным пространством, то (вполне геодезическая) орбита $P = Ko = K/H'$ (с индуцированной римановой метрикой) также является ГО-пространством.
- 4) Если $\mathfrak{m}$ является $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -инвариантным, то $\mathfrak{m}^\perp$ $\text{Ad}(\tilde{K})$ -инвариантно, где $\tilde{K}$ — связная (возможно, виртуальная) подгруппа Ли в G , соответствующая подалгебре Ли $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$.

◁ Первое утверждение следует из равенств

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^\perp) = \langle A\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^\perp \rangle = \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{m}^\perp \rangle, \\ \langle \mathfrak{m}, A\mathfrak{m}^\perp \rangle &= \langle A\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^\perp \rangle = \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{m}^\perp \rangle = 0. \end{aligned}$$

Далее, поскольку $A\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, $A\mathfrak{m}^\perp = \mathfrak{m}^\perp$ и $\langle \mathfrak{m}, \mathfrak{m}^\perp \rangle = 0$, то $\langle Z, [X, AX] \rangle = 0$ для всех $X \in \mathfrak{m}$ и $Z \in \mathfrak{m}^\perp$. Отсюда и предложения 5.4 получаем второе утверждение: $0 = \langle [Z, X], AX \rangle = \langle [Z, X]_{\mathfrak{p}}, AX \rangle = ([Z, X]_{\mathfrak{p}}, X) = (U(X, X), Z)$.

Теперь докажем третье утверждение. Согласно теореме 5.11 для каждого $X \in \mathfrak{p}$ существует $Y \in \mathfrak{h}$ такой, что $[X + Y, A(X)] \subset \mathfrak{h}$. Пусть $X \in \mathfrak{m}$ и пусть $Y' — b -ортогональная проекция Y на $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$. Поскольку $\langle Y - Y', \mathfrak{k} \rangle = 0$, то $[Y - Y', \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}^\perp$ (так как $\langle [Y - Y', \mathfrak{m}], \mathfrak{m} \rangle \subset \langle Y - Y', [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \rangle \subset \langle Y - Y', \mathfrak{k} \rangle = 0$). С другой стороны, $[Y', A(X)] \subset [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$ и $[X, A(X)] \subset [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$. Поэтому $[Y - Y', A(X)] = 0$ и $[X + Y', A(X)] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{h}'$. Применяя снова теорему 5.11, получаем, что однородное пространство K/H' с индуцированной римановой метрикой является геодезически орбитальным.$

Теперь отметим, что эндоморфизмы вида $\text{ad}(Z)$, где $Z \in \tilde{\mathfrak{k}} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, являются b -кососимметричными и сохраняют подалгебру $\tilde{\mathfrak{k}}$. Следовательно, они сохраняют и ее b -ортогональное дополнение в $\mathfrak{g}$, которое совпадает с $\mathfrak{m}^\perp$. Поскольку $\tilde{K}$ связна, мы получаем четвертое утверждение предложения. $\triangleright$

Приведем некоторое усиление предложения 5.5.

Предложение 5.7 [73]. Пусть $(M = G/H, g)$ — компактное геодезически орбитальное риманово пространство с редуктивным разложением (5.1). Тогда любая связная подгруппа Ли $K \subset G$, содержащая H , имеет вполне геодезическую орбиту $P = Ko = K/H$, которая является ГО-пространством (с индуцированной метрикой).

Кроме того, если подгруппа Ли K согласована с инвариантной метрикой g , то $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}^\perp] \subset \mathfrak{m}^\perp$, скалярное произведение $g|_{\mathfrak{m}^\perp} = (\cdot, \cdot)|_{\mathfrak{m}^\perp}$ является $\text{Ad}(K)$ -инвариантным и определяет инвариантную ГО-метрику $\bar{g}$ на однородном пространстве $N = G/K$. Проекция $\pi : G/H \rightarrow G/K$ при этом является римановой субмерсией с вполне геодезическими слоями, где и слои и база являются ГО-пространствами.

$\triangleleft$ Первое утверждение доказано в предложении 5.5. Корректность определения инвариантной римановой метрики $\bar{g}$ на $N = G/K$ следует из четвертого утверждения в предложении 5.6 (в этом случае случае $\tilde{K} = K$) и леммы 5.2. Кроме того, из первого утверждения в предложении 5.6 получаем, что $A\mathfrak{m}^\perp = \mathfrak{m}^\perp$, а ограничение оператора A на $\mathfrak{m}^\perp$ является метрическим эндоморфизмом для $(G/K, \bar{g})$. Далее, согласно теореме 5.11 для каждого $X \in \mathfrak{p}$ существует $Y \in \mathfrak{h}$ такой, что $[X + Y, A(X)] \subset \mathfrak{h}$. Понятно, что для $X \in \mathfrak{m}^\perp$ таким образом выбранный Y удовлетворяет условию $[X + Y, A(X)] \subset \mathfrak{k}$, т. е. $(G/K, \bar{g})$ является ГО-пространством. $\triangleright$

Далее нам потребуется также

Предложение 5.8. Пусть $(M = G/H, g)$ — однородное риманово пространство, T — некоторая связная коммутативная подгруппа Ли в группе H , $C(T)$ — связная компонента ее централизатора в G . Тогда ее орбита $P = C(T)o = C(T)/H'$ ($H' = C(T) \cap H$), является вполне геодезической. Если к тому же $(M = G/H, g)$ является компактным геодезически орбитальным пространством положительной эйлеровой характеристики, то пространство $P = C(T)o = C(T)/H'$

с индуцированной римановой метрикой также геодезически орбитально.

◁ Зафиксируем редуктивное разложение (5.1). Пусть $\mathfrak{u}$ — алгебра Ли группы $C(T)$, а $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{u}$ — алгебра Ли группы $T \subset C(T)$. Отметим, что $[\mathfrak{t}, \mathfrak{u}] = 0$. Пусть $X = X_{\mathfrak{h}} + X_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{u}$, поскольку $[\mathfrak{t}, X] \subset \mathfrak{u}$, $[\mathfrak{t}, X_{\mathfrak{h}}] \subset \mathfrak{h}$ и $[\mathfrak{t}, X_{\mathfrak{p}}] \subset \mathfrak{p}$, группа $C(T)$ согласована с разложением (5.1). Пусть $\mathfrak{u} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{u}$ и $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{u}$. Покажем, что $U(X, X) \in \mathfrak{m}$ для любого $X \in \mathfrak{m}$. Для этого достаточно показать, что $([Y, U(X, X)], Z) = 0$ для всех $Y \in \mathfrak{t}$ и всех $Z \in \mathfrak{m}^{\perp}$. Используя $\text{ad}(\mathfrak{h})$ -инвариантность скалярного произведения $g = (\cdot, \cdot)$, и определение оператора U (см. равенство (4.7)), получаем

$$\begin{aligned} ([Y, U(X, X)], Z) &= -(U(X, X), [Y, Z]) = -([Y, Z], X)_{\mathfrak{p}} = \\ &= -([Y, [Z, X]]_{\mathfrak{p}}, X) = -([Y, [Z, X]_{\mathfrak{p}}], X) = ([Z, X]_{\mathfrak{p}}, [Y, X]) = 0. \end{aligned}$$

В выкладках мы воспользовались равенством $[Y, X] = 0$ и тождеством Якоби ($[[Y, Z], X] = -[[Z, X], Y] - [[X, Y], Z] = -[[Z, X], Y] = [Y, [Z, X]]$). Таким образом, $U(X, X) \in \mathfrak{m}$, и мы получаем первое утверждение в силу предложения 5.4.

Докажем теперь второе утверждение. При этом будем считать, что редуктивное разложение ортогонально относительно $\text{Ad}(G)$ -инвариантного скалярного произведения $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а скалярное произведение $g = (\cdot, \cdot)$, порождается метрическим эндоморфизмом $A : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$. В силу утверждения 3) из предложения 5.6 нам достаточно показать, что подгруппа $C(T)$ согласована с инвариантной римановой метрикой g , т. е. подпространство $\mathfrak{m}$ инвариантно относительно метрического эндоморфизма A .

Пусть $T_{\max}$ — максимальный тор в H , содержащий группу T . Поскольку эйлерова характеристика пространства G/H положительна, то $T_{\max}$ является максимальным тором также в группе G (см. теорему 4.4). Подпространство $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ является $\text{Ad}(T_{\max})$ -инвариантной прямой суммой некоторых двумерных корневых подпространств в $\mathfrak{g}$ относительно картановской подалгебры $LT_{\max}$, причем все эти подпространства попарно не $\text{Ad}(T_{\max})$ -изоморфны (см. предложение 2.22). Метрический эндоморфизм A , будучи $\text{Ad}(H)$ -эквивариантным, является также и $\text{Ad}(T_{\max})$ -эквивариантным. Таким образом, все двумерные корневые подпространства в $\mathfrak{p}$ инвариантны относительно эндоморфизма A . Поскольку $T_{\max} \subset C(T)$, то $\mathfrak{m}$ также

является прямой суммой некоторых двумерных корневых подпространств в $\mathfrak{g}$ относительно картановской подалгебры $LT_{\max}$. Поэтому $\mathfrak{m}$ является инвариантным относительно метрического эндоморфизма A . Тем самым второе утверждение также доказано. $\triangleright$

Отметим, что связная подгруппа Ли $K \subset G$, содержащая H , согласована с любой инвариантной метрикой на G/H , если $\text{Ad}(H)$ -модули $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{p}/\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{p}$) дизъюнкты. Это наблюдение влечет

Предложение 5.9. Пусть $M = G/H$ — однородное пространство с компактной группой H . Тогда компонента единицы $N_0(Z)$ нормализатора центральной подгруппы Z группы H и компонента единицы $N_0(H)$ нормализатора H являются подгруппами, согласованными с любой инвариантной римановой метрикой на $M = G/H$.

Используя рассуждения, аналогичные тем, что использованы при доказательстве второго утверждения предложения 5.8, легко получаем

Предложение 5.10. Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство положительной эйлеровой характеристики, $T_{\max}$ — некоторый общий максимальный тор групп H и G . Если некоторая связная подгруппа Ли $K \subset G$ содержит тор $T_{\max}$, то K согласована с любой инвариантной римановой метрикой на однородном пространстве $M = G/H$.

5.8. Компактные ГО-пространства положительной эйлеровой характеристики

В этом разделе мы получим классификацию односвязных компактных геодезически орбитальных римановых многообразий положительной эйлеровой характеристики.

5.8.1. Основные сведения о компактных однородных многообразиях положительной эйлеровой характеристики. Здесь мы напомним некоторые свойства компактных однородных пространств положительной эйлеровой характеристики (см. раздел 4.8 или [50]). Однородное пространство $M = G/H$ компактной связной группы Ли G имеет положительную эйлерову характеристику $\chi(M) > 0$ тогда и только тогда, когда группа изотропии H имеет максимальный ранг ($\text{rk}(H) = \text{rk}(G)$).

Если группа G действует на M почти эффективно, то она полупроста и универсальное накрывающее пространство $\widetilde{M} = \widetilde{G}/\widetilde{H}$ для M является прямым произведением

$$\widetilde{M} = G_1/H_1 \times \dots \times G_k/H_k,$$

где $\widetilde{G} = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k$ — разложение группы $\widetilde{G}$ (являющейся универсальной накрывающей группы G) в прямое произведение простых множителей, $\widetilde{H}$ — прообраз компоненты связности единицы группы H при эпиморфизме $\widetilde{G} \rightarrow G$, а $H_i = \widetilde{H} \cap G_i$.

Произвольная инвариантная метрика g на M определяет инвариантную метрику $\widetilde{g}$ на $\widetilde{M}$, и однородное риманово многообразие $(\widetilde{M} = \widetilde{G}/\widetilde{H}, \widetilde{g})$ является прямым метрическим произведением однородных многообразий $(M_i = G_i/H_i, g_i)$, $i = 1, \dots, k$, с простыми группами Ли G_i . Точнее, согласно теореме 4.10 компактное односвязное однородное риманово многообразие $(M = G/H, g)$ положительной эйлеровой характеристики неразложимо тогда и только тогда, когда группа G проста. Отсюда следует, что односвязное компактное ГО-пространство $(M = G/H, g)$ положительной эйлеровой характеристики является прямым метрическим произведением односвязных ГО-пространств $(M_i = G_i/H_i, g_i)$ положительной эйлеровой характеристики с простыми группами движений. Таким образом, достаточно классифицировать односвязные ГО-пространства положительной эйлеровой характеристики с простыми группами движений. Описание односвязных однородных многообразий G/H положительной эйлеровой характеристики сводится к описанию связных подгрупп H максимального ранга простых групп G или, эквивалентно, к описанию подалгебр максимального ранга простых компактных алгебр Ли $\mathfrak{g}$, см. [34, разд. 8.10] и [103]. Важный подкласс компактных однородных многообразий положительной эйлеровой характеристики составляют *флаговые многообразия*. Они являются орбитами присоединенного действия $M = \text{Ad}(G)x$ компактных связных полупростых групп G или, другими словами, фактор-пространствами $M = G/H$ группы G по централизатору $H = Z_G(T)$ нетривиального тора $T \subset G$.

5.8.2. Классификационная теорема. Пусть G — простая компактная связная группа Ли, $H \subset K \subset G$ — ее замкнутые связные подгруппы. Обозначим через $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$ минус форму Киллинга алгеб-

ры Ли $\mathfrak{g} = LG$ и рассмотрим b -ортогональное разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2,$$

где $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_2$ — алгебра Ли LK группы K . Очевидно, что $[\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1] \subset \mathfrak{p}_1$. Пусть $g = g_{x_1, x_2}$ — G -инвариантная риманова метрика на $M = G/H$, порожденная скалярным произведением $g = (\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{p}$ следующего вида:

$$g = x_1 \cdot b_{\mathfrak{p}_1} + x_2 \cdot b_{\mathfrak{p}_2}, \quad (5.7)$$

где x_1 и x_2 — некоторые положительные числа. Эквивалентно, можно сказать, что метрика порождена метрическим эндоморфизмом

$$A = x_1 \cdot \mathbf{1}_{\mathfrak{p}_1} + x_2 \cdot \mathbf{1}_{\mathfrak{p}_2}. \quad (5.8)$$

Рассмотрим два примера (семейств) таких однородных многообразий $(M = G/H, g_{x_1, x_2})$.

ПРИМЕР 19. $(G, K, H) = (SO(2n+1), SO(2n), U(n))$, $n \geq 2$. Группа $G = SO(2n+1)$ действует транзитивно на симметрическом пространстве $\text{Com}(\mathbb{R}^{2n+2}) = SO(2n+2)/U(n)$ комплексных структур в $\mathbb{R}^{2n+2}$ с группой изотропии $H = U(n)$ (см. [58]). Таким образом, можно отождествить $M = G/H$ с этим симметрическим пространством, но метрика g_{x_1, x_2} не является $SO(2n+2)$ -инвариантной при $x_2 \neq 2x_1$ [150].

ПРИМЕР 20. $(G, K, H) = (Sp(n), Sp(1) \cdot Sp(n-1), U(1) \cdot Sp(n-1))$, $n \geq 2$. Группа $G = Sp(n)$ действует транзитивно на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^{2n-1} = SU(2n+2)/U(2n+1)$ с группой изотропии $H = U(1) \cdot Sp(n-1)$. Можно отождествить $M = G/H$ с $\mathbb{C}P^{2n-1}$, но опять же метрика g_{x_1, x_2} не является $SU(2n+2)$ -инвариантной при $x_2 \neq 2x_1$ (см. [58, 150]).

Необходимо отметить, что при $n = 2$ пространства из этих двух семейств совпадают: $SO(5)/U(2) = Sp(2)/U(1) \cdot Sp(1)$ (см. пример 16). Это шестимерное пространство с инвариантной римановой метрикой g_{x_1, x_2} стало первым компактным примером ГО-пространства, не являющегося естественно редуцированным [162].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 103. ГО-пространство $(M = G/H, g)$ простой компактной группы Ли G называется *собственным ГО-пространством*, если его метрика g не является G -нормальной, т. е. соответствующий метрический эндоморфизм A не пропорционален тождественному оператору.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему о компактных геодезически орбитальных пространствах положительной эйлеровой характеристики.

Теорема 5.12 [73]. Пусть $(M = G/H, g)$ — односвязное собственное ГО-пространство положительной эйлеровой характеристики с простой компактной группой Ли G . Тогда либо $M = G/H = SO(2n+1)/U(n)$, $n \geq 2$, либо $G/H = Sp(n)/U(1) \cdot Sp(n-1)$, $n \geq 2$, при этом $g = g_{x_1, x_2}$ является произвольной G -инвариантной римановой метрикой, не являющейся G -нормальной однородной. Метрика g является G -нормальной однородной (соответственно, симметрической), если $x_2 = x_1$ ($x_2 = 2x_1$ соответственно). Кроме того, все эти многообразия являются слабо симметрическими флаговыми многообразиями.

Полной связной группой движений рассматриваемых ГО-пространств $(M = G/H, g_{x_1, x_2})$ для несимметрических метрик является фактор-группа группы G по своему центру (см. обсуждение в [50, 72, 150]). Утверждение о том, что все эти многообразия слабо симметричны, доказано в [242].

5.8.3. Доказательство классификационной теоремы. Мы сведем доказательство к описанию специальных разложений корневых систем алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы движений G .

Пусть $M = G/H$ — однородное многообразие положительной эйлеровой характеристики с компактной связной простой группой Ли G и соответствующим редуктивным разложением

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}.$$

Подгруппа H содержит максимальный тор T группы G . Мы рассмотрим разложение корневой системы

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

комплексификации $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ — картановская подалгебра, соответствующая T , а R — корневая система.

Для произвольного подмножества $P \subset R$ обозначим через

$$\mathfrak{g}(P) = \sum_{\alpha \in P} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

подпространство, натянутое на соответствующие корневые пространства $\mathfrak{g}_\alpha$. Тогда $\text{Ad}(H)$ -модуль $\mathfrak{p}^\mathbb{C}$ раскладывается в прямую сумму

$$\mathfrak{p}^\mathbb{C} = \mathfrak{g}(R_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}(R_k)$$

дизъюнктивных подмодулей (см. предложение 2.22), где $R = R_1 \cup \cdots \cup R_k$ — дизъюнктное разложение R , а подсистемы R_i симметричны, т. е. $-R_i = R_i$. Кроме того, вещественные $\text{Ad}(H)$ -модули $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}(R_i)$ неприводимы. Произвольная инвариантная метрика на M определяется метрическим эндоморфизмом A на $\mathfrak{p}$, чье расширение на $\mathfrak{p}^\mathbb{C}$ имеет вид

$$A = \text{diag}(x_1 \cdot \mathbf{1}_{\mathfrak{m}_1}, \dots, x_\ell \cdot \mathbf{1}_{\mathfrak{m}_\ell}),$$

где x_i — произвольные положительные числа, $x_i \neq x_j$, и каждый модуль $\mathfrak{m}_i$ является прямой суммой некоторых модулей вида $\mathfrak{g}(R_m)$, $m = 1, \dots, k$.

Мы предположим, что A не является скалярным оператором (т. е. $\ell > 1$) и определяет инвариантную метрику с однородными геодезическими. Будем говорить, что корень α соответствует собственному значению x_i оператора A , если $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{m}_i$.

Лемма 5.5. *Существуют два корня α, β , где α соответствует x_1 , а β соответствует x_i при $2 \leq i \leq \ell$ такие, что при этом $\alpha + \beta$ также является корнем.*

◁ Если предположить противное, то $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_i] = 0$ для $i \neq 1$ и $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{m}_1 + [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1]$ является нетривиальным идеалом простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что невозможно. ▷

Теперь мы зафиксируем корни α и β , существование которых доказано в предыдущей лемме. Поскольку $R(\alpha, \beta) := R \cap \text{span}\{\alpha, \beta\}$ есть корневая система ранга 2, мы всегда можем взять корни $\alpha, \beta \in R$, образующие базис корневой системы $R(\alpha, \beta)$. Тогда подалгебра

$$\mathfrak{g}_{\alpha, \beta} := \mathfrak{t}^\mathbb{C} + \sum_{\gamma \in R(\alpha, \beta)} \mathfrak{g}_\gamma$$

алгебры Ли $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ является централизатором подалгебры $\mathfrak{t}' = \ker \alpha \cap \ker \beta \subset \mathfrak{t}^\mathbb{C}$.

Орбита $G_{\alpha, \beta} o \subset M$ соответствующей подгруппы $G_{\alpha, \beta} = T' \cdot G'_{\alpha, \beta} \subset G$ является вполне геодезическим подмногообразием исследуемого многообразия и сама при этом (снабженная индуцированной римановой метрикой) является (очевидно, собственным)

ГО-пространством с эффективной ранга 2 простой группой движений $G'_{\alpha,\beta}$, соответствующей корневой системе $R(\alpha, \beta)$ (см. предложение 5.8).

Отметим, что это пространство также имеет положительную эйлерову характеристику, поскольку стабилизатор точки o содержит двумерный тор, порожденный векторами $H_\alpha, H_\beta \in \mathfrak{t}^\mathbb{C}$, соответствующими корням α, β . Поясним, что $H_\alpha = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} b^{-1} \cdot \alpha$ (символ $b^{-1} \cdot \alpha$ обозначает вектор в $\mathfrak{t}^\mathbb{C}$, сопряженный к корню α относительно b).

Следующее предложение позволяет понять строение полученного однородного многообразия.

Предложение 5.11. *Каждое собственное ГО-пространство $(M = G/H, g)$ положительной эйлеровой характеристики с компактной простой группой G ранга 2 локально изометрично однородному пространству $M = SO(5)/U(2)$ с инвариантной римановой метрикой, порожденной метрическим эндоморфизмом*

$$A = x_1 \cdot \mathbf{1}_{\mathfrak{g}(R^s)} + x_2 \cdot \mathbf{1}_{\mathfrak{g}(R^\ell)}, \quad x_1 \neq x_2 > 0,$$

где

$$R^s = \{\pm \epsilon_1, \pm \epsilon_2\}, \quad R^\ell = \{\pm \epsilon_1 \pm \epsilon_2\},$$

являются соответственно множествами коротких и длинных корней алгебры Ли $\mathfrak{so}(5)$. Можно предполагать дополнительно, что

$$\mathfrak{p}^\mathbb{C} = \mathfrak{g}(R^s \cup \{\epsilon_1 + \epsilon_2\}), \quad \mathfrak{h}^\mathbb{C} = \mathfrak{t}^\mathbb{C} + \mathfrak{g}_{\epsilon_1 - \epsilon_2}.$$

◁ Доказательство этого предложения получается из результатов работы [72]. Действительно, группа G имеет алгебру Ли $\mathfrak{g}$, изоморфную либо $\mathfrak{su}(3) = A_2$, либо $\mathfrak{so}(5) = \mathfrak{sp}(2) = B_2 = C_2$, либо $\mathfrak{g}_2$. Поскольку универсальная риманова накрывающая ГО-пространства сама является ГО-пространством, мы можем без ограничения общности считать, что G/H односвязно.

Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(3)$, то $G/H = SU(3)/S(U(2) \times U(1))$ (неприводимое симметрическое пространство) или флаговое многообразие $G/H = SU(3)/T^2$. Из классификации флаговых ГО-многообразий в [72] получаем, что все ГО-метрики на этих пространствах $SU(3)$ -нормальны.

Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(5) = \mathfrak{sp}(2)$, то $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}(5), \mathbb{R}^2)$, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}(5), \mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)_l)$, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}(5), \mathbb{R} \oplus \mathfrak{su}(2)_s)$ или $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}(5), \mathfrak{su}(2)_l \oplus \mathfrak{su}(2)_l)$,

где $su(2)_l$ (соответственно, $su(2)_s$) означает трехмерную подалгебру, порождаемую всеми длинными (соответственно, короткими) корнями $\mathfrak{g}$. Последняя пара соответствует неприводимому симметрическому пространству $SO(5)/SO(4)$, которое допускает лишь нормальные метрики. Все остальные пространства являются флаговыми многообразиями. Из результатов работы [72] получаем единственно возможную пару $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (so(5), \mathbb{R} \oplus su(2)_l)$, которая соответствует пространству $SO(5)/U(2) = Sp(2)/U(1) \cdot Sp(1)$.

Теперь рассмотрим корневую систему R для $\mathfrak{g} = g_2$:

$$R(G_2) = \{ \pm \alpha, \pm \beta, \pm(\alpha + \beta), \pm(\alpha + 2\beta), \pm(\alpha + 3\beta), \pm(2\alpha + 3\beta) \}.$$

При этом длинными корнями являются $\pm\alpha, \pm(\alpha + 3\beta), \pm(2\alpha + 3\beta)$. Перечислим все собственные замкнутые симметричные корневые подсистемы (корневая подсистема R' корневой системы R называется замкнутой (симметричной), если из включений $\varphi, \psi \in R'$ и $\varphi + \psi \in R$ следует $\varphi + \psi \in R'$ (соответственно, если включение $\varphi \in R'$ влечет $-\varphi \in R'$): $\emptyset, \{\pm\alpha\}, \{\pm\beta\}, \{\pm\beta, \pm(2\alpha + 3\beta)\}, \{\pm\alpha, \pm(\alpha + 3\beta), \pm(2\alpha + 3\beta)\}$. В трех первых случаях получаем флаговые многообразия $G_2/T^2, G_2/SU(2)SO(2)$ и $G_2/A_{1,3}SO(2)$, где $A_{1,3}$ — группа Ли с подалгеброй типа A_1 индекса 3 [50]. В работе [72] доказано, что все эти пространства допускают лишь нормальные ГО-метрики. Две оставшиеся корневые подсистемы соответствуют максимальным подалгебрам алгебры g_2 : $su(2) \oplus su(2)$ и $su(3)$ соответственно. Соответствующими однородными пространствами являются $G_2/SO(4)$ и $G_2/SU(3) = S^6$. Отметим, что $G_2/SO(4)$ является неприводимым симметрическим пространством, а второе — изотропно неприводимо. Поэтому они допускают лишь нормальные однородные метрики. $\triangleright$

Таким образом, полученная нами орбита $G_{\alpha, \beta o} \subset M$ локально изометрична однородному ГО-пространству $(SO(5)/U(2), g_{x_1, x_2})$ при некоторых $x_1 \neq x_2$. Это наблюдение работает при любом выборе корней α и β , удовлетворяющих условиям леммы 5.5. Поэтому мы получаем

Следствие 5.3. Пусть G — простая связная компактная группа Ли, $(M = G/H, g)$ — собственное ГО-пространство положительной эйлеровой характеристики. Тогда корневая система R комплексной

алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ допускает дизъюнктное разложение

$$R = R_0 \cup R_1 \cup R_2,$$

где R_0 — корневая система комплексифицированной алгебры изотропии $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, со следующими свойствами:

1) Если $\alpha \in R_1$, $\beta \in R_2$ и $\alpha + \beta \in R$, то $\alpha - \beta \in R$ и корневая система $R(\alpha, \beta)$ ранга 2 имеет тип $B_2 = C_2$.

2) Кроме того, если α, β — базис для $R(\alpha, \beta)$ (т. е. $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$), то один из корней α, β короткий, а другой длинный, причем один из корней $\alpha \pm \beta$ принадлежит R_0 , а другой принадлежит $R_1 \cup R_2$.

3) Если оба корня $\alpha \in R_1$ и $\beta \in R_2$ короткие, то один из длинных корней $\alpha \pm \beta$ принадлежит R_0 , а другой принадлежит $R_1 \cup R_2$.

4) Если оба корня $\alpha \in R_1$ и $\beta \in R_2$ длинные, то $\alpha \pm \beta \notin R$.

Мы будем называть разложение с такими свойствами *специальным разложением*. Для того, чтобы получить такое разложение, достаточно (см. лемму 5.5) рассмотреть множество R_1 , состоящее из всех корней α , соответствующих собственному значению x_1 метрического эндоморфизма A , и R_2 , состоящее из всех корней β , соответствующих собственным значениям x_i оператора A при $i > 1$.

Следствие 5.3 влечет

Следствие 5.4. Не существует собственных ГО-пространств положительной эйлеровой характеристики с простой группой движений $G = SU(n), SO(2n), E_6, E_7, E_8$ (это в точности те простые группы Ли, алгебры Ли которых имеют корни одной и той же длины).

Из предложения 5.11 следует (в частности), что любое ГО-пространство $(G/H, g)$ положительной эйлеровой характеристики с $G = G_2$ является нормальным однородным.

Далее мы опишем все *специальные разложения* (еще не исследованных) корневых систем типа B_n, C_n и F_4 . Будем использовать обозначения из [30] (см. также таблицу 1 во второй главе) для корневых систем и простых корней.

Лемма 5.6. Корневая система

$$R(F_4) = \left\{ \pm \epsilon_i \pm \epsilon_j, \pm \epsilon_i, \frac{1}{2}(\pm \epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4), i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j \right\}$$

не допускает специальных разложений.

◁ Допустим, что такое разложение существует. Значит, мы можем выбрать корни $\alpha \in R_1$, $\beta \in R_2$ так, что $\alpha \pm \beta$ являются корнями. Тогда α , β имеют разную длину, и мы можем предположить, что $|\alpha| < |\beta|$ и $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$. Далее, мы можем включить α , β в систему простых корней δ , α , β , γ (см. [30]). Поскольку все такие системы сопряжены, мы можем считать, что $\alpha = \epsilon_4$, $\beta = -\epsilon_4 + \epsilon_3$ (см. [30]). Но это приводит к противоречию, поскольку $\alpha - \beta$ не является корнем. ▷

Сейчас мы опишем специальные разложения для корневых систем

$$R(B_n) = \{ \pm \epsilon_i, \pm \epsilon_i \pm \epsilon_j, \ i, j = 1, \dots, n \}$$

и

$$R(C_n) = \{ \pm 2\epsilon_i, \pm \epsilon_i \pm \epsilon_j, \ i, j = 1, \dots, n \}$$

типов B_n и C_n (которые на самом деле соответствуют собственным ГО-пространствам). Отметим, что в обоих случаях $R_A = \{ \pm(\epsilon_i - \epsilon_j) \}$ является замкнутой подсистемой. Мы полагаем $R_A^+ = \{ \pm(\epsilon_i + \epsilon_j) \}$.

Обозначим через R^+ стандартную подсистему положительных корней корневой системы R , а через R^s и R^ℓ — соответственно подмножества коротких и длинных корней в R . Тогда существуют специальные разложения $R = R_0 \cup R_1 \cup R_2$ систем $R(B_n)$ и $R(C_n)$, которые мы будем называть стандартными разложениями:

$$R(B_n) = R_A \cup R^s \cup R_A^+,$$

$$R(C_n) = R_A \cup R^\ell \cup R_A^+.$$

Эти разложения определяют следующие редуктивные разложения для однородных пространств $SO(2n+1)/U(n)$ и $Sp(n)/U(1) \cdot Sp(n-1)$:

$$\mathfrak{so}(2n+1) = \mathfrak{h} + (\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2) = \mathfrak{g}(R_A) + (\mathfrak{g}(R^s) + \mathfrak{g}(R_A^+)),$$

$$\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{h} + (\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2) = \mathfrak{g}(R_A) + (\mathfrak{g}(R^\ell) + \mathfrak{g}(R_A^+)),$$

где $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ — неприводимые подмодули в $\mathfrak{p}$. Хорошо известно, что любой метрический эндоморфизм $A = \text{diag}(x_1 \cdot \mathbf{1}_{\mathfrak{p}_1}, x_2 \cdot \mathbf{1}_{\mathfrak{p}_2})$ определяет инвариантную метрику с однородными геодезическими на соответствующем пространстве $M = G/H$ (см. обсуждение перед формулировкой теоремы 5.12 и [72]). Теперь теорема 5.12 следует из следующего предложения.

Предложение 5.12. Любое специальное разложение корневой системы R_B или R_C сопряжено (относительно действия группы Вейля корневой системы) стандартному разложению.

◁ Здесь мы приведем доказательство предложения для системы $R(B_n)$. Для системы $R(C_n)$ оно аналогично. Рассмотрим произвольное специальное разложение

$$R(B_n) = R_0 \cup R_1 \cup R_2$$

корневой системы $R(B_n)$. Можно считать, что существуют корни $\alpha \in R_1$ и $\beta \in R_2$, удовлетворяющие условиям $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$ и $|\alpha| < |\beta|$. Тогда мы можем включить α, β в систему простых корней, которая (без ограничения общности) имеет вид

$$\epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-2} - \epsilon_{n-1}, \epsilon_{n-1} + \epsilon_n = \beta, -\epsilon_n = \alpha.$$

Тогда $(\epsilon_{n-1} - \epsilon_n) \in R_0$. Нам нужна следующая

Лемма 5.7. Пусть $R(B_n) = R_0 \cup R_1 \cup R_2$ — приведенное выше специальное разложение, $V' = \epsilon_n^\perp$ — ортогональное дополнение вектора ϵ_n и $R(B_{n-1}) = R' := R \cap V'$ — индуцированная в гиперплоскости V' корневая система. Тогда индуцированное разложение $R' = R'_0 \cup R'_1 \cup R'_2$, где $R'_i := R_i \cap V'$, является специальным.

◁ Достаточно проверить, что подмножества R'_1, R'_2 не являются пустыми.

Будем говорить, что два корня γ, δ являются эквивалентными относительно R_0 ($\gamma \sim \delta$), если их разность принадлежит R_0 . Эквивалентные корни принадлежат одной и той же компоненте R_i . Корень $\epsilon_{n-1} = \epsilon_n - (\epsilon_{n-1} - \epsilon_n)$ эквивалентен относительно R_0 корню $\alpha = \epsilon_n$. Следовательно, он лежит в R_1 .

Будем говорить, что пара корней γ, δ с условием $\langle \gamma, \delta \rangle < 0$ является специальной, если один из этих корней принадлежит R_1 , а второй принадлежит R_2 . В таком случае эти корни имеют разную длину (скажем, $|\gamma| > |\delta|$). Кроме того, корень $\gamma + \delta$ является коротким и принадлежит тому же подмножеству R_i , $i = 1, 2$, что и короткий корень δ , а корень $2\gamma + \delta$ является длинным и принадлежит к R_0 .

Рассмотрим корни $\sigma_\pm = \pm\epsilon_{n-2} - \epsilon_{n-1}$. Они имеют отрицательные скалярные произведения с корнями $\epsilon_{n-1} \in R_1$ и $\beta = \epsilon_{n-1} + \epsilon_n \in R_2$. Ни один из корней $\sigma_\pm$ не принадлежит R_1 , поскольку иначе мы получим

специальную пару $\sigma_{\pm}, \beta$, состоящую из длинных корней. Они не могут оба принадлежать R_0 , поскольку иначе $\epsilon_{n-2} \sim \epsilon_{n-1} \in R_1$ и $\pm\epsilon_{n-2} + \epsilon_n \sim \epsilon_{n-1} + \epsilon_n \in R_2$, и мы получаем специальную пару

$$\gamma = \epsilon_{n-2} \in R_1, \quad \delta = -\epsilon_{n-2} + \epsilon_n \in R_2$$

со свойством $2\gamma + \delta \in R_0$, что невозможно. Таким образом, один из корней $\sigma_{\pm} = \pm\epsilon_{n-2} - \epsilon_{n-1} \in R'$ должен принадлежать R_2 . Поскольку корень $\epsilon_{n-1} \in R'$ принадлежит R_1 , лемма доказана. $\triangleright$

Теперь мы закончим доказательство предложения 5.12 индукцией по n . Утверждение верно для $n = 2$ согласно предложению 5.11. Предположим, что оно верно для $R(B_{n-1})$ и пусть $R(B_n) = R_0 \cup R_1 \cup R_2$ — специальное разложение как выше. По лемме 5.7 разложение $R' = R'_0 \cup R'_1 \cup R'_2$, индуцированное в ортогональной к вектору ϵ_n гиперплоскости V' , является специальным. По индуктивному предположению мы можем считать, что оно имеет стандартную форму

$$R_0 = \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j)\}, \quad R_1 = \{\pm\epsilon_i\}, \quad R_2 = \{\pm(\epsilon_i + \epsilon_j), i, j = 1, \dots, n-1\}.$$

Отсюда получаем, что и исходное разложение стандартно. $\triangleright$

ГЛАВА 6

ОБОБЩЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ С ВНУТРЕННЕЙ МЕТРИКОЙ

6.1. δ -однородные и однородные по Клиффорду — Вольфу пространства

Мы начнем с определения важных классов изометрий общих метрических пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 104 [34, 91]. Пусть (X, d) — метрическое пространство и $x \in X$. Изометрия f пространства (X, d) на себя называется $\delta(x)$ -переносом, если x — точка максимального смещения для f , т. е. для всех $y \in X$ выполнено неравенство $d(y, f(y)) \leq d(x, f(x))$. Изометрия f пространства (X, d) на себя называется (переносом Клиффорда — Вольфа), если f смещает все точки (X, d) на одно и то же расстояние, т. е. $d(y, f(y)) = d(x, f(x))$ для всех $x, y \in X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 105. Метрическое пространство (X, d) называется (G) - δ -однородным (соответственно, (G) -однородным по Клиффорду — Вольфу), если для всех $x, y \in X$ существует $\delta(x)$ -перенос (соответственно, перенос Клиффорда — Вольфа) пространства (X, d) (из группы изометрий G), перемещающий x в y .

Очевидна следующая

Лемма 6.1. Для метрического пространства (X, d) любой перенос Клиффорда — Вольфа является $\delta(x)$ -переносом для всех $x \in X$. Кроме того, любое (G) -однородное по Клиффорду — Вольфу пространство является (G) - δ -однородным, которое в свою очередь является (G) -однородным.

ПРИМЕР 21. Каждая группа Ли с биинвариантной внутренней метрикой (G, r) и каждая нечетномерная евклидова сфера $S^{2n+1} \subset$

$\mathbb{E}^{2(n+1)}$ с индуцированной внутренней (римановой) метрикой являются однородными по Клиффорду — Вольфу пространствами. В первом случае достаточно использовать левые сдвиги на элементы группы. Второй случай разобран, по сути, самим Клиффордом. Очевидно, что прямое метрическое произведение δ -однородных (соответственно, однородных по Клиффорду — Вольфу) пространств также δ -однородно (соответственно, однородно по Клиффорду — Вольфу).

Нетрудно показать, что δ -однородное риманово многообразие (M, μ) G - δ -однородно для некоторой связной транзитивной (может быть, не единственной) группы Ли движений пространства (M, μ) ; в качестве G всегда можно взять связную компоненту единицы группы $I(M)$ всех движений пространства (M, μ) . Поэтому в римановом случае в качестве G можно ограничиться рассмотрением только связных транзитивных групп Ли движений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 106. Локально компактное пространство с внутренней метрикой или риманово однородное многообразие $(M = G/H, \rho)$ со связной полной в компактно-открытой топологии транзитивной группой движений G и стабилизатором H в точке $x \in M$ называется G -нормальным в обобщенном (соответственно, обычном) смысле, если G допускает биинвариантную (соответственно, риманову биинвариантную) внутреннюю метрику r такую, что естественная проекция $(G, r) \rightarrow (G/H, \rho)$ является субметрией.

Отметим, что согласно работе [9] каждая биинвариантная внутренняя метрика на группе Ли финслерова. В настоящее время не известно ни одного примера неразложимого компактного односвязного δ -однородного риманова многообразия нулевой эйлеровой характеристики, которое не являлось бы нормальным однородным.

6.2. δ -однородные и ограничено однородные по Клиффорду — Вольфу римановы многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 107. Пространство с внутренней метрикой (M, ρ) называется *ограниченно (G) - δ -однородным* (соответственно, *ограниченно (G) -однородным по Клиффорду — Вольфу*), если для произвольной точки $x \in M$ существует число $r(x) > 0$ такое, что для любых двух точек y, z в открытом шаре $U(x, r(x))$ существует $\delta(y)$ -перенос (соответственно, перенос Клиффорда — Вольфа)

пространства (M, ρ) (из группы движений G), переводящий y в z . Верхняя грань $R(x)$ всех таких чисел $r(x)$ называется *радиусом* (G) - δ -однородности (соответственно, *радиусом* (G) -однородности по Клиффорду — Вольфу) пространства (M, ρ) в точке x .

Предложение 6.1. Каждое связное ограниченно (G) - δ -однородное локально компактное полное пространство с внутренней метрикой является (G) - δ -однородным.

◁ Ясно, что (в обозначениях определения 107) функция $R(x)$, $x \in M$, тождественно равна $+\infty$, т. е. пространство (M, ρ) (G) - δ -однородно, или удовлетворяет неравенству $|R(x_1) - R(x_2)| \leq \rho(x_1, x_2)$, где функция $R(x)$, $x \in M$, положительна.

Рассмотрим произвольные точки x, y некоторого метрического пространства (M, ρ) и предположим, что это пространство удовлетворяет указанному условию. Тогда можно соединить точки x и y некоторой кратчайшей $[x, y]$. Согласно сказанному выше, можно разбить последовательно эту кратчайшую точками $x_0 = x, x_1, \dots, x_m = y$ так, что для каждого l , где $0 \leq l \leq m-1$, существует $\delta(x_l)$ -перенос f_l пространства (M, ρ) (из группы G), перемещающий точку x_l в точку x_{l+1} . Из неравенства треугольника следует, что композиция $f := f_{m-1} \circ \dots \circ f_0$ есть $\delta(x)$ -перенос пространства (M, ρ) (из группы G) такой, что $f(x) = y$. ▷

Следствие 6.1. Каждое связное ограниченно (G) -однородное по Клиффорду — Вольфу локально компактное полное пространство с внутренней метрикой является (G) - δ -однородным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 108. Изометрия f метрического пространства (M, ρ) на себя называется *ограниченной*, если

$$\text{displ}(f) := \sup_{x \in M} \rho(x, f(x)) < +\infty.$$

При этом число $\text{displ}(f)$ называется *смещением* изометрии f .

На основании неравенства треугольника в (M, ρ) легко доказать

Предложение 6.2. Множество $BI(M)$ всех ограниченных изометрий метрического пространства (M, ρ) является группой с биинвариантной метрикой

$$d(f, g) := \text{displ}(f^{-1}g).$$

Лемма 6.2. Пусть (M, ρ) — риманово многообразие (с внутренней метрикой ρ) с некоторой транзитивной группой Ли G изометрий, замкнутой в полной группе движений (M, ρ) ; $f_k \in G$ — последовательность изометрий со сдвигами, равномерно ограниченными сверху числом r , где $0 < r < +\infty$. Тогда существует подпоследовательность последовательности f_k , сходящаяся в G к некоторой изометрии f . При этом $\text{displ}(f) \leq r$. Как следствие, группа $(BI(M) \cap G, d)$ метрически полна.

◁ Пространство (M, ρ) можно представить в виде однородного фактор-пространства G/H группы Ли G всех его изометрий по ее компактной подгруппе H (стабилизатору некоторой точки $x \in M$). Вследствие предложения 4.1 и теоремы 1.25 соответствующая проекция $p : G \rightarrow G/H = M$ является локально тривиальным расслоением. Отсюда легко выводится, что эта проекция является собственным отображением, т. е. прообраз каждого компактного подмножества в (M, ρ) относительно p компактен. Вследствие условия леммы для всех k $\rho(x, f_k(x)) \leq \text{displ}(f_k) \leq r$, т. е. $f_k(x) \in B(x, r)$. На основании теоремы Хопфа — Ринова, шар $B(x, r)$ компактен, и, следовательно, все изометрии f_k лежат в компактном множестве $p^{-1}(B(x, r)) \subset G$. Следовательно, существует подпоследовательность последовательности f_k , сходящаяся в G к некоторой изометрии f . Ясно, что $\text{displ}(f) \leq r$ вследствие непрерывности действия группы $G = I(M)$ в M . Теперь последнее утверждение очевидно. ▷

Лемма 6.3. Пусть (M, ρ) и G — те же, что и в лемме 6.2, U — произвольная окрестность единицы в G . Тогда существует число $r > 0$ такое, что $f \in U$, если $f \in G$ и $\text{displ}(f) \leq r$.

◁ Предположим, что лемма неверна. Тогда для каждого натурального числа k существует изометрия $f_k \in G$ такая, что $\text{displ}(f_k) \leq 1/k$ и $f_k \notin U$. Тогда $d(f_k, e) = \text{displ}(f_k) \leq 1/k$ и $f_k \rightarrow e$ в G вследствие леммы 6.2. Противоречие. ▷

Лемма 6.4. Пусть (M, ρ) — полное риманово многообразие, $\text{Radinj}(x) = l$ — радиус инъективности многообразия M в точке $x \in M$; $f \in I(M)$, $0 < 2\text{displ}(f) = 2\rho(x, f(x)) = 2r < l$. Тогда $\text{displ}(f^k) \leq |k|r$ для всех $k \in \mathbb{Z}$; $\rho(x, f^2(x)) = 2r$; все точки орбиты точки x относительно группы f^k , $k \in \mathbb{Z}$, лежат на единственной геодезической γ , соединяющей точки x и $f(x)$.

◁ Первое утверждение является следствием неравенства треугольника в (M, ρ) . Вследствие условия на радиус инъективности на геодезической γ существует единственная точка y такая, что $\rho(x, y) = 2r$ и $\rho(f(x), y) = r$, т. е. $f(x)$ — середина *единственного кратчайшего отрезка* $[x, y]$. Предположим, что второе утверждение неверно. Тогда $\rho(x, f^2(x)) < 2r$, $f^2(x) \neq y$, и точка $f^2(x)$ является серединой *единственного кратчайшего отрезка* $[f(x), f(y)]$. Тогда $\rho(y, f(y)) > r$ вследствие соотношений $\rho(f(x), y) = r$ и $f^2(x) \neq y$. Это противоречит равенству $\text{displ}(f) = \rho(x, f(x)) = r$. Таким образом, должно быть $\rho(x, f^2(x)) = 2r$ и $f^2(x) = y$. Отсюда следует, что для всех $k \in \mathbb{Z}$, точка $f_{k+1}(x)$ является серединой *единственного кратчайшего отрезка* $[f_k(x), f_{k+2}(x)]$, а следовательно, и последнее утверждение леммы. ▷

Теорема 6.1. Для связного полного риманова многообразия (M, ρ) и некоторой его группы Ли G движений следующие условия эквивалентны:

1) (M, ρ) G - δ -однородно (соответственно, ограниченно G -однородно по Клиффорду — Вольфу);

2) каждая геодезическая γ в (M, ρ) с началом в какой-нибудь точке $x \in M$ является интегральной кривой некоторого киллингова векторного поля на многообразии (M, ρ) из алгебры Ли группы Ли G , достигающего максимального значения длины в точке x (соответственно, имеющего постоянную длину);

3) для каждой точки $x \in M$ и каждого вектора $v \in M_x$ существует киллингово векторное поле X на многообразии (M, ρ) из алгебры Ли группы Ли G , достигающее максимального значения длины в точке x (соответственно, имеющее постоянную длину), с условием $X(x) = v$.

◁ Доказательство проводится одновременно для обоих случаев.

Очевидно, из условия 2) следует условие 3). Обратное утверждение следует из пункта 3) теоремы 3.3.

Теперь достаточно доказать эквивалентность условий 1) и 2). Ясно, что вследствие связности и полноты многообразия (M, ρ) , при наличии любого из четырех условий, упоминающихся в 1) и 2), группа Ли G транзитивна на многообразии (M, ρ) . Тогда радиус инъективности многообразия M не меньше некоторой постоянной $L > 0$.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $U = \exp(V)$ — диффеоморфный образ какой-нибудь ограниченной выпуклой симметричной открытой окрестности нуля в G_e и γ — (нетривиальная) геодезическая в (M, ρ) с началом в $x \in M$. Тогда существует число $r > 0$, для которого одновременно верны утверждение леммы 6.3, условие леммы 6.4 (и, соответственно, условие из определения 107 ограниченно однородного по Клиффорду — Вольфу многообразия). Для каждого натурального числа k существует изометрия (соответственно, перенос Клиффорда — Вольфа) $f_k \in G$ с условиями $\text{displ}(f_k) = r/2^{k-1} = \rho(x, f_k(x))$ и $f_k(x) = \gamma(s_k)$, где $s_k = c/2^{k-1}$ для некоторого фиксированного числа $c > 0$, не зависящего от k . Из выбора числа r и лемм 6.3 и 6.4 следует, что орбита $O(x, k)$ точки x относительно каждой группы изометрий, порожденной f_k , лежит на γ , $f_k^l \in U$ и $\text{displ}(f_k^l) = \rho(x, f_k^l(x)) = |l|r/2^{k-1}$ (соответственно, $\text{displ}(f_k^l) = \rho(y, f_k^l(y)) = |l|r/2^{k-1}$ для всех точек $y \in M$) для всех $l \in [-2^{k-1}, 2^{k-1}]$. Отсюда следует, что $O(x, k+1) \supset O(x, k)$ и $f_k^l = \exp((l/2^{k-1})X_k)$ для некоторого $X_k \in V$ и всех натуральных k и $l \in [-2^{k-1}, 2^{k-1}]$. Из последовательности векторов X_k можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому вектору X из замыкания (ограниченной) области V . По построению, для любых двоично-рациональных чисел $s, t \in [0, 1]$ выполняется равенство $\rho(\exp(tX)x, \exp(sX)x) = |s - t|r$ (соответственно, $\rho(\exp(tX)y, \exp(sX)y) = |s - t|r$ для всех точек $y \in M$) и $\exp(\tau X)x = \gamma(c\tau)$ для всех двоично-рациональных чисел τ . Следовательно, это верно и для всех чисел $s, t \in [0, 1]$, $\tau \in \mathbb{R}$, вектор X , рассматриваемый как киллингово векторное поле на (M, ρ) , имеет максимальную длину в точке x (соответственно, постоянную длину), равную r . Ясно теперь, что γ является интегральной кривой искомого киллингова векторного поля $Y = (1/c)X$.

1) $\Leftarrow$ 2). Пусть теперь каждая геодезическая γ с началом в какой-нибудь точке $x \in M$ является интегральной кривой некоторого киллингова векторного поля X на многообразии (M, ρ) из алгебры Ли группы Ли G , достигающего максимального значения длины в точке x (соответственно, имеющего постоянную длину). Можно считать, что каждая такая геодезическая γ параметризована длиной дуги. Тогда для каждого числа $t \in (0, L)$ и любой точки $y \in M$ получаем соотношения $t = \rho(x, \exp(tX)(x)) = \int_0^t |c'_x(s)| ds \geq \int_0^t |c'_y(s)| ds \geq \rho(y, \exp(tX)(y))$, где c_x и c_y обозначают соответственно интегральные кривые поля X , проходящие через точки c_x и c_y (для второго

условия вследствие пункта 3) теоремы 3.3 вместо неравенств в соотношениях выше надо поставить знаки равенства). Отсюда следует, что $\exp(tX)$ является $\delta(x)$ -переносом (соответственно, переносом Клиффорда — Вольфа), а M — ограниченно δ -однородным, следовательно δ -однородным (соответственно, ограниченно однородным по Клиффорду — Вольфу). Теорема доказана. $\triangleright$

Следствие 6.2. Каждое (G) - δ -однородное риманово многообразие является геодезически орбитальным римановым пространством (с группой движений G).

6.3. Некоторые структурные результаты

На основании теорем 3.5 и 6.1 получаем

Следствие 6.3. Каждое δ -однородное (соответственно, однородно ограниченное по Клиффорду — Вольфу) риманово многообразие (M, μ) с внутренней метрикой ρ имеет неотрицательную секционную кривизну.

Заметим, что это следствие вытекает также из следующей теоремы.

Теорема 6.2 (БЕРЕСТОВСКИЙ — ПЛАУТ [91]). Каждое локально компактное δ -однородное пространство с внутренней метрикой ограниченной снизу кривизны по Александру имеет неотрицательную кривизну.

Известна следующая теорема.

Теорема 6.3 (ТОПОНОВ [55]). Каждое полное риманово многообразие (M, μ) неотрицательной секционной кривизны, содержащее прямую метрическую линию, изометрично прямому риманову произведению $(N, \nu) \times \mathbb{R}$.

Лемма 6.5. Предположим, что риманово многообразие (M, μ) изометрично прямому метрическому произведению $(K, \mu_1) \times (\mathbb{E}^m, \mu_2)$, где (K, μ_1) — компактное однородное риманово многообразие, и $(\mathbb{E}^m, \mu_2)$ — конечномерное евклидово пространство. Тогда каждая изометрия f пространства (M, μ) имеет вид $f = f_1 \times f_2$, где f_1 (соответственно, f_2) — изометрия пространства (K, μ_1) (соответственно, $(\mathbb{E}^m, \mu_2)$).

$\triangleleft$ Легко видно, что геодезическая в (M, μ) является метрической прямой тогда и только тогда, когда она расположена в некотором

евклидовом подпространстве $\{k\} \times \mathbb{E}^m$. Поэтому каждая изометрия f пространства (M, μ) переставляет такие подпространства. Так как f сохраняет ортогональность, то f должна переставлять все слои вида $K \times \{e\}$. Это доказывает лемму. $\triangleright$

Лемма 6.6. Если $M = M_1 \times M_2$ — прямое метрическое произведение римановых многообразий, то его изометрия вида $f = f_1 \times f_2$ является $\delta(x)$ -переносом для точки $x = (x_1, x_2) \in M$ тогда и только тогда, когда изометрии $f_1 : M_1 \rightarrow M_1$ и $f_2 : M_2 \rightarrow M_2$ являются δ -переносами в точках $x_1 \in M_1$ и $x_2 \in M_2$ соответственно. Аналогичное утверждение верно для переносов Клиффорда — Вольфа.

$\triangleleft$ Напомним, что $\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \rho_2^2(x_2, y_2)}$, где ρ, ρ_1, ρ_2 — внутренние метрики пространств M, M_1 и M_2 соответственно. Из этого сразу получаем достаточность. Предположим, что $f = f_1 \times f_2$ — δ -перенос пространства M в точке $x = (x_1, x_2)$, но, например, f_1 не является δ -переносом в точке x_1 . Тогда существует точка x'_1 такая, что $\rho_1(x'_1, f_1(x'_1)) > \rho_1(x_1, f_1(x_1))$. Поэтому

$$\begin{aligned} \rho((x_1, x_2), f(x_1, x_2)) &= \sqrt{\rho_1^2(x_1, f_1(x_1)) + \rho_2^2(x_2, f_2(x_2))} < \\ &< \sqrt{\rho_1^2(x'_1, f_1(x'_1)) + \rho_2^2(x_2, f_2(x_2))} = \rho((x'_1, x_2), f(x'_1, x_2)), \end{aligned}$$

что противоречит предположениям леммы. Ясно, что второе утверждение является следствием первого. $\triangleright$

Теорема 6.4. Каждое связное δ -однородное (соответственно, ограничено однородное по Клиффорду — Вольфу) риманово многообразие (M, μ) компактно или изометрично прямому метрическому произведению евклидова пространства и компактного δ -однородного (соответственно, ограничено однородного по Клиффорду — Вольфу) риманова многообразия неотрицательной секционной кривизны.

$\triangleleft$ Теорема вытекает из следствия 6.3, теоремы 6.3 и лемм 6.5, 6.6. $\triangleright$

Непосредственным следствием теорем 3.28 и 6.1 является

Теорема 6.5. Каждое локально изометричное накрывающее пространство риманова δ -однородного (соответственно, ограничено однородного по Клиффорду — Вольфу) многообразия является римановым δ -однородным (соответственно, ограничено однородным по Клиффорду — Вольфу) римановым многообразием.

Следствие 6.4. Универсальное риманово накрывающее пространство $(\widetilde{M}, \widetilde{\mu})$ δ -однородного (соответственно, ограничено однородного по Клиффорду — Вольфу) компактного риманова многообразия (M, μ) компактно тогда и только тогда, когда $\pi_1(M)$ конечна. Иначе $(\widetilde{M}, \widetilde{\mu})$ изометрично прямому метрическому произведению некоторого компактного односвязного δ -однородного (соответственно, ограничено однородного по Клиффорду — Вольфу) риманова пространства и некоторого нетривиального евклидова пространства.

Теорема 6.6. Однородное пространство $M = G/H$ связной группы Ли G по ее компактной подгруппе H допускает инвариантную риманову δ -однородную метрику тогда и только тогда, когда G/H допускает инвариантную риманову метрику неотрицательной секционной кривизны.

$\triangleleft$ *Необходимость* вытекает из следствия 6.3. Докажем *достаточность*. Предположим, что $M = G/H$ допускает инвариантную риманову метрику μ неотрицательной секционной кривизны.

Если M компактно, то группа Ли G компактна и допускает биинвариантную риманову метрику γ . Тогда существует единственная риманова метрика ν на M такая, что каноническая проекция $p : (G, \gamma) \rightarrow (M, \nu)$ является римановой субмерсией. При этом ν G -инвариантна на G/H , и $(G/H, \nu)$ — G -нормальное однородное риманово многообразие. Согласно примеру 21, следствию 1.6 и теореме 6.7 $(G/H, \nu)$ есть δ -однородное пространство.

Предположим, что M некомпактно. Тогда вследствие предположения и теоремы 6.3 для некоторой инвариантной римановой метрики μ все условия леммы 6.5 выполняются, и (K, μ_1) имеет неотрицательную секционную кривизну. Поэтому верны утверждения леммы 6.5. Очевидно, множество всех изометрий вида $\{f_1 | f = (f_1, f_2) \in G\}$ образует предкомпактную транзитивную группу изометрий G_1 компактного пространства (K, μ_1) (относительно компактно-открытой топологии) с замыканием $\Gamma_1 := \overline{G_1}$, являющимся компактной эффективной транзитивной группой Ли изометрий пространства (K, μ_1) . Следовательно, многообразие K допускает Γ_1 -инвариантную риманову метрику γ_1 такую, что (K, γ_1) — нормальное однородное пространство группы Ли Γ_1 . Аналогично рассуждениям из предыдущего абзаца, (K, γ_1) есть δ -однородное простран-

ство. Из последних рассуждений вытекает, что риманова метрика $g_0 = \gamma_1 \times \mu_2$ на M инвариантна относительно действия группы G . В этом случае риманово многообразие $(M, \mu_0) = (K, \gamma_1) \times (\mathbb{E}^m, \mu_2)$ является δ -однородным пространством как прямое метрическое произведение δ -однородных пространств. $\triangleright$

6.4. Обобщенные нормальные однородные и δ -однородные римановы многообразия

Здесь мы приводим результаты из работы [90].

Теорема 6.7. Пусть (M, r) — локально компактное G - δ -однородное пространство с внутренней метрикой. Предположим, что группа G нормализует некоторую замкнутую подгруппу H полной группы изометрий $\text{Isom}(M)$ пространства M (снабженной компактно-открытой топологией). Тогда пространство орбит $H \backslash M$ с факторметрикой ρ — (G) - δ -однородное локально компактное пространство с внутренней метрикой.

$\triangleleft$ Согласно теореме С. Э. Кон-Фоссена [109], каждое полное локально компактное пространство с внутренней метрикой конечно-компактно, т. е. каждое его замкнутое ограниченное подмножество компактно. В статье [10] доказано, что каждая замкнутая подгруппа полной группы изометрий (с компактно-открытой топологией) любого конечно-компактного пространства имеет замкнутые орбиты. Из этого следует, что группа H имеет замкнутые орбиты в M .

На основании этого легко доказать, что каноническая проекция $p : (M, r) \rightarrow (H \backslash M, \rho)$ является субметрией. Это эквивалентно следующим двум свойствам:

- 1) отображение p не увеличивает расстояния;
- 2) для любых трех точек $x, y \in H \backslash M$, $\xi \in p^{-1}(x)$ существует некоторая точка $\eta \in p^{-1}(y)$ такая, что $r(\xi, \eta) = \rho(x, y)$.

Рассмотрим теперь произвольные точки $x, y \in H \backslash M$ и соответствующие точки ξ, η из свойства 2). По условию существует $\delta(\xi)$ -перенос F пространства (M, r) из группы G такой, что $F(\xi) = \eta$. Так как группа G нормализует группу H , существует некоторая изометрия f пространства $(H \backslash M, \rho)$, индуцированная изометрией F . Кроме того, $f(x) = p(F(\xi)) = p(\eta) = y$. Теперь для любой точки

$z = p(\zeta) \in H \setminus M$ из свойств 1) и 2) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \rho(x, f(x)) &= \rho(x, y) = r(\xi, \eta) = r(\xi, F(\xi)) \geq \\ &\geq r(\zeta, F(\zeta)) \geq \rho(p(\zeta), p(F(\zeta))) = \rho(z, f(z)), \end{aligned}$$

т. е. f — $\delta(x)$ -перенос пространства $(H \setminus M, \rho)$, переводящий точку x в точку y . Поэтому пространство $(H \setminus M, \rho)$ G - δ -однородно. $\triangleright$

Следствие 6.5. Каждое (G) -нормальное в обобщенном смысле однородное локально компактное пространство с внутренней метрикой (G) - δ -однородно. Как следствие, каждое (G) -нормальное в обычном или в обобщенном смысле однородное риманово многообразие (G) - δ -однородно.

$\triangleleft$ Пусть рассматриваемое (G) -нормальное (в обобщенном смысле) однородное пространство является (метрическим) фактор-пространством $(G/H, \rho)$ некоторой локально компактной топологической группы (G, r) с биинвариантной внутренней метрикой r по ее компактной подгруппе H . Тогда группа левых переносов группы (G, r) является транзитивной группой переносов Клиффорда — Вольфа, коммутирующей с группой правых переносов на элементы подгруппы H , состоящей из некоторых изометрий пространства (G, r) . Теперь достаточно применить теорему 6.7. $\triangleright$

Теорема 6.8. Пусть (M, μ) — гладкое связное компактное риманово многообразие с внутренней метрикой ρ и G — компонента связности единицы полной группы изометрий пространства (M, μ) . Тогда функция $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$, определенная формулой

$$d(g, h) = \max_{x \in M} \rho(g(x), h(x)), \quad (6.1)$$

определяет некоторую биинвариантную метрику на G , совместимую с ее компактно-открытой топологией. В этом случае (G, d) локально изометрично (G, D) для некоторой биинвариантной внутренней метрики D на G . При отождествлении алгебры Ли $\mathfrak{g} = G_e$ группы G с алгеброй Ли киллинговых векторных полей на (M, μ) , D совпадает с биинвариантной финслеровой метрикой на G , задаваемой $\text{Ad}(G)$ -инвариантной чебышевской нормой $\|\cdot\|$ на $\mathfrak{g}$, определенной формулой

$$\|X\| = \max_{x \in M} \sqrt{\mu(X(x), X(x))}. \quad (6.2)$$

◁ Биинвариантность метрики d проверяется непосредственно. Из компактности (M, μ) следует компактность группы Ли G . Тогда, так как G связно, экспоненциальное отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в G сюръективно.

Пусть $g \neq e$ — произвольный элемент из G . Тогда $g = \exp(X)$ для некоторого подходящего киллингова векторного поля X на (M, μ) . Пусть

$$\|X\| = \max_{x \in M} \sqrt{\mu(X(x), X(x))} = \sqrt{\mu(X(y), X(y))}.$$

Согласно утверждению 3) теоремы 3.3 кривая $\gamma(t) = \exp(tX)(y)$, $0 \leq t \leq 1$, является отрезком геодезической в (M, μ) длины $\|X\|$. Известно, что для любой другой точки $x \in M$ кривая $\exp(tX)(x)$, $0 \leq t \leq 1$, параметризована пропорционально длине дуги с коэффициентом пропорциональности $\sqrt{\mu(X(x), X(x))}$, не превосходящим $\|X\|$. Поэтому длина каждой дуги второй кривой не превосходит длины соответствующей дуги геодезической γ .

Радиус инъективности компактного гладкого многообразия (M, μ) ограничен снизу некоторым числом $r > 0$. Если $0 \leq s\|X\| < r$, $t, s \in [0, 1]$, то отсюда следует, что для $g(s) = \exp(sX)$, $g(t) = \exp(tX)$, точка $\gamma(t)$ есть точка максимального смещения на (M, ρ) для движения $g(s)$, так как $\rho(g(s)(\gamma(t)), \gamma(t)) = s\|X\|$ согласно равенствам

$$g(s)(\gamma(t)) = g(s)(g(t)(y)) = g(s+t)(y) = \gamma(s+t).$$

Тогда $d(g(t), g(t+s)) = s\|X\|$, длина кривой $g(t)$, $0 \leq t \leq 1$, в (G, d) равна числу $\|X\|$. Поэтому любые две точки в (G, d) можно соединить кривой конечной длины (относительно метрики d). Пусть D — внутренняя метрика, соответствующая метрике d .

Существует положительное число s_0 такое, что $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ — диффеоморфизм некоторой открытой окрестности V нуля в $\mathfrak{g}$ на открытый шар $U(e, s_0)$ радиуса s_0 в (G, d) . Тогда из проведенных рассуждений вытекает, что кривая $g(t)$, $0 \leq t \leq 1$, является геодезической в (G, D) и $D(g, h) = d(g, h)$, если $d(g, h) < \min(r, s_0)$. Кроме того, $d \leq D$.

Из предшествующих вычислений длины геодезической $g(t) = \exp(tX)$, $0 \leq t \leq 1$, в (G, D) ясно, что D — биинвариантная финслерова (внутренняя) метрика на G , задаваемая $\text{Ad}(G)$ -инвариантной нормой $\|\cdot\|$ на $\mathfrak{g}$, определяемой по формуле (6.2). Легко проверить, что эта формула определяет некоторую норму на $\mathfrak{g}$. ▷

Вопрос 5. Совпадают ли метрики d и D на G ?

Теорема 6.9. Пусть (M, μ) — компактное однородное риманово многообразие. Тогда существует некоторое положительное число $s > 0$ такое, что для каждого движения f пространства (M, μ) с максимальным смещением δ , меньшим числа s , существует единственное киллингово векторное поле X на (M, μ) такое, что $\max_{x \in M} \sqrt{\mu(X(x), X(x))} = 1$ и $\gamma_X(\delta) = f$, где $\gamma_X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — 1-параметрическая группа движений на (M, μ) , порожденная полем X . Если f — перенос Клиффорда — Вольфа, то киллингово поле X имеет постоянную единичную длину на (M, μ) .

◁ Снабдим компоненту связности единицы G полной группы изометрий пространства (M, μ) биинвариантной метрикой d как в теореме 6.8. Существует достаточно малое число $s > 0$ (которое можно предполагать меньшим радиуса инъективности r многообразия (M, μ)) такое, что экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ является диффеоморфизмом некоторой окрестности V нуля в $\mathfrak{g}$ на некоторый открытый шар $U(e, s)$ в (G, d) . Тогда для каждого движения f пространства (M, μ) с условием $d(f, e) = \delta < s$ существует единственный вектор $Y \in V$ такой, что $\exp(Y) = f$. В доказательстве теоремы 6.8 было показано, что $D(f, e) = d(f, e)$ для всех таких движений f . Это общее значение также равно длине пути $\exp(\tau Y)$, $0 \leq \tau \leq 1$, соединяющего элементы e и f , относительно биинвариантной нормы $\|\cdot\|$ на $\mathfrak{g}$ из теоремы 6.8 и длине $\|Y\|$. По определению, $\|Y\| = \max_{x \in M} \sqrt{\mu(Y(x), Y(x))}$. Теперь ясно, что $X = (1/\delta)Y$ — желаемый вектор. Единственность поля X следует из проведенных рассуждений.

Предположим теперь, что f — перенос Клиффорда — Вольфа. Вследствие проведенного построения

$$\|X\| = 1 = \max_{x \in M} \sqrt{\mu(X(x), X(x))} = \sqrt{\mu(X(x_1), X(x_1))} \quad (6.3)$$

для некоторой точки $x_1 \in M$. Мы утверждаем, что

$$\sqrt{\mu(X(x), X(x))} \equiv 1.$$

В самом деле, иначе существовала бы точка $x_0 \in M$ такая, что $\sqrt{\mu(X(x_0), X(x_0))} = \varepsilon < 1$. Тогда путь $c(t) = \exp(tX)(x_0)$, $0 \leq t \leq \delta$, соединяет точку x_0 с точкой $f(x_0)$ и имеет длину $\delta\varepsilon$. Поэтому

$\rho(x_0, f(x_0)) \leq \delta\varepsilon < \delta = \rho(x_1, f(x_1))$, так как согласно условию (6.3), орбита точки x_1 относительно действия 1-параметрической группы $\exp(tX)$, $t \in \mathbb{R}$, является геодезической (см. утверждение 3) теоремы 3.3) и $\delta < r$. Это противоречит тому, что f — перенос Клиффорда — Вольфа. $\triangleright$

Теорема 6.10. Пусть (M, μ) — компактное связное G - δ -однородное риманово многообразие с внутренней метрикой ρ , а G — замкнутая связная подгруппа (Ли) полной группы изометрий пространства (M, μ) , снабженная биинвариантной внутренней метрикой D как в теореме 6.8 (более точно, ее сужением на G). Тогда D — внутренняя биинвариантная метрика на G . Фиксируем некоторую точку $x_0 \in M$ и определим проекцию $p: G \rightarrow M$ по формуле $p(g) = g(x_0)$ так, что при обычном отождествлении пространства M с G/H , где H — стабилизатор группы G в точке x_0 , p совпадает с канонической проекцией $p: G \rightarrow G/H$. Тогда отображение $p: (G, D) \rightarrow (M, \rho)$ является субметрией.

$\triangleleft$ Первое утверждение следует непосредственно из рассуждений в последних двух абзацах доказательства теоремы 6.8, примененной к G .

Теперь достаточно проверить свойства 1) и 2) из доказательства теоремы 6.7.

1) Пусть $g, h \in G$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho(p(g), p(h)) &= \rho(g(x_0), h(x_0)) \leq \\ &\leq \max_{x \in M} \rho(g(x), h(x)) = d(g, h) \leq D(g, h), \end{aligned}$$

т. е. p не увеличивает расстояний.

2) Рассмотрим любые точки x, y в M и положим $\rho(x, y) = a$. Выберем произвольную кратчайшую K в (M, ρ) , соединяющую точки x и y ; рассмотрим некоторую геодезическую $\gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$, в (M, μ) , параметризованную длиной дуги, такую, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(a) = y$ и $\gamma(s) \in K$, $0 \leq s \leq a$. Так как (M, ρ) G - δ -однородно, существует некоторый $\delta(x)$ -перенос $g_t \in G$ пространства (M, ρ) , переводящий точку x в точку $\gamma(t)$, $0 < t \leq a$. Если теперь t достаточно мало, то вследствие теорем 6.8 и 6.9 существует некоторая 1-параметрическая группа движений $g(s) = \gamma_X(s) \in G$, $s \in \mathbb{R}$ такая, что $g(t) = g_t$ и $\max_{y \in M} \sqrt{\mu(X(y), X(y))} = \sqrt{\mu(X(x), X(x))}$. Тогда $g(s)(x) = \gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Поэтому $D(e = g(0), g(s)) = d(e, g(s)) = s$ для $0 \leq s \leq a$. Пусть $p(h) = h(x_0) = x$ для некоторого элемента $h \in G$. Тогда

$$y = \gamma(a) = g(a)(x) = g(a)(h(x_0)) = p(g(a)h),$$

$$D(h, g(a)h) = D(e, g(a)) = a = \rho(x, y). \triangleright$$

На основании следствия 6.5 и теоремы 6.10 мы получаем

Следствие 6.6. *Компактное связное риманово многообразие (G) - δ -однородно тогда и только тогда, когда оно (G) -нормально в обобщенном смысле.*

Пусть $(G/H, \mu)$ — G - δ -однородное (или компактное однородное) риманово многообразие со связной группой Ли G , и пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G (которое для G - δ -однородного случая существует по теореме 6.4). Рассмотрим $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -отогональное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Как обычно, мы отождествляем метрику μ с соответствующим $\text{Ad}(H)$ -инвариантным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{p}$.

Теперь предыдущее следствие можно переформулировать следующим образом.

Теорема 6.11. *Компактное риманово многообразие $(G/H, \mu)$ G - δ -однородно относительно группы Ли G тогда и только тогда, когда существует $\text{Ad}(G)$ -инвариантное центрально симметричное (относительно нуля) выпуклое тело B в $\mathfrak{g}$ такое, что*

$$P(B) = \{v \in \mathfrak{p} \mid (v, v) \leq 1\},$$

где $P : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{p}$ есть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональная проекция.

Следствие 6.7. *Векторное пространство $\mathfrak{p}$ и скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ инвариантны относительно $\text{Ad}(N_G(H_0))$, где $N_G(H_0)$ — нормализатор компоненты связности единицы H_0 группы H в G .*

$\triangleleft$ Очевидно, что $\mathfrak{h}$ $\text{Ad}(N_G(H_0))$ -инвариантно. Тогда $\mathfrak{p}$ также $\text{Ad}(N_G(H_0))$ -инвариантно, потому что $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\text{Ad}(G)$ -инвариантно. Теперь $\text{Ad}(N_G(H_0))$ -инвариантность скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ следует из теоремы 6.11. $\triangleright$

Теорема 6.12. Каждое односвязное компактное однородное риманово многообразие (M, g) допускает полупростую компактную транзитивную группу изометрий. Кроме того, если компонента связности единицы группы всех изометрий пространства (M, g) не полупростая, то $\chi(M) = 0$, и (M, g) — тотальное пространство некоторой римановой субмерсии, являющейся нетривиальным главным расслоением с односвязным однородным римановым многообразием (M_1, g_1) в качестве базы и попарно изометричными вполне геодезическими плоскими торами в качестве слоев. Если (M, g) δ -однородно, то (M_1, g_1) также δ -однородно.

◁ Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.24. Первое утверждение теоремы мы получаем на основании теоремы 4.23.

При этом компонента связности единицы группы G всех изометрий пространства (M, g) не полупроста тогда и только тогда, когда G имеет нетривиальную компоненту связности единицы C своего центра. Тогда группа C действует на (M, g) как нетривиальная связная группа переносов Клиффорда — Вольфа. Следовательно, $\chi(M) = 0$.

Ясно, что орбиты однопараметрических подгрупп группы C в (M, g) являются геодезическими (см. также доказательство теоремы 4.23). Поэтому орбиты группы C являются попарно изометричными плоскими вполне геодезическими торами в (M, g) .

Из односвязности M и связности слоев римановой субмерсии

$$q : (M, g) \rightarrow (C \backslash M, g_1) := (M_1, g_1)$$

следует нетривиальность расслоения q и односвязность пространства M_1 .

На основании теоремы 6.7 метрическое фактор-пространство $(C \backslash M, g_1) := (M_1, g_1)$ — δ -однородное риманово многообразие, если (M, g) — δ -однородное риманово многообразие. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 28. Если (M, g) — однородное компактное риманово многообразие и $\chi(M) > 0$, то по теореме 6.12 компонента связности единицы группы всех изометрий пространства (M, g) полупроста. Обратное утверждение не верно: компонента связности единицы группы всех изометрий евклидовой сферы S^{2l-1} , $l \geq 3$, есть простая группа Ли $SO(2l)$ и полупростая группа Ли $SO(4)$ с алгеброй Ли $so(4) = so(3) \oplus so(3)$ в случае сферы S^3 .

ЗАМЕЧАНИЕ 29. Известный пример сфер Берже $S^{2n+1} = U(n+1)/U(n)$ показывает, что в общем случае компонента связности единицы группы G всех изометрий пространства (M, μ) не полупроста (даже если (M, g) нормально); в этом случае универсальная накрывающая группа Ли группы G некомпактна. Необходимо также заметить, что для сфер Берже $U(n+1)/U(n)$ (с нормальной метрикой) алгебра Ли стабилизатора $U(n)$ не ортогональна центру алгебры Ли $u(n+1)$ относительно соответствующего $\text{Ad}(U(n+1))$ -инвариантного скалярного произведения. См. детали в [240].

Каждое обобщенное нормальное однородное (другими словами, δ -однородное) риманово многообразие имеет неотрицательную секционную кривизну. В теореме 4.23 (см. в связи с этим [182]) доказано, что каждое компактное нормальное однородное риманово многообразие с конечной фундаментальной группой имеет положительную кривизну Риччи. Естественно возникает

Вопрос 6. Верно ли, что каждое компактное обобщенное нормальное однородное риманово многообразие с конечной фундаментальной группой имеет положительную кривизну Риччи?

Очевидно, из теоремы 4.15 вытекает

Следствие 6.8. Каждое компактное естественно редуктивное однородное риманово многообразие с положительной эйлеровой характеристикой δ -однородно.

Согласно следствию 6.8 и теореме 4.4, компактное естественно редуктивное однородное риманово многообразие M , не являющееся δ -однородным, удовлетворяет условию $\chi(M) = 0$.

6.5. Дополнительные симметрии δ -однородных метрик

Напомним, что группа G действует на однородном пространстве G/H преобразованием $L_b : G/H \rightarrow G/H$ ($b \in G$), где

$$L_b(cH) = bcH.$$

Пусть $N_G(H)$ — нормализатор группы H в группе G . Для каждого элемента $a \in N_G(H)$ можно корректно определить G -эквивариантный диффеоморфизм $R_a : G/H \rightarrow G/H$, действующий по следующему правилу:

$$R_a(cH) = cHa^{-1} = ca^{-1}H.$$

Теорема 6.13. Пусть $(G/H, \rho)$ — компактное G - δ -однородное риманово многообразие со связной транзитивной группой Ли изометрий G , $N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G . Тогда для каждого элемента $a \in N_G(H)$ диффеоморфизм $R_a : G/H \rightarrow G/H$ является переносом Клиффорда — Вольфа на римановом многообразии $(G/H, \rho)$.

◁ Ясно, что изометричность отображения R_a эквивалентна тому, что для всех элементов $c \in G$ и $a \in N_G(H)$, дифференциал $dr_{a^{-1}}(c)$ сохраняет длину каждого вектора $u \in \text{hor}_c \subset G_c$, где hor_c означает горизонтальное подпространство соответствующей римановой субмерсии $pr : (G, \nu) \rightarrow (G/H, \mu)$ в G_c и $dr_{a^{-1}}(\text{hor}_c) = \text{hor}_{ca^{-1}}$ (см. предложение 4.1). Здесь r, l обозначают операции правых и левых переносов в G . Имеется очевидное равенство

$$r_{a^{-1}} = l_c \circ l_{a^{-1}} \circ (l_a \circ r_{a^{-1}}) \circ l_{c^{-1}},$$

и соответствующая композиция дифференциалов отображений. Ясно, что $l_{c^{-1}}(c) = e$, $dl_{c^{-1}}(\text{hor}_c) = \text{hor}_e = \mathfrak{p}$ и $d(l_a \circ r_{a^{-1}})(e) = \text{Ad}(a)$. Но последнее отображение сохраняет пространство $\mathfrak{p}$ и скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на основании следствия 6.7 и очевидного включения $N_G H \subset N_G(H_0)$. Все дифференциалы левых переносов сохраняют горизонтальное распределение и длину горизонтальных векторов. Таким образом, отображение R_a — изометрия. Можно легко проверить теперь, что это отображение есть перенос Клиффорда — Вольфа, потому что оно порождается правым переносом r_a на G , коммутирующим со всеми левыми переносами на G , порождающими транзитивную группу изометрий на $(G/H, \rho)$. ▷

Лемма 6.7. Преобразование R_a (эффективного) однородного пространства G/H для $a \in N_G(H)$ совпадает с преобразованием L_b для некоторого элемента $b \in G$ тогда и только тогда, когда a равно произведению некоторого центрального элемента группы G и некоторого элемента группы H .

◁ Пусть $R_a = L_b$ для некоторого $b \in G$. Так как R_a очевидно коммутирует с каждым преобразованием L_d , $d \in G$, мы получаем, что b лежит в центре группы G . Далее, условие $R_a = L_b$ эквивалентно следующему: $ca^{-1}H = bcH = cbH$ для каждого $c \in G$. Поэтому $a = \tilde{b}d$, где $\tilde{b} = b^{-1}$ — центральный элемент в G , и d — некоторый элемент группы H . Обратное утверждение очевидно. ▷

Теорема 6.14. Пусть $(G/H, \rho)$ — компактное δ -однородное риманово многообразие с полной связной транзитивной полупростой группой Ли изометрий G . Тогда группа $N_G(H)/H$ конечна.

◁ Согласно теореме 6.13 для каждого элемента $a \in N_G(H)$ диффеоморфизм $R_a := G/H \rightarrow G/H$, действующий по правилу $R_a(cH) = cHa^{-1} = ca^{-1}H$, есть изометрия пространства $(G/H, \rho)$.

Если $\dim(N_G(H)) > \dim(H)$, то можно выбрать непрерывное семейство изометрий вида R_a , не лежащих в группе G . В самом деле, рассмотрим вектор U , лежащий в алгебре Ли группы $N_G(H)$, но не в $\mathfrak{h}$. Рассмотрим $a = \exp(tU) \in N_G(H)$ для произвольного вещественного числа t . Преобразование R_a изометрично на $(G/H, \rho)$. Так как центр группы G дискретен, то, используя лемму 6.7, получаем, что для некоторого открытого множества $O \subset \mathbb{R}$, все преобразования R_a для $a = \exp(tU)$, $t \in O$, не лежат в группе G . Но это противоречит тому, что G — полная связная группа изометрий риманова многообразия $(G/H, \rho)$.

Поэтому мы заключаем, что $\dim(N_G(H)) = \dim(H)$, и группа $N_G(H)/H$ конечна, так как она компактна. ▷

Пример 22. Пусть G — компактная связная полупростая группа Ли, и μ — некоторая левоинвариантная риманова метрика на G такая, что G — компонента связности единицы полной группы изометрий риманова многообразия (G, μ) . Тогда (G, μ) не δ -однородно. В самом деле, если (G, μ) δ -однородно, то согласно теореме 6.14 группа $N_G(H)/H$ конечна. Но в нашем случае $H = \{e\}$ тривиальна, и $N_G(H)/H = G$ не дискретна.

Последний пример вызывает необходимость обсуждения δ -однородных левоинвариантных римановых метрик на группах Ли. Ясно, что любая биинвариантная метрика ρ на группе Ли G G - δ -однородна. Но существуют δ -однородные левоинвариантные небиинвариантные римановы метрики на группах Ли. Это можно показать следующим образом.

Пусть G — компактная связная полупростая группа Ли и K — связная подгруппа Ли в G . Среди всех левоинвариантных римановых метрик на G мы рассмотрим подкласс $\mathcal{M}_{G,K}$ метрик, правоинвариантных относительно K . Легко видно, что подкласс $\mathcal{M}_{G,K}$ состоит из $(G \times K)$ -инвариантных римановых метрик на однородном пространстве $M = (G \times K)/\text{diag}(K)$ (мы используем естествен-

ное включение $K \subset G$). В самом деле, группа Ли G с метрикой из $\mathcal{M}_{G,K}$ имеет транзитивную группу движений $G \times K$ со стабилизатором $\text{diag}(K)$ в единице $e \in G$. С другой стороны, ясно, что G транзитивна на пространстве $M = (G \times K)/\text{diag}(K)$.

Рассмотрим теперь $(G \times K)$ -нормальную однородную риманову метрику ρ на M . Тогда риманово однородное пространство (M, ρ) $(G \times K)$ - δ -однородно (см. следствие 6.6). Но проведенное рассуждение показывает, что (M, ρ) изометрично группе Ли G с некоторой левоинвариантной метрикой ρ_1 . Эта метрика может быть биинвариантной, но легко заметить, что множество $(G \times K)$ -нормальных однородных римановых метрик ρ на M больше множества биинвариантных метрик на G (детали см. в [113]). Поэтому мы получаем δ -однородные левоинвариантные небиинвариантные римановы метрики на G .

ПРИМЕР 23. Пусть F — связная компактная простая группа Ли, $G = F^k$, $k \geq 2$, $H = \text{diag}(F) \subset G$. Рассмотрим пространство $G/H = F^k/\text{diag}(F)$, снабженное метрикой ρ , порожденной (минус) формой Киллинга на F^k . Тогда однородное риманово многообразие $(G/H, \rho)$ δ -однородно. С другой стороны, оно изометрично группе Ли F^{k-1} с некоторой левоинвариантной римановой метрикой ρ_1 (см., например, [223]). Если $k \geq 3$, то метрика ρ_1 не биинвариантна.

ЗАМЕЧАНИЕ 30. Очевидно, что для компактного G - δ -однородного риманова многообразия $(G/H, \rho)$ с положительной эйлеровой характеристикой все условия теоремы 6.14 соблюдаются. Действительно, любая связная одномерная центральная подгруппа в G индуцировала бы на G/H векторное поле без нулей, что невозможно вследствие неравенства $\chi(G/H) > 0$. С другой стороны, в случае положительной эйлеровой характеристики теорема 6.14 хорошо известна, так как группы H и G имеют один и тот же ранг.

6.6. Вполне геодезические подмногообразия

В этом разделе мы исследуем вполне геодезические подмногообразия δ -однородных и геодезически орбитальных римановых многообразий.

Предложение 6.3 [42, гл. VII, теорема 8.9]. Пусть (M, μ) — риманово многообразие, N — его вполне геодезическое подмногообра-

зие, X — киллингово векторное поле на M . Рассмотрим гладкое векторное поле $\tilde{X}$ на N , являющееся касательной (к N) составляющей поля X . Тогда $\tilde{X}$ — киллингово поле на римановом многообразии N .

В [42] это предложение используется, чтобы доказать, что каждое вполне геодезическое подмногообразие однородного риманова многообразия само однородно [42, гл. VII, следствие 8.10]. Здесь мы приведем некоторую спецификацию этого классического результата.

Теорема 6.15 [90]. *Каждое вполне геодезическое подмногообразие δ -однородного (геодезически орбитального) риманова многообразия само δ -однородно (соответственно, геодезически орбитально).*

◁ Пусть N — вполне геодезическое подмногообразие δ -однородного (геодезически орбитального) риманова многообразия M . Так как M однородно, оно полно. Так как N (замкнутое) подмногообразие многообразия M , оно также полное. Пусть $U \neq 0$ — касательный вектор в некоторой точке $x \in N$.

Сначала предположим, что M δ -однородно. По теореме 6.1 для доказательства δ -однородности пространства N достаточно показать, что существует киллингово векторное поле Y на N , значение которого в точке x равно U и максимальное значение длины поля Y достигается в точке x . Так как M δ -однородное риманово многообразие, существует некоторое киллингово векторное поле X на M такое, что его значение в точке x равно U , и максимальное значение его длины достигается в точке x . Теперь в качестве нужного киллингова поля Y можно взять $\tilde{X}$, касательную составляющую поля X к N . Согласно предложению 6.3 это киллингово поле на N и, очевидно, $\tilde{X}(x) = X(x)$. Так как в точке x длина поля X максимальна в сравнении со всеми точками $y \in M$, то x — точка максимального значения длины поля $\tilde{X}$ (длина поля $\tilde{X}$ не превосходит длину поля X во всех точках многообразия N).

Рассмотрим теперь случай, когда M — ГО-пространство. Достаточно доказать существование киллингова векторного поля Y на N со следующими свойствами:

- 1) значение поля Y в точке x равно U ;
- 2) x — критическая точка длины поля Y на N .

В самом деле, в этом случае геодезическая, проходящая через точку x в направлении вектора U , является орбитой 1-параметрической группы движений, порожденной киллинговым полем Y (эта

1-параметрическая группа корректно определена вследствие полноты пространства N).

Так как M — ГО-пространство, существует киллингово векторное поле X на M , значение которого в точке x равно U и такое, что x — критическая точка длины поля X . Теперь в качестве нужного киллингова поля Y можно взять $\tilde{X}$, касательную составляющую поля X к N . Согласно предложению 6.3 это киллингово поле на N и $\tilde{X}(x) = X(x)$.

Теперь остается доказать, что x — критическая точка длины поля $\tilde{X}$ на N . Пусть $Z = X - \tilde{X}$ — нормальная составляющая поля X на многообразии N , а μ — метрический тензор на M . Ясно, что $\mu(\tilde{X}, \tilde{X}) = \mu(X, X) - \mu(Z, Z)$. В точке x $\mu(Z, Z)$ равно нулю, поэтому x — точка минимального значения функции $\mu(Z, Z)$ на N . Следовательно, x — критическая точка обеих функций $\mu(X, X)$ и $\mu(Z, Z)$ на многообразии N . Но в этом случае x — критическая точка и функции $\mu(\tilde{X}, \tilde{X})$. Поэтому x — критическая точка длины векторного поля $\tilde{X}$ (так как $\tilde{X}(x) = U \neq 0$). Теорема доказана полностью. $\triangleright$

Следствие 6.9. Каждое вполне геодезическое подмногообразие нормального однородного риманова многообразия δ -однородно.

ЗАМЕЧАНИЕ 31. Пусть M — риманово многообразие, F — некоторое множество его изометрий. Тогда каждая компонента связности множества точек в M , неподвижных относительно каждой изометрии в F , есть вполне геодезическое подмногообразие в M . Аналогично, если K — некоторое множество киллинговых полей на M , то каждая компонента связности множества всех точек в M , в которых каждое киллингово поле из K обращается в нуль, есть вполне геодезическое подмногообразие в M [42].

Согласно лемме 6.6 метрическое произведение δ -однородных пространств δ -однородно. В римановом случае имеется следующее обращение этого утверждения:

Теорема 6.16. Пусть $M = M_0 \times M_1 \times \dots \times M_k$ — разложение в прямое метрическое произведение δ -однородного (соответственно, ГО) риманова многообразия M с максимальным евклидовым сомножителем M_0 . Тогда все сомножители этого произведения δ -однородны (соответственно, ГО). Если M δ -однородно, то M_i компактны для $i \neq 0$. Кроме того, изометрия $f = f_0 \times \dots \times f_k$ многообразия M , являющаяся произведением δ -переносов, сама является δ -переносом.

◁ Так как каждый слой рассматриваемого произведения есть полное вполне геодезическое многообразие, то согласно теореме 6.15 все сомножители δ -однородны (соответственно, ГО), что доказывает первое утверждение. Второе утверждение следует из первого, максимальности евклидова сомножителя M_0 , следствия 6.3 и теоремы 6.3. Последнее утверждение теоремы следует из леммы 6.6. ▷

Предложение 6.4. Пусть $(G/H, \mu)$ — G - δ -однородное риманово многообразие и K — связная подгруппа Ли группы Ли G такая, что $H \subset K \subset G$. Тогда орбита точки $x = H$ в G/H относительно группы K является вполне геодезическим подмногообразием в $(G/H, \mu)$. В частности, K/H с метрикой, индуцированной тензором μ , — δ -однородное пространство.

◁ Любое G - δ -однородное многообразие является G -ГО-пространством на основании следствия 6.2. Поэтому первое утверждение сразу следует из предложения 5.5. Второе утверждение следует из теоремы 6.15. ▷

6.7. Свойства δ -векторов

Далее, используя результаты следствия 6.6, мы будем (как правило) использовать термин *обобщенное нормальное однородное риманово многообразие* вместо *δ -однородное риманово многообразие*.

Рассмотрим однородное риманово многообразие $(M = G/H, \mu)$ со связной группой Ли движений G , компактной группой изотропии H и с фиксированным редуктивным разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ (см. определение 83 и предложение 4.1), инвариантная метрика которого порождается некоторым $\text{Ad}(H)$ -инвариантным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{p}$. Выражение для ковариантной производной в терминах киллинговых полей $X, Y \in \mathfrak{p}$ дается формулами (4.7) и (4.8).

Предположим, что киллингово поле $X + Y$, где $X \in \mathfrak{p}$ и $Y \in \mathfrak{h}$, достигает максимума своей длины в точке $eH \in M$.

Предложение 6.5. При указанных выше условиях функция $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой $\varphi(g) = |(\text{Ad}(g)(X + Y))_{\mathfrak{p}}|$, где $g \in G$, имеет абсолютный максимум в точке $g = e$. Кроме того,

$$(X, [W, X + Y]_{\mathfrak{p}}) = 0 \quad \text{для всех } W \in \mathfrak{g}, \quad (6.4)$$

$$(X, [W, [W, X + Y]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}}) + |[W, X + Y]_{\mathfrak{p}}|^2 \leq 0 \quad \text{для всех } W \in \mathfrak{g}. \quad (6.5)$$

◁ Первое утверждение очевидно. Рассмотрим произвольный элемент $W \in \mathfrak{g}$. Тогда функция $f(t) = |(\text{Ad}(e^{tW})(X + Y))_{\mathfrak{p}}|^2$ имеет абсолютный максимум в точке $t = 0$. Теперь предложение вытекает из следующих соотношений:

$$f(t) = |X|^2 + 2(X, [W, X + Y]_{\mathfrak{p}})t + \\ + (|[W, X + Y]_{\mathfrak{p}}|^2 + (X, [W, [W, X + Y]_{\mathfrak{p}}]))t^2 + o(t^2)$$

при $t \rightarrow 0$. ▷

Теперь мы получаем из теоремы 6.1, 3), и предложения 6.5 следующую теорему.

Теорема 6.17. Пусть $(G/H, \mu)$ — G - δ -однородное риманово многообразие со связной группой Ли G . Тогда для каждого элемента $X \in \mathfrak{p}$ существует $Y \in \mathfrak{h}$ с условиями (6.4) и (6.5).

Предположим, что $M = (G/H, \mu)$ — компактное однородное связное риманово многообразие со связной (компактной) группой Ли G . Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, и $(\cdot, \cdot)$ — те же самые, что в разделе 6.4. Мы используем $\text{Ad}(G)$ -инвариантную норму $\|\cdot\|$ на $\mathfrak{g}$ и соответствующую биинвариантную внутреннюю метрику D на G из теоремы 6.8. Из раздела 6.4 мы получаем следующее

Предложение 6.6. Отображение $p : (G, D) \rightarrow (G/H, \mu)$ не увеличивает расстояния. Оно является субметрией тогда и только тогда, когда M G - δ -однородно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 109. Вектор $w \in \mathfrak{g}$ называется δ -вектором на римановом однородном многообразии $(M = G/H, \mu)$, если

$$|P(w)| := \sqrt{(P(w), P(w))} = \|w\|,$$

где P — то же, что в теореме 6.11. (Это эквивалентно условию, что для любого элемента $a \in G$, $(w_{\mathfrak{p}}, w_{\mathfrak{p}}) \geq (\text{Ad}(a)(w)_{\mathfrak{p}}, \text{Ad}(a)(w)_{\mathfrak{p}})$.)

Предложение 6.7. Предположим, что для вектора $v \in \mathfrak{p}$, множество $W(v)$ всех δ -векторов вида $w = v + u$, $u \in \mathfrak{h}$ (таких, что $\|w\| = \sqrt{(v, v)}$) не пусто. Тогда $W(v)$ компактно и выпукло. Далее, существует единственный вектор $w = w(v) \in W(v)$ с наименьшим расстоянием $\sqrt{(w - v, w - v)}$.

◁ Можно предполагать, что $\sqrt{(v, v)} = 1$. Так как p из предложения 6.6 не увеличивает расстояния, то P из теоремы 6.11 имеет то же

свойство, и на самом деле $\|w\| = 1$. Предположим, что $w_1, w_2 \in W(v)$, $0 \leq t \leq 1$ и $w = tw_1 + (1-t)w_2$. Тогда по неравенству треугольника

$$\|w\| = \|tw_1 + (1-t)w_2\| \leq t\|w_1\| + (1-t)\|w_2\| = t + (1-t) = 1.$$

Так как P — линейное отображение, то

$$P(w) = P(tw_1 + (1-t)w_2) = tP(w_1) + (1-t)P(w_2) = tv + (1-t)v = v.$$

Снова, так как P не увеличивает расстояния, из последних двух соотношений вытекает, что $\|w\| = 1$ и $w \in W(v)$. Поэтому множество $W(v)$ выпукло. Очевидно, оно компактно, и мы доказали первое утверждение.

Из компактности множества $W(v)$ следует существование вектора $w \in W(v)$ с наименьшим расстоянием $|w - v|_1 = \sqrt{\langle w - v, w - v \rangle}$. Если есть другой такой вектор $w' \neq w$, то по предыдущему утверждению, $w'' := \frac{1}{2}(w + w') \in W(v)$, и мы получаем противоречие, так как

$$2|w'' - v|_1 = |(w - v) + (w' - v)|_1 < |w - v|_1 + |w' - v|_1 = 2|w - v|_1. \triangleright$$

Пусть $v \in \mathfrak{p}$ с условием $W(v) \neq \emptyset$ (см. предложение 6.7). Согласно предложению 6.7 существует единственный вектор $w \in W(v)$ с наименьшим расстоянием $|w - v|_1$. В следующих двух предложениях мы будем использовать обозначение $w(v)$ для этого вектора и обозначение $u(v)$ — для вектора $w(v) - v \in \mathfrak{h}$.

Предложение 6.8. Рассмотрим произвольный вектор $v \in \mathfrak{p}$ с условием $W(v) \neq \emptyset$. Следующие четыре утверждения эквивалентны (см. выше) : $w(v) = v$, $u(v) = 0$, $\|v\| = |v|$, и соответствующее векторное поле $X(v)$ на M достигает максимума своей длины в точке $x_0 = p(e)$.

Предложение 6.9. Если $W(v) \neq \emptyset$, то неравенства $u(v) \neq 0$ и $\|v\| > |v|$ эквивалентны. В этом случае верны следующие утверждения: для каждого элемента $g \in G$ такого, что $\text{Ad}(g)(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, из равенства $\text{Ad}(g)(v) = v$ (соответственно, $\text{Ad}(g)(v) = -v$) вытекает, что $\text{Ad}(g)(u(v)) = u(v)$ (соответственно, $\text{Ad}(g)(u(v)) = -u(v)$).

$\triangleleft$ Это следует непосредственно из предложений 6.6, 6.7 и того, что $\|\cdot\|, \langle \cdot, \cdot \rangle_e$ $\text{Ad}(G)$ -инвариантны и инвариантны относительно центральной симметрии. $\triangleright$

Из теоремы 6.11 вытекает

Предложение 6.10. *Однородное риманово многообразие $(G/H, \mu)$ со связной группой Ли G является G -обобщенным нормальным однородным тогда и только тогда, когда для любого вектора $v \in \mathfrak{p}$ существует вектор $u \in \mathfrak{h}$ такой, что $v + u$ является δ -вектором.*

6.7.1. Случай положительной эйлеровой характеристики.

Теперь предположим, что $(M = G/H, \mu)$ — почти эффективное компакное G - δ -однородное риманово многообразие положительной эйлеровой характеристики. Тогда группа G полупроста по предложению 4.2, и существует максимальный тор T в группе G такой, что $T \subset H \subset G$. В качестве $\text{Ad}(G)$ -инвариантной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$ мы возьмем минус форму Киллинга этой алгебры.

Рассмотрим разложение корневой системы

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

комплексификации $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ — картановская подалгебра, соответствующая T , а R — корневая система.

Для произвольного подмножества $P \subset R$ обозначим через $\mathfrak{g}(P) = \sum_{\alpha \in P} \mathfrak{g}_{\alpha}$ подпространство, натянутое на соответствующие корневые пространства $\mathfrak{g}_{\alpha}$.

Нетрудно понять, что для любого $\alpha \in R$ вещественный двумерный $\text{Ad}(T)$ -модуль $V_{\alpha} = V_{-\alpha} := (\mathfrak{g}_{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{g}$ неприводим. Пусть

$$R = R_1 \cup R_2, \quad \text{где} \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}(R_2), \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{g}(R_1).$$

Посредством скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{t}}$ на $\mathfrak{t}$ каждый корень $\alpha \in R$ отождествляется с вектором из $\mathfrak{t}$.

Предложение 6.11. *Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in R$ — линейно независимые корни. Тогда существует единственный (с точностью до умножения на константу) вектор $t_c \in \text{Lin}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ такой, что для некоторого положительного числа s выполнено равенство $\text{Ad}(\exp(st_c)) = -\text{Id}$ на $\bigoplus_{i=1}^k V_{\alpha_i}$.*

◁ Это предложение легко доказывается с использованием дуального базиса в евклидовом пространстве $\text{Lin}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. ▷

Предложение 6.12. *Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in R_1$ — линейно независимые корни, рассмотрим $v = \sum_{i=1}^k v_i \in \mathfrak{p}$, где $v_i \in V_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, k$, —*

ненулевые векторы. Пусть нетривиальный вектор $u \in \mathfrak{h}$ таков, что вектор $u + v$ является δ -вектором, и пусть C_u — множество корней $\gamma \in R_2$ таких, что $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональная проекция вектора u на них нетривиальна. Тогда

$$C_u \neq \emptyset, \quad C_u \subset \text{Lin}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} - t_c^\perp,$$

где $t_c^\perp$ — ортогональное дополнение в $\text{Lin}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ к вектору t_c из предложения 6.11.

◁ Действительно, если $C_u = \emptyset$, то $u \in \mathfrak{t}^\perp$ и по предложению 6.11

$$\text{Ad}(\exp(st_c))(v) = -v, \quad \text{Ad}(\exp(st_c))(u) = u, \quad (6.6)$$

поскольку $[u, t_c] = 0$. Это противоречит предложению 6.9. Таким образом, $C_u \neq \emptyset$.

Теперь, если некоторый $\gamma \in C_u$ не лежит в $\text{Lin}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, то можно найти вектор $w \in \mathfrak{t}$, ортогональный ко всем векторам $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ и удовлетворяющий условию $\langle w, \gamma \rangle \neq 0$. Тогда $[w, v] = 0$ и $[w, u] \neq 0$, что противоречит предложению 6.9.

Наконец, если $\gamma \in C_u \cap t_c^\perp$, то $\text{Ad}(\exp(st_c))(u_\gamma) = u_\gamma$ для ненулевой составляющей u_γ вектора u из V_γ , что противоречит предложению 6.9. ▷

Поскольку корни $\alpha \in R_1$ и $\gamma \in R_2$ неколлинеарны друг другу, из предложения 6.12 следует

Предложение 6.13. Если $v \in V_\alpha$, $\alpha \in R_1$, то $\|v\| = |v| = \sqrt{(v, v)}$, т. е. v является δ -вектором.

◁ Пусть существует нетривиальный вектор $u \in \mathfrak{h}$ такой, что $v + u$ — δ -вектор. Применим предложение 6.12 при $k = 1$ ($\alpha_1 = \alpha$). Но ни один корень $\gamma \in R_2$ не может лежать в $\text{Lin}\{\alpha\}$. Поэтому $u = 0$. ▷

Отметим, что группа Вейля $W(T)$ алгебры $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{t}$ порождается элементами $\text{Ad}(n)$, где $n \in N(T)$ ($N(T)$ — нормализатор тора T в группе G). Поскольку чебышевская норма $\|\cdot\|$ и скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\text{Ad}(G)$ -инвариантны, то согласно предложению 6.13 для любых корней $\alpha, \beta \in R_1$ из одной орбиты действия группы Вейля $W(T)$ скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ пропорционально скалярному произведению $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на модулях V_α и V_β с одним и тем же коэффициентом пропорциональности.

В частности, если группа G проста, то группа Вейля $W(T)$ действует транзитивно на корнях одной и той же длины. Поскольку у простой алгебры Ли либо все корни имеют одну длину, либо множество их длин двухэлементно («длинные» и «короткие» корни), то в первом случае G - δ -однородная метрика μ обязана быть нормальной, а во втором она имеет специальный вид, как в следующем разделе 6.8. Это наблюдение играет важную роль в работе [90]. Но в этой книге мы используем несколько более простой вариант изложения нужного нам материала.

6.8. Обобщенные нормальные однородные многообразия специального вида

Пусть G — компактная связная группа Ли, $H \subset K \subset G$ — ее связные подгруппы Ли. Фиксируем некоторое $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Рассмотрим $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональное разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2, \quad (6.7)$$

где $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_2$ — алгебра Ли группы K . Очевидно, что $[\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1] \subset \mathfrak{p}_1$. Пусть $\mu = \mu_{x_1, x_2}$ — G -инвариантная риманова метрика на G/H , порожденная скалярным произведением

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = x_1 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_1} + x_2 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_2} \quad (6.8)$$

для некоторых $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ при $x_1 \neq x_2$.

Для произвольного вектора $V \in \mathfrak{g}$ мы обозначаем через $V_{\mathfrak{p}}$ и $V_{\mathfrak{h}}$ его $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональную проекцию на $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{p}$ соответственно.

Предложение 6.14 [131]. *Вектор вида $W = X + Y + Z$, где $X \in \mathfrak{p}_1$, $Y \in \mathfrak{p}_2$ и $Z \in \mathfrak{h}$, является геодезическим вектором на $(G/H, \mu)$ тогда и только тогда, когда*

$$[Z, Y] = 0, \quad [X, Y] = \frac{x_1}{x_2 - x_1} [X, Z]. \quad (6.9)$$

◁ По теореме 5.5 геодезичность рассматриваемого вектора эквивалентна равенству $(X + Y, [U, X + Y + Z]_{\mathfrak{p}}) = 0$ для любого $U \in \mathfrak{p}$.

Предложение следует из равенства

$$\begin{aligned} (X + Y, [U, X + Y + Z]_{\mathfrak{p}}) &= x_1 \langle X, [U, X + Y + Z] \rangle + \\ &+ x_2 \langle Y, [U, X + Y + Z] \rangle = x_1 \langle [X + Y + Z, X], U \rangle + \\ &+ x_2 \langle [X + Y + Z, Y], U \rangle = \langle (x_2 - x_1)[X, Y] + \\ &+ x_1[Z, X] + x_2[Z, Y], U \rangle \end{aligned}$$

с учетом того, что $[Z, Y] \in \mathfrak{p}_2$ и $[X, Y], [Z, X] \in \mathfrak{p}_1$. $\triangleright$

Предложение 6.15. Пусть $W = X + Y + Z$ — δ -вектор на $(G/H, \mu)$, где $X \in \mathfrak{p}_1$, $Y \in \mathfrak{p}_2$, $Z \in \mathfrak{h}$. Тогда для любого $U \in \mathfrak{p}_1$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} -x_1 \langle [U, X]_{\mathfrak{h}}, [U, X]_{\mathfrak{h}} \rangle &+ (x_2 - x_1) \langle [U, X]_{\mathfrak{p}_2}, [U, X]_{\mathfrak{p}_2} \rangle + \\ &+ (x_1 - x_2) \langle [U, Y], [U, X] \rangle + (x_1 - x_2) \langle [U, Y], [U, Y] \rangle + \\ &+ x_1 \langle [U, X], [U, Z] \rangle + (2x_1 - x_2) \langle [U, Y], [U, Z] \rangle + \\ &+ x_1 \langle [U, Z], [U, Z] \rangle \leq 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

$\triangleleft$ Вследствие определения 109 и предложения 6.5

$$(X + Y, [U, [U, X + Y + Z]_{\mathfrak{p}}]) + ([U, X + Y + Z]_{\mathfrak{p}}, [U, X + Y + Z]_{\mathfrak{p}}) \leq 0.$$

Очевидно, что $[Z, X], [Z, U], [Y, X], [Y, U] \in \mathfrak{p}_1$, $[Z, Y] \in \mathfrak{p}_2$. Следовательно, используя $\text{Ad}(G)$ -инвариантность $\langle \cdot, \cdot \rangle$, мы получаем

$$\begin{aligned} 0 &\geq (X + Y, [U, [U, X + Y + Z]_{\mathfrak{p}}]) + ([U, X + Y + Z]_{\mathfrak{p}}, [U, X + Y + \\ &+ Z]_{\mathfrak{p}}) = -x_1 \langle [U, X], [U, X + Y + Z] \rangle - x_2 \langle [U, Y], [U, X + Y + Z] \rangle + \\ &+ x_1 \langle [U, X]_{\mathfrak{p}_1} + [U, Y + Z], [U, X]_{\mathfrak{p}_1} + [U, Y + Z] \rangle + \\ &+ x_2 \langle [U, X]_{\mathfrak{p}_2}, [U, X]_{\mathfrak{p}_2} \rangle = -x_1 \langle [U, X], [U, X] \rangle - x_1 \langle [U, X], [U, Y] \rangle - \\ &- x_1 \langle [U, X], [U, Z] \rangle - x_2 \langle [U, Y], [U, X] \rangle - x_2 \langle [U, Y], [U, Y] \rangle - \\ &- x_2 \langle [U, Y], [U, Z] \rangle + x_1 \langle [U, X]_{\mathfrak{p}_1}, [U, X]_{\mathfrak{p}_1} \rangle + x_1 \langle [U, Y], [U, Y] \rangle + \\ &+ x_1 \langle [U, Z], [U, Z] \rangle + 2x_1 \langle [U, Y], [U, X] \rangle + 2x_1 \langle [U, X], [U, Z] \rangle + \\ &+ 2x_1 \langle [U, Y], [U, Z] \rangle + x_2 \langle [U, X]_{\mathfrak{p}_2}, [U, X]_{\mathfrak{p}_2} \rangle = -x_1 \langle [U, X]_{\mathfrak{h}}, [U, X]_{\mathfrak{h}} \rangle + \\ &+ (x_2 - x_1) \langle [U, X]_{\mathfrak{p}_2}, [U, X]_{\mathfrak{p}_2} \rangle + (x_1 - x_2) \langle [U, Y], [U, X] \rangle + \\ &+ (x_1 - x_2) \langle [U, Y], [U, Y] \rangle + x_1 \langle [U, X], [U, Z] \rangle + \\ &+ (2x_1 - x_2) \langle [U, Y], [U, Z] \rangle + x_1 \langle [U, Z], [U, Z] \rangle, \end{aligned}$$

что и доказывает предложение. $\triangleright$

Следствие 6.10. Если в условиях предложения 6.15 $X = 0$, то для всех $U \in \mathfrak{p}_1$ мы имеем

$$(x_1 - x_2)\langle [U, Y], [U, Y] \rangle + (2x_1 - x_2)\langle [U, Y], [U, Z] \rangle + \\ + x_1\langle [U, Z], [U, Z] \rangle \leq 0. \quad (6.11)$$

Предложение 6.16. Для каждого δ -вектора $X + Y + Z$ на $(G/H, \mu)$ вектор $Y + Z$ является δ -вектором на K/H (с индуцированной римановой метрикой). В частности, если $(G/H, \mu)$ G - δ -однородно, то K/H с индуцированной метрикой является K - δ -однородным.

$\triangleleft$ Для каждого $\text{Ad}(a)$, где $a \in K$, $\text{Ad}(a)(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_1$. Далее, $\text{Ad}(a)|_{\mathfrak{p}_1}$ — ортогональное преобразование. Так как

$$(X, X) + (Y, Y) = (X + Y, X + Y) \geq \\ \geq (\text{Ad}(a)(X + Y + Z)|_{\mathfrak{p}}, \text{Ad}(a)(X + Y + Z)|_{\mathfrak{p}}) = \\ = (X, X) + (\text{Ad}(a)(Y + Z)|_{\mathfrak{p}}, \text{Ad}(a)(Y + Z)|_{\mathfrak{p}})$$

для любого элемента $a \in K$, то вектор $Y + Z$ является δ -вектором для K/H . Заметим, что на самом деле риманово подпространство K/H в $(G/H, \mu)$ K -нормально, так как $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_2$. $\triangleright$

Предложение 6.17. Если векторы $\tilde{X} + Y + Z$ и $X + Y + Z$ являются δ -векторами на $(G/H, \mu)$, то

$$x_1\langle [\tilde{X}, X]_{\mathfrak{h}}, [\tilde{X}, X]_{\mathfrak{h}} \rangle \geq (x_2 - x_1)\langle [\tilde{X}, X]_{\mathfrak{p}_2}, [\tilde{X}, X]_{\mathfrak{p}_2} \rangle.$$

$\triangleleft$ Из предложения 6.14 получаем равенство

$$[\tilde{X}, Y] = \frac{x_1}{x_2 - x_1}[\tilde{X}, Z].$$

Полагая $U = \tilde{X}$ в неравенстве (6.10) и используя равенство выше, получаем нужное доказательство. $\triangleright$

Предложение 6.18. Предположим, что $(G/H, \mu)$ G - δ -однородно. Пусть $X \in \mathfrak{p}_1$, $Y \in \mathfrak{p}_2$, $a = \exp(tY)$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{X} = \text{Ad}(a)(X)$. Тогда

$$x_1\langle [\tilde{X}, X]_{\mathfrak{h}}, [\tilde{X}, X]_{\mathfrak{h}} \rangle \geq (x_2 - x_1)\langle [\tilde{X}, X]_{\mathfrak{p}_2}, [\tilde{X}, X]_{\mathfrak{p}_2} \rangle.$$

◁ Пусть $Z \in \mathfrak{h}$ — такой вектор, что $X + Y + Z$ — δ -вектор. Из предложения 6.14 получаем, что $[Z, Y] = 0$. Из этого следует, что $\text{Ad}(a)(Z) = Z$. Кроме того, $\text{Ad}(a)(Y) = Y$ и $(X, X) = (\tilde{X}, \tilde{X})$, так как $\text{Ad}(a)|_{\mathfrak{p}_1}(\cdot, \cdot)$ -ортогонально. Поэтому вектор $\tilde{X} + Y + Z = \text{Ad}(a)(X + Y + Z)$ также является δ -вектором. Теперь можно применить предложение 6.17. ▷

Так как $\text{Ad}(a)(X) = X + [Y, X]t + o(t)$ при $t \rightarrow 0$ для $a = \exp(tY)$, мы получаем следующую инфинитезимальную версию предложения 6.18.

Предложение 6.19. *Предположим, что $(G/H, \mu)$ G - δ -однородно. Если $X \in \mathfrak{p}_1$, $Y \in \mathfrak{p}_2$, то*

$$x_1 \langle [[Y, X], X]_{\mathfrak{h}}, [[Y, X], X]_{\mathfrak{h}} \rangle \geq (x_2 - x_1) \langle [[Y, X], X]_{\mathfrak{p}_2}, [[Y, X], X]_{\mathfrak{p}_2} \rangle.$$

6.9. Классификация обобщенных нормальных однородных римановых многообразий положительной эйлеровой характеристики

В этом разделе мы получим классификацию компактных односвязных обобщенных нормальных однородных римановых многообразий $(G/H, \mu)$ положительной эйлеровой характеристики.

Вследствие теоремы 4.10 такое многообразие неразложимо тогда и только тогда, когда группа движений G проста, поэтому мы можем ограничиться простыми группами движений. Естественно, что нормальная метрика является обобщенной нормальной, поэтому мы можем считать, что G -инвариантная метрика μ не является G -нормальной. Кроме того, обобщенное нормальное однородное пространство $(G/H, \mu)$ является геодезически орбитальным на основании следствия 6.2.

Согласно классификации ГО-пространств положительной эйлеровой характеристики (теорема 5.12), мы получаем либо $G/H = Sp(n)/U(1) \cdot Sp(n-1)$ ($n \geq 2$), либо $G/H = SO(2n+1)/U(n)$ ($n \geq 2$). Напомним, что при $n = 2$ эти пространства совпадают. Оба этих семейства допускают (ортогональные относительно формы Киллинга) редуктивные разложения вида

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2,$$

при этом $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_2$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$ ($sp(1) \oplus sp(n-1)$ — первом случае

и $so(2n)$ — во втором). Поскольку $\text{Ad}(H)$ -модули $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ неприводимы и неэквивалентны, то каждая инвариантная метрика μ на G/H действительно имеет специальный вид (см. (6.8))

$$(\cdot, \cdot) = x_1 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_1} + x_2 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_2}$$

для некоторых $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ — минус форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Подробнее об этих многообразиях говорится в примерах 19 и 20.

Отметим, что ГО-пространство $(SO(5)/U(2) = Sp(2)/U(1) \cdot Sp(1), \mu)$ изометрично и вполне геодезически вкладывается и в $(Sp(n)/U(1) \cdot Sp(n-1), \mu)$ и в $(SO(2n+1)/U(n), \mu)$ при совпадении параметров x_1 и x_2 инвариантных метрик ($A \in SO(5) \rightarrow \text{diag}(A, 0) \in SO(2n+1)$ и $A \in Sp(2) \rightarrow \text{diag}(A, 0) \in Sp(n)$), см. леммы 6.12 и 6.13.

Оказывается, условие обобщенной нормальности накладывает серьезные ограничения на значения параметров x_1 и x_2 инвариантной метрики $\mu = \mu_{x_1, x_2}$.

Предложение 6.20. Пусть компактное односвязное однородное многообразие $(G/H, \mu)$ положительной эйлеровой характеристики с компактной связной простой группой G является G -обобщенным нормальным, но не является при этом G -нормальным. Тогда параметры x_1 и x_2 метрики μ удовлетворяют неравенству

$$x_1 < x_2 \leq 2x_1. \quad (6.12)$$

◁ При $x_1 = x_2$ мы имеем G -нормальную метрику. Поэтому далее рассмотрим случай $x_2 \neq x_1$.

Очевидно, что $[\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2] \neq 0$. По предложению 6.13 любой вектор вида $Y \in V_\alpha \subset \mathfrak{p}_2$ является δ -вектором, поэтому существуют δ -вектор $Y \in \mathfrak{p}_2$ и вектор $U \in \mathfrak{p}_1$ такие, что $[U, Y] \neq 0$. Теперь из неравенства (6.11) получаем $(x_1 - x_2) \langle [U, Y], [U, Y] \rangle \leq 0$ и $x_1 < x_2$.

Для доказательства неравенства $x_2 \leq 2x_1$ нам достаточно быть уверенным в существовании двух векторов $X \in \mathfrak{p}_1$ и $Y \in \mathfrak{p}_2$ таких, что $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональные проекции вектора $[[Y, X], X]$ на $\mathfrak{p}_2$ и $\mathfrak{h}$ нетривиальны и имеют одинаковую длину (относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Действительно, тогда по предложению 6.19

$$(2x_1 - x_2) \langle [[Y, X], X]_{\mathfrak{h}}, [[Y, X], X]_{\mathfrak{h}} \rangle = x_1 \langle [[Y, X], X]_{\mathfrak{h}}, [[Y, X], X]_{\mathfrak{h}} \rangle - (x_2 - x_1) \langle [[Y, X], X]_{\mathfrak{p}_2}, [[Y, X], X]_{\mathfrak{p}_2} \rangle \geq 0.$$

Существование подходящих векторов $X \in \mathfrak{p}_1$ и $Y \in \mathfrak{p}_2$ легко обосновать с помощью корневых систем (как это сделано в работе [90]), но можно и просто воспользоваться тем, что любые $X \in \mathfrak{p}_1$ и $Y \in \mathfrak{p}_2$ для пространства $(G/H = SO(5)/U(2), \mu)$ обладают свойством

$$\begin{aligned} \langle [[Y, X], X]_{\mathfrak{h}}, [[Y, X], X]_{\mathfrak{h}} \rangle_1 &= \langle [[Y, X], X]_{\mathfrak{p}_2}, [[Y, X], X]_{\mathfrak{p}_2} \rangle_1 = \\ &= \frac{1}{4} \langle X, X \rangle_1^2 \langle Y, Y \rangle_1 \end{aligned}$$

при $\langle A, B \rangle_1 = -1/2 \operatorname{trace}(AB)$, поскольку $(G/H = SO(5)/U(2) = Sp(2)/U(1) \cdot Sp(1), \mu)$ изометрично вложено (как вполне геодезическое подмногообразие) в любое многообразие $(G/H, \mu)$ из формулировки предложения (см. обсуждение в этом разделе выше). $\triangleright$

Таким образом, нам осталось выяснить, какие из однородных многообразий $(SO(2n+1)/U(n), \mu_{x_1, x_2})$ и $(Sp(n)/U(1) \cdot Sp(n-1), \mu_{x_1, x_2})$ ($n \geq 2$) при $x_1 < x_2 \leq 2x_1$ являются обобщенными нормальными. Необходимо отметить, что при $x_2 = 2x_1$ они являются симметрическими, а, значит, нормальными однородными (относительно более обширной группы движений). Поэтому нам достаточно ограничиться метриками μ_{x_1, x_2} при $x_1 < x_2 < 2x_1$.

Основной результат этого раздела — следующая классификационная

Теорема 6.18. Пусть $(G/H, \mu)$ — компактное односвязное неразложимое обобщенное нормальное однородное риманово многообразие положительной эйлеровой характеристики, не являющееся нормальным однородным. Тогда оно изометрично $(Sp(l)/U(1) \cdot Sp(l-1), \mu = \mu_{x_1, x_2})$, $l \geq 2$, при $x_1 < x_2 < 2x_1$. Условие $x_1 < x_2 < 2x_1$ для метрики μ_{x_1, x_2} эквивалентно тому, что μ_{x_1, x_2} имеет положительную секционную кривизну с δ -защемленностью, находящейся в интервале $(1/16, 1/4)$. Полной связной группой движений такого многообразия является группа $Sp(l)/\{\pm I\}$.

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 6.19 и теоремы 6.20, доказательству которых посвящены соответственно раздел 6.9.2 и раздел 6.9.3.

Теорема 6.19. Риманово многообразие $(SO(2l+1)/U(l), \mu = \mu_{x_1, x_2})$, где $l \geq 3$, не является обобщенным нормальным однородным при $x_1 < x_2 < 2x_1$.

Теорема 6.20. *Риманово многообразие $(Sp(l)/U(1) \cdot Sp(l-1), \mu = \mu_{x_1, x_2})$, $l \geq 2$, является обобщенным нормальным однородным тогда и только тогда, когда $x_1 \leq x_2 \leq 2x_1$. Для $x_2 = x_1$ оно $Sp(l)$ -нормально однородно; для $x_2 = 2x_1$ оно $SU(2l)$ -нормально однородно; для $x_2 \in (x_1, 2x_1)$ оно не является нормальным однородным ни для какой группы движений.*

Напомним, что по теореме 4.13 полная связная группа движений многообразия $(Sp(l)/U(1) \cdot Sp(l-1), \mu)$ есть $Sp(l)/\{\pm I\}$ за исключением случая $x_2 = 2x_1$, когда полной связной группой движений является фактор-группа группы $SU(2l)$ по ее центру, при этом метрика μ $SU(2l)$ -нормальна, а $(Sp(l)/U(1) \cdot Sp(l-1), \mu)$ изометрично комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^{2l-1} = SU(2l)/U(1) \cdot S(U(2l-1))$ с метрикой Фубини — Штуди.

В работе [90] доказана обобщенная нормальность римановых многообразий $(M = SO(5)/U(2) = Sp(2)/U(1) \cdot Sp(1), \mu_{x_1, x_2})$ при $x_1 < x_2 < 2x_1$. В целом задача классификации была решена в работе [87], которой мы и следуем далее.

Прежде всего мы отметим важные свойства пространств из двух интересующих нас семейств. Оба семейства начинаются с одного пространства $SO(5)/U(2) = Sp(2)/U(1) \cdot Sp(1) = \mathbb{C}P^3$, как уже отмечалось, допускают двухпараметрические семейства инвариантных метрик μ_{x_1, x_2} , относительно любой из которых являются геодезически орбитальными и слабо симметрическими [72, 213, 242]. Снабженные этими метриками пространства из обоих семейств являются тотальными пространствами римановых субмерсий, а значит, расслоениями (нетривиальными) с неприводимыми симметрическими пространствами положительной эйлеровой характеристики в качестве базы и слоя, $SO(2l+1)/SO(2l) = S^{2l}$ и $SO(2l)/U(l)$ для первого семейства, $Sp(l)/Sp(1) \cdot Sp(l-1) = \mathbb{H}P^{l-1}$ и $Sp(1)/U(1) = S^2$ — для второго. Базы во всех случаях являются двухточечно однородными. Отметим, что пространство $SO(2l)/U(l)$ обычно интерпретируется как множество комплексных структур на $\mathbb{R}^{2l}$ или множество согласованных с метрикой расслоений $S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^{2l-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{l-1}$ [22], другая его интерпретация приведена в предложении 7.15.

Отметим, что исторически пространство

$$SO(5)/U(2) = Sp(2)/U(1) \cdot Sp(1) = \mathbb{C}P^3$$

стало первым примером компактного геодезически орбитального пространства, не являющегося естественно редуктивным [162]. Мож-

но также отметить, что соответствующее многообразие $\mathbb{C}P^3$ является *твисторным пространством Пенроуза* [196], которое может быть интерпретировано, например, как пространство согласованных комплексных структур на круглой 4-мерной сфере [22].

ЗАМЕЧАНИЕ 32. Однако, имеется существенное различие между семействами пространств $SO(2l+1)/U(l)$, $l \geq 3$, и $Sp(l)/U(1) \cdot Sp(l-1) = \mathbb{C}P^{2l-1}$, $l \geq 2$: пространства из первого семейства не допускают инвариантных римановых метрик положительной секционной кривизны, тогда как пространства из второго семейства такие метрики допускают.

ЗАМЕЧАНИЕ 33. Результат теоремы 6.20 влечет следующую необычную геометрическую ситуацию: для каждого $l \geq 2$ существует неприводимое ортогональное представление $r : Sp(l) \rightarrow SO(l(2l+1))$ (фактически присоединенное представление Ad группы $Sp(l)$) в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^{l(2l+1)}$ и выпуклое тело D , ограниченное эллипсоидом (но не шаром!) в $\mathbb{E}^{2(2l-1)} \subset \mathbb{E}^{l(2l+1)}$ такие, что D является ортогональной проекцией (на $\mathbb{E}^{2(2l-1)}$) некоторого $r(Sp(l))$ -инвариантного центрально симметричного выпуклого тела B в $\mathbb{E}^{l(2l+1)}$. Как следствие этого факта, B не может быть ограничен эллипсоидом в $\mathbb{E}^{l(2l+1)}$.

Авторам не известны ответы на следующие вопросы.

Вопрос 7. Существует ли компактное односвязное неразложимое обобщенное нормальное однородное риманово многообразие нулевой эйлеровой характеристики, не являющееся нормальным однородным?

ЗАМЕЧАНИЕ 34. Существует множество разложимых римановых многообразий такого типа. Можно взять, например, прямое метрическое произведение пространства $SO(5)/U(2)$, снабженного инвариантной метрикой с δ -защемленностью в интервале $(1/2^4, 1/2^2)$, и круглой трехмерной сферы.

Вопрос 8. Верно ли, что каждое компактное односвязное неразложимое обобщенное нормальное однородное риманово многообразие либо нормально однородно, либо слабо симметрично?

ЗАМЕЧАНИЕ 35. В разложимом случае ответ на предыдущий вопрос отрицателен.

Д. В. Алексеевский и Дж. А. Вольф предложили следующую проблему.

Задача 1. Описать все (односвязные) римановы многообразия (M, μ) такие, что для каждой точки $x \in M$ и каждого вектора $v \in M_x$ существует киллингово векторное поле X на (M, μ) , достигающее минимального значения его длины в x и такое, что $X(x) = v$.

Замечание 36. Любое такое многообразие (M, μ) геодезически орбитально; оно имеет нулевую эйлерову характеристику в компактном случае. Класс многообразий этого вида замкнут относительно операции прямого метрического произведения; он содержит однородные по Клиффорду — Вольфу римановы многообразия и односвязные геодезически орбитальные (в частности, симметрические) пространства неположительной секционной кривизны.

6.9.1. Общие идеи и конструкции. Сначала мы опишем общие идеи и конструкции, используемые в разделах 6.9.2 и 6.9.3.

Пусть G — компактная связная простая группа Ли, $H \subset K \subset G$ — ее связные подгруппы Ли. Зафиксируем некоторое $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G (напомним, что оно единственно с точностью до пропорциональности в силу простоты G). Рассмотрим $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональное разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2,$$

где

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_2$$

есть алгебра Ли группы K . Очевидно, что $[\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1] \subset \mathfrak{p}_1$. Пусть $\mu = \mu_{x_1, x_2}$ — G -инвариантная риманова метрика на G/H , порождаемая скалярным произведением на $\mathfrak{p}$ вида

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = x_1 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_1} + x_2 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_2} \quad (6.13)$$

для положительных x_1 и x_2 .

Для произвольного вектора $V \in \mathfrak{g}$ мы обозначаем через $V_{\mathfrak{h}}$ и $V_{\mathfrak{p}}$ его $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональную проекцию на $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{p}$ соответственно.

Напомним (см. определение 109), что вектор $W \in \mathfrak{g}$ является δ -вектором на $(G/H, \mu)$ тогда и только тогда, когда

$$(W|_{\mathfrak{p}}, W|_{\mathfrak{p}}) \geq (\text{Ad}(a)(W)|_{\mathfrak{p}}, \text{Ad}(a)(W)|_{\mathfrak{p}}) \quad (6.14)$$

для всех $a \in G$.

Мы неоднократно будем использовать результат предложения 6.10: однородное риманово многообразие $(G/H, \mu)$ со связной группой Ли G является G -обобщенным нормальным однородным тогда и только тогда, когда для любого вектора $V \in \mathfrak{p}$ существует вектор $U \in \mathfrak{h}$ такой, что $V + U$ является δ -вектором.

Также нам понадобится результат предложения 6.14, согласно которому вектор $W = X + Y + Z$ ($X \in \mathfrak{p}_1$, $Y \in \mathfrak{p}_2$, $Z \in \mathfrak{h}$) является геодезическим на $(G/H, \mu_{x_1, x_2})$ при $x_1 \neq x_2$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства $[Z, Y] = 0$ и $[X, Y] = x_1/(x_2 - x_1)[X, Z]$.

В разделе 6.9.2 мы рассматриваем пространства $(G/H, \mu = \mu_{x_1, x_2})$, где $G = SO(2l + 1)$, $H = U(l)$, $K = SO(2l)$ и $l \geq 3$, с вложениями $U(l) \subset SO(2l) \subset SO(2l + 1)$, описываемыми ниже, и $\mu = \mu_{x_1, x_2}$ определяется скалярным произведением (6.13).

Определим $\text{Ad}(SO(2l + 1))$ -инвариантное скалярное произведение на $so(2l + 1)$, полагая $\langle A, B \rangle = -1/2 \text{trace}(A \cdot B)$. Матрицу $A + \sqrt{-1} B \in u(l)$ вкладываем в $so(2l)$ по формуле

$$A + \sqrt{-1} B \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix},$$

чтобы получить неприводимую симметрическую пару $(so(2l), u(l))$ (см., например, [58]). Также мы используем стандартное вложение $so(2l)$ в $so(2l + 1)$: $A \mapsto \text{diag}(A, 0)$. Вложения $u(l) \subset so(2l) \subset so(2l + 1)$, указанные выше, порождают соответствующие вложения связных матричных групп Ли $\tau_l : U(l) \mapsto SO(2l)$ и $\tau'_l : U(l) \mapsto SO(2l + 1)$.

Модули $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$, описанные выше в общем случае, являются $\text{Ad}(\tau'_l(U(l)))$ -инвариантными и $\text{Ad}(\tau'_l(U(l)))$ -неприводимыми в этом конкретном случае.

В разделе 6.9.3 мы определяем все обобщенные нормальные однородные метрики на пространствах $G/H = Sp(l)/U(1) \cdot Sp(l - 1)$, где $H = U(1) \cdot Sp(l - 1) \subset K = Sp(1) \cdot Sp(l - 1) \subset Sp(l)$ с описанными ниже вложениями и неприводимыми симметрическими парами $(Sp(l), Sp(1) \cdot Sp(l - 1))$ и $(Sp(1), U(1))$.

Пусть $\mathbb{H}$ — тело кватернионов. Обозначим через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ кватернионные единицы в $\mathbb{H}$ ($\mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}$, $\mathbf{i}\mathbf{i} = \mathbf{j}\mathbf{j} = \mathbf{k}\mathbf{k} = -1$). Для $X = x_1 + \mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}x_3 + \mathbf{k}x_4$, $x_i \in \mathbb{R}$, определим $\bar{X} = x_1 - \mathbf{i}x_2 - \mathbf{j}x_3 - \mathbf{k}x_4$ и $\|X\| = \sqrt{X\bar{X}}$. Рассмотрим (левое) векторное пространство $\mathbb{H}^l$ над $\mathbb{H}$. Для $X = (X_1, X_2, \dots, X_l) \in \mathbb{H}^l$

и $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_l) \in \mathbb{H}^l$ мы полагаем $(X, Y)_1 = \sum_{s=1}^l X_s \bar{Y}_s$. Тогда группа $Sp(l)$ есть группа $\mathbb{R}$ -линейных операторов $A: \mathbb{H}^l \rightarrow \mathbb{H}^l$ со свойством $(A(X), A(Y))_1 = (X, Y)_1$ для всех $X, Y \in \mathbb{H}^l$. Если мы зафиксируем некоторый $(\cdot, \cdot)_1$ -ортонормированный кватернионный базис в $\mathbb{H}^l$, то мы можем отождествить $Sp(l)$ с группой матриц $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{H}$, со свойством $A^{-1} = A^*$, где $a_{ij}^* = \bar{a}_{ji}$ для $1 \leq i, j \leq l$. В этом случае $sp(l)$ состоит из $(l \times l)$ -кватернионных матриц A со свойством $A^* = -A$. Далее мы будем пользоваться указанными отождествлениями.

Для $A, B \in sp(l)$ мы определяем

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \text{trace}(\text{Re}(AB^*)). \quad (6.15)$$

Нетрудно понять, что скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g} = sp(l)$ $\text{Ad}(Sp(l))$ -инвариантно. Далее мы будем предполагать (без ограничения общности), что вложение $sp(1) \oplus sp(l-1)$ в $sp(l)$ определяется формулой $(A, B) \mapsto \text{diag}(A, B)$, где $A \in sp(1)$ и $B \in sp(l-1)$. Очевидно, что модули $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ являются $\text{Ad}(U(1) \cdot Sp(l-1))$ -инвариантными и $\text{Ad}(U(1) \cdot Sp(l-1))$ -неприводимыми. Напомним также, что произвольная инвариантная риманова метрика $\mu = \mu_{x_1, x_2}$ на $Sp(l)/U(1) \cdot Sp(l-1)$, соответствующая скалярному произведению (6.13), является геодезически орбитальной метрикой.

6.9.2. Пространства $SO(2l+1)/U(l)$, $l \geq 3$. Начнем с доказательства того, что риманово многообразие $(SO(7)/U(3), \mu = \mu_{x_1, x_2})$, $x_1 < x_2 < 2x_1$, не является обобщенным нормальным однородным.

Конкретизируем общие обозначения для этого частного случая:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} d & e & f \\ e & g & h \\ f & h & k \end{pmatrix},$$

$$u(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b & d & e & f & 0 \\ -a & 0 & c & e & g & h & 0 \\ -b & -c & 0 & f & h & k & 0 \\ -d & -e & -f & 0 & a & b & 0 \\ -e & -g & -h & -a & 0 & c & 0 \\ -f & -h & -k & -b & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad a, b, c, d, e, f, g, h, k \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathfrak{p}_1 = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_6 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 & -s_4 & -s_5 & -s_6 & 0 \end{pmatrix} ; \quad s_i \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathfrak{p}_2 = \left\{ Y = \begin{pmatrix} 0 & l & m & 0 & p & q & 0 \\ -l & 0 & n & -p & 0 & r & 0 \\ -m & -n & 0 & -q & -r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 & -l & -m & 0 \\ -p & 0 & r & l & 0 & -n & 0 \\ -q & -r & 0 & m & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad l, m, n, p, q, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Отметим, что для векторов X из $\mathfrak{p}_1$ вышеприведенного вида

$$\langle X, X \rangle = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + s_5^2 + s_6^2,$$

а для векторов $Y \in \mathfrak{p}_2$ мы имеем

$$\langle Y, Y \rangle = 2l^2 + 2m^2 + 2n^2 + 2p^2 + 2q^2 + 2r^2.$$

Пусть $E_{i,j}$ — (7×7) -матрица, чей (i, j) -й элемент равен 1, а все остальные элементы нулевые. Для $1 \leq i < j \leq 7$ мы полагаем $F_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$.

Предложение 6.21. *Риманово многообразие*

$$(SO(7)/U(3), \mu = \mu_{x_1, x_2})$$

не является обобщенным нормальным однородным при $x_1 < x_2 < 2x_1$.

Для доказательства сформулированного утверждения нам понадобится ряд лемм. Для $W \in \mathfrak{so}(7)$ мы обозначим через $O(W)$ орбиту W под действием $\text{Ad}(SO(7))$, т. е.

$$O(W) = \left\{ V \in \mathfrak{so}(7) \mid \exists Q \in SO(7), V = QWQ^{-1} \right\}.$$

Лемма 6.8. Пусть вектор $W = X + Y + Z$, где $X = s_1 F_{1,7} \in \mathfrak{p}_1$ ($s_1 \neq 0$), $Y = q(F_{1,6} - F_{3,4}) + r(F_{2,6} - F_{3,5}) \in \mathfrak{p}_2$ ($q \neq 0, r \neq 0$), $Z \in \mathfrak{h} = \mathfrak{u}(3)$

(см. выше), геодезичен на $(SO(7)/U(3), \mu)$ для $x_1 < x_2 < 2x_1$. Тогда

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_2}{x_1}q & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_2}{x_1}r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_2-2x_1}{x_1}q & \frac{x_2-2x_1}{x_1}r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2x_1-x_2}{x_1}q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2x_1-x_2}{x_1}r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{x_2}{x_1}q & -\frac{x_2}{x_1}r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= s_1 F_{1,7} + \frac{x_2}{x_1} q F_{1,6} + \frac{x_2}{x_1} r F_{2,6} + \frac{x_2-2x_1}{x_1} q F_{3,4} + \frac{x_2-2x_1}{x_1} r F_{3,5}.$$

◁ Поскольку W является геодезическим вектором, то по предложению 6.14 мы получаем $[Z, Y] = 0$, $[X, Y] = x_1/(x_2 - x_1)[X, Z]$. Прямые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} [Z, Y] &= (qh - fr)(F_{1,2} - F_{4,5}) + (qd + qk + er)(F_{1,3} - F_{4,6}) + \\ &+ (rk + rg + eq)(F_{2,3} - F_{5,6}) + (cq - br)(F_{1,5} - F_{2,4}) + \\ &+ ar(F_{1,6} - F_{3,4}) + aq(F_{3,5} - F_{2,6}), \end{aligned}$$

$$[X, Y] = s_1 q F_{6,7}, \quad [X, Z] = s_1 (a F_{2,7} + b F_{3,7} + d F_{4,7} + e F_{5,7} + f F_{6,7}).$$

Векторы $F_{1,2} - F_{4,5}$, $F_{1,3} - F_{4,6}$, $F_{2,3} - F_{5,6}$, $F_{1,5} - F_{2,4}$, $F_{1,6} - F_{3,4}$, $F_{3,5} - F_{2,6}$ являются линейно независимыми в $\mathfrak{p}_2$, а векторы $F_{i,7}$, $2 \leq i \leq 6$, линейно независимы в $\mathfrak{p}_1$. Следовательно, $a = b = d = e = c = k = g = 0$, $f = \frac{x_2-x_1}{x_1}q$ и $h = \frac{x_2-x_1}{x_1}r$. Лемма доказана. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 37. Отметим, что в работе [118] исследована структура всех геодезических векторов на $(SO(7)/U(3), \mu)$.

Лемма 6.9. Если риманово многообразие $(SO(7)/U(3), \mu)$, $x_1 < x_2 < 2x_1$, является $SO(7)$ -обобщенным нормальным однородным, то для любых $s_1 \neq 0$, $q \neq 0$ и $r \neq 0$ вектор

$$W = s_1 F_{1,7} + \frac{x_2}{x_1} q F_{1,6} + \frac{x_2}{x_1} r F_{2,6} + \frac{x_2-2x_1}{x_1} q F_{3,4} + \frac{x_2-2x_1}{x_1} r F_{3,5}$$

является δ -вектором на $(SO(7)/U(3), \mu)$.

◁ Пусть $(SO(7)/U(3), \mu)$ — $SO(7)$ -обобщенное нормальное однородное, тогда для каждого вектора вида $V = X + Y$, где $X = s_1 F_{1,7} \in \mathfrak{p}_1$

$(s_1 \neq 0)$, $Y = q(F_{1,6} - F_{3,4}) + r(F_{2,6} - F_{3,5}) \in \mathfrak{p}_2$ ($q \neq 0, r \neq 0$), существует $Z \in \mathfrak{h}$ такой, что вектор $\widetilde{W} = X + Y + Z$ является δ -вектором (см. предложение 6.10). В частности, такой $\widetilde{W}$ должен быть геодезическим вектором. По лемме 6.8 мы получаем, что

$$\begin{aligned} \widetilde{W} = W = & s_1 F_{1,7} + \frac{x_2}{x_1} q F_{1,6} + \frac{x_2}{x_1} r F_{2,6} + \\ & + \frac{x_2 - 2x_1}{x_1} q F_{3,4} + \frac{x_2 - 2x_1}{x_1} r F_{3,5}. \end{aligned}$$

Следовательно, W — δ -вектор. $\triangleright$

Лемма 6.10. Пусть $A, B \in so(7)$. Тогда A и B находятся в одной орбите группы $\text{Ad}(SO(7))$ тогда и только тогда, когда их характеристические многочлены совпадают.

$\triangleleft$ Очевидно, что характеристические полиномы матриц A и B из одной орбиты $\text{Ad}(SO(7))$ совпадают.

Предположим теперь, что характеристические полиномы матриц A и B равны. Стандартная камера Вейля алгебры Ли $so(7)$ имеет следующий вид (см., например, [22]):

$$\left\{ \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & -z_1 \\ z_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -z_2 \\ z_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -z_3 \\ z_3 & 0 \end{pmatrix}, 0 \right) \mid z_1 \geq z_2 \geq z_3 \geq 0 \right\}.$$

Если A и B сопряжены различным элементам камеры Вейля, то, как легко видеть, их характеристические многочлены различны. Следовательно, A и B сопряжены одному и тому же элементу камеры Вейля, т. е. они находятся в одной орбите $\text{Ad}(SO(7))$. $\triangleright$

Далее нам понадобится величина $\lambda = x_2/x_1$. Мы рассмотрим геодезические векторы W и $\widetilde{W}$ (см. лемму 6.8):

$$\begin{aligned} W = & s_1 F_{1,7} + \frac{x_2}{x_1} q F_{1,6} + \frac{x_2}{x_1} r F_{2,6} + \\ & + \frac{x_2 - 2x_1}{x_1} q F_{3,4} + \frac{x_2 - 2x_1}{x_1} r F_{3,5}, \end{aligned} \tag{6.16}$$

где

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\lambda^2((2-\lambda)^2 + \lambda^3 - 1)}, \\ q &= \sqrt{\frac{(\lambda^3 - 1)(1 - (2-\lambda)^2)}{(2-\lambda)^2 + \lambda^3 - 1}}, \quad r = \sqrt{\frac{\lambda^3(2-\lambda)^2}{(2-\lambda)^2 + (\lambda^3 - 1)}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{W} = & \widetilde{s}_1 F_{1,7} + \frac{x_2}{x_1} \widetilde{q} F_{1,6} + \frac{x_2}{x_1} \widetilde{r} F_{2,6} + \\ & + \frac{x_2 - 2x_1}{x_1} \widetilde{q} F_{3,4} + \frac{x_2 - 2x_1}{x_1} \widetilde{r} F_{3,5},\end{aligned}\quad (6.17)$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{s}_1 &= \sqrt{(2-\lambda)^2 + \lambda^4(\lambda-1)}, \\ \widetilde{q} &= \sqrt{\frac{\lambda^2(\lambda-1)(\lambda^4 - (2-\lambda)^2)}{(2-\lambda)^2 + \lambda^4(\lambda-1)}}, \quad \widetilde{r} = \sqrt{\frac{\lambda^3(2-\lambda)^2}{(2-\lambda)^2 + \lambda^4(\lambda-1)}}.\end{aligned}$$

Лемма 6.11. Вектор W (см. (6.16)) не является δ -вектором на $(SO(7)/U(3), \mu)$ для $x_1 < x_2 < 2x_1$.

◁ Прямые вычисления показывают, что характеристические многочлены $P(z)$ и $\widetilde{P}(z)$ матриц W и $\widetilde{W}$ (см. (6.17)) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}P(z) &= z^7 + (a + b(\lambda^2 + (2-\lambda)^2))z^5 + \\ &+ (ab(2-\lambda)^2 + ac\lambda^2 + b^2\lambda^2(2-\lambda)^2)z^3 + abc\lambda^2(2-\lambda)^2z, \\ \widetilde{P}(z) &= z^7 + (\widetilde{a} + \widetilde{b}(\lambda^2 + (2-\lambda)^2))z^5 + \\ &+ (\widetilde{a}\widetilde{b}(2-\lambda)^2 + \widetilde{a}\widetilde{c}\lambda^2 + \widetilde{b}^2\lambda^2(2-\lambda)^2)z^3 + \widetilde{a}\widetilde{b}\widetilde{c}\lambda^2(2-\lambda)^2z,\end{aligned}$$

где

$$\lambda = \frac{x_2}{x_1}, \quad a = s_1^2, \quad b = q^2 + r^2, \quad c = r^2, \quad \widetilde{a} = \widetilde{s}_1^2, \quad \widetilde{b} = \widetilde{q}^2 + \widetilde{r}^2, \quad \widetilde{c} = \widetilde{r}^2.$$

Теперь мы покажем, что $P(z) = \widetilde{P}(z)$ и $(W|_{\mathfrak{p}}, W|_{\mathfrak{p}}) < (\widetilde{W}|_{\mathfrak{p}}, \widetilde{W}|_{\mathfrak{p}})$. Так как $x_1 < x_2 < 2x_1$, то $1 < \lambda < 2$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}b = 1, \quad a &= \lambda^2((2-\lambda)^2 + \lambda^3 - 1), \quad c = \frac{\lambda^3(2-\lambda)^2}{(2-\lambda)^2 + (\lambda^3 - 1)}, \\ \widetilde{b} &= \lambda^2, \quad \widetilde{a} = (2-\lambda)^2 + \lambda^4(\lambda-1), \quad \widetilde{c} = \frac{\lambda^3(2-\lambda)^2}{(2-\lambda)^2 + \lambda^4(\lambda-1)}.\end{aligned}$$

Равенство $P(z) = \widetilde{P}(z)$ эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} a + b(\lambda^2 + (2-\lambda)^2) = \widetilde{a} + \widetilde{b}(\lambda^2 + (2-\lambda)^2), \\ ab(2-\lambda)^2 + ac\lambda^2 + b^2\lambda^2(2-\lambda)^2 = \\ = \widetilde{a}\widetilde{b}(2-\lambda)^2 + \widetilde{a}\widetilde{c}\lambda^2 + \widetilde{b}^2\lambda^2(2-\lambda)^2, \\ abc\lambda^2(2-\lambda)^2 = \widetilde{a}\widetilde{b}\widetilde{c}\lambda^2(2-\lambda)^2. \end{cases} \quad (6.18)$$

Легко проверить, что система уравнений (6.18) выполнена для рассматриваемых значений $a, b, c, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$. Следовательно, $P(z) = \tilde{P}(z)$.

Поскольку $(W|_p, W|_p) = x_1(a + 2\lambda b)$ и $(\tilde{W}|_p, \tilde{W}|_p) = x_1(\tilde{a} + 2\lambda\tilde{b})$, неравенство $(W|_p, W|_p) < (\tilde{W}|_p, \tilde{W}|_p)$ эквивалентно следующему: $a + 2\lambda b < \tilde{a} + 2\lambda\tilde{b}$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \tilde{a} + 2\lambda\tilde{b} - a - 2\lambda b &= (2 - \lambda)^2 + \lambda^4(\lambda - 1) + 2\lambda^3 - \\ &- \lambda^2((2 - \lambda)^2 + \lambda^3 - 1) - 2\lambda = 2(2 - \lambda)(\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) > 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(W|_p, W|_p) < (\tilde{W}|_p, \tilde{W}|_p).$$

Поскольку $P(z) = \tilde{P}(z)$, то по лемме 6.10 мы получаем $\tilde{W} \in O(W)$. С другой стороны, $(W|_p, W|_p) < (\tilde{W}|_p, \tilde{W}|_p)$. Следовательно, вектор W не является δ -вектором, так как иначе должно было бы выполняться неравенство

$$(W|_p, W|_p) \geq (\tilde{W}|_p, \tilde{W}|_p)$$

(см. выше формулу (6.14) для δ -векторов). Лемма доказана. $\triangleright$

Теперь достаточно заметить, что доказательство предложения 6.21 следует из леммы 6.9 и леммы 6.11.

Для $1 \leq m < l$ мы определим вложение $\sigma_{m,l} : SO(2m+1) \times SO(2k) \mapsto SO(2l+1)$, где $k = l - m$. Это вложение полностью определяется вложением $d\sigma_{m,l} : so(2m+1) \oplus so(2k) \mapsto so(2l+1)$ для соответствующих алгебр Ли. Отметим, что $so(2m+1)$ состоит из матриц вида

$$Q_1 = \begin{pmatrix} V & U & E \\ -U^t & W & F \\ -E^t & -F^t & 0 \end{pmatrix},$$

где V и W — кососимметричные $(m \times m)$ -матрицы, U — произвольная $(m \times m)$ -матрица, E и F — произвольные $(m \times 1)$ -матрицы. Алгебра Ли $so(k)$ состоит из матриц вида

$$Q_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & C \end{pmatrix},$$

где A и C — кососимметричные $(k \times k)$ -матрицы, а B — произвольная $(k \times k)$ -матрица. Теперь определим $d\sigma_{m,l}$ следующим образом:

$$d\sigma_{m,l}(Q_1, Q_2) = \begin{pmatrix} V & O & U & O & E \\ O & A & O & B & O \\ -U^t & O & W & O & F \\ O & -B^t & O & C & O \\ -E^t & O & -F^t & O & 0 \end{pmatrix},$$

где O означают нулевые матрицы.

Заметим, что для рассматриваемого вложения

$$\sigma_{m,l}(\tau'_m(U(m)) \times \tau_k(U(k))) \subset \tau'_l(U(l)),$$

$$\sigma_{m,l}(\tau'_m(U(m)) \times \text{Id}) = \sigma_{m,l}(SO(2m+1) \times \text{Id}) \cap \tau'_l(U(l)).$$

Теперь мы предположим, что $l \geq 3$ и $1 < m < l$. Рассмотрим $G = SO(2l+1)$, $H = \tau'_l(U(l))$, $\tilde{G} = \sigma_{m,l}(SO(2m+1) \times \text{Id})$ и $\tilde{H} = \sigma_{m,l}(\tau'_m(U(m)) \times \text{Id})$.

Ясно, что

$$\tilde{G} \subset G, \quad \tilde{H} = \tilde{G} \cap H; \quad \tilde{G} \cap SO(2l) = \sigma_{m,l}(SO(2m)), \quad (6.19)$$

$$d\sigma_{m,l}(so(2m)^\perp) = d\sigma_{m,l}(so(2m+1)) \cap (so(2l))^\perp, \quad (6.20)$$

$$d\sigma_{m,l}(d\tau_m(u(m))^\perp) = d\sigma_{m,l}(so(2m+1)) \cap (d\tau_l(u(l)))^\perp. \quad (6.21)$$

Лемма 6.12. Орбита $\tilde{G}/\tilde{H}$ группы $\tilde{G}$, проходящая через точку $\bar{e} = eH$ в $(G/H, \mu = \mu_{x_1, x_2})$ и снабженная индуцированной римановой метрикой η , является вполне геодезическим подмногообразием в $(G/H, \mu = \mu_{x_1, x_2})$. Кроме того, отображение

$$(SO(2m+1)/U(m), \mu_{x_1, x_2}) \rightarrow (\tilde{G}/\tilde{H}, \eta)$$

является изометрией.

◁ Рассмотрим T — максимальный $(k$ -мерный) тор в $\sigma_{m,l}(\text{Id} \times \tau_k(U(k)))$. Отметим, что T также является максимальным тором в $\sigma_{m,l}(\text{Id} \times SO(2k))$ и $T \subset H$. Пусть C — связная компонента централизатора T в $SO(2l+1)$. Легко видеть, что $C = T \cdot \tilde{G}$. По предложению 5.8 орбита C , проходящая через $eH \in G/H$,

с индуцированной римановой метрикой η является вполне геодезическим подмногообразием в $(G/H, \mu = \mu_{x_1, x_2})$. Но $T \subset H$ и, следовательно, эта орбита совпадает с пространством $\tilde{G}/\tilde{H}$. Вложения (6.19), (6.20) и (6.21) влекут изометричность отображения $(SO(2m+1)/U(m), \mu_{x_1, x_2}) \rightarrow (\tilde{G}/\tilde{H}, \eta)$. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.19. Случай $l = 3$ рассмотрен в предложении 6.21. Предположим, что $l \geq 4$ и многообразие $(SO(2l+1)/U(l), \mu = \mu_{x_1, x_2})$, где $x_1 < x_2 < 2x_1$, является обобщенным нормальным. Тогда по лемме 6.12 $(SO(7)/U(3), \mu = \mu_{x_1, x_2})$ является вполне геодезическим подмногообразием обобщенного нормального однородного многообразия $(SO(2l+1)/U(l), \mu = \mu_{x_1, x_2})$, и по теореме 6.15 оно должно само быть обобщенным нормальным. Мы получили противоречие с предложением 6.21. $\triangleright$

6.9.3. Пространства $Sp(l)/U(1) \cdot Sp(l-1)$, $l \geq 2$. Рассмотрим подалгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ в $\mathfrak{g} = sp(l)$ вида

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \{ \text{diag}(A, 0) \in sp(l) \mid A \in sp(2), 0 \in sp(l-2) \}.$$

Пусть $\tilde{G} = Sp(2)$ — связная (замкнутая) подгруппа в $G = Sp(l)$, соответствующая $\tilde{\mathfrak{g}}$, и $\tilde{H} = \tilde{G} \cap H$.

Лемма 6.13. Орбита $\tilde{G}/\tilde{H}$ группы $\tilde{G}$, проходящая через точку $\bar{e} = eH$ в $(G/H, \mu = \mu_{x_1, x_2})$, с индуцированной римановой метрикой является вполне геодезическим подмногообразием.

$\triangleleft$ Рассмотрим тор $T = \text{diag}(1, 1, S_1, \dots, S_{l-2}) \subset Sp(l)$, где S_i — окружности (одномерные торы). Легко видеть, что $T \subset H$ и $\tilde{G} \times T$ — связная компонента централизатора T . Из предложения 5.8 следует, что орбита этой подгруппы (через точку eH) является вполне геодезическим подмногообразием в $(G/H, \mu)$. Но эта орбита совпадает с $\tilde{G}/\tilde{H}$. $\triangleright$

Ясно, что $\tilde{H} = U(1) \times Sp(1)$, где $U(1) \times Sp(1) \subset Sp(1) \times Sp(1) \subset Sp(2) = \tilde{G}$. Следовательно, мы имеем следующее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональное разложение:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = sp(2) = \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{p}'_1, \quad (6.22)$$

где $\mathfrak{p}'_1 = \mathfrak{p}_1 \cap \tilde{\mathfrak{g}}$.

Лемма 6.14. Пусть $X \in \mathfrak{p}'_1$, $Y \in \mathfrak{p}_2$ — некоторые нетривиальные векторы. Тогда для любого $Z \in \mathfrak{p}$ существует $a \in H$ такой, что $\text{Ad}(a)(Z) = cX + dY$ для некоторых $c, d \geq 0$.

◁ Пусть $Z = Z_1 + Z_2$, где $Z_1 \in \mathfrak{p}_1$, $Z_2 \in \mathfrak{p}_2$. Напомним, что $U(1)$ действует на $\mathfrak{p}_2$ и $\mathfrak{p}_1$ вращениями. Следовательно, мы можем найти $a_1 \in U(1)$ такой, что $\text{Ad}(a_1)(Z_2) = dY$ для некоторого неотрицательного d . Далее, напомним, что $\mathbb{H}P^{l-1} = Sp(l)/Sp(1) \times Sp(l-1)$ является двухточечно однородным. Таким образом, существует $a_2 \in Sp(1) \times Sp(l-1)$ такой, что $\text{Ad}(a_2)(Z'_1) = cX$ для некоторого $c \geq 0$, где $Z'_1 = \text{Ad}(a_2)(Z_1)$. Более того, такой a_2 может быть взят из $Sp(l-1)$, поскольку уже $Sp(l-1)$ действует транзитивно на единичной сфере в $\mathbb{H}P^{l-1}$ (см., например, [242]). Таким образом, можно взять $a = a_2 \cdot a_1$. ▷

Используем символ E_{ij} для кососимметричной матрицы с 1 на месте (i, j) -го элемента, -1 на месте (j, i) -го элемента и нулевыми остальными элементами. Обозначим через F_{ij} симметричную матрицу с 1 на месте (i, j) -го и (j, i) -го элементов и нулевыми остальными элементами. Обозначим также через G_i матрицу с $\sqrt{2}$ на (i, i) -м месте и нулями на остальных местах.

Легко проверить, что матрицы вида $\mathbf{i}G_i, \mathbf{j}G_i, \mathbf{k}G_i, E_{ij}, \mathbf{i}F_{ij}, \mathbf{j}F_{ij}, \mathbf{k}F_{ij}$, где $1 \leq i, j \leq n$ и $i < j$, образуют $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортонормированный (относительно скалярного произведения (6.15)) базис в $sp(l)$.

Без ограничения общности мы можем считать, что подалгебра Ли $u(1)$ ($\mathfrak{h} = u(1) \oplus sp(l-1)$) натянута на вектор $\mathbf{i}G_1$. Ясно, что $E_{12} \in \mathfrak{p}'_1$ и $\mathbf{j}G_1 \in \mathfrak{p}_2$.

Лемма 6.15. Пусть $W = X + Y + Z$ — δ -вектор на $\tilde{G}/\tilde{H}$ с метрикой, индуцированной метрикой μ , где $X = cE_{12}$ и $Y = d\mathbf{j}G_1$ для некоторых неотрицательных c и d . Тогда выполняются следующие соотношения:

- 1) если $c = 0$, то $Z = \beta\mathbf{i}G_2 + \gamma\mathbf{j}G_2 + \delta\mathbf{k}G_2$, $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$;
- 2) если $d = 0$, то $Z = \alpha(\mathbf{i}G_1 + \mathbf{i}G_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- 3) если $c \neq 0$ и $d \neq 0$, то $Z = -\frac{x_2 - x_1}{x_1} d\mathbf{j}G_2$.

◁ Вектор W является (в частности) геодезическим. Согласно предложению 6.14

$$[Z, Y] = 0, \quad [Z, X] = \frac{x_2 - x_1}{x_1} [Y, X].$$

Рассмотрим произвольный вектор

$$Z_1 = \alpha\mathbf{i}G_1 + \beta\mathbf{i}G_2 + \gamma\mathbf{j}G_2 + \delta\mathbf{k}G_2 \in \tilde{h}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}[Z_1, Y] &= 2\sqrt{2}\alpha d\mathbf{k}G_1, \\ [Z_1, X] &= \sqrt{2}c((\alpha - \beta)\mathbf{i}F_{12} - \gamma\mathbf{j}F_{12} - \delta\mathbf{k}F_{12}), \\ [Y, X] &= \sqrt{2}cd\mathbf{j}F_{12}.\end{aligned}$$

Лемма следует из этих формул. $\triangleright$

Рассмотрим теперь векторы $X = cE_{12}$ и $Y = d\mathbf{j}G_1$ для некоторых положительных c и d . Легко видеть, что вектор $Z = -\frac{x_2 - x_1}{x_1}d\mathbf{j}G_2$ удовлетворяет соотношениям $[Z, Y] = 0$, $[Z, X] = \frac{x_2 - x_1}{x_1}[Y, X]$ (на самом деле, как будет показано ниже в предложении 6.25, $W = X + Y + Z$ является δ -вектором на пространстве $\tilde{G}/\tilde{H}$ с метрикой, индуцированной μ_{x_1, x_2} при $x_1 < x_2 < 2x_1$). Наш основной технический инструмент — следующее

Предложение 6.22. Если для всех положительных c и d вектор

$$W = X + Y + Z = cE_{12} + d\mathbf{j}G_1 - \frac{x_2 - x_1}{x_1}d\mathbf{j}G_2$$

является δ -вектором на $(G/H, \mu)$, то риманово многообразие $(G/H, \mu)$ является G -обобщенным нормальным однородным.

$\triangleleft$ Напомним, что δ -векторы $W \in \mathfrak{g}$ характеризуются неравенством (6.14), и $(G/H, \mu)$ обобщенно нормально однородно, если любой вектор из $\mathfrak{p}$ может быть представлен как $W|_{\mathfrak{p}}$ для некоторого δ -вектора $W \in \mathfrak{g}$ (см. предложение 6.10). Очевидно, $(\text{Ad}(h)(W)|_{\mathfrak{p}}, \text{Ad}(h)(W)|_{\mathfrak{p}}) = (W|_{\mathfrak{p}}, W|_{\mathfrak{p}})$ для всех $W \in \mathfrak{g}$ и $h \in H$. Это наблюдение вместе с леммой 6.14 (и с подходящим предельным переходом, если $c = 0$ или $d = 0$) доказывают предложение. $\triangleright$

Предложение 6.23. Предположим, что

$$W = X + Y + Z = cE_{12} + d\mathbf{j}G_1 - \frac{x_2 - x_1}{x_1}d\mathbf{j}G_2$$

не является δ -вектором на $(G/H, \mu)$. Тогда существует вектор $\tilde{W}$ в $\text{Ad}(G)$ -орбите вектора W , имеющий одну из следующих форм:

- 1) $\tilde{W}_1 = \tilde{d}\mathbf{j}G_1 + \sum_{q=2}^l \alpha_q \mathbf{i}G_q$, где $x_2\tilde{d}^2 > x_2d^2 + x_1c^2$;
- 2) $\tilde{W}_2 = \tilde{c}E_{12} + \alpha(\mathbf{i}G_1 + \mathbf{i}G_2) + \sum_{q=3}^l \alpha_q \mathbf{i}G_q$, где $x_1\tilde{c}^2 > x_2d^2 + x_1c^2$;
- 3) $\tilde{W}_3 = \tilde{c}E_{12} + \tilde{d}\mathbf{j}G_1 - \frac{x_2 - x_1}{x_1}\tilde{d}\mathbf{j}G_2 + \sum_{q=3}^l \alpha_q \mathbf{i}G_q$, где $x_2\tilde{d}^2 + x_1\tilde{c}^2 > x_2d^2 + x_1c^2$.

В вышеприведенных формулах $\alpha, \alpha_q \in \mathbb{R}$, $\tilde{c}, \tilde{d} \geq 0$.

◁ Если W не является δ -вектором, то

$$M := \max_{a \in G} (\text{Ad}(a)(W)|_{\mathfrak{p}}, \text{Ad}(a)(W)|_{\mathfrak{p}}) > (W_{\mathfrak{p}}, W_{\mathfrak{p}}) = x_2 d^2 + x_1 c^2.$$

Рассмотрим некоторый вектор $\widetilde{W}$ из $\text{Ad}(G)$ -орбиты W , который доставляет максимальное значение M в вышеприведенной формуле, тогда $\widetilde{W}$ — δ -вектор на $(G/H, \mu)$. Используя лемму 6.14, мы можем считать, что $\widetilde{W}_{\mathfrak{p}} = \widetilde{X} + \widetilde{Y}$, где $\widetilde{X} = \widetilde{c}E_{12}$ и $\widetilde{Y} = \widetilde{d}\mathbf{j}G_1$ для некоторых неотрицательных $\widetilde{c}$ и $\widetilde{d}$. Рассмотрим теперь $\widetilde{W}_{\mathfrak{h}} = Z_1 + Z_2 + Z_3$, где $Z_1 \in \mathfrak{h}$, $Z_2 \in sp(l-2)$, $Z_3 \in \mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_3 = \langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональное дополнение к $sp(l-2)$ в $sp(l-1)$, и $sp(l-1)$ ($sp(l-2)$) определяется вложением $X \rightarrow \text{diag}(0, X)$ (соответственно, $X \rightarrow \text{diag}(0, 0, X)$) в $sp(l)$.

Если интерпретировать произвольный элемент $U \in \mathfrak{g}$ как правоинвариантное векторное поле на G , то $X = d\pi(U)$, где $\pi : G \rightarrow G/H$ — естественная проекция, корректно определяет векторное поле Киллинга на $(G/H, \mu)$. Этот вектор U является δ -вектором тогда и только тогда, когда X достигает максимума своей длины в начальной точке $eH \in G/H$. Поскольку $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ — вполне геодезическое подмногообразие в $(G/H, \mu)$ по лемме 6.13, из доказательства теоремы 6.15 получаем, что касательная компонента определенного выше поля $\widetilde{W}$ к $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ является киллинговым векторным полем на $\widetilde{G}/\widetilde{H}$, которое также достигает максимума своей длины в начальной точке $e\widetilde{H} \in \widetilde{G}/\widetilde{H}$.

Из этого наблюдения получаем, что $\widetilde{X} + \widetilde{Y} + Z_1$ — δ -вектор на $\widetilde{G}/\widetilde{H}$. Следовательно, мы получаем для Z_1 одну из возможностей в лемме 6.15. Кроме того, легко видеть, что

$$[Z_2, \widetilde{X}] = 0, \quad [Z_3, \widetilde{Y}] = [Z_2, \widetilde{Y}] = 0.$$

Из предложения 6.14 получаем, что

$$[Z_1 + Z_2 + Z_3, \widetilde{X}] = \frac{x_2 - x_1}{x_1} [\widetilde{Y}, \widetilde{X}] = [Z_1, \widetilde{X}],$$

следовательно, $[Z_3, \widetilde{X}] = 0$. Как легко проверить, отсюда следует $Z_3 = 0$, если $\widetilde{X} \neq 0$.

Мы имеем две следующие возможности: $\widetilde{c} = 0$ или $\widetilde{c} \neq 0$.

В первом случае мы получаем $\widetilde{X} = 0$. Поскольку $\widetilde{W}_{\mathfrak{h}} \in sp(l-1)$ по случаю 1) в лемме 6.15 и $\widetilde{Y}$ коммутирует с $sp(l-1)$, мы можем

переместить $\widetilde{W}_b$ некоторым преобразованием $\text{Ad}(b)$, $b \in Sp(l-1)$, в заданную картановскую подалгебру $sp(l-1)$, не изменяя $\widetilde{Y}$. Если рассмотреть картановскую подалгебру, порожденную векторами $\mathbf{i}G_q$, $2 \leq q \leq l$, то мы получим пункт 1) леммы.

Если $\tilde{c} \neq 0$, то $\tilde{X} \neq 0$, $Z_3 = 0$ (см. выше), $Z_2 \in sp(l-2)$. Поскольку $\widetilde{W}_p$ коммутирует с $sp(l-2)$, мы можем переместить Z_2 некоторым $\text{Ad}(b)$, $b \in Sp(l-2)$, в заданную картановскую подалгебру $sp(l-2)$. Рассмотрим картановскую подалгебру, порожденную векторами $\mathbf{i}G_q$, $3 \leq q \leq l$. Тогда мы получаем случаи 2) или 3) леммы в зависимости от того $\tilde{d} = 0$ или $\tilde{d} \neq 0$. $\triangleright$

Далее нам понадобится вложение $\pi : Sp(l) \rightarrow SU(2l)$, определяемое формулой

$$A + \mathbf{j}B \rightarrow \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix},$$

и соответствующее вложение $d\pi : sp(l) \rightarrow su(2l)$:

$$X + \mathbf{j}Y \rightarrow \begin{pmatrix} X & -\overline{Y} \\ Y & \overline{X} \end{pmatrix}.$$

Легко проверить следующие формулы:

$$\begin{aligned} d\pi(E_{ij}) &= E_{ij} + E_{l+i,l+j}, & d\pi(\mathbf{i}F_{ij}) &= \mathbf{i}F_{i,j} - \mathbf{i}F_{l+i,l+j}, \\ d\pi(\mathbf{j}F_{ij}) &= E_{l+i,j} - E_{i,l+j}, & d\pi(\mathbf{k}F_{ij}) &= -\mathbf{i}F_{l+i,j} - \mathbf{i}F_{i,l+j}, \\ d\pi(\mathbf{i}G_i) &= \mathbf{i}G_i - \mathbf{i}G_{l+i}, & d\pi(\mathbf{j}G_i) &= -\sqrt{2}E_{i,l+i}, \\ d\pi(\mathbf{k}G_i) &= -\sqrt{2}\mathbf{i}F_{i,l+i}. \end{aligned}$$

Для $W \in sp(l)$ обозначим через $\text{Pol}(W)$ характеристический полином матрицы $d\pi(W)$. Легко получить следующее

Предложение 6.24. 1) Если $\widetilde{W}_1 = \tilde{d}\mathbf{j}G_1 + \sum_{q=2}^l \alpha_q \mathbf{i}G_q$, то

$$\text{Pol}(\widetilde{W}_1) = (\lambda^2 + 2\tilde{d}^2) \cdot \prod_{q=2}^l (\lambda^2 + 2\alpha_q^2).$$

2) Если $\widetilde{W}_2 = \tilde{c}E_{12} + \alpha(\mathbf{i}G_1 + \mathbf{i}G_2) + \sum_{q=3}^l \alpha_q \mathbf{i}G_q$, то

$$\text{Pol}(\widetilde{W}_2) = (\lambda^4 + 2(\tilde{c}^2 + 2\alpha^2)\lambda^2 + (\tilde{c}^2 - 2\alpha^2)^2) \cdot \prod_{q=3}^l (\lambda^2 + 2\alpha_q^2).$$

3) Если $\widetilde{W}_3 = \widetilde{c}E_{12} + \widetilde{d}\mathbf{j}G_1 - \frac{x_2-x_1}{x_1}\widetilde{d}\mathbf{j}G_2 + \sum_{q=3}^l \alpha_q \mathbf{i}G_q$, то

$$\begin{aligned} \text{Pol}(\widetilde{W}_3) = & \left[\lambda^4 + 2 \left(\widetilde{c}^2 + \widetilde{d}^2 + \widetilde{d}^2 \left(\frac{x_2-x_1}{x_1} \right)^2 \right) \lambda^2 + \right. \\ & \left. + \left(\widetilde{c}^2 + 2\widetilde{d}^2 \frac{x_2-x_1}{x_1} \right)^2 \right] \cdot \prod_{q=3}^l (\lambda^2 + 2\alpha_q^2). \end{aligned}$$

Предложение 6.25. Если $x_1 < x_2 < 2x_1$, то для любых положительных c и d вектор

$$W = X + Y + Z = cE_{12} + d\mathbf{j}G_1 - \frac{x_2-x_1}{x_1}d\mathbf{j}G_2$$

является δ -вектором на $(G/H, \mu = \mu_{x_1, x_2})$.

◁ Предположим, что вектор

$$W = cE_{12} + d\mathbf{j}G_1 - \frac{x_2-x_1}{x_1}d\mathbf{j}G_2$$

не является δ -вектором. Тогда по предложению 6.23 существует вектор $\widetilde{W}$ в $\text{Ad}(G)$ -орбите W , который имеет одну из следующих форм:

- 1) $\widetilde{W}_1 = \widetilde{d}\mathbf{j}G_1 + \sum_{q=2}^l \alpha_q \mathbf{i}G_q$, где $x_2\widetilde{d}^2 > x_2d^2 + x_1c^2$;
- 2) $\widetilde{W}_2 = \widetilde{c}E_{12} + \alpha(\mathbf{i}G_1 + \mathbf{i}G_2) + \sum_{q=3}^l \alpha_q \mathbf{i}G_q$, где $x_1\widetilde{c}^2 > x_2d^2 + x_1c^2$;
- 3) $\widetilde{W}_3 = \widetilde{c}E_{12} + \widetilde{d}\mathbf{j}G_1 - \frac{x_2-x_1}{x_1}\widetilde{d}\mathbf{j}G_2 + \sum_{q=3}^l \alpha_q \mathbf{i}G_q$, где $x_2\widetilde{d}^2 + x_1\widetilde{c}^2 > x_2d^2 + x_1c^2$.

Для вектора W и соответствующего вектора $\widetilde{W}_i$ мы имеем $\text{Pol}(W) = \text{Pol}(\widetilde{W}_i)$, так как оба этих вектора находятся в одной орбите группы $\text{Ad}(G)$. Отметим, что

$$\begin{aligned} \text{Pol}(W) = & \left[\lambda^4 + 2 \left(c^2 + d^2 + d^2 \left(\frac{x_2-x_1}{x_1} \right)^2 \right) \lambda^2 + \right. \\ & \left. + \left(c^2 + 2d^2 \frac{x_2-x_1}{x_1} \right)^2 \right] \lambda^{2(l-2)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь три указанных выше случая по очереди.

1) В этом случае можно применить пункт 1) в предложении 6.24. Поскольку $\text{Pol}(W) = \text{Pol}(\widetilde{W}_1)$, существует в точности один $\alpha_q \neq 0$, и мы получаем

$$c^2 + d^2 + d^2 \left(\frac{x_2-x_1}{x_1} \right)^2 = \widetilde{d}^2 + \alpha_q^2, \quad c^2 + 2d^2 \frac{x_2-x_1}{x_1} = 2\widetilde{d}|\alpha_q|.$$

Легко видеть, что

$$(\tilde{d} - |\alpha_q|)^2 = d^2 \left(\frac{2x_1 - x_2}{x_1} \right)^2, \quad (\tilde{d} + |\alpha_q|)^2 = 2c^2 + d^2 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2.$$

Следовательно,

$$2\tilde{d} \leq |\tilde{d} - |\alpha_q|| + |\tilde{d} + |\alpha_q|| \leq \sqrt{2c^2 + d^2 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2} + d \frac{2x_1 - x_2}{x_1}. \quad (6.23)$$

Легко проверить, что для всех вещественных чисел c, d, x_1, x_2 со свойствами $c \neq 0, 2x_1 > x_2 > 0$ выполнено следующее неравенство (см., например, [90, лемма 8]):

$$\left(|d|(2x_1 - x_2) + \sqrt{c^2 x_1^2 + d^2 x_2^2} \right)^2 x_2 < 2x_1^2 (x_1 c^2 + 2x_2 d^2). \quad (6.24)$$

Используя неравенства (6.23) и (6.24), мы получаем

$$4\tilde{d}^2 x_2 \leq \left(\sqrt{2c^2 + d^2 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2} + d \frac{2x_1 - x_2}{x_1} \right)^2 x_2 < 4(x_1 c^2 + x_2 d^2),$$

что противоречит неравенству $x_2 \tilde{d}^2 > x_2 d^2 + x_1 c^2$.

2) В этом случае мы применим пункт 2) в предложении 6.24. Имеем $\alpha_q = 0$ для всех $q \geq 3$ и

$$c^2 + d^2 + d^2 \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1} \right)^2 = \tilde{c}^2 + 2\alpha^2, \quad c^2 + 2d^2 \frac{x_2 - x_1}{x_1} = |\tilde{c}^2 - 2\alpha^2|.$$

Поскольку $0 < \frac{x_2 - x_1}{x_1} < 1$, то

$$x_2 > x_1 \left(1 + \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1} \right)^2 \right),$$

$$x_1 \tilde{c}^2 \leq x_1 (\tilde{c}^2 + 2\alpha^2) = x_1 \left(c^2 + d^2 \left(1 + \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1} \right)^2 \right) \right) < x_1 c^2 + x_2 d^2,$$

что противоречит неравенству $x_1 \tilde{c}^2 > x_2 d^2 + x_1 c^2$.

3) В этом случае мы применим пункт 3) в предложении 6.24. Легко видеть, что $\alpha_q = 0$ для $q \geq 3$,

$$c^2 + d^2 + d^2 \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1} \right)^2 = \tilde{c}^2 + \tilde{d}^2 + \tilde{d}^2 \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1} \right)^2,$$

$$c^2 + 2d^2 \frac{x_2 - x_1}{x_1} = \tilde{c}^2 + 2\tilde{d}^2 \frac{x_2 - x_1}{x_1},$$

что легко влечет $d = \tilde{d}$ и $c = \tilde{c}$. Последнее противоречит неравенству $x_2\tilde{d}^2 + x_1\tilde{c}^2 > x_2d^2 + x_1c^2$. Предложение доказано. $\triangleright$

Предложение 6.26. Если $x_1 \leq x_2 \leq 2x_1$, то риманово многообразие $(G/H = Sp(l)/U(1) \cdot Sp(l-1), \mu = \mu_{x_1, x_2})$ является $Sp(l)$ -обобщенным нормальным однородным.

$\triangleleft$ Если $x_1 = x_2$, то метрика μ является $Sp(l)$ -нормальной и, соответственно, она $Sp(l)$ -обобщенная нормальная однородная. Если предположить, что $x_2 \in (x_1, 2x_1)$, то доказательство следует из предложения 6.19 и предложения 6.25. Утверждение для $x_2 = 2x_1$ легко получить с помощью предельного перехода. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.20. Если риманово многообразие $(Sp(l)/U(1) \cdot Sp(l-1), \mu = \mu_{x_1, x_2})$ обобщенно нормально однородно, то по предложению 6.20 имеем $x_1 \leq x_2 \leq 2x_1$. С другой стороны, для $x_2 = x_1$ и для $x_2 = 2x_1$ метрика μ является $Sp(l)$ -нормальной однородной и $SU(2l)$ -нормальной однородной соответственно. Из предложения 6.26 мы получаем, что риманово многообразие $(Sp(l)/U(1) \cdot Sp(l-1), \mu = \mu_{x_1, x_2})$ является обобщенным нормальным однородным для $2x_1 > x_2 > x_1$. Теорема доказана. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 38. Риманово многообразие $(Sp(l)/U(1) \cdot Sp(l-1), \mu = \mu_{x_1, x_2})$, $l \geq 2$, имеет положительную секционную кривизну, и ее (точная) δ -защемленность равна $\varepsilon = (\frac{x_2}{4x_1})^2$, если $0 < x_2 \leq 2x_1$. Для остальных значений x_1, x_2 это утверждение не верно и секционная кривизна не обязательно неотрицательна [32].

6.10. Чебышевская норма на алгебре Ли группы движений компактного однородного финслерова многообразия

Основные результаты этого раздела (основанном на публикации [19]) можно сформулировать так: однородное компактное многообразие с внутренней метрикой (M, ρ) G - δ -однородно относительно некоторой связной компактной подгруппы G своих движений тогда и только тогда, когда (M, ρ) финслерово (с G -инвариантной нормой ν), G является группой Ли и множество $N(M, G)$ всех $\text{Ad}(G)$ -инвариантных норм на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G таких, что для определяемой

ими биинвариантной внутренней метрики ρ_1 на G , каноническая проекция $p : (G, \rho_1) \rightarrow (M, \rho)$ является субметрией, не пусто. При этом чебышевская норма $\|\cdot\|$ на $\mathfrak{g}$ для (M, ρ) (см. формулу (6.25) ниже) является минимальной нормой из $N(M, G)$.

Это естественно вызывает задачу изучения множества $N(M, G)$ (в том числе чебышевских норм) и инвариантных норм на компактных алгебрах Ли. Особенно важен случай, когда G является компонентой связности единицы группы всех движений пространства (M, ρ) .

Пусть (M, ν) — гладкое связное компактное финслерово многообразие с непрерывной нормой ν на TM и соответствующей внутренней метрикой ρ . Известно, что полная группа движений $I(M)$ пространства (M, ρ) является компактной группой Ли, при этом группа изотропии (стабилизатор) каждой точки M является компактной подгруппой в $I(M)$ [114]. В случае риманова многообразия (M, μ) , $\nu(v) = \sqrt{\mu(v, v)}$ для $v \in TM$.

Пусть (M, ν) — компактное однородное финслерово многообразие с компактной связной группой движений G (в частности, G — подгруппа Ли в $I(M)$), и пусть H — (компактная) группа изотропии (стабилизатор) некоторой точки $x \in M$. Тогда M естественным образом отождествляется с фактор-пространством G/H . Рассмотрим алгебры Ли $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ групп H и G . Мы отождествляем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с алгеброй Ли RG правоинвариантных векторных полей на группе Ли G , которые в свою очередь отождествляются посредством дифференциала естественной проекции $p : G \rightarrow G/H = M$ с алгеброй Ли векторных полей на M , порождающих 1-параметрические группы движений пространства (M, ν) . Касательное пространство M_x к M в точке x естественно отождествляется с векторным фактор-пространством $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, а дифференциал Tr_e гладкого отображения p в точке $e \in G$ — с канонической линейной проекцией $pr : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Рассмотрим также $\text{Ad}(G)$ -инвариантную норму (которую мы далее будем называть *чебышевской нормой*) $\|\cdot\|$ на $\mathfrak{g}$, определяемую формулой

$$\|X\| = \max_{x \in M} \nu(X(x)). \quad (6.25)$$

Для каждого метрического пространства (M, ρ) можно определить (конечную или бесконечную) *внутреннюю метрику* ρ_{in} на M : $\rho_{\text{in}}(x, y)$ определяется как точная нижняя граница длин путей в

(M, ρ) , соединяющих точки x и y . Ясно, что $\rho \leq \rho_{\text{in}}$. При этом (M, ρ) называется *пространством с внутренней метрикой*, если $\rho_{\text{in}} = \rho$.

Теорема 6.21. В вышеприведенных обозначениях, функция $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$, заданная равенством

$$d(g, h) = \max_{x \in M} \rho(g(x), h(x)), \quad (6.26)$$

является биинвариантной метрикой на G , совместимой с компактно-открытой топологией. При этом метрика d порождает биинвариантную внутреннюю метрику D на G , совпадающую с финслеровой внутренней метрикой на G , определяемой $\text{Ad}(G)$ -инвариантной чебышевской нормой $\|\cdot\|$ на $\mathfrak{g}$.

Эта теорема и ее доказательство являются упрощенными версиями теоремы 6.8 для римановых многообразий и ее доказательства.

Используя введенные обозначения, нетрудно получить формулу, удобную для вычисления чебышевской нормы.

Предложение 6.27. Справедлива следующая формула для чебышевской нормы элемента $X \in \mathfrak{g}$:

$$\|X\| = \max_{a \in G} \nu(x) (\text{pr} (\text{Ad}(a)(X))). \quad (6.27)$$

В случае однородного риманова пространства (M, μ) рассмотрим некоторые $\text{Ad}(H)$ -инвариантное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ и $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$, а также $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональную прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, где модуль $\mathfrak{p}$ может быть отождествлен с $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, а $\mu(x)$ — с ограничением $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{p}$. Через $|\cdot|$ обозначим норму на $\mathfrak{p}$, порождаемую скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Тогда ограничения $(\cdot, \cdot)$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на произвольный $\text{Ad}(H)$ -инвариантный и $\text{Ad}(H)$ -неприводимый подмодуль $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ пропорциональны друг другу (иногда бывает удобно в качестве $\langle \cdot, \cdot \rangle$ рассмотреть невырожденную $\text{Ad}(G)$ -инвариантную квадратичную форму на $\mathfrak{g}$, которая не является скалярным произведением). Тогда формула (6.27) приобретает вид

$$\|X\| = \max_{a \in G} |(\text{Ad}(a)(X))_{\mathfrak{p}}|, \quad (6.28)$$

где $Y_{\mathfrak{p}}$ означает $\mathfrak{p}$ -компоненту вектора $Y \in \mathfrak{g}$ (т. е. $Y_{\mathfrak{p}} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональная проекция Y на $\mathfrak{p}$).

Пусть G — компактная связная подгруппа группы $I(M)$ компактного метрического пространства (M, ρ) , а d — биинвариантная метрика (6.26) на G . Легко доказывается

Предложение 6.28. Пусть (M, ρ) — однородное компактное метрическое пространство, G — транзитивная подгруппа группы $I(M)$ с соответствующей биинвариантной метрикой d , $x \in M$ — произвольная точка. Тогда каноническая проекция $p : (G, d) \rightarrow (M, \rho)$, определенная формулой $p(g) = g(x)$, не увеличивает расстояний. При этом (M, ρ) является G - δ -однородным пространством тогда и только тогда, когда $p : (G, d) \rightarrow (M, \rho)$ является субметрией.

Теорема 6.22. Пусть (M, ρ) — компактное G - δ -однородное пространство с внутренней метрикой, где G — замкнутая подгруппа группы $(I(M), d)$. Тогда существует транзитивная на M линейно связная нормальная подгруппа G_1 в G такая, что ограничение метрики d на $G_1 \times G_1$ индуцирует (конечную) биинвариантную внутреннюю метрику $D = d_{\text{in}}$ на G_1 , (G_1, D) метрически полно и локально компактно, а $p : (G_1, D) \rightarrow (M, \rho)$ — субметрия.

◁ Определим множество $G_1 = \{g \in G : d_{\text{in}}(e, g) < \infty\}$. Известно, что (G_1, d_{in}) — линейно связное пространство с внутренней метрикой [2]. Функция d_{in} на $G \times G$ биинвариантна вследствие биинвариантности метрики d и удовлетворяет неравенству треугольника. Отсюда непосредственно следует, что $(G_1, D = d_{\text{in}})$ — нормальная подгруппа группы G с биинвариантной внутренней метрикой. Для доказательства локальной компактности и метрической полноты пространства (G_1, D) достаточно установить, что произвольный замкнутый шар $B(g, r)$, $r > 0$, в (G_1, D) компактен. Пусть g_n — произвольная последовательность элементов из $B(g, r)$. Тогда существует параметризованный пропорционально длине дуги путь $c_n(t)$, $0 \leq t \leq 1$, в (G_1, D) длины $< r + \frac{1}{n}$, соединяющий точки g и g_n . При этом длины любой части этого пути в (G_1, D) и (G, d) совпадают. Группа $(I(M), d)$ компактна вследствие компактности (M, ρ) , группа (G, d) компактна как замкнутая подгруппа компактной подгруппы $(I(M), d)$. Вследствие компактности (G, d) и теорем 4 и 5 в [2, с. 62] существует последовательность $n(k)$ такая, что пути $c_{n(k)}$ равномерно сходятся в (G, d) при $k \rightarrow +\infty$ к некоторому пути $c(t)$, $0 \leq t \leq 1$, причем длина пути c не превосходит нижнего предела

длин путей $c_{n(k)}$ (и, следовательно, r). Ясно, что тогда образ пути c лежит в $B(g, r) \subset (G_1, D)$ и $g_{n(k)} \rightarrow c(1)$, что и требовалось.

Остается доказать последнее утверждение, так как из него будет следовать транзитивность группы G_1 на M . Пусть $g \in G_1$, $p(g) = x$, $r > 0$. Очевидно, $p(B_D(g, r)) \subset B(x, r)$ вследствие предложения 6.28 и неравенства $d \leq d_{\text{in}}$. Мы докажем, что для каждой точки $y \in M$, где $\rho(x, y) = s > 0$, существует элемент $h \in G$ такой, что $p(h) = y$ и существует путь в (G, d) длины s , соединяющий элементы g и h . Ясно, что тогда $d_{\text{in}}(g, h) = d(g, h) = s = \rho(p(g) = x, p(h) = y)$, и противоположное включение $B(x, r) \subset p(B_D(g, r))$ будет доказано.

Так как (M, ρ) — компактное пространство с внутренней метрикой, то существует (кратчайший) путь $x = x(t)$, $0 \leq t \leq s$ в (M, ρ) с концами x и y длины s , параметризованный длиной дуги. Пусть $n = 2^k$, где k — произвольное натуральное число. Вследствие предложения 6.28 можно последовательно найти элементы $g_{n,i} \in G$, $i = 0, 1, \dots, n$, такие, что $g_{n,0} = g$, $p(g_{n,i}) = x\left(\frac{i}{n}s\right)$, и $d(g_{n,i+1}, g_{n,i}) = \frac{1}{n}s$ для $i = 0, \dots, n-1$. Тогда, так как отображение $p : (G, d) \rightarrow (M, \rho)$ не увеличивает расстояний, вследствие неравенства треугольника для d

$$d(g_{n,i}, g_{n,j}) = \rho\left(x\left(\frac{i}{n}s\right), x\left(\frac{j}{n}s\right)\right) = \frac{|i-j|}{n}s$$

для всех $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Используя компактность группы (G, d) и диагональный процесс Кантора, можно найти такую подпоследовательность $n(l)$, что каждая последовательность вида $g_{n(l), i(l)}$, где $i(l)/n(l)$ — фиксированное двоично-рациональное число $r \in [0, 1]$ для достаточно больших l , сходится к единственной точке $g(rs)$. Тогда $d(g(rs), g(r's)) = |r - r'|s$ для любых двоично-рациональных чисел $r, r' \in [0, 1]$. Пользуясь компактностью группы (G, d) , можно единственным образом доопределить по непрерывности $g(t)$ для всех вещественных чисел $t \in [0, s]$. Положим $h = g(s)$. Ясно, что $g(0) = g$, $p(g(t)) = x(t)$ для всех $t \in [0, s]$, в частности, $p(h) = y$; $d(g(t), g(t')) = |t - t'|$ для всех $t, t' \in [0, s]$. Так что $g(t)$, $t \in [0, s]$, — искомый путь. $\triangleright$

Вопрос 9. Является ли (G_1, D) компактной группой?

Предложение 6.29. Непрерывный биективный гомоморфизм локально компактной топологической группы со второй аксиомой

счетности на группу с левоинвариантной полной метрикой является гомеоморфизмом, т. е. изоморфизмом топологических групп.

◁ Пусть $q : G \rightarrow (H, \text{dist})$ — рассматриваемый гомоморфизм, и U — открытая окрестность единицы в G с компактным замыканием $\bar{U}$. Утверждается, что $q(\bar{U})$ содержит некоторое непустое открытое подмножество V в (H, dist) . Иначе множество $q(\bar{U})$ замкнуто (как непрерывный образ компактного множества в хаусдорфовом пространстве) и нигде не плотно в (H, dist) . Вследствие теоремы Линделефа T^2 -пространство G можно покрыть не более чем счетным семейством множеств $g_n U$, а значит $g_n \bar{U}$. Тогда полное метрическое пространство (H, dist) покрывается не более чем счетным семейством нигде не плотных множеств $q(g_n \bar{U})$, т. е. является множеством первой категории. Это противоречит теореме Бэра — Хаусдорфа, утверждающей, что непустое полное метрическое пространство является множеством второй категории. На основании упражнения 18 из [26, с. 44], q — изоморфизм топологических групп. ▷

Теорема 6.23. Если в условиях теоремы 6.22 (M, ρ) является многообразием, то (G_1, D) — группа Ли с биинвариантной (внутренней) финслеровой метрикой, а (M, ρ) — многообразие с (внутренней) G_1 -инвариантной финслеровой метрикой.

◁ При указанных условиях группа $(I(M), d)$ является компактной группой Ли. По теореме Картана [1] ее замкнутая подгруппа G с индуцированной из $I(M)$ топологией также является компактной группой Ли.

Тождественное отображение $\text{id} : (G_1, D) \rightarrow (G_1, d) \subset G$ не увеличивает расстояний и поэтому непрерывно. Следовательно, подгруппа $G_1 \subset G$, будучи непрерывным образом линейно связной группы (G_1, D) , также линейно связна (по терминологии из [42], дугообразно связна). Тогда по теореме Кураниси — Ямабе [238], (G_1, τ) есть подгруппа Ли группы Ли G , где базу топологии τ составляют компоненты линейной связности открытых множеств индуцированной в G_1 из G топологии. Ясно, что группа Ли (G_1, τ) линейно связна и отображение $\text{Id} : (G_1, D) \rightarrow (G_1, \tau)$ по-прежнему является непрерывным гомоморфизмом. Группа Ли (G_1, τ) допускает совместимую с τ левоинвариантную риманову внутреннюю метрику dist . Вследствие локальной компактности (G_1, τ) метрика dist полная. В доказательстве теоремы 6.22 было установлено, что каждый замкнутый шар в

(G_1, D) компактен. Поэтому (G_1, D) является T^2 -пространством. Таким образом, гомоморфизм $\text{id} : (G_1, D) \rightarrow (G_1, \text{dist})$ удовлетворяет всем условиям предложения 6.29, следовательно, является изоморфизмом топологических групп, и (G_1, D) — группа Ли с биинвариантной внутренней метрикой.

Согласно работе [9], каждая биинвариантная внутренняя метрика на группе Ли, в частности, D на G_1 финслерова. Это значит, что на TG_1 существует норма F , инвариантная относительно дифференциалов всех левых и правых сдвигов на группе Ли G_1 такая, что $D(g, h)$, где $g, h \in G_1$, равно точной нижней границе длин измеряемых относительно F непрерывных кусочно непрерывно дифференцируемых путей в G_1 , соединяющих точки g и h .

Из доказанных утверждений следует, что M естественно отождествляется с однородным пространством G_1/H , где $H \subset G_1$ — (компактный) стабилизатор точки $x \in M$, а субметрия $\rho : (G_1, D) \rightarrow (M, \rho)$ (см. теорему 6.22) — с канонической гладкой проекцией $\rho : (G_1, \tau) \rightarrow G_1/H$. Пусть $\mathfrak{g}_1 = (G_1)_e$, $\mathfrak{h} = H_e$ — алгебры Ли группы Ли (G_1, τ) и ее компактной подгруппы Ли H . Применим те же обозначения, что и прежде, с заменой G и $\mathfrak{g}$ на G_1 и $\mathfrak{g}_1$ соответственно. Так как ρ — субметрия для внутренних метрик D и ρ , причем финслерова метрика D определяется нормой F на TG_1 , то нетрудно показать, что ρ также является финслеровой метрикой, определяемой единственной G_1 -инвариантной нормой ν на $T(G_1/H)$ с условием, что $\rho\mathfrak{g} : (\mathfrak{g}_1, F(e)) \rightarrow (\mathfrak{g}_1/\mathfrak{h}, \nu(x))$ — линейная субметрия конечномерных нормированных пространств. $\triangleright$

Непосредственным следствием теорем 6.21, 6.22 и 6.23 является

Теорема 6.24. *В условиях и обозначениях теоремы 6.23 и ее доказательства, группа G_1 является компонентой связности единицы компактной группы Ли G , а потому сама является компактной группой Ли. При этом $F(e) = \|\cdot\|$.*

Примером δ -однородного многообразия является произвольная группа Ли с биинвариантной внутренней (необходимо финслеровой) метрикой, так как левые и правые сдвиги G перемещают все элементы группы на одно и то же расстояние. Приведем теперь несколько характеристик компактных δ -однородных многообразий с внутренней метрикой.

Теорема 6.25. Компактное однородное многообразие $(G/H = M, \rho)$ с G -инвариантной внутренней метрикой, связной транзитивной группой Ли G и стабилизатором H G - δ -однородно тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух эквивалентных условий:

- 1) (M, ρ) G -нормально в обобщенном смысле;
- 2) (M, ρ) изометрично однородному финслерову многообразию (M, ν) и для каждого касательного вектора $v \in M_x$ в произвольной точке x из M существует такое порождающее 1-параметрическую подгруппу из G векторное поле X на M , что $X(x) = v$, $\nu(X(x)) = \max_{y \in M} \nu(X(y))$.

При этом (M, ρ) является однородным римановым многообразием, если оно G -нормально в обычном смысле.

◁ Необходимость условий 1) и 2) следует из доказанных ранее в разделе 6.10 теорем. Достаточность условия 1) доказана в следствии 6.5. Нетрудно видеть, что условие 2) эквивалентно тому, что проекция $\text{pr} : (\mathfrak{g}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \nu(x))$ является линейной субметрией нормированных векторных пространств. Отсюда, аналогично доказательству последнего утверждения теоремы 6.22, можно вывести условие 1). Если пространство нормально в обычном смысле, то получаем линейную субметрию $\text{pr} : (\mathfrak{g}, F(e)) \rightarrow (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \nu(x))$ с евклидовой нормой $F(e)$. Следовательно, $\nu(x)$ — евклидова норма, а (M, ν) — однородное риманово многообразие. ▷

Аналогично теореме 6.25, устанавливается доказанная ранее для риманова случая (см. теорему 6.11)

Теорема 6.26. Компактное многообразие $(G/H, \rho)$ с G -инвариантной внутренней метрикой G - δ -однородно для группы Ли G тогда и только тогда, когда ρ индуцируется G -инвариантной нормой ν на G/H и существует $\text{Ad}(G)$ -инвариантное центрально симметричное (относительно нуля) выпуклое тело B в $\mathfrak{g}$ такое, что

$$P(B) = \{v \in \mathfrak{p} \mid \nu(v) \leq 1\},$$

где $P : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{p}$ есть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональная проекция. В качестве B можно взять

$$C = \{w \in \mathfrak{g} \mid \|w\| \leq 1\},$$

где $\|\cdot\|$ — $\text{Ad}(G)$ -инвариантная (возможно, неевклидова) чебышевская норма (6.27) на $\mathfrak{g}$.

ПРИМЕР 24. Пусть $(G/H, \rho)$ в формулировке теоремы 6.26 является нормальным однородным римановым многообразием относительно биинвариантной римановой метрики на G , порожденной $\text{Ad}(G)$ -инвариантным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$. Тогда в качестве B можно также рассмотреть $\tilde{C} = \{w \in \mathfrak{g} \mid \sqrt{\langle w, w \rangle} \leq 1\}$. В этом случае, $P(C) = P(\tilde{C})$.

Из доказанных в этом разделе результатов следует, что компактное G - δ -однородное многообразие (M, ρ) с внутренней метрикой G_0 - δ -однородно для компоненты связности единицы G_0 группы G , в частности, $I(M)_0$ - δ -однородно. Поэтому в качестве G можно рассматривать только связные транзитивные группы Ли движений многообразия (M, ρ) .

Как показывают рассмотренные далее примеры чебышевских норм, множество $N(M, G)$ в начале раздела может содержать более одного элемента. Поэтому большой интерес вызывает

ЗАДАЧА 2. Изучить множество $N(M, G)$ и его свойства (в том числе свойства чебышевских норм на $\mathfrak{g}$) для G -(δ -)однородных финслеровых (в частности, римановых) многообразий. Особый интерес представляет случай $G = I(M)_0$.

На основании нерастягиваемости субметрии и теоремы 6.26 получаем

Предложение 6.30. Если $|\cdot| \in N(M, G)$, то $\|\cdot\| \leq |\cdot|$. Если $|\cdot|_1, |\cdot|_3 \in N(M, G)$ и $|\cdot|_1 \leq |\cdot|_2 \leq |\cdot|_3$ для $\text{Ad}(G)$ -инвариантной нормы $|\cdot|_2$ на $\mathfrak{g}$, то $|\cdot|_2 \in N(M, G)$. Выпуклая линейная комбинация единичных шаров норм из $N(M, G)$, а также выпуклая оболочка их объединения дают единичный шар некоторой нормы из $N(M, G)$.

6.11. Вычисление чебышевских норм для некоторых многообразий

Этот раздел мотивирован изложенными ранее результатами об обобщенных нормальных однородных римановых многообразиях и основан на публикации [19].

В силу того, что явное вычисление чебышевской нормы для конкретных однородных римановых многообразий является весьма непростой задачей, естественно решить эту задачу для некоторых классов «простых» многообразий. В §§ 6.11.3, 6.11.4 и 6.11.5 вычисляются чебышевские нормы для евклидовых сфер, сфер Берже и

инвариантных римановых метрик на пространстве $SO(5)/U(2)$. По ходу изложения становятся более понятными связи между свойствами инвариантных норм на компактных алгебрах Ли и спектральными свойствами матриц из различных представлений алгебр Ли (см. о спектральных свойствах [35, 45, 170, 169, 184] и библиографию в последних трех указанных источниках).

6.11.1. Об эллипсоидах Левнера — Джона. Для исследования свойств чебышевских норм полезным является понятие эллипсоида Левнера. Напомним, что эллипсоидом Левнера (в другой терминологии эллипсоидом Левнера — Джона) для выпуклого компактного тела $U \subset \mathbb{R}^n$ называется эллипсоид максимального объема, содержащийся в U . Хорошо известно, что существует единственный эллипсоид с таким свойством [79, 145, 171].

Ниже мы приведем некоторые известные свойства эллипсоидов Левнера для единичных шаров конечномерных нормированных пространств.

Теорема 6.27 [145, 171]. Пусть $X = (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ — нормированное векторное пространство, и пусть $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение, порождаемое эллипсоидом Левнера для единичного шара U в пространстве X . Тогда найдутся натуральное число s , $n \leq s \leq n(n+1)/2$, векторы $x_i \in X$ и положительные числа λ_i , $1 \leq i \leq s$, для которых выполнены следующие соотношения:

$$|x_i|^2 = (x_i, x_i) = 1 \quad \text{при } 1 \leq i \leq s;$$

$$x = \sum_{i=1}^s \lambda_i (x, x_i) x_i \quad \text{для всех } x \in X.$$

При этом $\sum_{i=1}^s \lambda_i = n$, и справедливо неравенство

$$|x|^2 \leq (x, x) \leq n|x|^2 \quad \text{для всех } x \in X.$$

В дополнение к этой теореме сформулируем еще один результат из [145].

Теорема 6.28 [145, 171]. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ норму $|\cdot|_1$ такую, что (в обозначениях предыдущей теоремы) для каждого $1 \leq i \leq s$ выполнено равенство $|x_i|_1 = 1$, и для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $|x|_1 \leq \sqrt{(x, x)}$. Тогда эллипсоид Левнера для единичного

шара нормы $|\cdot|_1$ совпадает с единичным шаром евклидовой нормы $\sqrt{(x, x)}$ (и с эллипсоидом Левнера для единичного шара нормы $|\cdot|$).

Рассмотрение примера 24 приводит к следующим естественным вопросам.

Вопрос 10. Пусть $(G/H, \mu)$ — однородное риманово многообразие, нормальное относительно биинвариантной метрики на G , определяемой $\text{Ad}(G)$ -инвариантным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{t}$ — некоторая подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, U — замкнутый единичный шар чебышевской нормы $\|\cdot\|$ в $\mathfrak{t}$, E — эллипсоид Левнера для U . Верно ли, что $E = \{x \in \mathfrak{t} \mid \langle x, x \rangle \leq 1\}$?

Вопрос 11. Пусть W -инвариантное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{t}$ (W — группа Вейля для $\mathfrak{t}$) определяется эллипсоидом Левнера, вписанным в выпуклое множество $\{v \in \mathfrak{t}, \|v\| \leq 1\}$. Верно ли, что для (единственного) распространения $(\cdot, \cdot)$ до $\text{Ad}(G)$ -инвариантного скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ и соответствующей скалярному произведению $(\cdot, \cdot)$ биинвариантной римановой метрики η на G , каноническая проекция $p : (G, \eta) \rightarrow (G/H, \mu)$ является римановой субмерсией?

Отметим, что ответы на оба поставленных вопроса в общем случае отрицательны, как следует из примеров, рассматриваемых в § 6.11.4.

6.11.2. Еще раз об инвариантных римановых метриках на сферах. Здесь мы приведем некоторую дополнительную информацию о классификации инвариантных римановых метрик на сферах. Транзитивные и эффективные действия (связных) групп Ли на сферах приведены в таблице 3. Среди инвариантных метрик на указанных пространствах можно постараться выделить все δ -однородные. Такими, например, будут все нормальные метрики. Интересно выяснить наличие δ -однородных метрик, отличных от нормальных.

Отметим, что в случаях изотропно неприводимых пространств инвариантными метриками на них являются лишь нормальные.

Согласно результатам работы [242], все инвариантные метрики на пространствах $U(n)/U(n-1)$, $Sp(n) \times Sp(1)/Sp(n-1) \times Sp(1)$ и $S^{15} = Spin(9)/Spin(7)$ являются слабо симметрическими. Инвариантная метрика на пространстве $Sp(n) \times U(1)/Sp(n-1) \times U(1)$ слабо симметрична тогда и только тогда, когда $Sp(n) \times U(1)$ не является ее полной связной группой движений.

Из работ [240, 241, 242] известно, что все инвариантные метрики на пространствах $U(n)/U(n-1)$ и $Sp(n) \times Sp(1)/Sp(n-1) \times Sp(1)$ являются естественно редутивными. Также в [242] сказано, что среди инвариантных метрик на пространстве $Spin(9)/Spin(7)$ естественно редутивной является лишь одна (порожденная формой Киллинга на $Spin(9)$).

Теперь более подробно остановимся на описании $U(n)$ -инвариантных метрик на S^{2n-1} , следуя работе [241]. Пространство таких метрик (с точностью до подобия) одномерно. Получить все такие метрики можно с помощью расслоения Хопфа

$$S^1 \rightarrow S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}.$$

Зафиксируем на S^{2n-1} каноническую метрику с постоянной секционной кривизны 1 и для каждого $A > 0$ рассмотрим на S^{2n-1} метрику g_A , получающуюся растяжением в A раз метрики сдв вдоль слоев S^1 указанного выше расслоения Хопфа. Семейство метрик g_A при $A > 0$ совпадает (с точностью до подобия) с семейством $U(n)$ -инвариантных метрик на S^{2n-1} . Полной связной группой движений метрики g_A при $A \neq 1$ является группа $U(n)$.

Отметим, что метрика g_A имеет положительную секционную кривизну тогда и только тогда, когда $A \in (0, 2/\sqrt{3})$. Метрика g_A является нормальной (естественно редутивной) относительно $U(n)$ тогда и только тогда, когда $A \in (0, \sqrt{\frac{n}{2(n-1)}})$ (соответственно, когда $A \neq \sqrt{\frac{n}{2(n-1)}}$). При $A = \sqrt{\frac{n}{2(n-1)}}$ метрика g_A является $SU(n)$ -нормальной. Таким образом, при $A > \sqrt{\frac{n}{2(n-1)}}$ и $A \neq 1$ метрика g_A не является нормальной относительно любой группы движений.

В частности, при $A \in (1, 2/\sqrt{3})$ метрика g_A является естественно редутивной (относительно $U(n)$), слабо симметрической и имеет положительную секционную кривизну.

ЗАМЕЧАНИЕ 39. Можно показать (см. предложение 6.33 для случая $n = 2$), что метрика g_A является δ -однородной лишь при $A \in (0, \sqrt{\frac{n}{2(n-1)}}]$ и при $A = 1$. Таким образом, метрика g_A является δ -однородной тогда и только тогда, когда она нормальна (либо относительно $U(n)$, либо относительно $SU(n)$, либо относительно $SO(2n)$).

Таким образом, существует риманово многообразие (M, ρ) такое, что оно одновременно однородно, естественно редуктивно, слабо симметрично, имеет положительную секционную кривизну, но не является при этом δ -однородным.

6.11.3. Чебышевская норма для евклидовых сфер. Рассмотрим сферу S^{m-1} с канонической метрикой μ постоянной секционной кривизны 1. Полной связной группой движений для такой сферы является группа $G = SO(m)$. Рассмотрим вложение $H = SO(m-1) \subset SO(m)$, заданное следующим образом: $A \mapsto \text{diag}(1, A)$ для $A \in SO(m-1)$. Тогда S^{m-1} естественным образом отождествляется с $SO(m)/SO(m-1)$, а рассматриваемая метрика μ на сфере (с точностью до пропорциональности) является нормальной относительно биинвариантной метрики на $SO(m)$, определяемой скалярным произведением $\langle X, Y \rangle = -1/2 \text{trace}(XY)$ для $X, Y \in \mathfrak{so}(m)$. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(m)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(m-1)$ (в соответствии с рассматриваемым вложением), $\mathfrak{p}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Напомним, что алгебра $\mathfrak{so}(m)$ естественным образом отождествляется с алгеброй Ли киллинговых полей на S^{m-1} . При этом $\text{Ad}(G)$ -инвариантная чебышевская норма $\|\cdot\|$ на $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(m)$ определяется непосредственно римановой метрикой μ на $M = S^{m-1}$ по формуле

$$\|X\| = \max_{x \in M} \sqrt{\mu(x)(X(x), X(x))}$$

для киллингова векторного поля X на (M, μ) . Наша ближайшая цель более явно описать эту норму.

Теорема 6.29. Чебышевская норма на алгебре Ли $\mathfrak{so}(m)$, $m \geq 2$, соответствующая евклидовой сфере $S^{m-1} = SO(m)/SO(m-1)$, вычисляется по формуле

$$\|X\| = \max_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i|,$$

где λ_i , $1 \leq i \leq m$, — собственные числа матрицы X .

◁ Пусть $X \in \mathfrak{so}(m)$, тогда согласно предложению 6.27 получаем

$$\|X\|^2 = \max_{A \in SO(m)} \langle \text{Ad}(A)(X)|_{\mathfrak{p}}, \text{Ad}(A)(X)|_{\mathfrak{p}} \rangle.$$

Пусть матрица A имеет элемент a_{ij} , а матрица X — элемент x_{ij} на (i, j) -ом месте, понятно, что матрица A^{-1} имеет на (i, j) -ом месте элемент a_{ji} . Рассмотрим $\tilde{X} = \text{Ad}(A)(X) = AXA^{-1}$. Непосредственные

вычисления показывают, что элементы последней матрицы выражаются по формуле

$$\tilde{x}_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} x_{kl}.$$

Теперь нетрудно понять, что

$$\begin{aligned} \langle \text{Ad}(A)(X)|_{\mathfrak{p}}, \text{Ad}(A)(X)|_{\mathfrak{p}} \rangle &= \langle \tilde{X}|_{\mathfrak{p}}, \tilde{X}|_{\mathfrak{p}} \rangle = \\ &= \sum_j (\tilde{x}_{1j})^2 = \sum_{j,k,l,p,q} a_{1k} a_{jl} a_{1p} a_{jq} x_{kl} x_{pq}. \end{aligned}$$

Поскольку $\sum_j a_{jl} a_{jq} = \delta_{lq}$ (символ Кронекера), то

$$\langle \text{Ad}(A)(X)|_{\mathfrak{p}}, \text{Ad}(A)(X)|_{\mathfrak{p}} \rangle = \sum_{k,l,p} a_{1k} a_{1p} x_{kl} x_{pl} = \sum_{k,p} a_{1k} a_{1p} v_{kp},$$

где через v_{ij} обозначен (i, j) -ый элемент матрицы $V = XX^t = -X^2$.

Пусть теперь $m = 2n$ или $m = 2n + 1$, где $n \geq 1$. Рассмотрим векторы $F_i = E_{(2i-1)(2i)} - E_{(2i)(2i-1)}$ для $i = 1, \dots, n$. Здесь через E_{ij} обозначена $(m \times m)$ -матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением элемента на месте (i, j) , равного единице. Линейная оболочка векторов F_i является стандартной подалгеброй Картана $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{so}(m)$ [1].

Рассмотрим теперь вектор вида $X = u_1 F_1 + u_2 F_2 + \dots + u_n F_n$ и вычислим его чебышевскую норму. Заметим, что матрица $V = -X^2$ в этом случае диагональна:

$$V = \text{diag}(u_1^2, u_1^2, u_2^2, u_2^2, \dots, u_n^2, u_n^2, (0)),$$

поэтому

$$\langle \text{Ad}(A)(X)|_{\mathfrak{p}}, \text{Ad}(A)(X)|_{\mathfrak{p}} \rangle = \sum_{k,p} a_{1k} a_{1p} v_{kp} = \sum_k a_{1k}^2 v_{kk},$$

где $v_{(2i-1)(2i-1)} = v_{(2i)(2i)} = u_i^2$ при $1 \leq i \leq n$. Поскольку $\sum_k a_{1k}^2 = 1$, и для любого набора чисел a_{1k} с таким условием существует матрица $A \in SO(m)$, у которой первая строка составлена из этих чисел, мы получаем, что

$$\begin{aligned} \|X\|^2 &= \max_{A \in SO(m)} \langle \text{Ad}(A)(X)|_{\mathfrak{p}}, \text{Ad}(A)(X)|_{\mathfrak{p}} \rangle = \\ &= \max_{A \in SO(m)} \sum_k a_{1k}^2 v_{kk} = \max_{1 \leq i \leq n} \{u_i^2\} \end{aligned}$$

для вектора $X = u_1 F_1 + u_2 F_2 + \dots + u_n F_n$. Следовательно,

$$\|X\| = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|.$$

В силу $\text{Ad}(SO(m))$ -инвариантности чебышевской нормы, эта же формула справедлива для всех $X \in so(m)$. $\triangleright$

Следствие 6.11. *Единичным шаром чебышевской нормы на стандартной подалгебре Картана $\mathfrak{t}$ алгебр Ли $\mathfrak{so}(2n)$ и $\mathfrak{so}(2n+1)$ является куб*

$$K = \left\{ u_1 F_1 + u_2 F_2 + \dots + u_n F_n \mid \max_{1 \leq i \leq n} |u_i| \leq 1 \right\},$$

а единичной сферой — поверхность этого куба.

В силу очевидных симметрий куба эллипсоидом Левнера для него является множество (шар)

$$B = \left\{ u_1 F_1 + u_2 F_2 + \dots + u_n F_n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 \leq 1 \right\}.$$

Это множество в точности совпадает с множеством

$$\{X \in \mathfrak{t} \mid \langle X, X \rangle \leq 1\}.$$

Таким образом, скалярное произведение на $so(m)$, соответствующее эллипсоиду Левнера, порождает биинвариантную метрику на $SO(m)$, относительно которой естественная проекция $SO(m)$ на $S^{m-1} = SO(m)/SO(m-1)$ является римановой субмерсией (см. вопросы 10 и 11).

Отметим, что при $m = 2$ и $m = 3$ чебышевская норма совпадает с евклидовой нормой $\sqrt{-1/2 \text{trace}(X^2)}$. При $m \geq 4$ ситуация иная. Ниже мы докажем, что при $m \geq 4$ единичная сфера чебышевской нормы не является гладкой. Нам понадобится

Лемма 6.16. *Пусть собственные числа матрицы $Q \in so(m)$ по модулю не превосходят единицы. Тогда для любого элемента этой матрицы справедливо неравенство $|q_{ij}| \leq 1$.*

$\triangleleft$ Понятно, что матрица $-Q^2$ симметрична, все ее собственные числа вещественны и не превосходят единицы по модулю. Тогда матрица $I + Q^2$ неотрицательна в операторном смысле. В частности,

неотрицательны все ее диагональные элементы. Таким образом, для произвольного i мы имеем неравенство

$$1 \geq \sum_{j=1}^m q_{ij}^2,$$

откуда и следует лемма. $\triangleright$

Предложение 6.31. При $m \geq 4$ единичная сфера чебышевской нормы на $so(m)$ не является гладкой.

$\triangleleft$ Произвольный линейный функционал на $so(m)$ имеет вид

$$l(X) = \text{trace}(X \cdot A)$$

для некоторой матрицы $A \in so(m)$. Рассмотрим теперь вектор $Y = F_1 + F_2$ (здесь как раз использовано условие $m \geq 4$). Рассмотрим также функционалы $l_1(X) = \text{trace}(X \cdot F_1)$ и $l_2(X) = \text{trace}(X \cdot F_2)$. Пусть U и S — единичный шар и единичная сфера рассматриваемой чебышевской нормы соответственно. Понятно, что

$$\text{trace}(X \cdot F_1) = -2x_{12}, \quad \text{trace}(X \cdot F_2) = -2x_{34}.$$

По лемме 6.16 мы получаем неравенства $l_1(X) \geq -2$ и $l_2(X) \geq -2$ для любых X из единичного шара U . В то же время очевидно равенство $l_1(Y) = l_2(Y) = -2$. Так как рассматриваемые функционалы линейно независимы, мы получили в точке $Y \in S$ две опорные гиперплоскости к шару U . Значит, в точке Y сфера S не является гладкой. $\triangleright$

Замечание 40. Вышеприведенный пример показывает, что единичная сфера нормированного векторного пространства $(\mathfrak{g}, \|\cdot\|)$, вообще говоря, не является гладкой. Очевидно также, что замкнутый единичный шар в этом примере не является строго выпуклым.

6.11.4. Чебышевская норма для сфер Берже. Рассмотрим однородное пространство $G/H = U(2)/S^1 = (SU(2) \times S^1)/S^1$, в котором вложение группы изотропии задается следующим образом:

$$H = S^1 = \text{diag}(S^1) \subset S^1 \times S^1 \subset SU(2) \times S^1,$$

где вложение второго множителя S^1 в произведение $S^1 \times S^1$ — тождественное отображение, а вложение первого множителя определя-

ется некоторым фиксированным вложением $i : S^1 \rightarrow SU(2)$. Поскольку все окружности (максимальные торы) в группе $SU(2)$ сопряжены друг с другом посредством внутренних автоморфизмов группы $SU(2)$, то по существу речь идет о единственном однородном пространстве (с точностью до изоморфизма однородных пространств), которое диффеоморфно трехмерной сфере S^3 .

В алгебре Ли $\mathfrak{g} = su(2) \oplus \mathbb{R}$ выберем векторы $e_1, \dots, e_4$ таким образом, что $e_i \in su(2)$ при $1 \leq i \leq 3$, $e_4 \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{h} = LH = \text{Lin}\{e_3 + e_4\}$, $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$. Зафиксируем на $\mathfrak{g}$ $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, относительно которого векторы e_i ($i = 1, \dots, 4$) образуют ортонормированный базис. Для вещественного $\alpha \neq 0$ рассмотрим на $\mathfrak{g}$ невырожденную $\text{Ad}(G)$ -инвариантную квадратичную форму

$$(\cdot, \cdot)_\alpha = \langle \cdot, \cdot \rangle|_{su(2)} + \alpha \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathbb{R}}.$$

Рассмотрим теперь $\mathfrak{p}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ относительно $(\cdot, \cdot)_\alpha$. При $\alpha \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ ограничение $(\cdot, \cdot)_\alpha$ на $\mathfrak{p}$ задает G -естественно редуктивную метрику ρ_α на рассматриваемом пространстве G/H , и эта метрика является G -нормальной при положительных α . Отметим также, что G является полной связной группой движений для соответствующих однородных римановых многообразий (см., например, [241]).

ЗАМЕЧАНИЕ 41. Инвариантными метриками, порожденными скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_\alpha$ при всевозможных $\alpha \neq 0$, исчерпываются все $U(2)$ -инвариантные метрики на S^3 (с точностью до подобия), за исключением биинвариантных метрик (которые имеют большую группу движений). Известно также, что метрика ρ_α подобна $U(2)$ -инвариантной метрике g_A на S^3 (описание которой дано в § 6.11.2) при $A^2 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ [241]. Напомним, что метрика g_A имеет положительную секционную кривизну тогда и только тогда, когда $A \in (0, 2/\sqrt{3})$. Римановы многообразия (S^3, g_A) при таких значениях A называются сферами Берже. Отметим, что значениям $A > 1$ соответствуют отрицательные α .

Далее мы опишем чебышевскую норму $\|\cdot\|_\alpha$ на $\mathfrak{g}$, порождаемую $(G/H, \rho_\alpha)$. Согласно предложению 6.27 для элемента $V \in \mathfrak{g}$ имеем

$$\|V\|_\alpha = \max_{a \in G} |\text{Ad}(a)(V)_\mathfrak{p}|_\alpha,$$

где через $|\cdot|_\alpha$ обозначена евклидова норма на $\mathfrak{p}$, порожденная скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_\alpha$.

Отметим, что любое сохраняющее ориентацию ортогональное (относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$) преобразование алгебры Ли $su(2)$ является ее внутренним автоморфизмом.

Согласно теореме 2.26 нам достаточно получить значения чебышевской нормы на векторах из некоторой картановской подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$. Зафиксируем $\mathfrak{k} = \text{Lin}\{e_3, e_4\}$ — картановскую подалгебру в $\mathfrak{g}$. Пусть $V = xe_3 + ye_4 \in \mathfrak{k}$.

Теорема 6.30. Для чебышевской нормы вектора $V = xe_3 + ye_4 \in \mathfrak{k}$ справедливо равенство

$$\|V\|_\alpha = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} (|x| + |y|)$$

при $\alpha \in (-\infty, -1)$ и равенство

$$\|V\|_\alpha = \begin{cases} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} (|x| + |y|) & \text{при } |\alpha y| \geq |x|, \\ \sqrt{x^2 + \alpha y^2} & \text{при } |\alpha y| \leq |x| \end{cases}$$

при $\alpha \in (0, \infty)$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая

Лемма 6.17. Пусть $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + \frac{\alpha}{\alpha+1}(s-z)^2$ при некотором вещественном s и при $\alpha \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$, и пусть $M(t, s)$ — максимальное значение этой функции при ограничении $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, где t — фиксированное вещественное число. Тогда

$$M(t, s) = \frac{\alpha}{\alpha+1} (|t| + |s|)^2$$

для $\alpha \in (-\infty, -1)$ и

$$M(t, s) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha+1} (|t| + |s|)^2 & \text{при } |\alpha s| \geq |t|, \\ t^2 + \alpha s^2 & \text{при } |\alpha s| \leq |t| \end{cases}$$

для $\alpha \in (0, \infty)$.

◁ Понятно, что

$$M(t, s) = \max_{|z| \leq |t|} \varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = t^2 - z^2 + \frac{\alpha}{\alpha+1} (s-z)^2 = -\frac{1}{\alpha+1} z^2 - \frac{2\alpha}{\alpha+1} sz + t^2 + \frac{\alpha}{\alpha+1} s^2.$$

Функция $\varphi(z)$ имеет единственную критическую точку $z_0 = -\alpha s$. Отметим, что

$$\begin{aligned} \varphi(-|t|) &= \frac{\alpha}{\alpha+1} (|t|+s)^2, \quad \varphi(|t|) = \frac{\alpha}{\alpha+1} (|t|-s)^2, \quad \varphi(z_0) = t^2 + \alpha s^2, \\ \max \{ \varphi(-|t|), \varphi(|t|) \} &= \frac{\alpha}{\alpha+1} (|t| + |s|)^2. \end{aligned}$$

Если $\alpha < -1$, то очевидно

$$M(t, s) = \max \{ \varphi(-|t|), \varphi(|t|) \} = \frac{\alpha}{\alpha+1} (|t| + |s|)^2,$$

поскольку функция $\varphi(z)$ в этом случае выпукла вниз.

Если же $\alpha > 0$, функция $\varphi(z)$ выпукла вверх и достигает абсолютного максимума на $\mathbb{R}$ в точке z_0 . Следовательно, своего максимума на отрезке $[-|t|, |t|]$ она достигает либо в критической точке z_0 (если $|z_0| \leq |t|$), либо в одном из концов отрезка (если $|z_0| \geq |t|$). Разбирая эти два варианта, получаем лемму. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.30. Рассмотрим вектор

$$\tilde{V} := \text{Ad}(a)(V) = l_1 e_1 + l_2 e_2 + l_3 e_3 + l_4 e_4$$

для некоторого $a \in U(2)$. Понятно, что $l_4 = y$, а $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = x^2$. Далее, поскольку векторы

$$e_1, e_2, \tilde{e}_3 := -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}} e_3 + \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}} e_4$$

образуют ортонормированный базис относительно $(\cdot, \cdot)_\alpha$ в $\mathfrak{p}$, то

$$|\tilde{V}_\mathfrak{p}|^2 = l_1^2 + l_2^2 + \frac{\alpha}{\alpha+1} (q - l_3)^2.$$

Отметим, что для любой тройки вещественных чисел (l_1, l_2, l_3) , связанных условием $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = x^2$, можно подобрать такое $a \in U(2)$, что

$$\text{Ad}(a)(V) = \pm l_1 e_1 + l_2 e_2 + l_3 e_3 + y e_4.$$

Используя вышеприведенные выкладки и лемму 6.17, легко получаем теорему. $\triangleright$

Пусть U_α — единичный шар нормы $\|\cdot\|_\alpha$ на подалгебре Картана $\mathfrak{t}$. При $\alpha > 0$ рассмотрим также эллипс

$$E_\alpha = \{V = xe_3 + ye_4 \in \mathfrak{t} \mid x^2 + \alpha y^2 \leq 1\},$$

т. е. множество векторов в $\mathfrak{t}$, имеющих длину ≤ 1 относительно евклидовой нормы, индуцированной скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_\alpha$. Кроме того, нам будут полезны множества

$$K_\alpha = \left\{ V = xe_3 + ye_4 \in \mathfrak{t} \mid \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(|x| + |y|) \leq 1 \right\},$$

$$B_\alpha = \left\{ V = xe_3 + ye_4 \in \mathfrak{t} \mid x^2 + y^2 \leq \frac{\alpha+1}{2\alpha} \right\}.$$

Отметим, что $U_\alpha \subset K_\alpha$ (и даже $U_\alpha = K_\alpha$ при $\alpha < -1$), а при $\alpha > 0$ выполнены включения

$$E_\alpha \subset U_\alpha, \quad B_\alpha \subset K_\alpha.$$

Более того, круг B_α является эллипсоидом Левнера в квадрате K_α .

Предложение 6.32. Пусть $\alpha > 1$, тогда эллипсоидом Левнера для U_α является B_α .

$\triangleleft$ Нетрудно убедиться в том, что при $\alpha > 1$ имеется включение $B_\alpha \subset U_\alpha$. Действительно, координаты точек пересечения $\partial(E_\alpha) \cap \partial(B_\alpha)$ удовлетворяют неравенству $|\alpha y| \geq |x|$. Пользуясь определением U_α , легко убедиться в справедливости приведенного включения. Далее, B_α является эллипсоидом Левнера для U_α , поскольку B_α является эллипсоидом Левнера для большего множества K_α . $\triangleright$

Замечание 42. Это предложение показывает, что ответ на вопрос 10 в общем случае отрицателен.

Произвольное $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$ имеет вид

$$(\cdot, \cdot)_{\beta, \gamma} = \beta \langle \cdot, \cdot \rangle|_{su(2)} + \gamma \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathbb{R}}$$

для некоторых положительных констант β и γ . Соответствующую биинвариантную риманову метрику на G обозначим через $\bar{\rho}_{\beta, \gamma}$.

Зафиксируем некоторое $\alpha > 0$ и рассмотрим естественную проекцию

$$\pi_{\alpha,\beta,\gamma} : (G, \bar{\rho}_{\beta,\gamma}) \rightarrow (G/H, \rho_\alpha).$$

Справедлива следующая

Теорема 6.31. *Проекция $\pi_{\alpha,\beta,\gamma}$ является субметрией тогда и только тогда, когда $\beta = 1$ и $\gamma = \alpha$.*

◁ То, что при $\beta = 1$ и $\gamma = \alpha$ отображение $\pi_{\alpha,\beta,\gamma}$ является субметрией, очевидно.

Предположим теперь, что $\pi_{\alpha,\beta,\gamma}$ — субметрия. Тогда субметрией является и индуцированное отображение касательных пространств

$$\tilde{\pi}_{\alpha,\beta,\gamma} : (\mathfrak{g}, (\cdot, \cdot)_{\beta,\gamma}) \rightarrow (\mathfrak{p} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}, (\cdot, \cdot)_\alpha).$$

Отметим, что при проекции $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ вектор

$$V = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$$

переходит в вектор

$$\pi(V) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} (x_4 - x_3) \tilde{e}_3,$$

причем, как отмечалось выше, векторы

$$e_1, e_2, \tilde{e}_3 = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}} e_3 + \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}} e_4$$

образуют ортонормированный базис относительно $(\cdot, \cdot)_\alpha$ в $\mathfrak{p}$. Вектор e_1 при проекции π неподвижен, а $\pi^{-1}(e_1) = e_1 + \mathfrak{h}$. Поскольку $\tilde{\pi}_{\alpha,\beta,\gamma}$ — субметрия, то по необходимости выполняется равенство $\beta = 1$.

Покажем теперь, что $\gamma = \alpha$. Должен существовать вектор $V \in \mathfrak{g}$ такой, что $\pi(V) = \tilde{e}_3$, и $(V, V)_{1,\gamma} \leq 1$. Понятно, что $V = te_3 + se_4$ для некоторых вещественных t и s , и должны выполняться соотношения

$$t^2 + \gamma s^2 \leq 1, \quad \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} (s - t) = 1.$$

Таким образом,

$$t = s - \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

и

$$(1 + \gamma)s^2 - 2\sqrt{\frac{\alpha + 1}{\alpha}}s + \frac{1}{\alpha} \leq 0.$$

Дискриминант квадратного трехчлена в последнем неравенстве обязан быть неотрицательным, откуда следует $\alpha \geq \gamma$.

Далее, любой вектор $V = te_3 + se_4$ с условием $t^2 + \gamma s^2 = 1$ должен проектироваться в вектор $\pi(V)$ такой, что $(\pi(V), \pi(V))_\alpha \leq 1$, т. е. должно выполняться неравенство $\frac{\alpha}{\alpha+1}(s-t)^2 \leq 1$. Рассмотрим $t = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma(\gamma+1)}}$ и $s = -\frac{1}{\sqrt{\gamma(\gamma+1)}}$, тогда $\frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{\gamma+1}{\gamma} \leq 1$, что эквивалентно неравенству $\alpha \leq \gamma$. Таким образом, если $\pi_{\alpha, \beta, \gamma}$ — субметрия, то $\beta = 1$ и $\gamma = \alpha$. $\triangleright$

Вернемся теперь к случаю $\alpha > 1$. Рассмотрим $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, единичным шаром которого на $\mathfrak{k}$ является эллипс B_α (эллипсоид Левнера для U_α). Нетрудно понять, что это скалярное произведение совпадает с $(\cdot, \cdot)_{\eta, \eta}$ при $\eta = \sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$, а $\bar{\rho}_{\eta, \eta}$ — биинвариантная метрика на G , порожденная этим скалярным произведением. Как показано выше, естественная проекция

$$\pi_{\alpha, \eta, \eta} : (G, \bar{\rho}_{\eta, \eta}) \rightarrow (G/H, \rho_\alpha)$$

не является субметрией.

ЗАМЕЧАНИЕ 43. Приведенное рассуждение показывает, что ответ на вопрос 11 в общем случае отрицателен.

В заключение докажем следующее предложение (см. замечания 39 и 41).

Предложение 6.33. *Однородное риманово многообразие $(G/H, \rho_\alpha)$ при $\alpha < -1$ не является δ -однородным.*

$\triangleleft$ Как было показано ранее, для вектора $V = xe_3 + ye_4 \in \mathfrak{k}$ при $\alpha < -1$ справедливо равенство

$$\|V\|_\alpha = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} (|x| + |y|).$$

Если теперь $W = \sum_{i=1}^4 x_i e_i$, то, как нетрудно проверить,

$$\|W\|_\alpha = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + |x_4| \right).$$

Если $(G/H, \rho_\alpha)$ является δ -однородным, то проекция

$$\tilde{\pi}_\alpha : (\mathfrak{g}, \|\cdot\|_\alpha) \rightarrow (\mathfrak{p} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}, |\cdot|_\alpha)$$

должна быть субметрией. Как уже отмечалось, при естественной проекции $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ вектор $W = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$ переходит в вектор

$$\pi(W) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} (x_4 - x_3) \tilde{e}_3,$$

а $\pi^{-1}(e_1) = e_1 + \mathfrak{h}$. Теперь осталось отметить, что $|e_1|_\alpha = \sqrt{(e_1, e_1)_\alpha} = 1$, в то время как

$$\min_{u \in \mathfrak{h}} \|e_1 + u\|_\alpha = \|e_1\|_\alpha = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} > 1$$

при $\alpha < -1$. Таким образом, $\tilde{\pi}_\alpha$ не является субметрией, а $(G/H, \rho_\alpha)$ не является δ -однородным при $\alpha < -1$. $\triangleright$

6.11.5. Чебышевская норма для инвариантных метрик на $SO(5)/U(2)$. Как уже не раз отмечалось, $SO(5)$ -инвариантная метрика μ_{x_1, x_2} на однородном пространстве $M = SO(5)/U(2)$ является обобщенной нормальной однородной и при этом не является нормальной однородной тогда и только тогда, когда $x_1 < x_2 < 2x_1$. Ниже мы вычислим чебышевские нормы на алгебре Ли $so(5)$, соответствующие однородным римановым многообразиям $(M = SO(5)/U(2), \mu_{x_1, x_2})$ при $2x_1 \neq x_2$ (при $2x_1 = x_2$ полная связная группа движений $(M = SO(5)/U(2), \mu_{x_1, x_2})$ локально изоморфна группе $SO(6)$).

Описание $(M = SO(5)/U(2), \mu_{x_1, x_2})$ есть в примере 16. Напомним, что это однородное пространство таково, что $U(2) \subset SO(4) \subset SO(5)$, а пары $(SO(5), SO(4))$, $(SO(4), U(2))$ являются симметрическими неприводимыми. Рассмотрим $\text{Ad}(SO(5))$ -инвариантное скалярное произведение $\langle A, B \rangle = -1/2 \text{trace}(A \cdot B)$ на $so(5)$. Матрицы $A + \sqrt{-1}B \in u(2)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix},$$

вложены в $so(4)$ посредством

$$A + \sqrt{-1}B \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

для получения симметрической пары $(so(4), u(2))$. Также используется вложение $A \mapsto \text{diag}(A, 0)$ алгебры $so(4)$ в $so(5)$. Далее рассмотрим естественное $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ортогональное разложение:

$$\mathfrak{g} = so(5) = so(4) \oplus \mathfrak{p}_1 = u(2) \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2,$$

где

$$u(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c & a & d & 0 \\ -c & 0 & d & b & 0 \\ -a & -d & 0 & c & 0 \\ -d & -b & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathfrak{p}_1 = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ -k & -l & -m & -n & 0 \end{pmatrix}; \quad k, l, m, n \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathfrak{p}_2 = \left\{ Y = \begin{pmatrix} 0 & e & 0 & f & 0 \\ -e & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & -e & 0 \\ -f & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e, f \in \mathbb{R} \right\},$$

и модули $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ являются $\text{Ad}(U(2))$ -инвариантными и $\text{Ad}(U(2))$ -неприводимыми. Ясно, что $\langle X, X \rangle = k^2 + l^2 + m^2 + n^2$ для $X \in \mathfrak{p}_1$ и $\langle Y, Y \rangle = 2e^2 + 2f^2$ для $Y \in \mathfrak{p}_2$.

Рассмотрим теперь $SO(5)$ -инвариантную риманову метрику $\mu = \mu_{x_1, x_2}$ на $SO(5)/U(2)$, порождаемую скалярным произведением

$$(\cdot, \cdot) = x_1 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_1} + x_2 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_2}$$

на $\mathfrak{p}$ для некоторых положительных чисел x_1 и x_2 . Далее мы остановимся на случае $x_2 \neq 2x_1$, поскольку в случае $x_2 = 2x_1$ полная связная группа движений риманова многообразия $(M = SO(5)/U(2), \mu_{x_1, x_2})$ локально изоморфна группе $SO(6)$.

Сначала докажем два вспомогательных утверждения. Предварительно условимся о некоторых обозначениях. Пусть $E_{i,j}$ — (5×5) -матрица, у которой (i, j) -ый элемент равен 1, а все остальные элементы

нулевые. Для произвольных $1 \leq i < j \leq 5$ положим $F_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$. Рассмотрим подпространство $\mathfrak{q} = \mathbb{R} \cdot F_{1,5} \oplus \mathbb{R} \cdot (F_{1,4} - F_{2,3}) \subset \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2$.

Предложение 6.34. Для произвольного вектора $V \in \mathfrak{p}$ существует $a \in H = U(2)$ такой, что $\text{Ad}(a)(V) \in \mathfrak{q}$.

⟨ Пусть $V = X + Y$, где $X \in \mathfrak{p}_1$ и $Y \in \mathfrak{p}_2$. Группа $\text{Ad}(U(2))$ действует транзитивно на единичной сфере в $\mathfrak{p}_1$. Поэтому мы можем считать, что $X = bF_{1,5}$ для некоторого $b \in \mathbb{R}$. Имеем $Y = c_1(F_{1,2} - F_{3,4}) + c_2(F_{1,4} - F_{2,3})$ для некоторых вещественных c_1 и c_2 . Отметим, что $[F_{2,4}, X] = 0$. Таким образом, X инвариантен относительно $\text{Ad}(a)$, где $a = \exp(tF_{2,4})$. С другой стороны, $\text{Ad}(a)(Y) = \tilde{c}_1(F_{1,2} - F_{3,4}) + \tilde{c}_2(F_{1,4} - F_{2,3}) \in \mathfrak{p}_2$, где $\tilde{c}_1 = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$, $\tilde{c}_2 = c_2 \cos(t) - c_1 \sin(t)$. Для подходящего $t \in \mathbb{R}$ мы получаем $\tilde{c}_1 = 0$. Следовательно, $\text{Ad}(a)(V) = bF_{1,5} + \tilde{c}_2(F_{1,4} - F_{2,3}) \in \mathfrak{q}$. ▷

Предложение 6.35. Вектор $W = X + Y + Z$, где $X + Y \in \mathfrak{q}$, $X \in \mathfrak{p}_1$, $Y \in \mathfrak{p}_2$ и $Z \in \mathfrak{h} = \mathfrak{u}(2)$, является нетривиальным геодезическим вектором на $(SO(5)/U(2), \mu)$, $x_2 \neq x_1$, $x_2 \neq 2x_1$, тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $W = bF_{1,5} + \frac{x_2}{x_1} cF_{1,4} + \frac{x_2 - 2x_1}{x_1} cF_{2,3}$ для некоторых $b \neq 0$, $c \neq 0$;
- 2) $W = d(F_{1,4} - F_{2,3}) + a_1(F_{1,2} + F_{3,4}) + a_2(F_{1,4} + F_{2,3}) + a_3(F_{1,3} - F_{2,4})$ для некоторых $d \neq 0$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$;
- 3) $W = eF_{1,5} + fF_{2,4}$ для некоторых $e \neq 0$ и $f \in \mathbb{R}$.

⟨ Рассмотрим $W = X + Y + Z$, где $X = bF_{1,5} \in \mathfrak{p}_1$, $Y = c(F_{1,4} - F_{2,3})$, и $Z = b_1(F_{1,2} + F_{3,4}) + b_2(F_{1,4} + F_{2,3}) + b_3F_{1,3} + b_4F_{2,4}$. Геодезичность вектора W (согласно предложению 6.14) равносильна выполнению равенств $[Z, Y] = 0$, $[X, Y] = x_1/(x_2 - x_1)[X, Z]$. Прямые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} [Z, Y] &= c(b_3 + b_4)(F_{1,2} - F_{3,4}), \quad [X, Y] = bcF_{4,5}, \\ [X, Z] &= b(b_1F_{2,5} + b_3F_{3,5} + b_2F_{4,5}). \end{aligned}$$

Если $b \neq 0$ и $c \neq 0$, то $b_1 = b_3 = b_4 = 0$ и $b_2 = \frac{x_2 - x_1}{x_1} c$. Если $b = 0$ и $c \neq 0$, то $b_4 = -b_3$. Если $b \neq 0$ и $c = 0$, то $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Предложение доказано. ▷

Обозначим через $\|\cdot\|_{x_1, x_2}$ чебышевскую норму на алгебре Ли $\mathfrak{so}(5)$, соответствующую однородному риманову многообразию $(M = SO(5)/U(2), \mu_{x_1, x_2})$.

Пусть $W \in \mathfrak{so}(5)$, тогда матрица $-W^2$ является симметричной и имеет собственные значения $0, \lambda^2, \lambda^2, \mu^2, \mu^2$, где $\mu \geq \lambda \geq 0$ (понят-

но, что λ и μ — модули соответствующих собственных чисел матрицы W). Поскольку норма $\|\cdot\|_{x_1, x_2}$ является $\text{Ad}(SO(5))$ -инвариантной, то, как нетрудно понять, ее значение на векторе W зависит лишь от значений λ и μ .

ЗАМЕЧАНИЕ 44. Далее в тексте мы неоднократно будем использовать введенные выше величины λ и μ без дополнительных комментариев.

Рассмотрим $O(W)$ — орбиту W в $so(5)$ относительно действия присоединенной группы $\text{Ad}(SO(5))$. Поскольку эта орбита компактна, существует $\widetilde{W} \in O(W)$ такой, что $(\widetilde{W}|_{\mathfrak{p}}, \widetilde{W}|_{\mathfrak{p}}) \geq (V|_{\mathfrak{p}}, V|_{\mathfrak{p}})$ для каждого $V \in O(W)$. Согласно определению чебышевской нормы мы получаем, что

$$\sqrt{(\widetilde{W}|_{\mathfrak{p}}, \widetilde{W}|_{\mathfrak{p}})} = \|W\|_{x_1, x_2}.$$

Векторы $\widetilde{W} \in O(W)$ с указанным свойством являются δ -векторами. Ясно, что множество δ -векторов инвариантно относительно действия подгруппы $\text{Ad}(U(2)) \subset \text{Ad}(SO(5))$. Для нахождения таких векторов нам будет полезна лемма 6.18, являющаяся очевидным следствием предложений 6.34 и 6.35.

Лемма 6.18. Пусть $x_2 \neq 2x_1$ и $x_2 \neq x_1$. Тогда для каждого $W \in so(5)$ существует δ -вектор $V \in O(W)$ такой, что его $\mathfrak{p}$ -компонента $V_{\mathfrak{p}}$ лежит в подпространстве

$$\mathfrak{q} = \mathbb{R} \cdot F_{1,5} \oplus \mathbb{R} \cdot (F_{1,4} - F_{2,3}) \subset \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2.$$

Если V — такой вектор, то он может иметь лишь одну из следующих трех форм:

- 1) $V = bF_{1,5} + \frac{x_2}{x_1} cF_{1,4} + \frac{x_2-2x_1}{x_1} cF_{2,3}$, где $b \neq 0$, $c \neq 0$;
- 2) $V = d(F_{1,4} - F_{2,3}) + a_1(F_{1,2} + F_{3,4}) + a_2(F_{1,4} + F_{2,3}) + a_3(F_{1,3} - F_{2,4})$, где $d \neq 0$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$;
- 3) $V = eF_{1,5} + fF_{2,4}$, где $e \neq 0$ и $f \in \mathbb{R}$.

Таким образом, мы получаем алгоритм для вычисления чебышевской нормы $W \in so(5)$. Определим подмножество матриц $M_{\lambda, \mu} \subset so(5)$ следующим образом:

$$M_{\lambda, \mu} = \{V \in so(5) \mid -V^2 \text{ имеет собственные значения } 0, \lambda^2, \lambda^2, \mu^2, \mu^2\}.$$

Тогда

$$\|W\|_{x_1, x_2} = \max \left\{ (V|_{\mathfrak{p}}, V|_{\mathfrak{p}}) \mid V \in M_{\lambda, \mu} \right\}.$$

При этом лемма 6.18 позволяет ограничиться лишь векторами V , имеющих одну из форм 1), 2) или 3) в ее формулировке.

Справедливость следующей леммы доказывается простыми вычислениями.

Лемма 6.19. 1) Пусть

$$V = bF_{1,5} + \frac{x_2}{x_1} cF_{1,4} + \frac{x_2 - 2x_1}{x_1} cF_{2,3},$$

где $b, c \in \mathbb{R}$. Тогда $(V_p, V_p) = x_1 b^2 + 2x_2 c^2$, а матрица $-V^2$ имеет собственные значения

$$0, \quad \frac{c^2(2x_1 - x_2)^2}{x_1^2}, \quad \frac{c^2(2x_1 - x_2)^2}{x_1^2}, \quad \frac{b^2 x_1^2 + c^2 x_2^2}{x_1^2}, \quad \frac{b^2 x_1^2 + c^2 x_2^2}{x_1^2}.$$

2) Пусть $V = d(F_{1,4} - F_{2,3}) + a_1(F_{1,2} + F_{3,4}) + a_2(F_{1,4} + F_{2,3}) + a_3(F_{1,3} - F_{2,4})$, где $d \neq 0$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Тогда $(V_p, V_p) = 2x_2 d^2$, а матрица $-V^2$ имеет собственные значения

$$0, \quad (|d| - s)^2, \quad (|d| - s)^2, \quad (|d| + s)^2, \quad (|d| + s)^2,$$

где $s = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

3) Пусть

$$V = eF_{1,5} + fF_{2,4},$$

где $e \neq 0$ и $f \in \mathbb{R}$. Тогда $(V_p, V_p) = x_1 e^2$, а матрица $-V^2$ имеет собственные значения

$$0, \quad e^2, \quad e^2, \quad f^2, \quad f^2.$$

Пользуясь этой леммой, нетрудно получить явное выражений для чебышевской нормы. Докажем сначала еще несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 6.20. Пусть $x_2 \neq 2x_1$ и $x_2 \neq x_1$. Тогда $\|W\|_{x_1, x_2}^2 = \max\{I_1, I_2, I_3\}$, где

$$I_1 = \begin{cases} x_1 \mu^2 + \frac{x_1 x_2}{2x_1 - x_2} \lambda^2 & \text{при } \mu \geq \frac{x_2}{|2x_1 - x_2|} \lambda, \\ 0 & \text{при } \mu < \frac{x_2}{|2x_1 - x_2|} \lambda; \end{cases}$$

$$I_2 = \frac{x_2}{2} (\lambda + \mu)^2; \quad I_3 = x_1 \mu^2.$$

◁ Леммы 6.18 и 6.19 предоставляют способ вычисления $\|W\|_{x_1, x_2}^2$. Для этого достаточно вычислить (V_p, V_p) для всех случаев, указанных в лемме 6.19, а затем взять максимальную среди полученных величин.

Рассмотрим случай 1) в лемме 6.19. В этом случае получаем два варианта: либо

$$\lambda^2 = \frac{c^2(2x_1 - x_2)^2}{x_1^2}, \quad \mu^2 = \frac{b^2x_1^2 + c^2x_2^2}{x_1^2},$$

либо

$$\mu^2 = \frac{c^2(2x_1 - x_2)^2}{x_1^2}, \quad \lambda^2 = \frac{b^2x_1^2 + c^2x_2^2}{x_1^2}.$$

Отметим, что вещественность b в этих двух вариантах эквивалентна выполнению неравенств

$$\mu \geq \frac{x_2}{|2x_1 - x_2|} \lambda \quad \text{и} \quad \lambda \geq \frac{x_2}{|2x_1 - x_2|} \mu$$

соответственно. Далее заметим, что

$$(V_p, V_p) = x_1\mu^2 + \frac{x_1x_2}{2x_1 - x_2} \lambda^2 \quad \text{и} \quad (V_p, V_p) = x_1\lambda^2 + \frac{x_1x_2}{2x_1 - x_2} \mu^2$$

для рассматриваемых вариантов.

Покажем теперь, что второй вариант при вычислении чебышевской нормы можно не принимать в расчет. Действительно, учитывая неравенства $\mu \geq \lambda$ и $\lambda \geq \frac{x_2}{|2x_1 - x_2|} \mu$, заключаем, что для «существенности» второго варианта должно выполняться неравенство $\frac{x_2}{|2x_1 - x_2|} \leq 1$, что эквивалентно неравенству $x_1 \geq x_2$.

Очевидно, что из $\lambda \geq \frac{x_2}{|2x_1 - x_2|} \mu$ следует $\mu \geq \frac{x_2}{|2x_1 - x_2|} \lambda$ и, кроме того, при $x_1 \geq x_2$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \left(x_1\mu^2 + \frac{x_1x_2}{2x_1 - x_2} \lambda^2 \right) - \left(x_1\lambda^2 + \frac{x_1x_2}{2x_1 - x_2} \mu^2 \right) = \\ & = \left(\frac{2x_2(x_1 - x_2)}{2x_1 - x_2} \right) (\mu^2 - \lambda^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом выборе x_1 и x_2 вектор, соответствующий второму варианту, не влияет на величину чебышевской нормы вектора W .

Рассмотрим случай 2) в лемме 6.19. В этом случае либо $|d| = (\lambda + \mu)/2$, либо $|d| = (\mu - \lambda)/2$. Следовательно,

$$(V_p, V_p) = \frac{x_2}{2} (\lambda + \mu)^2 \quad \text{или} \quad (V_p, V_p) = \frac{x_2}{2} (\mu - \lambda)^2.$$

В случае 3) леммы 6.19 должно быть либо $(e^2, f^2) = (\lambda^2, \mu^2)$, либо $(e^2, f^2) = (\mu^2, \lambda^2)$. Отсюда следует, что

$$(V_p, V_p) = x_1 \lambda^2 \quad \text{или} \quad (V_p, V_p) = x_1 \mu^2.$$

Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что $\frac{x_2}{2} (\lambda + \mu)^2 \geq \frac{x_2}{2} (\mu - \lambda)^2$ и $x_1 \lambda^2 \leq x_1 \mu^2$. $\triangleright$

Лемма 6.21. Если $2x_1 < x_2$, то для всех $\mu \geq \lambda \geq 0$ выполнено неравенство $I_2 \geq I_3$. Если $2x_1 > x_2$, то неравенство $I_2 \geq (\leq) I_3$ равносильно неравенству $\lambda \geq (\leq) \frac{\sqrt{2x_1x_2-x_2}}{x_2} \mu$.

$\triangleleft$ Понятно, что $2I_2 - 2I_3 = x_2 \lambda^2 + 2x_2 \lambda \mu + (x_2 - 2x_1) \mu^2$. Учитывая, что полином $x_2 t^2 + 2x_2 t + (x_2 - 2x_1)$ имеет корни $\frac{\sqrt{2x_1x_2-x_2}}{x_2}$ и $-\frac{\sqrt{2x_1x_2-x_2}}{x_2} < 0$, получаем оба утверждения леммы. $\triangleright$

Теорема 6.32. Пусть $2x_1 < x_2$, тогда для чебышевской нормы вектора W справедливо равенство

$$\|W\|_{x_1, x_2} = \sqrt{\frac{x_2}{2}} (\lambda + \mu).$$

Пусть $2x_1 > x_2 > x_1$, тогда для чебышевской нормы вектора W справедливо равенство

$$\|W\|_{x_1, x_2} = \begin{cases} \sqrt{x_1 \mu^2 + \frac{x_1 x_2}{2x_1 - x_2} \lambda^2} & \text{при } \mu \geq \frac{x_2}{2x_1 - x_2} \lambda, \\ \sqrt{\frac{x_2}{2}} (\lambda + \mu) & \text{при } \mu \leq \frac{x_2}{2x_1 - x_2} \lambda. \end{cases}$$

Пусть $x_1 \geq x_2$, тогда для чебышевской нормы вектора W справедливо равенство

$$\|W\|_{x_1, x_2} = \sqrt{x_1 \mu^2 + \frac{x_1 x_2}{2x_1 - x_2} \lambda^2}.$$

$\triangleleft$ Отметим, что

$$x_1 \mu^2 + \frac{x_1 x_2}{2x_1 - x_2} \lambda^2 - \frac{x_2}{2} (\lambda + \mu)^2 = \frac{2x_1 - x_2}{2} \left(\mu - \frac{x_2}{2x_1 - x_2} \lambda \right)^2.$$

Поэтому при $2x_1 < x_2$ выполняется неравенство $I_1 \leq I_2$. Кроме того, в этом случае $2I_2 = x_2(\lambda + \mu)^2 \geq 2x_1\mu^2 = I_3$. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

При условии $2x_1 > x_2 > x_1$ справедливо неравенство $\frac{x_2}{2x_1 - x_2} > 1$. Понятно, что при $\mu \geq \frac{x_2}{2x_1 - x_2} \lambda$ выполнены неравенства

$$I_1 - I_2 = \frac{2x_1 - x_2}{2} \left(\lambda - \frac{x_2}{2x_1 - x_2} \mu \right)^2 \geq 0 \quad \text{и} \quad I_1 \geq I_3.$$

Если же $\mu \leq \frac{x_2}{2x_1 - x_2} \lambda$, то, как легко проверить,

$$\lambda \geq \frac{2x_1 - x_2}{x_2} \mu \geq \frac{\sqrt{2x_1x_2} - x_2}{x_2} \mu.$$

Согласно лемме 6.21 в этом случае $I_2 \geq I_3$, что и доказывает второе утверждение теоремы.

Третье утверждение достаточно доказать при $x_2 \neq x_1$, а соответствующий результат для $x_2 = x_1$ получить с помощью предельного перехода. Отметим, что при $x_1 > x_2$ выполнено неравенство $0 < \frac{x_2}{2x_1 - x_2} < 1$. Поэтому не существует чисел $\mu \geq \lambda \geq 0$, связанных неравенством $\mu < \frac{x_2}{2x_1 - x_2} \lambda$. Далее, как и в предыдущем случае, получаем $I_1 \geq I_2$ и $I_1 \geq I_3$ для произвольных $\mu \geq \lambda \geq 0$, что и завершает доказательство теоремы. $\triangleright$

Отметим, что только при $x_2 = x_1$ чебышевская норма на $so(5)$ является евклидовой (в этом случае она порождается $\text{Ad}(SO(5))$ -инвариантным скалярным произведением $x_1 \langle \cdot, \cdot \rangle$ на $so(5)$), в то время как при остальных значениях параметров x_1 и x_2 норма $\| \cdot \|_{x_1, x_2}$ евклидовой не является.

Можно рассмотреть ограничение чебышевской нормы $\| \cdot \|_{x_1, x_2}$ на картановскую подалгебру $\mathfrak{k}$ алгебры Ли $so(5)$. В качестве таковой рассмотрим

$$\mathfrak{k} = \{ V = aF_{1,2} + bF_{3,4} \mid a, b \in \mathbb{R} \}.$$

Учитывая, что собственными значениями матрицы $-V^2 = -(aF_{1,2} + bF_{3,4})^2$ являются числа $0, a^2, b^2$ (два последних имеют кратность 2), из теоремы 6.32 сразу получаем

Следствие 6.12. При $2x_1 < x_2$ справедливо равенство

$$\|V\|_{x_1, x_2} = \sqrt{\frac{x_2}{2}} (|a| + |b|).$$

При $2x_1 > x_2 > x_1$ имеет место равенство

$$\|V\|_{x_1, x_2} = \begin{cases} \sqrt{x_1 \max\{a^2, b^2\} + \frac{x_1 x_2}{2x_1 - x_2} \min\{a^2, b^2\}}, \\ \max\{|a|, |b|\} \geq \frac{x_2}{2x_1 - x_2} \min\{|a|, |b|\}; \\ \sqrt{\frac{x_2}{2}} (|a| + |b|), \quad \max\{|a|, |b|\} \leq \frac{x_2}{2x_1 - x_2} \min\{|a|, |b|\}. \end{cases}$$

При $x_1 \geq x_2$ справедливо равенство

$$\|V\|_{x_1, x_2} = \sqrt{x_1 \max\{a^2, b^2\} + \frac{x_1 x_2}{2x_1 - x_2} \min\{a^2, b^2\}}.$$

Отметим также, что с помощью теорем 6.11 и 6.32 можно получить доказательство обобщенной нормальности римановых многообразий $(M = SO(5)/U(2), \mu_{x_1, x_2})$ при $x_1 < x_2 < 2x_1$, отличное от оригинального в [90].

ГЛАВА 7

ОДНОРОДНЫЕ ПО КЛИФФОРДУ — ВОЛЬФУ РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

В этой главе приводится полная изометрическая классификация односвязных однородных по Клиффорду — Вольфу римановых многообразий (см. определения 104 и 105), полученная в статье [88]. Нетрудно увидеть, что евклидовы пространства, нечетномерные круглые сферы, и группы Ли с биинвариантными римановыми метриками, а также прямые метрические произведения однородных по Клиффорду — Вольфу римановых пространств также однородны по Клиффорду — Вольфу. Основным результатом этой главы утверждает, что в односвязном случае верно и противоположное утверждение. Более точно,

Теорема 7.1 [88]. *Односвязное (связное) риманово многообразие однородно по Клиффорду — Вольфу тогда и только тогда, когда оно изометрично прямому метрическому произведению некоторого евклидова пространства, нечетномерных сфер постоянной секционной кривизны и односвязных компактных простых групп Ли с биинвариантными римановыми метриками (некоторые из этих сомножителей могут отсутствовать).*

Остальной материал этой главы связан с исследованием различных взаимосвязей между классом однородных по Клиффорду — Вольфу римановых многообразий и другими естественно определяемыми классами. В частности, в заключительном разделе получена классификация ограниченно однородных по Клиффорду — Вольфу римановых многообразий.

7.1. Предварительные сведения

Г. Фрейденталь классифицировал в статье [129] все индивидуальные переносы Клиффорда — Вольфа на симметрических пространствах. Заметим, что относительно немногие классические ри-

мановы пространства допускают 1-параметрические группы переносов Клиффорда — Вольфа. Например, известно, что среди неприводимых компактных односвязных симметрических пространств такими являются только нечетномерные сферы, пространства $SU(2m)/Sp(m)$, $m \geq 2$, и простые компактные группы Ли с биинвариантной римановой метрикой [232].

Рассмотрим некоторые примеры. Очевидно, каждое евклидово пространство $\mathbb{E}^n$ однородно по Клиффорду — Вольфу. Так как $\mathbb{E}^n$ можно трактовать как (коммутативную) аддитивную векторную группу с биинвариантным скалярным произведением, следующий пример можно рассматривать как обобщение.

ПРИМЕР 25. Пусть G — группа Ли с биинвариантной римановой (внутренней) метрикой ρ . В этом случае группы левых и правых сдвигов $L(G)$ и $R(G)$ состоят из изометрий Клиффорда — Вольфа в (G, ρ) . Поэтому (G, ρ) однородно по Клиффорду — Вольфу. Заметим также, что в статье [10] был доказан следующий результат: риманово многообразие (M, g) допускает транзитивную группу Γ переносов Клиффорда — Вольфа тогда и только тогда, когда оно изометрично группе Ли G с биинвариантной римановой метрикой.

ПРИМЕР 26. Каждая нечетномерная круглая сфера S^{2n-1} КВ-однородна. Действительно,

$$S^{2n-1} = \left\{ \xi = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{k=1}^n |z_k|^2 = 1 \right\}.$$

Тогда формула $\gamma(t)(\xi) = e^{it}\xi$ определяет 1-параметрическую группу переносов Клиффорда — Вольфа на S^{2n-1} с геодезическими окружностями в качестве орбит. Так как S^{2n-1} однородно и изотропно, любая геодезическая окружность — орбита некоторой 1-параметрической группы переносов Клиффорда — Вольфа, так что S^{2n-1} КВ-однородно. Заметим, что S^1 и S^3 можно рассматривать как группы Ли $SO(2)$ и $SU(2)$ с биинвариантными римановыми метриками.

Заметим также, что прямое метрическое произведение однородных по Клиффорду — Вольфу римановых многообразий само однородно по Клиффорду — Вольфу. С другой стороны, условие однородности по Клиффорду — Вольфу для римановых многообразий достаточно сильно. Поэтому есть надежда получить полную классификацию таких многообразий.

Нам будет нужно следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 110. Метрическое пространство с внутренней метрикой (X, d) называется *сильно однородным по Клиффорду — Вольфу*, если для любых двух точек $x, y \in X$ существует 1-параметрическая группа $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, переносов Клиффорда — Вольфа пространства (X, d) такая, что для достаточно малых $|t|$, $\gamma(t)$ сдвигает все точки в (X, d) на расстояние $|t|$, и $\gamma(s)(x) = y$, где $d(x, y) = s$.

Ясно, что каждое сильно однородное по Клиффорду — Вольфу пространство с внутренней метрикой однородно по Клиффорду — Вольфу, а однородное по Клиффорду — Вольфу пространство с внутренней метрикой ограничено однородно по Клиффорду — Вольфу (определение 107). Возникает естественный вопрос:

Вопрос 12. Являются ли эти три класса пространств попарно различными (в частности, в случае римановых многообразий)?

Из теорем 6.1 и 3.27 получаем следующую теорему.

Теорема 7.2. Если связное ограничено однородное по Клиффорду — Вольфу риманово многообразие симметрическое, то оно сильно однородно по Клиффорду — Вольфу.

7.2. Еще раз о киллинговых полях постоянной длины

Теперь докажем теорему, играющую ключевую роль в исследовании однородных по Клиффорду — Вольфу римановых многообразий и их обобщений.

Теорема 7.3. Для любого киллингова векторного поля Z постоянной длины на римановом многообразии (M, g) ,

$$(\nabla_Z R)(\cdot, Z)Z \equiv 0.$$

◁ Достаточно доказать, что $g((\nabla_Z R)(X, Z)Z, Y) = 0$ для любых гладких векторных полей X и Y на M . Из предложения 3.3 мы знаем, что

$$g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) = g(R(X, Z)Z, Y).$$

Поэтому

$$Z \cdot g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) = Z \cdot g(R(X, Z)Z, Y).$$

Далее, по предложению 3.3 мы получаем, что

$$\begin{aligned} Z \cdot g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) &= g(\nabla_Z \nabla_X Z, \nabla_Y Z) + g(\nabla_X Z, \nabla_Z \nabla_Y Z) = \\ &= g(R(Y, Z)Z, \nabla_Z X) + g(R(X, Z)Z, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} Z \cdot g(R(X, Z)Z, Y) &= g((\nabla_Z R)(X, Z)Z, Y) + \\ &+ g(R(\nabla_Z X, Z)Z, Y) + g(R(X, Z)Z, \nabla_Z Y) = \\ &= g((\nabla_Z R)(X, Z)Z, Y) + g(R(Y, Z)Z, \nabla_Z X) + g(R(X, Z)Z, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

Комбинируя полученные уравнения, получаем

$$g((\nabla_Z R)(X, Z)Z, Y) = 0,$$

что доказывает теорему. $\triangleright$

Заметим, что условие $(\nabla_Z R)(\cdot, Z)Z = 0$ означает, что для любой геодезической γ , являющейся интегральной кривой поля Z , производная каждого нормального поля Якоби вдоль γ также является нормальным полем Якоби (см. [21, разд. 2.33]).

7.3. Доказательство основного результата

Нам будет нужно следующее полезное предложение.

Предложение 7.1 [21, предложение 2.35]. *Если производная Леви-Чивита тензора кривизны R риманова многообразия (M, g) удовлетворяет условию $(\nabla_X R)(\cdot, X)X = 0$ для всех $X \in TM$, то (M, g) локально симметрично.*

Теперь, используя теорему 7.3, можно доказать следующую теорему.

Теорема 7.4. *Каждое ограниченно однородное по Клиффорду — Вольфу риманово многообразие (M, g) локально симметрично.*

$\triangleleft$ Согласно предложению 7.1 достаточно доказать, что для любого вектора $X \in M_x$ в некоторой фиксированной точке $x \in M$ $(\nabla_X R)(\cdot, X)X = 0$. По теореме 6.1 можно найти некоторое киллингово векторное поле Z постоянной длины на (M, g) такое, что $Z(x) = X$. По теореме 7.3 мы получаем $(\nabla_Z R)(\cdot, Z)Z = 0$ в каждой точке из M . В частности,

$$(\nabla_X R)(\cdot, X)X = (\nabla_{Z(x)} R)(\cdot, Z(x))Z(x) = 0. \triangleright$$

Предложение 7.2 [232, теорема 5.5.1]. Пусть M — односвязное компактное неприводимое симметрическое пространство, не изометрическое группе Ли с биинвариантной римановой метрикой. Если M допускает нетривиальное киллингово векторное поле постоянной длины, то M — нечетномерная сфера S^{2n-1} , $n \geq 3$, или $M = SU(2n)/Sp(n)$, $n \geq 3$.

◁ Предложение следует из теоремы 5.5.1 в [232], где доказано, что среди неприводимых компактных односвязных симметрических пространств только нечетномерные сферы, пространства $SU(2n)/Sp(n)$, $n \geq 3$, и компактные простые группы Ли с биинвариантными римановыми метриками допускают нетривиальные 1-параметрические группы переносов Клиффорда — Вольфа. Здесь мы даем несколько другое доказательство предложения 7.2.

Пусть G — компонента связности единицы полной группы изометрий пространства M . Рассмотрим 1-параметрическую группу изометрий $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$, порожденную полем X . Эта группа изометрий состоит из переносов Клиффорда — Вольфа в M вследствие теоремы 3.27. По лемме 3.5 Z_μ — централизатор потока μ в G — действует транзитивно на M . Ясно, что компонента связности единицы $K = K(Z_\mu)$ в Z_μ есть группа Ли, которая действует транзитивно на M и имеет недискретный центр (этот центр содержит $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$).

Заметим, что $M = G/H$ — однородное пространство, где H — подгруппа изотропии некоторой точки $x \in M$. Далее, вследствие предположений и точной гомотопической последовательности из доказательства леммы 4.4, G и H связны, так как M односвязно; G — простая компактная группа Ли.

В теореме 4.1 статьи [49] А. Л. Онищик классифицировал все связные собственные подгруппы K группы G , действующие транзитивно на однородном пространстве G/H , где G — простая компактная связная группа Ли, и H — ее связная замкнутая подгруппа. Если при этом K имеет недискретный центр, то из этой теоремы следует, что G/H — нечетномерная сфера или $G/H = SU(2n)/Sp(n)$, $n \geq 3$. Так как центр группы $K(Z_\mu)$ недискретный, то предложение доказано. ▷

Предложение 7.3. Пусть M — симметрическое пространство $SU(2n)/Sp(n)$, где $n \geq 3$. Тогда каждое киллингово вектор-

ное поле постоянной длины на M имеет вид $\text{Ad}(s)(tU)$, где $U = \sqrt{-1} \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -(2n-1)) \in \mathfrak{su}(2n)$, $s \in SU(2n)$, $t \in \mathbb{R}$. При этом M не является ограничено однородным по Клиффорду — Вольфу.

◁ Переформулируем вычисления на с. 89 из [232]. Согласно теореме 4.1 в [49] существует единственная с точностью до сопряжения в $SU(2n)$ связная подгруппа с не дискретным центром $K \subset SU(2n)$, действующая транзитивно на $M = SU(2n)/Sp(n)$ ($n \geq 3$). Это группа $SU(2n-1) \times S^1$, где $SU(2n-1)$ вложена в $SU(2n)$ как $A \rightarrow \text{diag}(A, 1)$ и $S^1 = \exp(tU)$, $t \in \mathbb{R}$, $U = \sqrt{-1} \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -(2n-1)) \in \mathfrak{su}(2n)$.

Если $SU(2n-1) \times S^1$ централизует киллингово поле $V \in \mathfrak{su}(2n)$, то очевидно $V = tU$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$. Ясно также, что каждое такое поле имеет постоянную длину на M , так как оно лежит в центре алгебры Ли связной группы Ли, действующей транзитивно на M . Это доказывает первую часть предложения.

Заметим, что $\dim(SU(2n)/Sp(n)) = (n-1)(2n+1)$. С другой стороны, можно легко вычислить размерность множества киллинговых полей постоянной длины на M . Действительно, это множество $\text{Ad}(SU(2n))(tU)$, орбита всех $tU \in \mathfrak{su}(2n)$ относительно присоединенного действия группы $SU(2n)$, $t \in \mathbb{R}$. Для каждого фиксированного $t \neq 0$ это $SU(2n)/S(U(2n-1) \cdot U(1))$, и $\dim(SU(2n)/S(U(2n-1) \cdot U(1))) = 4n-2$. Так как $(4n-2)+1 < (n-1)(2n+1) = \dim(M)$ для $n \geq 3$, M не ограничено однородно по Клиффорду — Вольфу. Иначе по теореме 6.1 для всех $x \in M$ и $U \in M_x$ существует киллингово векторное поле X постоянной длины на M такое, что $X(x) = U$, что невозможно вследствие вычисленных размерностей. ▷

Теперь можно доказать основной результат этой главы.

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1. Пусть M — односвязное однородное по Клиффорду — Вольфу риманово многообразие. По лемме 6.1 M полно. Поэтому вследствие теоремы 7.4 M — симметрическое пространство (см. [58]). Рассмотрим разложение де Рама

$$M = M_0 \times M_1 \times \dots \times M_k,$$

где M_0 — евклидово пространство, а другие M_i , $1 \leq i \leq k$, — односвязные компактные неприводимые симметрические пространства. По лемме 6.6 и следствию 3.1.4 в [232] (согласно которому произ-

вольный перенос Клиффорда — Вольфа f на M однозначно представляется в виде $f = (f_1, \dots, f_k)$, где f_j , $j = 1, \dots, k$, — переносы Клиффорда — Вольфа на M_j) каждое пространство M_i , $0 \leq i \leq k$, однородно по Клиффорду — Вольфу. Для доказательства необходимости остается применить предложения 7.2 и 7.3.

Достаточность следует из примеров 25, 26 и того, что прямое метрическое произведение односвязных однородных по Клиффорду — Вольфу пространств само односвязно и однородно по Клиффорду — Вольфу. $\triangleright$

7.4. Пространства Клиффорда — Киллинга

Следующее предложение очевидно.

Предложение 7.4. *Набор $\{X_1, \dots, X_l\}$ киллинговых векторных полей на римановом многообразии (M, g) образует базис некоторого векторного пространства $СК_l$ (над $\mathbb{R}$) киллинговых векторных полей постоянной длины тогда и только тогда, когда векторные поля $X_1, \dots, X_l$ линейно независимы и все скалярные произведения $g(X_i, X_j)$, $i, j = 1, \dots, l$, постоянны. При этом $СК_l$ допускает ортонормированный базис киллинговых векторных полей.*

Мы будем называть такое пространство $СК_l$, $l \geq 1$, *пространством Клиффорда — Киллинга* или просто *СК-пространством*. Ниже дается простой метод проверки условия $g(X, Y) = \text{const}$ для данных киллинговых векторных полей X, Y .

Лемма 7.1. *Пусть X и Y — киллинговы векторные поля на римановом многообразии (M, g) . Тогда точка $x \in M$ — критическая точка функции $x \mapsto g_x(X, Y)$ тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_X Y(x) = -\nabla_Y X(x) = \frac{1}{2}[X, Y](x).$$

$\triangleleft$ Так как $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, достаточно проверить, что x — критическая точка для $g(X, Y)$ тогда и только тогда, когда $\nabla_X Y(x) + \nabla_Y X(x) = 0$. Для каждого киллингова векторного поля W и любых гладких векторных полей U и V на (M, g) , $g(\nabla_U W, V) + g(U, \nabla_V W) = 0$ (см. 1) из предложения 3.1). Так как X и Y — киллинговы векторные поля, для любого гладкого векторного

поля Z получаем

$$\begin{aligned} 0 &= Z \cdot g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) = \\ &= -g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_X Y, Z) = -g(Z, \nabla_Y X + \nabla_X Y), \end{aligned}$$

откуда следует лемма. $\triangleright$

Следствие 7.1. Пусть X и Y — киллинговы векторные поля на римановом многообразии (M, g) . Тогда $g(X, Y) = \text{const}$ тогда и только тогда, когда

$$\nabla_X Y = -\nabla_Y X = \frac{1}{2}[X, Y].$$

В частности, киллингово векторное поле X имеет постоянную длину тогда и только тогда, когда $\nabla_X X = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 111. СК-пространства V и W на (M, g) называются (собственно) эквивалентными, если существует (сохраняющая ориентацию) изометрия f пространства (M, g) на себя такая, что $df(V) = W$.

Очень интересна следующая

Задача 3. Классифицировать все однородные римановы многообразия, допускающие нетривиальные СК-пространства. Для каждого такого многообразия классифицировать с точностью до (собственной) эквивалентности все (в частности максимальные по включению) возможные СК-пространства.

Эта трудная задача не рассматривалась в такой общей форме до публикации [88]. В следующих разделах мы увидим, что она тесно связана с некоторыми впечатляющими классическими и недавними результатами.

7.5. Римановы многообразия со свойством Киллинга

В статье [112] Д'Атри и Никерсон изучали римановы многообразия со свойством Киллинга.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 112 [112]. Говорят, что риманово многообразие (M, g) имеет свойство Киллинга, если для каждой точки в M в некоторой ее окрестности существует ортонормированный базис $\{X_1, \dots, X_n\}$ такой, что каждое X_i , $i = 1, \dots, n$, — киллингово векторное поле (локальная инфинитезимальная изометрия). Такой базис называется базисом Киллинга.

ЗАМЕЧАНИЕ 45. Мы будем называть также свойство из определения 112 «локальным свойством Киллинга», а риманово многообразие, имеющее глобально определенный базис Киллинга — «многообразием с глобальным свойством Киллинга». Заметим, что глобальный базис Киллинга на (M, g) определяет абсолютный параллелизм в смысле Картана и Схоутена [107]. На самом деле, даже в случае индефинитной метрики он определяет абсолютный параллелизм, совместимый с римановой структурой (см. [233, 234]).

Очевидно, каждая группа Ли с биинвариантной римановой метрикой имеет (глобальное) свойство Киллинга. Заметим, что обобщением свойства Киллинга является *дивергентное свойство*, которое здесь не рассматривается (см. детали в [112]).

Предложение 7.5 [112]. *Каждое риманово многообразие с локальным свойством Киллинга локально симметрично.*

◁ Мы докажем предложение методом, отличным от метода статьи [112]. По определению, для каждой точки x данного многообразия (M, g) существует базис Киллинга $\{X_1, \dots, X_n\}$ в некоторой окрестности U точки x . Так как $g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$, то для любых вещественных чисел a_i локальное векторное поле $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$ является локальным киллинговым полем постоянной длины. Как следствие, для любого вектора $v \in M_x$ существует киллингово поле Z постоянной длины в U такое, что $Z(x) = v$. Тогда вследствие доказательства теоремы 7.3, не требующего на самом деле глобального характера векторных полей, получаем, что $(\nabla_Z R)(\cdot, Z)Z(x) = 0$ или $(\nabla_v R)(\cdot, v)v = 0$. Вследствие предложения 7.1 (M, g) локально симметрично. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 46. Другое доказательство этого предложения дано в [233]. Многообразие (M, g) имеет (локально определенный) совместимый абсолютный параллелизм, определяемый локальным базисом Киллинга, поэтому оно локально симметрично по теореме 4.14 в [233].

Хорошо известно, что каждое (не обязательно полное) локально симметрическое риманово многообразие локально изометрично некоторому симметрическому пространству (см., например, [58]). Поэтому локальные свойства многообразий со свойством Киллинга можно обнаружить, изучая полные (односвязные) симметрические римановы многообразия.

Предложение 7.6. Каждое односвязное полное риманово многообразие (M, g) с локальным свойством Киллинга симметрическое, имеет глобальное свойство Киллинга и сильно однородно по Клиффорду — Вольфу.

◁ Так как (M, g) локально симметрично (вследствие предложения 7.5), полно и односвязно, то оно является симметрическим пространством (см., например, [58]). В частности, (M, g) вещественно аналитично. Для каждой точки x в данном многообразии (M, g) существует базис Киллинга $\{X_1, \dots, X_n\}$ в некоторой окрестности U точки x . Мы утверждаем, что этот (локальный) базис Киллинга единственным образом продолжается до глобального базиса Киллинга в (M, g) . Действительно, это следует из того, что каждое локально определенное киллингово векторное поле на (M, g) есть сужение глобального киллингова векторного поля (например, вследствие теорем 1 и 2 в [190] каждое локальное киллингово векторное поле в любом односвязном вещественно аналитическом римановом многообразии допускает единственное продолжение до киллингова векторного поля на всем многообразии).

Докажем последнее утверждение. Вследствие сказанного существует глобальный базис Киллинга $\{X_1, \dots, X_n\}$ на (M, g) . Это значит, что $g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$ для всех $1 \leq i, j \leq n$. Поэтому любая линейная комбинация векторных полей $X_1, \dots, X_n$ над $\mathbb{R}$ является киллинговым векторным полем постоянной длины. Вследствие полноты и теоремы 6.1 получаем, что (M, g) ограничено однородно по Клиффорду — Вольфу. Теперь достаточно применить первое утверждение предложения и теорему 7.2. ▷

Авторы статьи [112] пытались, но не смогли классифицировать односвязные полные римановы многообразия со свойством Киллинга (см. с. 407 непосредственно перед разделом 5 в [112]). Следующая теорема полностью решает эту задачу.

Теорема 7.5. Полное односвязное риманово многообразие (M, g) имеет свойство Киллинга тогда и только тогда, когда оно изометрично прямому метрическому произведению евклидова пространства, компактных односвязных простых групп Ли с биинвариантными римановыми метриками и круглых сфер S^7 (некоторые из этих сомножителей могут отсутствовать).

◁ Достаточность следует из хорошо известного факта, что каждый из упомянутых сомножителей имеет свойство Киллинга (см. также следующий раздел относительно круглой сферы S^7).

Докажем необходимость. Как следствие предложения 7.6 и теоремы 7.1 (M, g) должно иметь вид многообразий из теоремы 7.1. Но мы можем оставить только S^7 среди нечетномерных сфер по следующей причине. Нетрудно убедиться в том, что каждый сомножитель соответствующего произведения также имеет свойство Киллинга (см. [112, теорема 4.1]). Хорошо известно (см. также следствие 7.2 ниже), что только S^3 и S^7 имеют свойство Киллинга среди нечетномерных сфер. Но круглую сферу S^3 можно рассматривать как компактную односвязную простую группу Ли $SU(2)$ с некоторой биинвариантной римановой метрикой. Поэтому можно исключить и S^3 . ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 47. Теорема 7.5 также следует из первого утверждения предложения 9 и теоремы 9.1 в [234].

7.6. Результаты А. Гурвица и Й. Радона

А. Гурвиц поставил следующую задачу.

ЗАДАЧА 4. Для данного натурального числа m найти максимальное натуральное число $p = \rho(m)$ такое, что существует билинейная вещественная вектор-функция $z = (z_1, \dots, z_m) = z(x, y)$ вещественных векторов $x = (x_1, \dots, x_p)$ и $y = (y_1, \dots, y_m)$, удовлетворяющая уравнению

$$(x_1^2 + \dots + x_p^2)(y_1^2 + \dots + y_m^2) = z_1^2 + \dots + z_m^2 \quad (7.1)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^m$.

Используя некоторые эквивалентные формулировки, Й. Радон в [200] и А. Гурвиц в [144] независимо получили следующий ответ.

Теорема 7.6. Если $m = 2^{4\alpha+\beta}m'$, где $\beta = 0, 1, 2, 3$, α — неотрицательное целое число, и m' нечетно, то $\rho(m) = 8\alpha + 2^\beta$.

Дадим некоторые эквивалентные формулировки и следствия, следуя отчасти Й. Радону. Ясно, что каждую билинейную функцию $z = z(x, y)$ можно представить в виде

$$z = z(x, y) = \sum_{j=1}^p x_j (A_j y) = \left(\sum_{j=1}^p x_j A_j \right) y, \quad (7.2)$$

где A_j — $(m \times m)$ -матрицы, а z и y рассматриваются как вектор-столбцы. Полагая $x_i = \delta_{ji}$, $i = 1, \dots, p$, для фиксированного индекса j из $\{1, \dots, p\}$ и используя уравнение (7.1), можно легко увидеть, что

1) каждая A_j должна быть ортогональной матрицей.

С другой стороны, то же уравнение показывает, что

2) для каждого фиксированного $y \in \mathbb{R}^m$, векторы $A_j y$, $j = 1, \dots, p$, взаимно ортогональны в $\mathbb{R}^m$ и длины всех этих векторов равны $|y|$.

Как следствие, должно быть $p \leq m$. Наконец, уравнение (7.1) и последний вид уравнения (7.2) показывают, что

3) для каждого единичного вектора $x \in \mathbb{R}^p$ матрица $(\sum_{j=1}^p x_j A_j)$ ортогональна.

Последнее утверждение объясняет название статьи [200] и дает эквивалентную форму задачи 4, рассматривавшуюся Й. Радоном.

Теперь ясно, что если заменить каждую матрицу A_j в билинейной форме (7.2) матрицей $B_j = A_j A$, где A — фиксированная ортогональная $(m \times m)$ -матрица, то получится другая билинейная форма, также удовлетворяющая уравнению (7.1). Если взять $A = A_p^{-1}$ и обозначить B_j как A_j , то получится следующий вид формы (7.2):

$$z = z(x, y) = \sum_{j=1}^{p-1} x_j (A_j y) + x_p (Iy) = \left(\sum_{j=1}^{p-1} x_j A_j + x_p I \right) y. \quad (7.3)$$

Теперь, применяя свойства 1) и 2) для новой билинейной формы (7.3), получим, что все матрицы A_j , $j = 1, \dots, p-1$, в (7.3) должны быть одновременно ортогональны и кососимметричны (так как $A_j y \perp y = Iy$ для всех $y \in \mathbb{R}^m$) (отсюда следует, в частности, что $p \geq 2$ возможно только когда m четно). Теперь из теоремы 7.6, 1), 2) и последнего утверждения сразу следует

Теорема 7.7. *Некоторый нетривиальный набор векторных полей на S^{m-1} состоит из взаимно ортогональных единичных киллинговых векторных полей на S^{m-1} тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $X_j(y) = A_j y$, $y \in S^{m-1}$, $j = 1, \dots, p-1$, где $(m \times m)$ -матрицы A_j одновременно ортогональные и кососимметричные (поэтому m четно) берутся из уравнения (7.3), определяющего билинейную форму, удовлетворяющую уравнению (7.1). Максимальное число таких полей равно $\rho(m) - 1$ (см. теорему 7.6).*

Из теоремы 7.7 вытекает

Теорема 7.8. *Максимальная размерность l пространств Клиффорда — Киллинга CK_l на S^{m-1} равна $\rho(m) - 1$.*

Следствие 7.2. *Максимальная размерность l пространств Клиффорда — Киллинга CK_l на S^{m-1} равна $m - 1 > 0$ тогда и только тогда, когда $m \in \{2, 4, 8\}$. Как следствие, S^1 , S^3 и S^7 — все круглые сферы со свойством Киллинга.*

Заметим, что последний результат связан с существованием алгебр комплексных, кватернионных и кэлиевых чисел. Позднее Экман передоказал теорему Гурвица — Радона в [122]. Методы Радона и Гурвица дают сложные схемы действительного построения форм (7.3) для $p = \rho(m)$; их упростили Адамс, Лакс и Филлипс [69], а также Звенгровский [243], Балабаев [6] и Огникян [48]. Нужно также заметить, что Дж. Ф. Адамс доказал, что не существует $\rho(m)$ непрерывных ортонормированных (или, что эквивалентно, линейно независимых) касательных векторных полей на сфере S^{m-1} [68] (см. также [60, гл. 15, теорема 13.10]).

7.7. Пространства Клиффорда — Киллинга на сферах и алгебры и модули Клиффорда

В этом разделе мы продолжаем изучение пространств Клиффорда — Киллинга на сферах S^{m-1} с канонической римановой метрикой постоянной секционной кривизны 1. Как сказано ранее, эти пространства однородны по Клиффорду — Вольфу только когда m четно. Материал разделов 7.7, 7.8 и 7.9 тесно связан со статьями [228, 229], в особенности в отношении уравнений Гурвица и сфер Хелгасона.

Теорема 7.9. *Вещественные $(m \times m)$ -матрицы $u_1, u_2, \dots, u_l$, $l \geq 1$, определяют попарно ортогональные в каждой точке из S^{m-1} единичные киллинговы векторные поля $U_i(x) := u_i x, x \in S^{m-1}$ на S^{m-1} тогда и только тогда, когда*

$$u_i \in O(m) \cap so(m), \quad u_i^2 = -I, \quad i = 1, \dots, l, \quad (7.4)$$

$$u_i u_j + u_j u_i = 0, \quad i \neq j. \quad (7.5)$$

В этом случае m четно и $u_i \in SO(m)$.

◁ Векторные поля U_i являются единичными векторными полями на S^{m-1} тогда и только тогда, когда их можно представить в следующем виде: $U_i(x) = u_i x$, $x \in S^{m-1}$, где $u_i \in O(m) \cap so(m)$ (см. теорему 7.7). Из этого следует, что m четно, $(x, y) = (u_i x, u_i y) = -(u_i^2 x, y)$, и $u_i^2 = -I$ (здесь $(\cdot, \cdot)$ обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$).

Ясно, что при первом условии в (7.4) векторные поля U_i и U_j на S^{m-1} ортогональны тогда и только тогда, когда

$$((u_i + u_j)x, (u_i + u_j)x) = (u_i x, u_i x) + (u_j x, u_j x), \quad x \in S^{m-1},$$

что эквивалентно тождеству $(u_i u_j x, x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^m$, или $u_i u_j \in so(m)$, или

$$-(u_i u_j) = (u_i u_j)^t = u_j^t u_i^t = (-u_j)(-u_i) = u_j u_i,$$

т. е. (7.5).

Матрица $u_i \in O(m)$ кососимметрична тогда и только тогда, когда u_i ортогонально подобна некоторой матрице $u = \text{diag}(C, \dots, C)$, где $C \in O(2)$ кососимметрична. Отсюда следует, что $u_i \in SO(m)$. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 48. Согласно теореме 7.9 позже мы будем предполагать, что m четно и $m = 2n$.

Теорема 7.9 естественно приводит к понятию ассоциативных алгебр над полем $\mathbb{R}$ с образующими $e_1, \dots, e_l$ такими, что $e_i^2 = -1$, $e_i e_j + e_j e_i = 0$, $i \neq j$ (и каждое другое соотношение в алгебре есть следствие уже указанных). Такая алгебра Cl_l называется *алгеброй Клиффорда* (относительно отрицательно определенной квадратичной формы $-(y, y)$ на $\mathbb{R}^k$ и ортонормированного базиса $\{e_1, \dots, e_l\}$ в $(\mathbb{R}^k, (\cdot, \cdot))$). Эти алгебры включают алгебру $Cl_1 = \mathbb{C}$ комплексных чисел и алгебру $Cl_2 = \mathbb{H}$ кватернионов.

Остальные алгебры Клиффорда описываются так: $Cl_3 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, $Cl_4 = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)$, где алгебра $\mathbb{R}(2)$ порождена симметричными (2×2) -матрицами: $\text{diag}\{1, -1\}$ и матрицей перестановки векторов в каноническом базисе $\{e_1, e_2\}$ в $\mathbb{R}^2$. После этого можно применить «закон периодичности» $Cl_{k+4} = Cl_k \otimes_{\mathbb{R}} Cl_4$. Более детально см. в [60, 130].

Рассмотрим $L_{l, 2n}$ — алгебру линейных операторов (на $\mathbb{R}^{2n}$), порожденную операторами (матрицами) u_i , $i = 1, \dots, l \geq 1$. Из теоремы 7.9 следует, что $L_{l, 2n}$ — гомоморфный образ алгебры Клиффорда Cl_l . Легко увидеть, что ядро естественного гомоморфизма

$c : Cl_l \rightarrow L_{l,2n}$ является двусторонним идеалом в Cl_l . Данное выше описание алгебр Клиффорда показывает, что Cl_l , $l \neq 4k + 3$, не содержит собственных двусторонних идеалов, в то время как алгебра Клиффорда $Cl_l = Cl_{l-1} \oplus Cl_{l-1}$ содержит точно два собственных двусторонних идеала $A_{l,1}$ и $A_{l,2}$, каждый из которых изоморфен Cl_{l-1} , если $l = 4k + 3$. Поэтому в любом случае $L_{l,2n}$ изоморфна Cl_l или Cl_{l-1} (если $l \neq 4k + 3$, то $L_{l,2n}$ изоморфна Cl_l).

Теперь приведем пример, когда $L_{l,2n}$ не изоморфна Cl_l .

ПРИМЕР 27. Рассмотрим алгебру Ли $CK_3 \subset so(2n)$, где $2n = 4k$. В этом случае CK_3 — линейная оболочка векторов $u_1, u_2, u_3 := u_1 u_2$. Очевидно, алгебра $L_{3,2n}$ не изоморфна Cl_3 . Легко вычислить размерности обеих этих ассоциативных алгебр. Размерность у Cl_m , рассматриваемой как векторное пространство над $\mathbb{R}$, равна 2^m [60]. В частности, $\dim(Cl_3) = 8$. С другой стороны, $L_{3,2n} = \text{Lin}\{1, u_1, u_2, u_3\}$, $\dim(L_{3,2n}) = 4$, так как

$$u_1 u_3 = u_1 u_1 u_2 = -u_2, \quad u_2 u_3 = u_2 u_1 u_2 = u_1.$$

Заметим, что в этом случае $L_{3,2n}$ изоморфна алгебре кватернионов $\mathbb{H} = Cl_2$.

Упомянутый ранее гомоморфизм $c : Cl_l \rightarrow L_{l,2n}$ определяет некоторое представление алгебры Клиффорда Cl_l в $\mathbb{R}^{2n}$, так что последнее векторное пространство вместе с представлением c является некоторым модулем Клиффорда (над Cl_l). Мы видели, что каждое пространство Клиффорда — Киллинга $CK_l \subset so(2n)$ определяет структуру модуля Клиффорда на $\mathbb{R}^{2n}$ над Cl_l . Очень важно, что этим путем можно получить любой модуль Клиффорда.

Нам нужна некоторая информация о классификации модулей Клиффорда над Cl_l [60]:

а) Если $l \neq 4k + 3$, то существует (с точностью до эквивалентности) в точности один неприводимый модуль Клиффорда μ_l над Cl_l с представлением c_l . Каждый модуль Клиффорда ν_l над Cl_l изоморфен m -кратной прямой сумме модулей μ_l для некоторого натурального числа m , т. е.

$$\nu_l \cong \oplus^m \mu_l. \quad (7.6)$$

б) Если $l = 4k + 3$, то существует (с точностью до эквивалентности) в точности два неэквивалентных неприводимых модуля Клиффорда $\mu_{l,1}, \mu_{l,2}$ над Cl_l с представлениями $c_1 = c_{l-1} \circ \pi_{l,1}$ и

$c_2 = c_{l-1} \circ \pi_{l,2}$, где $\pi_{l,i}$ — естественная проекция модуля Cl_l на идеал $A_{l,i}$, $i = 1, 2$. Модули $\mu_{l,1}$, $\mu_{l,2}$ имеют одну и ту же размерность и каждый модуль Клиффорда ν_l над Cl_l изоморфен модулю

$$\nu_l \cong \oplus^{m_1} \mu_{l,1} \oplus \oplus^{m_2} \mu_{l,2} \quad (7.7)$$

для некоторых неотрицательных целых m_1, m_2 . Ясно, что представление модуля Cl_l , соответствующее модулю ν_l , точно в точности тогда, когда оба числа m_1 и m_2 положительны.

Размерность n_0 модуля μ_l или $\mu_{l,1}$, $\mu_{l,2}$ равна $n_0 = 2^{4\alpha+\beta}$, если $8\alpha + 2^{\beta-1} - 1 < l \leq 8\alpha + 2^\beta - 1$, где α — неотрицательное целое число и $\beta = 0, 1, 2, 3$. В некотором смысле это есть функция, обратная функции Радона — Гурвица $\rho(m)$ из теоремы 7.6.

Из проведенного обсуждения следует

Теорема 7.10. Сфера S^{2n-1} допускает пространство Клиффорда — Киллинга CK_l тогда и только тогда, когда $1 \leq l \leq \rho(2n) - 1$. В этом случае $n_0 = n_0(l)$ — делитель числа $2n$. Все пространства Клиффорда — Киллинга CK_l для S^{2n-1} попарно эквивалентны (все пространства $CK_l \subset so(2n)$ эквивалентны относительно $O(2n)$) тогда и только тогда, когда $l \neq 4k + 3$. Если $l = 4k + 3$, то существует в точности $[n/n_0(l)] + 1$ неэквивалентных классов пространств Клиффорда — Киллинга CK_l для S^{2n-1} . В частности, все пространства Клиффорда — Киллинга $CK_{\rho(2n)-1}$ для S^{2n-1} попарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $2n = 2^{4\alpha+\beta}n'$, где α — неотрицательное целое число, n' нечетно и $\beta = 1$ или $\beta = 3$. Если $\beta = 0$ или $\beta = 2$ в данных выше обозначениях, то существует в точности $[n'/2] + 1$ неэквивалентных классов пространств Клиффорда — Киллинга $CK_{\rho(2n)-1}$ для S^{2n-1} .

Эта теорема вместе с теоремой 7.11 ниже дает точное число (собственных) классов эквивалентности пространств Клиффорда — Киллинга на S^{2n-1} .

Предложение 7.7. Множество единичных киллинговых векторных полей на сфере S^{2n-1} представляет из себя объединение двух непересекающихся орбит относительно присоединенного действия группы $SO(2n)$ и одну орбиту относительно присоединенного действия группы $O(2n)$.

◁ По теореме 7.9 любое единичное киллингово векторное поле на сфере S^{2n-1} определяется некоторой матрицей U из $SO(2n) \cap so(2n)$

с условием $U^2 = -I$. Поэтому существует матрица $A(U) \in O(2n)$ такая, что $A(U)UA(U)^{-1} = \text{diag}(C, \dots, C)$, где C — фиксированная матрица $C \in SO(2) \cap so(2)$. Далее, если $A'(U)$ — другая такая матрица, то $A(U)[A'(U)]^{-1} \in SO(2n)$. Следовательно, любые две матрицы $U, V \in SO(2n) \cap so(2n)$ эквивалентны в $O(2n)$, и эквивалентны в $SO(2n)$ тогда и только тогда, когда $A(U)A(V)^{-1} \in SO(2n)$. $\triangleright$

Теорема 7.11. *Если $2n \equiv 2 \pmod{4}$, то любые два пространства типа CK_l (необходимо $l = 1$) $SO(2n)$ -эквивалентны. Если $2n \equiv 0 \pmod{4}$, то каждый класс $O(2n)$ -эквивалентности пространств $CK_l \subset so(2n)$ содержит в точности два класса $SO(2n)$ -эквивалентности.*

$\triangleleft$ Мы используем векторы U и V как в предложении 7.7, где $A(U) \in SO(2n)$ и $A(V) \in O(2n) \setminus SO(2n)$. Предположим, что $2n \equiv 2 \pmod{4}$. Тогда $l = 1$ и каждое пространство CK_1 натянуто на некоторое единичное векторное поле X . Заметим, что X эквивалентно $-X \in CK_1$ посредством некоторой ортогональной матрицы с определителем -1 , поэтому либо X либо $-X$ эквивалентен вектору U относительно $SO(2n)$.

Пусть теперь $2n \equiv 0 \pmod{4}$. Рассмотрим произвольное пространство CK_l , натянутое на единичные векторные поля $U_1, \dots, U_l$. Если $l = 1$, то X_1 , очевидно, эквивалентно $-X_1$ относительно $SO(2n)$. Если $l > 1$, то любой из двух единичных киллинговых векторных полей в CK_l можно непрерывно деформировать (в множестве CK_l) в другой. Поэтому все единичные киллинговы векторные поля в CK_l одновременно эквивалентны (только одному) U или V относительно $SO(2n)$, например, U .

Рассмотрим теперь $B \in O(2n) \setminus SO(2n)$ и пространство CK'_l , эквивалентное CK_l посредством B . Так как ни U , ни $-U$ не эквивалентны V относительно $SO(2n)$, то любое единичное киллингово векторное поле в CK'_l эквивалентно вектору V , не эквивалентному относительно $SO(2n)$ единичным киллинговым векторным полям в CK_l . Поэтому пространства CK_l и CK'_l не эквивалентны друг другу относительно $SO(2n)$. С другой стороны, так как $SO(2n)$ — подгруппа индекса 2 в $O(2n)$, ясно, что каждый класс $O(2n)$ -эквивалентности содержит самое большее два класса $SO(2n)$ -эквивалентности. $\triangleright$

Необходимо заметить, что подпространства CK_l алгебр Ли $so(2n)$ играют важную роль в различных математических теориях. Напри-

мер, из теоремы 7.10 и утверждений на с. 23 в [95] следует, что существует биекция между $O(2n)$ -классами подпространств $CK_l \subset so(2n)$ (для всех возможных пар $(2n, l)$ этого типа) и классами изометрии обобщенных групп Гейзенберга, которые изучил впервые А. Каплан в [147]. Это специальные двуступенно нильпотентные группы Ли, допускающие одномерные разрешимые эйнштейновы расширения — хорошо известные пространства Дамек — Риччи [111]. Заметим, что пространства Дамек — Риччи — гармонические римановы многообразия, причем большинство из них не являются симметрическими пространствами. Мы отсылаем читателя к источникам [81, 95, 110, 121, 132, 137] и ссылкам в них для знакомства с глубокой теорией обобщенных групп Гейзенберга и пространствами Дамек — Риччи. Заметим также, что есть полезные обобщения подпространств типа CK_l в алгебрах Ли $so(2n)$. Одно из них — понятие *равномерного подпространства* в $so(2n)$ [132]. Такие подпространства используются для построения новых эйнштейновых солвмногообразий с двуступенно нильпотентным нильрадикалом (детали см. в [132, 149]).

7.8. Пространства Клиффорда — Киллинга на S^{2n-1} и единичные сферы Радона в $O(2n)$

Снабдим теперь алгебру Ли $so(2n)$ следующим $\text{Ad}(SO(2n))$ -инвариантным скалярным произведением:

$$(U, V) = -\frac{1}{2n} \text{trace}(UV). \quad (7.8)$$

Группа Ли $SO(2n)$, снабженная соответствующей биинвариантной внутренней римановой метрикой ρ , является симметрическим пространством. Эта метрика единственным образом продолжается до биинвариантной «метрики» ρ на $O(2n)$ ($\rho(x, y) = +\infty$ в точности тогда, когда x, y лежат в различных компонентах связности).

Заметим, что $(X, X) = 1$ для каждого единичного киллингова векторного поля X на сфере S^{2n-1} с канонической метрикой постоянной кривизны 1 и киллингова форма B на $so(2n)$ связана с формой (7.8) по формуле

$$B(U, V) = 2(n-1) \text{trace}(UV) = -4n(n-1)(U, V).$$

Напомним, что формы $\text{trace}(UV)$ и $B(U, V)$ на $so(2n)$ — формы, ассоциированные с тождественным и присоединенным представлениями алгебры Ли $so(2n)$ соответственно [38].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 113. Пусть $A_1, \dots, A_p$, $1 \leq p \leq \rho(2n)$, — матрицы из $O(2n)$, определяющие билинейную форму (7.2). Тогда множество всех матриц вида $\sum_{i=1}^p x_i A_i$, где $x = (x_1, \dots, x_p)$ — некоторый единичный вектор в $\mathbb{R}^p$, мы будем называть *единичной сферой Радона для формы (7.2)* или просто *единичной сферой Радона* и обозначать $RS^{p-1|2n}$.

Из раздела 7.6 и теоремы 7.9 следует, что всегда $RS^{p-1|2n} \in O(2n)$, и $RS^{p-1|2n} \in SO(2n)$ (соответственно, $RS^{p-1|2n} \notin SO(2n)$) тогда и только тогда, когда по крайней мере одна из матриц $A_1, \dots, A_p$ содержится в $SO(2n)$ (не содержится в $SO(2n)$). Далее, $RS^{p-1|2n}A$ также является единичной сферой Радона для каждой матрицы $A \in O(2n)$, а левые и правые переносы — изометрии в $(O(2n), \rho)$. Поэтому с геометрической точки зрения можно рассматривать только единичную сферу Радона, определяемую формой (7.3). Как было сказано в разделе 7.6, в этом случае $A_p = I$ и линейная оболочка матриц $A_1, \dots, A_{p-1}$ есть пространство Клиффорда — Киллинга $CK_l \subset so(2n)$, где $l = p - 1$. Целью этого раздела является следующая

Теорема 7.12. В обозначениях определения 113 отображение

$$x = (x_1, \dots, x_{l+1=p}) \in S^l \subset \mathbb{R}^{l+1} \rightarrow \sum_{j=1}^p x_j (A_j) \in (O(2n), \rho)$$

сохраняет расстояния и имеет образ $RS^{l|2n}$. Как следствие, каждая сфера Радона $RS^{l|2n}$, определенная формой (7.2), есть вполне геодезическое подмногообразие в $(O(2n), \rho)$, изометричное стандартной единичной сфере $S^l \subset \mathbb{R}^{l+1}$. Если $A_p = I$, оно равно образу $\exp(CK_l)$, где CK_l — линейная оболочка матриц $A_1, \dots, A_{l=p-1}$ из формулы (7.3). Обратно, образ $\exp(CK_l) \subset SO(2n)$ любого пространства Клиффорда — Киллинга $CK_l \subset so(2n)$ есть единичная сфера Радона $RS^{l|2n}$ для некоторой формы (7.3).

◁ Сначала докажем третье утверждение. В разделе 7.6 и теореме 7.9 было доказано, что все $A_1, \dots, A_{p-1=l}$ — элементы из $SO(2n) \cap so(2n)$, определяющие взаимно ортогональные единичные

киллинговы векторные поля на S^{2n-1} . Пусть $C \in RS^{l|2n} \subset SO(2n)$, т. е. $C = \sum_{i=1}^l x_i A_i + x_{l+1} I$, где $x = (x_1, \dots, x_{l+1})$ — единичный вектор в $\mathbb{R}^{l+1}$. Предположим сначала, что $x_{l+1}^2 \neq 1$. Тогда матрица

$$A := \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^l x_i^2}} \sum_{i=1}^l x_i A_i$$

лежит в $SO(2n) \cap so(2n) \cap CK_l$ и определяет единичное киллингово векторное поле на S^{2n-1} . Очевидно, вектор C можно представить в виде $C = (\cos r)I + (\sin r)A$, $r \in \mathbb{R}$, где $\cos r = x_{l+1}$. Теперь $A^2 = -I$ для любых $t, s \in \mathbb{R}$ по теореме 7.9 и поэтому

$$\begin{aligned} [(\cos t)I + (\sin t)A][(\cos s)I + (\sin s)A] &= \\ &= (\cos(t+s))I + (\sin(t+s))A. \end{aligned}$$

Это значит, что множество матриц $(\cos t)I + (\sin t)A$, $t \in \mathbb{R}$, образует 1-параметрическую подгруппу в $SO(2n)$ с касательным вектором A и $C = \exp(rA) \in \exp(CK_l)$. Если $x_{l+1} = 1$ или $x_{l+1} = -1$, то для каждой матрицы $A \in CK_l$, определяющей единичное киллингово векторное поле, вследствие проведенных рассуждений $\exp(tA) \in RS^{l|2n}$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\exp(0A) = C$ или $\exp(\pi A) = C$. Поэтому мы доказали требуемое равенство $RS^{l|2n} = \exp(CK_l)$. Из этого следует, в частности, что $\exp(CK_l)$ гомеоморфно S^l .

Согласно разделу 7.4, каждое подпространство $CK_{l=p-1}$ на S^{2n-1} имеет базис из l взаимно ортогональных единичных киллинговых векторных полей, определяемых по теореме 7.9 некоторыми матрицами $A_1, \dots, A_{p-1}$ в $SO(2n) \cap so(2n)$. (Заметим, что по той же теореме $A_i A_j = -A_j A_i$, если $i \neq j$, так что $(A_i, A_j) = 0$ по формуле (7.8).) Ясно теперь, что формула (7.3) определяет нужную билинейную форму, и последнее утверждение вытекает из третьего.

Вследствие последних двух утверждений $RS^{l|2n} = \exp CK_l$, где CK_l — линейная оболочка матриц $A_1, \dots, A_l$, где $l = p - 1$. Если теперь $A \in CK_l \cap SO(2n)$, то по теореме 7.9 $A^2 = -I$, и формула (7.8) дает нам, что $(A, A) = 1$. Из этого факта, $\text{Ad}(SO(2n))$ -инвариантности скалярного произведения (7.8) и рассуждений в первой части доказательства вытекает, что $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$, — геодезическая окружность в $SO(2n)$ длины 2π , полностью лежащая в $RS^{l|2n}$.

Предположим, что B и C — две различных точки в $RS^{l|2n}$, определенные единичными векторами b и c из $\mathbb{R}^{l+1}$. Тогда существует единичный вектор $d \in \mathbb{R}^{l+1}$, ортогональный к b , такой, что $c = (\cos r)b + (\sin r)d$ для некоторого $r \in [0, \pi]$. Вектор d определяет соответствующий элемент $D \in RS^{l|2n}$. Матрицы $A'_1 = B$, $A'_{2=p} = D$ определяют билинейную форму $z(x, y)$ с нужными свойствами по формуле (7.2) и соответствующую сферу Радона $RS^{1,2n} \subset O(2n)$, содержащую точки A , D , C . Вследствие полученных результатов правый сдвиг на D^{-1} , являющийся изометрией на $(O(2n), \rho)$, преобразует эту сферу Радона в другую вида $\exp(CK_1)$, являющуюся геодезической окружностью в $(SO(2n), \rho)$ длины 2π . Из этого следует, что кривая $c(t) := (\cos t)B + (\sin t)D$, $t \in [0, r]$, соединяющая точки B и C в $RS^{k|2n}$, является кратчайшей геодезической в $(O(2n), \rho)$, параметризованной длиной дуги. Тем самым доказано второе утверждение. Первое утверждение следует из второго и биинвариантности «метрики» ρ на $O(2n)$. $\triangleright$

7.9. Тройные системы Ли в $so(2n)$ и вполне геодезические сферы в $SO(2n)$

Напомним, что линейное подпространство $\mathfrak{a}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *тройной системой Ли*, если $[\mathfrak{a}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]] \subset \mathfrak{a}$. Нам нужна следующая

Лемма 7.2. Если $\mathfrak{a}$ — тройная система Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h} := [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ и $\mathfrak{k} := \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ — подалгебры в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{k}$.

$\triangleleft$ Из $[\mathfrak{a}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]] \subset \mathfrak{a}$ и тождества Якоби получаем $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ и $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$, что доказывает первое утверждение леммы. Теперь легко увидеть, что $[\mathfrak{a}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ и $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$, что доказывает второе утверждение. $\triangleright$

Лемма 7.3. Пусть G — компактная группа Ли с биинвариантной римановой метрикой μ . Предположим, что $\mathfrak{a}$ — тройная система Ли в $\mathfrak{g}$, алгебре Ли группы Ли G . Тогда $M := \exp(\mathfrak{a})$ — вполне геодезическое подмногообразие в (G, μ) , в частности, M — симметрическое пространство. Если универсальное риманово накрытие пространства M неприводимо, то выполняется одно из следующих условий:

1) $\mathfrak{a}$ — простая подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{g}$, а M — простая компактная группа Ли с биинвариантной римановой метрикой.

2) Алгебра Ли $\mathfrak{h} := [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ удовлетворяет соотношению $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 0$, а $(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}, \mathfrak{h})$ — симметрическая пара, соответствующая пространству M . В частности, $\exp(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a})$ — полная связная группа изометрий пространства M . Если в этом случае алгебра Ли $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ не простая, то M — простая компактная группа Ли с бинвариантной римановой метрикой.

◁ В доказательстве нам понадобится стандартное представление $G \times G / \text{diag}(G)$ группы (G, μ) в виде симметрического пространства (см. [58]) и $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{g}$, определяющее левоинвариантную риманову метрику μ . Рассмотрим $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, алгебру Ли группы Ли $G \times G$, и

$$\tilde{\mathfrak{k}} = \text{diag}(\mathfrak{g}) \subset \tilde{\mathfrak{g}}, \quad \tilde{\mathfrak{p}} = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

Тогда $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{k}} \oplus \tilde{\mathfrak{p}}$ — разложение Картана для симметрического пространства $G \times G / \text{diag}(G)$. Теперь рассмотрим $\tilde{\mathfrak{a}} = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{a}\} \subset \tilde{\mathfrak{p}}$. Ясно, что $\tilde{\mathfrak{a}}$ — тройная система Ли в $\tilde{\mathfrak{g}}$, $[\tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{a}}] = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \subset \tilde{\mathfrak{k}}$. Используя стандартную теорию тройных систем Ли в симметрических пространствах (см., например, [58]), заключаем, что пара $([\tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{a}}] \oplus \tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{a}})$ симметрическая и соответствует симметрическому пространству $M_1 := \exp(\tilde{\mathfrak{a}})$. Ясно, что M_1 (снабженное римановой метрикой, индуцированной скалярным произведением $\frac{1}{2}(\cdot, \cdot) + \frac{1}{2}(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$) изометрично пространству M . В этом случае достаточно рассмотреть изометрию $i : M \rightarrow M_1$ определенную так: $i(\exp(tX)) = (\exp(tX), \exp(-tX))$, где $t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{a}$. Это доказывает первое утверждение леммы.

Предположим, что универсальное накрытие пространства $M = M_1$ является неприводимым симметрическим пространством. Тогда алгебра Ли $[\tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{a}}] \oplus \tilde{\mathfrak{a}}$, будучи алгеброй Ли полной группы изометрий пространства M_1 , проста или является прямой суммой двух копий некоторой простой алгебры Ли. Напомним, что по лемме 7.2 $\mathfrak{u} := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$. Рассмотрим отображения

$$\pi_1 : [\tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{a}}] \oplus \tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{h} + \mathfrak{a}, \quad \pi_2 : [\tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{a}}] \oplus \tilde{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathfrak{h} + \mathfrak{a},$$

определенные следующим образом. Пусть $Z = (Y, Y) + (X, -X)$, где $X \in \mathfrak{a}$ и $Y \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$; тогда мы полагаем $\pi_1(Z) = Y + X$ и $\pi_2(Z) = Y - X$. Легко видеть, что π_1 и π_2 — эпиморфизмы алгебр Ли. Ядро отображения π_1 равно $\mathfrak{u}_1 = \{(0, X) \mid X \in \mathfrak{u}\}$, а ядро отображения π_2

равно $u_2 = \{(X, 0) | X \in u\}$. В частности, мы получаем, что $u \oplus u = u_1 \oplus u_2$ — идеал алгебры Ли $[\tilde{a}, \tilde{a}] \oplus \tilde{a}$.

Предположим, что алгебра Ли $[\tilde{a}, \tilde{a}] \oplus \tilde{a}$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{s}$, где $\mathfrak{s}$ — некоторая простая алгебра Ли. Если u нетривиальна, то $[\tilde{a}, \tilde{a}] \oplus \tilde{a}$ совпадает со своим идеалом $u \oplus u = u_1 \oplus u_2$ (этот идеал не может быть собственным в этом случае). Кроме того, $u = \mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{h}$ — простая алгебра Ли (так как u_1 — ядро отображения π_1 , то $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ и $u_2 \sim u = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ изоморфны). В этом случае M — связная компактная простая группа Ли с биинвариантной римановой метрикой, и мы получаем условие 1) леммы. Если u тривиальна, то π_1 — изоморфизм. Поэтому $\mathfrak{h} + \mathfrak{a} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{s}$ изоморфны, а $\mathfrak{h}$ изоморфна $\text{diag}(\mathfrak{s})$ (так как $\text{diag}(\mathfrak{s})$ — единственная собственная подалгебра в $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{s}$). Следовательно, M — компактная простая группа Ли (и ее алгебра Ли изоморфна $\mathfrak{s}$) с биинвариантной римановой метрикой, и мы получаем условие 2) леммы с непростой алгеброй Ли $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$.

Теперь, если алгебра Ли $[\tilde{a}, \tilde{a}] \oplus \tilde{a}$ проста, то u тривиальна и π_1 — изоморфизм. Поэтому $\mathfrak{h} + \mathfrak{a} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a} = \pi_1([\tilde{a}, \tilde{a}] \oplus \tilde{a})$ — простая алгебра Ли полной группы изометрий пространства M . Кроме того, по определению отображения π_1 мы получаем, что $\pi_1([\tilde{a}, \tilde{a}]) = \mathfrak{h}$. Поэтому соблюдается условие 2) леммы с простой алгеброй Ли $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$. $\triangleright$

Теорема 7.13. Пусть CK_l — подпространство Клиффорда — Киллинга размерности l в алгебре Ли $so(2n)$. Тогда верны следующие утверждения:

- 1) CK_l — тройная система Ли в алгебре Ли $so(2n)$.
- 2) Для каждого пространства CK_1 образ $\exp(CK_1)$ есть замкнутая геодезическая длины 2π в $(SO(2n), \rho)$. Если $l \geq 2$, то $\exp(CK_l)$ — вполне геодезическая сфера S^l постоянной секционной кривизны 1 в $(SO(2n), \rho)$.
- 3) Если CK_l — подалгебра Ли в $so(2n)$, то $l = 1$ или $l = 3$.
- 4) Каждое пространство CK_1 является коммутативной подалгеброй Ли в $so(2n)$, образ $\exp(CK_1)$ состоит из переносов Клиффорда — Вольфа в S^{2n-1} , а $\exp(CK_1)$ -орбиты образуют вполне геодезическое слоение эквидистантных (больших) окружностей сферы S^{2n-1} .
- 5) Если CK_3 — подалгебра Ли в $so(2n)$, то $CK_3 = [CK_3, CK_3]$ изоморфна $so(3) \sim su(2)$ и $\exp(CK_3) = S^3$ — группа $SU(2)$ с биинвариантной римановой метрикой. Кроме того, $\exp(CK_3) = SU(2)$ состоит из переносов Клиффорда — Вольфа в S^{2n-1} , и, следовательно,

но, $\exp(CK_3)$ -орбиты образуют вполне геодезическое слоение эквидистантных (больших) 3-сфер в сфере S^{2n-1} .

6) Если CK_l не является подалгеброй Ли в $so(2n)$, то $CK_l \cap [CK_l, CK_l]$ тривиально, подпространства $CK_l \oplus [CK_l, CK_l]$ и $[CK_l, CK_l]$ — подалгебры Ли в $so(2n)$ такие, что $(CK_l \oplus [CK_l, CK_l], [CK_l, CK_l])$ — симметрическая пара $(so(l+1), so(l))$ и $\exp(CK_l + [CK_l, CK_l])$ изоморфно $SO(l+1)$, полной связной группе изометрий пространства $\exp(CK_l) = S^l$.

◁ Пусть CK_l — линейная оболочка ортогональных единичных киллинговых векторных полей $U_1, \dots, U_l$. По теореме 7.9 $U_i^2 = -I$ и $U_i U_j + U_j U_i = 0$ для $i \neq j$. Покажем, что $[CK_l, [CK_l, CK_l]] \subset CK_l$. Если индексы i, j, k попарно различны, то $[U_i, U_j] = 2U_i U_j$ и

$$[U_k, [U_i, U_j]] = 2U_k U_i U_j - 2U_i U_j U_k = -2U_i U_k U_j + 2U_i U_k U_j = 0.$$

С другой стороны,

$$[U_i, [U_i, U_j]] = 2U_i U_i U_j - 2U_i U_j U_i = -2U_j + 2U_i U_i U_j = -4U_j \in CK_l.$$

Поэтому CK_l — тройная система Ли в $so(2n)$, что доказывает первое утверждение теоремы.

Второе утверждение следует из теоремы 7.12.

Если CK_l — алгебра Ли, то $l = 1$ или $l = 3$, что доказывает третье утверждение теоремы.

Четвертое утверждение следует из теоремы 3.27.

Если CK_3 — подалгебра Ли в $so(2n)$, то CK_3 изоморфна $so(3) \sim su(2)$. В этом случае $\exp(CK_3) = SU(2) = S^3$ с метрикой постоянной секционной кривизны 1. Очевидно, каждый элемент $X \in CK_3$ — киллингово векторное поле постоянной длины на S^{2n-1} . По теореме 3.27 $\exp(CK_3) = SU(2)$ состоит из переносов Клиффорда — Вольфа в S^{2n-1} . Теперь легко видно, что $\exp(CK_3)$ -орбиты составляют вполне геодезическое слоение эквидистантных (больших) 3-сфер сферы S^{2n-1} . Это доказывает пятое утверждение теоремы.

По лемме 7.3, $CK_l + [CK_l, CK_l]$ — подалгебра Ли в $so(2n)$ и подгруппа $\exp(CK_l + [CK_l, CK_l])$ группы $SO(2n)$ — связная группа изометрий пространства $M := \exp(CK_l) = S^l$. Если $l = 3$ и CK_3 не является подалгеброй Ли в $so(2n)$, то (по лемме 7.3) алгебра Ли $CK_3 + [CK_3, CK_3] = CK_3 \oplus [CK_3, CK_3]$ изоморфна $so(4) \sim so(3) \oplus so(3)$ и $\exp(CK_3 \oplus [CK_3, CK_3]) = SO(4)$. Пусть теперь $l \neq 1, 3$.

Тогда сфера $S^l = \exp(CK_l)$ не является подгруппой Ли в $SO(2n)$. По лемме 7.3, $CK_l \cap [CK_l, CK_l]$ тривиально, алгебра Ли $CK_l \oplus [CK_l, CK_l]$ изоморфна $so(l+1)$ и $\exp(CK_l \oplus [CK_l, CK_l]) = SO(l+1)$. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 49. Некоторые варианты этой теоремы есть в литературе (см., например, [120]).

Согласно теоремам 7.12 и 7.13 изучение подпространств CK_l связано с изучением вполне геодезических сфер в $SO(2n)$.

Заметим, что существуют известные вполне геодезические сферы в $SO(2n)$, *сферы Хелгасона*. В статье [140] С. Хелгасон доказал, что каждое компактное неприводимое симметрическое риманово пространство M максимальной секционной кривизны κ содержит вполне геодезические подмногообразия постоянной кривизны κ . Любые два таких подмногообразия одной размерности эквивалентны относительно полной связной группы изометрий пространства M . Максимальная размерность любого такого подмногообразия равна $1+m(\bar{\delta})$, где $m(\bar{\delta})$ — кратность старшего ограниченного корня $\bar{\delta}$. Кроме того, если M не изометрично вещественному проективному пространству, то такие подмногообразия размерности $1+m(\bar{\delta})$ изометричны сферам.

В случае, когда M — простая компактная группа Ли с биинвариантной римановой метрикой, $m(\bar{\delta}) = 2$. Поэтому максимальная размерность упомянутых подмногообразий равна 3. Заметим, что $M = (SO(2n), \rho)$, $n \geq 2$, — не вещественное проективное многообразие; поэтому существуют 3-мерные вполне геодезические сферы Хелгасона в $(SO(2n), \rho)$. Легко дать описание этих сфер (см. [140]). Приведем некоторые известные факты (см., например, [22, гл. 8, п. H]). Пусть E_{ij} — некоторая $(2n \times 2n)$ -матрица с нулевыми элементами кроме 1 на месте (i, j) . Рассмотрим матрицы $F_i = E_{(2i)(2i-1)} - E_{(2i-1)(2i)}$ для $1 \leq i \leq n$. Эти матрицы определяют базис стандартной подалгебры Картана $\mathfrak{t}$ в $so(2n)$. Следовательно, каждый элемент X в $\mathfrak{t}$ имеет вид $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i$. Каждый корень (относительно $\mathfrak{t}$) алгебры Ли $so(2n)$ имеет вид $\lambda_i \pm \lambda_j$, $i \neq j$. Заметим, что все эти корни имеют одинаковую длину. Пусть $V_{\lambda_i \pm \lambda_j}$ — (двумерное) корневое пространство корня $\lambda_i \pm \lambda_j$ в $so(2n)$. Положим $U_{\lambda_i \pm \lambda_j} = \mathbb{R} \cdot (F_i \pm F_j) \oplus V_{\lambda_i \pm \lambda_j}$. В этих обозначениях, $\exp(U_{\lambda_i \pm \lambda_j})$ — сфера Хелгасона в $(SO(2n), \rho)$ (см. детали в доказательстве теоремы 1.2 в [140]). Далее, по теореме 1.1 в [140] любые две сферы

Хелгасона в $(SO(2n), \rho)$ эквивалентны относительно полной связной группы изометрий пространства $(SO(2n), \rho)$. Поэтому каждая сфера Хелгасона в $(SO(2n), \rho)$ сопряжена в $SO(2n)$ либо сфере $\exp(U_{\lambda_1 - \lambda_2})$, либо сфере $\exp(U_{\lambda_1 + \lambda_2})$.

Предложение 7.8. *Сферы $S^3 = \exp(CK_3)$ из утверждения 5) теоремы 7.13 являются сферами Хелгасона постоянной кривизны 1 в $(SO(4), \rho)$. Пространства CK_3 в $so(4)$ — идеалы в $so(4)$.*

◁ Заметим, что $so(4) \cong so(3) \oplus so(3)$. Существует только два не-пропорциональных корня для стандартной подалгебры Картана $\mathfrak{t}$: $\lambda_1 + \lambda_2$ и $\lambda_1 - \lambda_2$. Легко видеть, что $U_{\lambda_1 + \lambda_2}$ и $U_{\lambda_1 - \lambda_2}$ взаимно коммутирующие алгебры Ли, изоморфные $so(3) \sim su(2)$. В частности, $\exp(U_{\lambda_1 \pm \lambda_2})$ — сферы вида $\exp(CK_3)$ в $(SO(4), \rho)$ (см. утверждение 5) теоремы 7.13). Заметим также, что $U_{\lambda_1 + \lambda_2}$ и $U_{\lambda_1 - \lambda_2}$ можно естественно отождествить с алгебрами Ли групп левых и правых сдвигов в $S^3 = SU(2)$. С другой стороны, $\exp(U_{\lambda_1 \pm \lambda_2})$ — сферы Хелгасона в $(SO(4), \rho)$ (вследствие проведенных рассуждений). По утверждению 2) теоремы 7.13 (или по теореме 7.12) эти сферы имеют постоянную кривизну 1. Это доказывает первое утверждение предложения.

Пусть теперь CK_3 — произвольное пространство Клиффорда — Киллинга в $so(4)$. По теореме 7.12 $\exp(CK_3)$ — сфера S^3 постоянной кривизны 1. Так как это равно секционной кривизне сфер Хелгасона $\exp(U_{\lambda_1 \pm \lambda_2})$, то $\exp(CK_3)$ также должно быть сферой Хелгасона. Из описания сфер Хелгасона непосредственно перед предложением мы получаем, что $\exp(CK_3)$ сопряжена в $SO(4)$ либо $\exp(U_{\lambda_1 - \lambda_2})$, либо $\exp(U_{\lambda_1 + \lambda_2})$. В частности, это верно для CK_3 . Так как $U_{\lambda_1 \pm \lambda_2}$ — идеалы в $so(4)$, это доказывает второе утверждение предложения. ▷

Предложение 7.9. *Каждая сфера Хелгасона в $(SO(2n), \rho)$, $n \geq 2$, имеет постоянную секционную кривизну $n/2$. В частности, для $n \geq 3$ все сферы Хелгасона отличны от сфер Радона из теоремы 7.12.*

◁ Для $n = 2$ предложение следует из предложения 7.8. Рассмотрим случай $n \geq 3$. Подгруппа $H = \text{diag}(SO(4), 1, \dots, 1) \subset SO(2n)$ с биинвариантным римановым метрическим тензором μ , индуцированным метрикой ρ , является вполне геодезическим подмногообразием в $(SO(2n), \rho)$. С другой стороны, все корни подалгебры $\mathfrak{h} = LH$ являются корнями для $so(2n)$. Из данного выше описания сфер Хелгасона получаем, что каждая сфера Хелгасона в (H, μ) является так-

же и сферой Хелгасона в $(SO(2n), \rho)$. Легко видно, что $(H, \frac{n}{2}\mu)$ изометрична $(SO(4), \rho')$, где ρ' — внутренняя биинвариантная риманова метрика, порожденная скалярным произведением (7.8) для $n = 2$. Так как все сферы Хелгасона в $(SO(4), \rho')$ имеют постоянную кривизну 1 по предложению 7.8, то каждая сфера Хелгасона в (H, μ) имеет постоянную кривизну $n/2$. $\triangleright$

7.10. Алгебры Ли в пространствах Клиффорда — Киллинга на S^{2n-1}

Ниже мы получаем некоторые результаты, связанные с алгебрами Ли, содержащимися в подпространствах Клиффорда — Киллинга CK_l в $so(2n)$.

Предложение 7.10. Пусть X, Y — линейно независимые киллинговы векторные поля на S^{2n-1} с постоянными скалярными произведениями $\text{cap}(X, X), \text{cap}(Y, Y), \text{cap}(X, Y)$. Тогда скобка Ли $[X, Y]$ — нетривиальное киллингово векторное поле постоянной длины на S^{n-1} . Если X, Y — единичные взаимно ортогональные киллинговы векторные поля на S^{2n-1} , то тройка векторных полей

$$\left\{ X, Y, Z := \frac{1}{2}[X, Y] \right\}$$

составляет некоторый ортонормированный базис алгебры Ли CK_3 векторных полей на S^{2n-1} с соотношениями $[X, Y] = 2Z, [Z, X] = 2Y, [Y, Z] = 2X$. Следовательно, справедливо утверждение 5) теоремы 7.13.

$\triangleleft$ По следствию 7.1 $\frac{1}{2}[X, Y] = \nabla_X Y = -\nabla_Y X$, и по предложению 3.3 верна формула $\text{cap}(\nabla_X Y, \nabla_X Y) = \text{cap}(R(X, Y)Y, X)$. Так как $\text{cap}(X, Y)$ и секционная кривизна сферы (S^{n-1}, cap) постоянны, выражение $\text{cap}(R(X, Y)Y, X)$ является положительной константой. Следовательно, $[X, Y]$ — (нетривиальное) киллингово поле постоянной длины, что доказывает первое утверждение предложения.

Ортонормальность тройки киллинговых векторных полей $\{X, Y, Z\}$ на S^{2n-1} следует из ортонормальности пары $\{X, Y\}$, доказательства первой части предложения и соотношений $0 = Y \text{cap}(X, X) = -\text{cap}([X, Y], X), 0 = X \text{cap}(Y, Y) = \text{cap}([X, Y], Y)$. Первое коммутационное соотношение следует из определения. На

основании теоремы 7.9 мы получаем равенство:

$$\begin{aligned} [Z, X] &= \frac{1}{2} \{ (XY - YX)X - X(XY - YX) \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ XYX - YXX - XXY + X Y X \} = \frac{1}{2} (2Y + 2Y) = 2Y. \end{aligned}$$

Третье коммутационное соотношение можно доказать аналогично. Тогда линейная оболочка CK_3 векторов X, Y, Z — алгебра Ли. Теперь достаточно применить теорему 7.13. $\triangleright$

Предложение 7.11. *Если $l \geq 4$, то пространство CK_l не содержит подалгебр Ли размерности не меньше 2.*

$\triangleleft$ Это предложение является непосредственным следствием теоремы 7.13. Действительно, в этом случае пересечение $CK_l \cap [CK_l, CK_l]$ тривиально, а CK_l не содержит двумерных коммутативных подалгебр, так как S^l — КРОСП. $\triangleright$

Следствие 7.3. *Сфера S^{2n-1} допускает пространство $CK_{\rho(2n)-1}$, являющееся алгеброй Ли тогда и только тогда, когда $\rho(2n) = 2$ или $\rho(2n) = 4$, т. е. когда n не делится на 4.*

$\triangleleft$ Если $2n$ делится на 8, то по теореме 7.8 размерность пространства $CK_{\rho(2n)-1}$ больше, чем 4, на основании предложения 7.11 это пространство не может быть алгеброй Ли.

Если 4 является делителем числа $2n$, но $2n$ не делится на 8, то $\rho(2n) - 1 = 3$ и по предложению 7.10, в качестве пространства CK_3 можно взять алгебру Ли с указанным там базисом X, Y, Z .

Наконец, если 4 не делит $2n$, то $\rho(2n) - 1 = 1$ и любое пространство CK_1 является алгеброй Ли. $\triangleright$

Из предложений 7.10, 7.11 и теоремы 7.8 вытекает

Следствие 7.4. *Если 8 делит $2n$, то существует пространство CK_3 , являющееся алгеброй Ли (изоморфной $su(2)$) и не содержащееся ни в каком пространстве $CK_{\rho(2n)-1}$.*

На основании предложений 7.10 и 7.11 получаем

Следствие 7.5. 1) *Если $2n$ делится на 4, то существует пространство $CK_3 \subset so(2n)$, являющееся алгеброй Ли, изоморфной $so(3)$.*

2) *Если $2n$ делится на 8, то существует пространство $CK_3 \subset so(2n)$, не являющееся алгеброй Ли.*

Пример 28. Здесь мы рассмотрим два примера пространств CK_3 , где первое (соответственно, второе) является (соответственно,

не является) подалгеброй Ли в $so(2n)$. В алгебре Ли $so(4)$ рассмотрим векторы

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $U_1^2 = U_2^2 = U_3^2 = -I$, $U_1U_2 = -U_3$, $U_2U_1 = U_3$, $U_1U_3 = U_2$, $U_3U_1 = -U_2$, $U_2U_3 = -U_1$, $U_3U_2 = U_1$. Поэтому линейная оболочка векторов U_i , $1 \leq i \leq 3$, в $so(4)$ является алгеброй Ли типа CK_3 .

Теперь рассмотрим в $so(8)$ векторы

$$\tilde{U}_1 = \text{diag}(U_1, -U_1), \quad \tilde{U}_2 = \text{diag}(U_2, -U_2), \quad \tilde{U}_3 = \text{diag}(U_3, -U_3).$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1^2 &= \tilde{U}_2^2 = \tilde{U}_3^2 = -I, \\ \tilde{U}_1\tilde{U}_2 &= \text{diag}(-U_3, -U_3), \quad \tilde{U}_1\tilde{U}_3 = \text{diag}(U_2, U_2), \\ \tilde{U}_2\tilde{U}_3 &= \text{diag}(-U_1, -U_1), \quad \tilde{U}_2\tilde{U}_1 = \text{diag}(U_3, U_3), \\ \tilde{U}_3\tilde{U}_1 &= \text{diag}(-U_2, -U_2), \quad \tilde{U}_3\tilde{U}_2 = \text{diag}(U_1, U_1). \end{aligned}$$

Поэтому линейная оболочка векторов $\tilde{U}_i$, $1 \leq i \leq 3$, в $so(8)$ есть подпространство типа CK_3 , не являющееся подалгеброй Ли. Легко проверить, что алгебра Ли $CK_3 + [CK_3, CK_3]$ изоморфна $so(3) \oplus so(3)$.

7.11. Ограниченно однородные по Клиффорду — Вольфу римановы многообразия

Результаты этого раздела основаны на работе [20].

7.11.1. Киллинговы поля постоянной длины на круглых нечетномерных сферах. Пусть S^{2n-1} — круглая сфера постоянной кривизны 1. Мы представим ее в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$

следующим образом:

$$S^{2n-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{2n}^2} = 1 \right\}.$$

Группа $G = SO(2n)$ действует транзитивно на S^{2n-1} и имеет следующую группу изотропии H в точке $x = (0, \dots, 0, 1)$:

$$H = \{ \text{diag}(A, 1) \mid A \in SO(2n-1) \}.$$

Мы получаем соответствующее $\text{Ad}(H)$ -инвариантное разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p},$$

где $\mathfrak{g} = LG$, $\mathfrak{h} = LH$, а $\mathfrak{p}$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} O & a^t \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

где O — нулевая $((2n-1) \times (2n-1))$ -матрица, $a \in \mathbb{R}^{2n-1}$. Мы отождествляем $\mathfrak{p}$ с касательным пространством к S^{2n-1} в точке x . Следовательно, значение киллингова поля $U \in \mathfrak{g}$ в x является последним вектор-столбцом матрицы U .

Следующая лемма является непосредственным следствием теоремы 7.9.

Лемма 7.4. *Нетривиальное киллингово векторное поле $U \in \mathfrak{g}$ имеет постоянную длину на S^{2n-1} тогда и только тогда, когда $U^2 = -\lambda^2 \text{Id}$, где $\lambda > 0$.*

Матрицу $A + \sqrt{-1}B \in u(n)$, где A кососимметрична, а B симметрична, мы вкладываем в $so(2n)$ следующим образом:

$$A + \sqrt{-1}B \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Лемма 7.5. *Для заданной неотрицательно определенной симметричной матрицы*

$$GM = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{23} & 1 \end{pmatrix},$$

существуют вещественные числа $x_1, x_2, x_3, \mu, \lambda$ такие, что

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1, \quad \mu^2(x_1^2 + x_2^2) = g_{11}, \quad \lambda^2 - \mu^2(x_1^2 + x_2^2) = g_{22}, \\ 2\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\mu x_1 x_2 &= g_{12}, \quad \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}(x_1^2 - x_2^2) + \lambda x_3^2 = g_{23}. \end{aligned}$$

◁ Сначала предположим, что все числа $g_{11}, g_{12}, g_{22}, g_{23}$ ненулевые. В этом случае обязаны выполняться неравенства $\lambda^2 \neq \mu^2$ и $\mu \neq 0$. Положим $\lambda = \sqrt{g_{11} + g_{22}}$, тогда вышеприведенная система сводится к следующей системе (мы применили равенство $x_3^2 = 1 - \frac{g_{11}}{\mu^2}$):

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad 2\sqrt{g_{11} + g_{22} - \mu^2}\mu x_1 x_2 = g_{12},$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{g_{11}}{\mu^2}, \quad x_1^2 - x_2^2 = \frac{(g_{23} - \sqrt{g_{11} + g_{22}})\mu^2 + \sqrt{g_{11} + g_{22}}g_{11}}{\sqrt{g_{11} + g_{22} - \mu^2}\mu^2}.$$

Следовательно,

$$x_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{g_{11}}{\mu^2} + \frac{(g_{23} - \sqrt{g_{11} + g_{22}})\mu^2 + \sqrt{g_{11} + g_{22}}g_{11}}{\sqrt{g_{11} + g_{22} - \mu^2}\mu^2} \right), \quad (7.11)$$

$$x_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{g_{11}}{\mu^2} - \frac{(g_{23} - \sqrt{g_{11} + g_{22}})\mu^2 + \sqrt{g_{11} + g_{22}}g_{11}}{\sqrt{g_{11} + g_{22} - \mu^2}\mu^2} \right), \quad (7.12)$$

$$(x_1 x_2)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{g_{11}^2}{\mu^4} - \left(\frac{(g_{23} - \sqrt{g_{11} + g_{22}})\mu^2 + \sqrt{g_{11} + g_{22}}g_{11}}{\sqrt{g_{11} + g_{22} - \mu^2}\mu^2} \right)^2 \right). \quad (7.13)$$

С другой стороны, мы имеем уравнение

$$(x_1 x_2)^2 = \frac{1}{4} \frac{g_{12}^2}{(g_{11} + g_{22} - \mu^2)\mu^2}.$$

Из двух последних равенств мы получаем (имея в виду, что $\mu \neq 0$)

$$(g_{23} - \sqrt{g_{11} + g_{22}})^2 \mu^2 = 2(g_{11} + g_{22})g_{11} - 2\sqrt{g_{11} + g_{22}}g_{11}g_{23} - g_{11}^2 - g_{12}^2.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} 2(g_{11} + g_{22})g_{11} - 2\sqrt{g_{11} + g_{22}}g_{11}g_{23} - g_{11}^2 - g_{12}^2 &\geq \\ &\geq (g_{23} - \sqrt{g_{11} + g_{22}})^2 g_{11}, \end{aligned} \quad (7.14)$$

поскольку это эквивалентно неравенству $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 - g_{11}g_{23}^2 \geq 0$, означающему $\det(GM) \geq 0$. Отметим также, что

$$\begin{aligned} 2(g_{11} + g_{22})g_{11} - 2\sqrt{g_{11} + g_{22}} g_{11}g_{23} - g_{11}^2 - g_{12}^2 < \\ < (g_{23} - \sqrt{g_{11} + g_{22}})^2 (g_{11} + g_{22}), \end{aligned} \quad (7.15)$$

поскольку это эквивалентно неравенству $(\sqrt{g_{11} + g_{22}}g_{23} - g_{22})^2 + g_{12}^2 > 0$. Так как GM неотрицательно определена, мы также имеем $g_{22} \geq g_{23}^2$ и, соответственно, $\sqrt{g_{11} + g_{22}} > g_{23}$. Следовательно, можно положить

$$\mu = \frac{\sqrt{2(g_{11} + g_{22})g_{11} - 2\sqrt{g_{11} + g_{22}} g_{11}g_{23} - g_{11}^2 - g_{12}^2}}{\sqrt{g_{11} + g_{22}} - g_{23}}.$$

Из неравенств (7.14) и (7.15) мы получаем $\lambda^2 = g_{11} + g_{22} > \mu^2 \geq g_{11}$.

Из приведенных рассуждений следует, что правая часть в (7.13) положительна. Таким образом, можно найти x_1 и x_2 из уравнений (7.11) и (7.12) такие, что $\text{sign}(x_1x_2) = \text{sign}(g_{12})$. Наконец, полагаем $x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ (из $\mu^2 \geq g_{11}$ следует $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$).

Если некоторые из чисел g_{11} , g_{12} , g_{22} , g_{23} нулевые, можно получить соответствующее решение как предел решений найденного выше вида. Действительно, для матрицы GM можно определить последовательность симметричных неотрицательно определенных матриц $GM_n = (g_{n,ij})$, $n \in \mathbb{N}$, с $g_{n,33} = 1$, $g_{n,13} = 0$, ненулевыми $g_{n,11}$, $g_{n,12}$, $g_{n,22}$, $g_{n,23}$, и таких, что $GM_n \rightarrow GM$ при $n \rightarrow \infty$ в естественной топологии. Легко видеть, что для некоторой константы C имеет место неравенство $\text{trace}(GM_n) \leq C$ одновременно для всех n . Если $(x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}, \lambda_n, \mu_n)$ — решения соответствующих систем для GM_n , то

$$|x_{n,1}| \leq 1, \quad |x_{n,2}| \leq 1, \quad |x_{n,3}| \leq 1,$$

$$0 \leq \mu_n \leq \lambda_n = \sqrt{g_{n,11} + g_{n,22}} \leq \sqrt{\text{trace}(GM_n)} \leq \sqrt{C}.$$

Переходя к подпоследовательностям и сохраняя обозначения, мы получаем, что последовательность $(x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}, \lambda_n, \mu_n)$ сходится к решению данной системы для GM при $n \rightarrow \infty$. $\triangleright$

Предложение 7.12. Для любого $n \geq 1$ и любого $X \in \mathfrak{p}$ (касательного вектора в точке $x \in S^{2n-1}$) существует киллингово поле

постоянной длины из алгебры Ли $u(n) \subset so(2n)$, значение которого в точке x равно X .

◁ Матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ является киллинговым полем постоянной длины тогда и только тогда, когда (по лемме 7.4) существует положительное число λ со свойством

$$AB + BA = 0, \quad A^2 - B^2 = -\lambda^2 \text{Id}.$$

Если $n = 1$, то $U(1) = SO(2)$, и все ясно. Рассмотрим случай $n = 2$. Пусть $X \in \mathfrak{p}$ таков, что $a = (a_1, a_2, a_3)$ (см. (7.9)). Рассмотрим две следующих матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_3 \\ -a_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -a_2 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ является киллинговым полем постоянной длины с требуемым свойством. Отметим, что $A + \sqrt{-1}B \in su(2) = sp(1)$ в этом случае.

Далее мы предполагаем, что $n \geq 3$. Рассмотрим $X \in \mathfrak{p}$ такой, что $(a, 0) = (b, c)$, $b, c \in \mathbb{R}^n$ (см. (7.9)). Мы должны показать, что существуют матрицы A и B , где A кососимметрична, B симметрична, $AB + BA = 0$, $A^2 - B^2 = -\lambda^2 \text{Id}$, последний столбец A (B) есть c^t (b^t). Пусть $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$ и e_n — последний вектор стандартного ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$. В наших операторных обозначениях мы имеем

$$A(e_n) = c, \quad B(e_n) = b.$$

Пусть $C \in O(n)$, $f_1 = C(c)$, $f_2 = C(b)$, $f_3 = C(e_n)$, $A_1 = CAC^{-1}$, $B_1 = CBC^{-1}$. Рассмотрим матрицу Грама $GM = (g_{ij})$ системы $\{c, b, e_n\}$. Отметим, что $g_{33} = 1$ и $g_{13} = 0$ (A кососимметрична). Очевидно, что система $\{f_1, f_2, f_3\}$ имеет ту же матрицу Грама GM . Отметим также, что матрица $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_1 & A_1 \end{pmatrix}$ лежит в $u(n) \subset so(2n)$ и имеет постоянную длину как киллингово поле. Если мы найдем кососимметричную матрицу A_1 , симметричную матрицу B_1 и векторы $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}^n$ такие, что $A_1 B_1 + B_1 A_1 = 0$, $A_1^2 - B_1^2 = -\lambda^2 \text{Id}$, $f_1 = A_1(f_3)$, $f_2 = B_1(f_3)$, а матрица Грама системы $\{f_1, f_2, f_3\}$ совпадает с матрицей Грама системы $\{c, b, e_n\}$, то мы докажем предложение. Действительно, в этом случае мы можем найти $C \in O(n)$ так,

что $f_1 = C(c)$, $f_2 = C(b)$ и $f_3 = C(e_n)$. Теперь достаточно положить $A = C^{-1}A_1C$ и $B = C^{-1}B_1C$.

В стандартном базисе $\{e_i\}$ пространства $\mathbb{R}^n$ мы ищем f_3 , A_1 и B_1 в следующем виде:

$$f_3 = (x_1, x_2, x_3, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n,$$

$$A_1 = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0 \right),$$

$$B_1 = \text{diag} \left(\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}, -\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}, \lambda, \lambda, \dots, \lambda \right).$$

Отметим, что A_1 кососимметрична, B_1 симметрична, $A_1B_1 + B_1A_1 = 0$ и $A_1^2 - B_1^2 = -\lambda^2 \text{Id}$. Далее,

$$f_1 = A_1(f_3) = (\mu x_2, -\mu x_1, 0, \dots, 0),$$

$$f_2 = B_1(f_3) = \left(\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} x_1, -\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} x_2, \lambda x_3, 0, \dots, 0 \right).$$

Матрица Грама системы $\{f_1, f_2, f_3\}$ совпадает с матрицей Грама GM системы $\{c, b, e_n\}$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad \mu^2(x_1^2 + x_2^2) = g_{11}, \quad \mu^2(x_1^2 + x_2^2) = \lambda^2 - g_{22},$$

$$2\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\mu x_1 x_2 = g_{12}, \quad \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}(x_1^2 - x_2^2) + \lambda x_3^2 = g_{23}.$$

По лемме 7.5 вышеприведенная система уравнений относительно x_1 , x_2 , x_3 , λ и μ имеет вещественное решение, что и доказывает предположение. $\triangleright$

Теперь мы изучим киллинговы векторные поля постоянной длины на S^{4n-1} из алгебры Ли $sp(n) \subset u(2n) \subset so(4n)$. Отметим, что

$$sp(n) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 \end{pmatrix} = A + \sqrt{-1}B \in su(2n) \right\}, \quad (7.16)$$

где Z_1 — косоэрмитова $(n \times n)$ -матрица, а Z_2 — симметричная $(n \times n)$ -матрица. Если положить $Z_1 = C + \sqrt{-1}D$ и $Z_2 = E + \sqrt{-1}F$, где C , D , E , F — вещественные $(n \times n)$ -матрицы, то C кососимметрична, а D , E , F симметричны. Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} C & E \\ -E & C \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} D & F \\ F & -D \end{pmatrix}.$$

Из леммы 7.4 легко получается

Лемма 7.6. *Нетривиальное киллингово векторное поле $U \in sp(n)$ (вышеприведенного вида) имеет постоянную длину на S^{4n-1} тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства:*

$$CD + DC + EF - FE = 0, \quad CF + FC + DE - ED = 0,$$

$$CE + EC + DF - FD = 0, \quad C^2 - D^2 - E^2 - F^2 = -\lambda^2 \text{Id}.$$

◁ Киллингово поле $A + \sqrt{-1}B \in u(2n)$ имеет постоянную длину на S^{4n-1} тогда и только тогда, когда

$$AB + BA = 0, \quad A^2 - B^2 = -\lambda^2 \text{Id}.$$

В нашем случае

$$A = \begin{pmatrix} C & E \\ -E & C \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} D & F \\ F & -D \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$CD + DC + EF - FE = 0, \quad CF + FC + DE - ED = 0,$$

$$CE + EC + DF - FD = 0, \quad C^2 - D^2 - E^2 - F^2 = -\lambda^2 \text{Id}. \triangleright$$

Отметим, что для любого $n \geq 1$ существует киллингово поле постоянной длины на S^{4n-1} из алгебры Ли $sp(n)$, поскольку соответствующая система матричных уравнений имеет нетривиальные решения. Например, если $C = 0$, то в качестве D, E, F можно взять любые симметричные попарно коммутирующие матрицы со свойством $D^2 + E^2 + F^2 = \lambda^2 \text{Id}$.

ПРИМЕР 29. Рассмотрим случай $n = 2$ и

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ — некоторые вещественные числа с условиями $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$. Все уравнения в лемме 7.6 выполнены ($\lambda^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$). Следовательно, мы получаем

киллингово поле U постоянной длины на S^7 :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & 0 & c_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & c_2 & 0 & b_2 \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & -c_2 \\ -c_1 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ -b_1 & 0 & c_1 & 0 & -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & c_2 & 0 & -a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in sp(2) \subset su(4) \subset so(8).$$

С другой стороны, мы имеем

Предложение 7.13. Для любого $n \geq 2$ существует $X \in \mathfrak{p}$ (касательный вектор в точке $x \in S^{4n-1}$), не являющийся значением киллингова поля постоянной длины из $sp(n)$ в точке x .

Замечание 50. Для $n = 1$ это предложение не верно, поскольку $sp(1) = su(2)$, и для любого $X \in \mathfrak{p}$ существует киллингово поле постоянной длины из $sp(1) = su(2)$, значение которого в точке x совпадает с X (см. доказательство предложения 7.12).

◁ Рассмотрим стандартное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ и стандартный ортонормированный базис $\{e_i\}$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть $X \in \mathfrak{p}$ такой вектор, что $(a, 0) = (e_1, O_n, e_n, e_1)$, где O_n — нулевой вектор из $\mathbb{R}^n$ (см. (7.9)). Предположим, что существует киллингово векторное поле постоянной длины $U \in sp(n)$ со значением a в точке x . Из вышеприведенных рассуждений мы знаем, что U имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} C & E & D & F \\ -E & C & F & -D \\ -D & -F & C & E \\ -F & D & -E & C \end{pmatrix} \in so(4n),$$

где C — кососимметричная вещественная $(n \times n)$ -матрица, а D, E, F — симметричные вещественные $(n \times n)$ -матрицы. Эти матрицы удовлетворяют уравнениям из леммы 7.6. В операторных обозначениях мы имеем

$$F(e_n) = e_1, \quad D(e_n) = O_n, \quad E(e_n) = e_n, \quad C(e_n) = e_1.$$

Из равенства $CD + DC + EF - FE = 0$ получаем

$$\begin{aligned} 0 &= (CD(e_n), e_1) + (DC(e_n), e_1) + (EF(e_n), e_1) - \\ &\quad - (FE(e_n), e_1) = (D(e_1), e_1) + (E(e_1), e_1) - 1. \end{aligned}$$

Из равенства $CE + EC + DF - FD = 0$ получаем

$$0 = (CE(e_n), e_1) + (EC(e_n), e_1) + (DF(e_n), e_1) - \\ - (FD(e_n), e_1) = 1 + (E(e_1), e_1) + (D(e_1), e_1).$$

Полученные два равенства дают противоречие, что и доказывает предложение. $\triangleright$

Как показано в [232], пространство $\widetilde{M} = SU(2m)/Sp(m)$, $m > 1$, можно понимать как пространство кососимметричных матриц в $SU(2m)$. $G = SU(2m)/\{\pm I\}$ действует на таких матрицах по формуле $g : x \rightarrow gxg^t$, а $K = Sp(m)/\{\pm I\}$ — группа изотропии в точке

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $G = I_0(\widetilde{M})$, $\Gamma \subset G$ для любой конечной группы Γ переносов Клиффорда — Вольфа на $\widetilde{M}$, и любой элемент группы Γ представляется в $SU(2m)$ матрицей, сопряженной к некоторой матрице вида $\text{diag}\{a'; a, \dots, a\}$.

В книге [22] указано, что многообразие $\widetilde{M} = SU(2m)/Sp(m)$, $m > 1$, имеет размерность $(m-1)(2m+1)$ (п. 7.102, таблица 1) и может быть интерпретировано как пространство кватернионных структур на $\mathbb{C}^{2m}$, согласованных с эрмитовой структурой, или как множество согласованных с метрикой расслоений $S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^{2m-1} \rightarrow \mathbb{H}P^{m-1}$ (п. 10.125, таблица 2). Но для нас более важно следующее толкование этого многообразия.

Предложение 7.14. Пространство $\widetilde{M} = SU(2m)/Sp(m)$, $m > 1$, можно интерпретировать как множество всех киллинговых векторных полей единичной длины на S^{4m-1} , лежащих в алгебре Ли $su(2m) \subset so(4m)$.

$\triangleleft$ Доказательство сразу следует из вышеприведенного утверждения о том, что $\widetilde{M}$ можно понимать как множество кососимметричных матриц в $SU(2m) \subset SO(4m)$, и из теоремы 7.9, поскольку из этой теоремы следует, что $SO(2n) \cap so(2n)$ является в точности множеством всех единичных киллинговых векторных полей на S^{2n-1} . $\triangleright$

Аналогично предложению 7.14 мы получаем

Предложение 7.15. Пространство $O(2n)/U(n)$, $n \geq 1$ (со связной компонентой $SO(2n)/U(n)$), можно понимать как множество всех единичных векторных полей Киллинга на S^{2n-1} .

◁ По предложению 7.7 множество единичных киллинговых векторных полей на S^{2n-1} является одной орбитой относительно присоединенного действия группы $O(2n)$ (на алгебре Ли $\mathfrak{o}(2n) = \mathfrak{so}(2n)$). В качестве единичного векторного поля Киллинга на S^{2n-1} можно взять матрицу $U = \text{diag}(C, \dots, C) \in SO(2n) \cap \mathfrak{so}(2n)$, где C — один из двух элементов в $SO(2) \cap \mathfrak{so}(2)$. Ясно, что $U \in U(n) \cap \mathfrak{u}(n)$ и U лежит как в центре $U(n)$, так и в $\mathfrak{u}(n)$. Можно сказать больше. Поскольку $U^2 = -I_{2n}$, оператор U порождает стандартную комплексную алгебру $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ -линейных операторов на $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$. Тогда централизатор U в $O(2n)$, а, следовательно, стабилизатор $U \in \mathfrak{so}(2n)$ относительно присоединенного действия $O(2n)$, есть в точности $U(n)$ (см., например, примеры 22 и 23 в [50, разд. 1.2]). Отсюда следует утверждение предложения. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 51. Как утверждается в [22], пространство $SO(2n)/U(n)$ имеет размерность $n(n-1)$ и является пространством комплексных структур на $\mathbb{R}^{2n}$, согласованных со стандартной евклидовой структурой, или множеством согласованных с метрикой расслоений $S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$.

7.11.2. Классификация ограничено КВ-однородных пространств. С целью локального использования в этом параграфе сформулируем следующее следствие теорем 6.1, 6.5, 7.2 и 7.4.

Теорема 7.14. Риманово многообразие (M, g) является ограничено однородным по Клиффорду — Вольфу тогда и только тогда, когда оно метрически полно и каждая геодезическая γ в (M, g) является интегральной кривой киллингова векторного поля постоянной длины на (M, g) . Каждое риманово накрытие ограничено однородного по Клиффорду — Вольфу риманова многообразия само является ограничено однородным по Клиффорду — Вольфу. Универсальное риманово накрытие ограничено однородного по Клиффорду — Вольфу риманова многообразия является симметрическим и сильно однородным по Клиффорду — Вольфу.

В работе [232] Дж. А. Вольф получил следующий результат.

Теорема 7.15. Пусть Γ — группа скольжений универсального риманова накрытия $p: \widetilde{M} \rightarrow M$ полного связного локально симметрического риманова многообразия M . Тогда $\widetilde{M}$ — симметрическое пространство, а M однородно тогда и только тогда, когда Γ — группа переносов Клиффорда — Вольфа на $\widetilde{M}$.

Отметим, что M естественным образом отождествляется с фактор-пространством $\Gamma \backslash \widetilde{M}$, а Γ — с фундаментальной группой $\pi_1(M)$. В работах [34, 232] Дж. А. Вольф получил следующее уточнение теоремы 7.15 для особых пространств $\widetilde{M}$.

Теорема 7.16. *Если $\widetilde{M}$ — компактная простая односвязная группа Ли с биинвариантной метрикой, то $M = \Gamma \backslash \widetilde{M}$ однородно тогда и только тогда, когда Γ сопряжена в полной группе изометрий $\widetilde{M}$ группе левых сдвигов на элементы некоторой дискретной подгруппы B в $\widetilde{M}$, и M симметрично тогда и только тогда, когда B является центральной подгруппой в $\widetilde{M}$.*

Предложение 7.16. *Прямое метрическое произведение $M = M_1 \times \dots \times M_k$ неразложимых римановых многообразий является однородным локально симметрическим тогда и только тогда, когда каждый множитель однороден и локально симметричен. При этом векторное поле на M является киллинговым полем постоянной длины на M тогда и только тогда, когда оно является произведением киллинговых векторных полей постоянной длины на множителях; M — ограниченно однородно по Клиффорду — Вольфу тогда и только тогда, когда каждый множитель обладает этим свойством.*

◁ Достаточность в первом утверждении очевидна. Предположим, что M однородно и локально симметрично. Следствие 8.10 главы VII в [42] утверждает, что каждое вполне геодезическое подмногообразие однородного риманова многообразия M само однородно. В частности, каждый множитель M_i , $i = 1, \dots, k$, однороден. Поскольку локально симметричные римановы многообразия могут быть охарактеризованы равенством $\nabla R = 0$, где ∇ — связность Леви-Чивита, а R — тензор кривизны [58], то каждый множитель M_i локально симметричен. Тогда по теореме 7.15 получаем $M_i = \Gamma_i \backslash \widetilde{M}_i$, где Γ_i — группа переносов Клиффорда — Вольфа на $\widetilde{M}_i$, $i = 1, \dots, k$.

Достаточность во втором утверждении также очевидна. Предположим, что X — киллингово векторное поле постоянной длины на M . Из теоремы 3.28 следует, что X p -связано с единственным Γ -инвариантным киллинговым векторным полем Y постоянной длины на $\widetilde{M}$, где $p : \widetilde{M} \rightarrow \Gamma \backslash \widetilde{M}_1 \times \dots \times \widetilde{M}_k = M$, $\Gamma = \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k$, — естественная проекция. Так как $\widetilde{M}$ — односвязное и локально симметрическое, то оно симметрическое (см. [58]). Тогда вследствие

теоремы 3.27 однопараметрическая группа движений $\tilde{\gamma}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, порожденная киллинговым векторным полем Y постоянной длины на $\widetilde{M}$, состоит из переносов Клиффорда — Вольфа на $\widetilde{M}$. Согласно следствию 3.1.4 в [232], каждый перенос Клиффорда — Вольфа f на $\widetilde{M}$ однозначно представляется в виде $f = (f_1, \dots, f_k)$, где f_j , $j = 1, \dots, k$, — переносы Клиффорда — Вольфа на $\widetilde{M}_j$. Тогда $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}_1(t) \times \dots \times \tilde{\gamma}_k(t)$, где $\tilde{\gamma}_i(t)$ — переносы Клиффорда — Вольфа на $\widetilde{M}_i$, $i = 1, \dots, k$. Отсюда, из предложения 3.4 и теоремы 3.28 следует, что мы получили прямое произведение $Y = Y_1 \times \dots \times Y_k$ Γ_i -инвариантных киллинговых векторных полей постоянной длины на множителях $\widetilde{M}_i$, $i = 1, \dots, k$, которые p_i -связаны с киллинговыми векторными полями X_i постоянной длины на M_i относительно естественных проекций $p_i : \widetilde{M}_i \rightarrow \Gamma_i \backslash \widetilde{M}_i$, и $X = X_1 \times \dots \times X_k$.

Последнее утверждение следует из первых двух и теоремы 7.14. $\triangleright$

Предложение 7.17. Для каждого компактного однородного локально симметрического риманова многообразия M существует конечнолистное риманово покрывающее отображение $p_f : M \rightarrow M_f$ на компактное однородное локально симметрическое риманово многообразие M_f , имеющее вид прямого метрического произведения $M_f = T^m \times M_1 \times \dots \times M_k$, где T^m — (локально евклидов) тор, $M_i = \Gamma_i \backslash \widetilde{M}_i$, $i = 1, \dots, k$, с конечной группой Γ_i переносов Клиффорда — Вольфа на односвязном компактном неприводимом симметрическом римановом многообразии $\widetilde{M}_i$. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством всех киллинговых векторных полей постоянной длины на M и множеством всех киллинговых векторных полей постоянной длины на M_f такое, что векторному полю X на M соответствует единственное векторное поле Z на M_f со свойством $d(p_f)(X) = Z$, и наоборот. Более того, векторное поле Z на M_f является полем Киллинга постоянной длины тогда и только тогда, когда оно является прямым метрическим произведением $Z_0 \times Z_1 \times \dots \times Z_k$ киллинговых полей постоянной длины на T^m , M_j , $j = 1, \dots, k$.

$\triangleleft$ По теореме 7.15 $M = \Gamma \backslash (\widetilde{M}_0 \times \widetilde{M}_+)$ с группой Γ переносов Клиффорда — Вольфа односвязного симметрического пространства $\widetilde{M}$, где $\widetilde{M}_0 = \mathbb{E}^m$ и $\widetilde{M}_+ = \widetilde{M}_1 \times \dots \times \widetilde{M}_k$ — прямое метрическое произведение с неразложимыми компактными односвязными симметрическими множителями. Согласно следствию 3.1.4 в [232] любой элемент $f \in \Gamma$ единственным образом представляется в виде

$f = (f_0, f_1, \dots, f_k)$, где $f_j, j = 0, 1, \dots, k$, — переносы Клиффорда — Вольфа на $\widetilde{M}_j$. Ясно, что соответствие $f \in \Gamma \rightarrow f_j, j = 0, 1, \dots, k$, определяет гомоморфизм группы Γ на группу Γ_j переносов Клиффорда — Вольфа на $\widetilde{M}_j$, и $\Gamma \subset \Gamma_0 \times \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k$. Последнее включение определяет конечнолистное риманово накрывающее отображение

$$p_f : M \rightarrow M_f := \Gamma_0 \backslash E^m \times \Gamma_1 \backslash \widetilde{M}_1 \times \dots \times \Gamma_k \backslash \widetilde{M}_k := T^m \times M_1 \times \dots \times M_k.$$

Более того, векторное поле Y на $\widetilde{M}$ является киллинговым полем постоянной длины тогда и только тогда, когда оно является прямым произведением $Y_0 \times Y_1 \times \dots \times Y_k$ киллинговых векторных полей постоянной длины на $\widetilde{M}_j, j = 0, 1, \dots, k$, в силу предложения 7.16. Отсюда следует, что киллингово векторное поле Y постоянной длины на $\widetilde{M}$ инвариантно относительно всех элементов Γ тогда и только тогда, когда Y инвариантно относительно всех элементов в $\Gamma_0 \times \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k$. Таким образом, с помощью теоремы 3.28 мы получаем второе утверждение предложения. Последнее утверждение следует из предложения 7.16. $\triangleright$

Теорема 7.17. *Риманово многообразие M ограниченно однородно по Клиффорду — Вольфу тогда и только тогда, когда оно изометрично пространству $\Gamma \backslash (\mathbb{E}^m \times \widetilde{M}_1 \times \dots \times \widetilde{M}_k)$, где Γ — подгруппа группы $\Gamma_0 \times \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k$, Γ_0 — дискретная группа параллельных переносов на $\mathbb{E}^m$, $\widetilde{M}_i$ — круглая сфера размерности d_i и Γ_i — подгруппа в $SO(d_i + 1)$ вида 1) или 2), или 3), из теоремы 3.32 или $\widetilde{M}_i$ — компактная односвязная простая группа Ли с биинвариантной римановой метрикой и Γ_i — конечная группа левых переносов на $\widetilde{M}_i$.*

$\triangleleft$ *Необходимость.* Если M ограниченно КВ-однородно, то по теореме 7.14 его универсальное накрывающее пространство $\widetilde{M}$ КВ-однородно. Из теорем 7.1 и 7.15 следует, что M изометрично пространству $\Gamma \backslash (E^m \times \widetilde{M}_1 \times \dots \times \widetilde{M}_k)$, где пространства $\widetilde{M}_i$ указаны в формулировке теоремы 7.1 и Γ — дискретная группа переносов Клиффорда — Вольфа на $\widetilde{M}$. Можно определить группы $\Gamma_j, j = 0, 1, \dots, k$, переносов Клиффорда — Вольфа на $\widetilde{M}_j$ как в предложении 7.17. Тогда $\Gamma \subset \Gamma_0 \times \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_k$, а из теоремы 7.1 и предложения 7.17 следует, что M ограниченно однородно по Клиффорду — Вольфу тогда и только тогда, когда пространство $M_f := \Gamma_0 \backslash E^m \times \Gamma_1 \backslash \widetilde{M}_1 \times \dots \times \Gamma_k \backslash \widetilde{M}_k$ ограниченно однородно по Клиффорду — Вольфу.

В свою очередь, по предложению 7.16 это эквивалентно тому, что каждое пространство $\Gamma_0 \backslash E^m$, $\Gamma_1 \backslash \widetilde{M}_1$, ..., $\Gamma_k \backslash \widetilde{M}_k$ является ограничено КВ-однородным. Значит, Γ_0 — дискретная группа параллельных переносов на E^m , а $\Gamma_0 \backslash E^m$ является даже КВ-однородным.

Если $\widetilde{M}_i$ — компактная односвязная простая группа Ли с биинвариантной римановой метрикой, то можно считать по теореме 7.16, что Γ_i — конечная группа левых сдвигов на $\widetilde{M}_i$. Ясно, что для любой такой группы Γ_i каждое левоинвариантное векторное поле Y на $\widetilde{M}$ является киллинговым полем постоянной длины, и $\Gamma_i \backslash \widetilde{M}$ ограничено однородно по Клиффорду — Вольфу согласно теоремам 3.28 и 7.14.

Далее мы считаем, что $\widetilde{M}_i$ — круглая нечетномерная сфера, при этом $M_i = \Gamma_i \backslash \widetilde{M}_i$ является одним из пространств, описанных в теореме 3.32.

В первых двух случаях теоремы 3.32 пространство M_i — круглая сфера или вещественное проективное пространство нечетной размерности d_i . Следовательно, оно симметрично и ограничено КВ-однородно по теоремам 3.28, 7.1 и 7.14.

В третьем случае теоремы 3.32 для круглой сферы $\widetilde{M}_i \subset \mathbb{C}^{n_i}$ умножение на $\{\text{diag}(e^{2\pi i(1/q)}, \dots, e^{2\pi i(1/q)})\} \subset U(n_i)$ порождает группу Γ_i , равно как и стандартную комплексную алгебру $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ -линейных операторов на $\mathbb{R}^{2n_i} = \mathbb{C}^{n_i}$. Значит, централизатор Γ_i в $O(2n_i)$ совпадает с $U(n_i)$ (см., например, примеры 22 и 23 в [50, разд. 1.2]). Таким образом, $\Gamma_i \backslash \widetilde{M}_i$ ограничено КВ-однородно по теореме 7.14 и предложению 7.12.

В четвертом случае ясно, что централизатор Γ_i в $SO(d_i + 1)$ содержит группу $Sp(l_i)$ (действующую на вектор-столбцы умножениями слева). С другой стороны, любая бинарно диэдральная или бинарно полиэдральная группа не содержится в комплексном поле алгебры вещественных кватернионов $\mathbb{H}$ по теореме 2.6.7 в [34]. Значит, минимальной алгеброй над $\mathbb{R}$, содержащей все элементы такой группы, является алгебра $\mathbb{H}$. Теперь, используя еще раз примеры 22 и 23 из книги [50, разд. 1.2], мы получаем, что централизатор Γ_i в $SO(d_i + 1)$ — группа $Sp(l_i)$. Следовательно, $\Gamma_i \backslash \widetilde{M}_i$ не может быть ограничено КВ-однородным для $l_i \geq 2$ по теореме 7.14 и предложению 7.13. Случай $l_i = 2$ фактически соответствует ситуации, когда

$\widetilde{M}_i$ — компактная односвязная простая группа $SU(2) = Sp(1)$, и был рассмотрен в более общем контексте выше.

Отметим, что вышеприведенные рассуждения содержат также и доказательство достаточности в доказываемой теореме. $\triangleright$

Предложение 7.18. *Предположим, что $\widetilde{M}$ — круглая единичная сфера S^{2n-1} нечетной размерности $2n-1 \geq 3$, $\widetilde{M} \subset \mathbb{C}^n$, $d+1 = 2n$ и $\Gamma = \{\text{diag}(e^{2\pi i(p/q)}, \dots, e^{2\pi i(p/q)})\} \subset U(n)$, $0 \leq p < q$ с целым числом p для заданного натурального числа $q \geq 3$. Тогда пространство $M = \Gamma \backslash \widetilde{M}$ ограничено однородно по Клиффорду — Вольфу, но не однородно по Клиффорду — Вольфу.*

$\triangleleft$ Первое утверждение доказано в теореме 7.17. Докажем второе.

Группа Γ содержится в группе

$$C := \{\text{diag}(e^{2\pi it}, \dots, e^{2\pi it}) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset U(n).$$

Вложения $\{e\} \subset \Gamma \subset C$ индуцируют римановы субмерсии

$$p_1 : S^{2n-1} \rightarrow M, \quad p_2 : M \rightarrow \mathbb{C}P^n,$$

и их композицию

$$p = p_2 \circ p_1 : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^n,$$

являющуюся расслоением Хопфа. Радиус инъективности и диаметр пространства $\mathbb{C}P^n$ оба равны $\pi/2$. Рассмотрим произвольное число r , где $\pi/3 < r < \pi/2$. Поскольку p_2 — риманова субмерсия, существуют две точки $x_1, x_2 \in M$ такие, что $\rho_M(x_1, x_2) = r$. Утверждается, что не существует КВ-переносов f на M таких, что $f(x_1) = x_2$. Действительно, предположим, что такой перенос f существует. Тогда f индуцирован изометрией $\tilde{f}$ на S^{2n-1} , нормализующей Γ (см. доказательство теоремы 2.4.17 в [34]). Понятно, что $\tilde{f}$ нормализует группу C . Следовательно, $\tilde{f}$ и f индуцируют изометрию g на $\mathbb{C}P^n$ (подразумеваем, что $p_2(f(x)) = g(y)$ для всех точек $y \in \mathbb{C}P^n$ и $x \in p_2^{-1}(y)$). Тогда $\rho_{\mathbb{C}P^n}(y, g(y)) \leq r$ для любой точки $y \in \mathbb{C}P^n$ и существует единственное гладкое векторное поле X на $\mathbb{C}P^n$ такое, что $\text{Exp}_{\mathbb{C}P^n}(X(y)) = g(y)$ для каждой точки $y \in \mathbb{C}P^n$, поскольку $r < \pi/2$. Так как $\chi(\mathbb{C}P^n) > 0$, то существует точка $z \in \mathbb{C}P^n$ такая, что $X(z) = 0$. Это означает, что $f(x) \in p_2^{-1}(z)$ для любой точки $x \in p_2^{-1}(z)$. Теперь ясно, что равенство $\rho_M(x, f(x)) = r$ невозможно, потому что Γ -орбита точки x является π/q -плотной на окружности $p^{-1}(z) \subset S^{2n-1}$ и $\pi/q \leq \pi/3 < r$. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 52. В случае $n = 2$ предыдущее предложение дает пример ограниченно однородного по Клиффорду — Вольфу, но не являющегося однородным по Клиффорду — Вольфу фактор-пространства группы Ли $SU(2)/D$, где $C := \{\gamma(t), t \in [0, 2\pi)\}$ — максимальный тор в $SU(2)$ и $D := \{\gamma(2p\pi/q)\}$ с натуральным $q \geq 3$ и целым $0 \leq p < q$.

Предложение 7.19. Для каждой компактной односвязной простой группы Ли $\widetilde{M}$ с биинвариантной римановой метрикой существует конечная коммутативная подгруппа $F \subset \widetilde{M}$ такая, что $M = \widetilde{M}/F$ не является однородным по Клиффорду — Вольфу, но ограниченно однородно по Клиффорду — Вольфу.

◁ Пусть T — произвольный максимальный тор в $\widetilde{M}$, r — положительное вещественное число, меньшее половины радиуса инъективности $\widetilde{M}$, а фактор-пространство $N = \widetilde{M}/T$ снабжено фактор-метрикой. Можно взять в качестве F произвольную $r/2$ -плотную конечную подгруппу в T . Тогда можно показать, что любой элемент в $\text{Isom}(\widetilde{M})$, нормализующий группу Γ правых сдвигов пространства $\widetilde{M}$ на элементы из F , также нормализует группу C правых сдвигов на элементы T . Как следствие, по доказательству теоремы 2.7.13 в [34], любая изометрия M индуцирована изометрией $\widetilde{M}$, которая нормализует Γ , и, следовательно, C . Теперь рассмотрим естественную риманову субмерсию $p : M \rightarrow N$. Отметим, что N имеет положительную эйлерову характеристику по теореме 4.4. Теперь аналогично предложению 7.18 можно доказать, что существуют два элемента $x_1, x_2 \in M$ с условием $\rho_M(x_1, x_2) = 2r$, но не существует переноса Клиффорда — Вольфа f на M такого, что $f(x_1) = x_2$. ▷

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамс Дж. Ф. Лекции по группам Ли.—М.: Наука, 1979.—144 с.
2. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.—М.—Л.: Гостехиздат, 1948.—387 с.
3. Алексеевский Д. В. Компактные кватернионные пространства // Функцион. анализ и его прил.—1968.—Т. 2, № 2.—С. 11–20.
4. Алексеевский Д. В. Однородные римановы пространства отрицательной кривизны // Мат. сб.—1975.—Т. 96, № 1.—С. 93–117.
5. Алексеевский Д. В., Кимельфельд Б. Н. Структура однородных римановых пространств с нулевой кривизной Риччи // Функцион. анализ и его прил.—1975.—Т. 9, № 2.—С. 5–11.
6. Балабаев В. Е. Построение максимального числа линейно независимых векторных полей на сфере // Мат. заметки.—2000.—Т. 67, № 5.—С. 643–653.
7. Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
8. Берестовский В. Н. Компактные однородные многообразия с интегрируемыми инвариантными распределениями и скалярная кривизна // Мат. сб.—1995.—Т. 186, № 7.—С. 15–24.
9. Берестовский В. Н. Однородные многообразия с внутренней метрикой, I // Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 6.—С. 17–29.
10. Берестовский В. Н. Однородные G -пространства Буземана // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 2.—С. 3–15.
11. Берестовский В. Н. Однородные пространства с внутренней метрикой // Докл. АН СССР.—1988.—Т. 301, № 2.—С. 268–271.
12. Берестовский В. Н. Однородные римановы многообразия положительной кривизны Риччи // Мат. заметки.—1995.—Т. 58, № 3.—С. 334–340.
13. Берестовский В. Н., Вольпер Д. Е. Класс $U(n)$ -инвариантных римановых метрик на многообразиях, диффеоморфных сферам нечетной размерности // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 4.—С. 612–619.
14. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. Киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях // Сиб. мат. журн.—2008.—Т. 49, № 3.—С. 497–514.
15. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. О δ -однородных римановых многообразиях // Докл. РАН.—2007.—Т. 415, № 6.—С. 727–729.
16. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. О δ -однородных римановых многообразиях, II // Сиб. мат. журн.—2009.—Т. 50, № 2.—С. 214–222.
17. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. Об однородных по Клиффорду — Вольфу римановых многообразиях // Докл. РАН.—2008.—Т. 423, № 1.—С. 7–10.
18. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. Регулярные и квазирегулярные изометрические потоки на римановых многообразиях // Мат. тр.—2007.—Т. 10, № 2.—С. 3–18.

19. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. Чебышевская норма на алгебре Ли группы движений однородного финслерова многообразия // Современная математика и ее приложения. Алгебра.—2008.—Т. 60.—С. 98–122.
20. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. Ограниченно однородные по Клиффорду — Вольфу римановы многообразия // Сб. науч. статей междунар. школы-семинара «Ломоносовские чтения на Алтае» (Барнаул, 8–11 ноября 2011 г.). В 4 ч.—Барнаул: АлтГПА, 2011.—Ч. 1.—С. 51–67.
21. Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими.—М.: Мир, 1981.—325 с.
22. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. Т. 1, 2.—М.: Мир, 1990.—318 с.+385 с.
23. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований.—М.: Наука, 1980.—440 с.
24. Буземан Г. Геометрия геодезических.—М.: Физматлит, 1962.—507 с.
25. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Глава IX. Компактные вещественные группы Ли.—М.: Наука, 1986.—172 с.
26. Бурбаки Н. Общая топология. Главы III–VIII. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства.—М.: Наука, 1969.—392 с.
27. Валиев Ф. М. Точные оценки секционных кривизн однородных римановых метрик на пространствах Уоллача // Сиб. мат. журн.—1979.—Т. 20, № 2.—С. 248–262.
28. Винберг Э. Б. Инвариантные линейные связности на однородных пространствах // Тр. Моск. мат. о-ва.—1960.—Т. 9.—С. 191–210.
29. Винберг Э. Б. Инвариантные нормы в компактных алгебрах Ли // Функцион. анализ и его прил.—1968.—Т. 2, № 2.—С. 89–90.
30. Винберг Э. Б., Горбачевич В. В., Онищик А. Л. Структура групп и алгебр Ли // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления.—М.: ВИНТИ, 1990.—Т. 41.—С. 5–253.
31. Вольпер Д. Е. Секционные кривизны диагонального семейства $Sp(n+1)$ -инвариантных метрик на $(4n+3)$ -мерных сферах // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 6.—С. 1089–1100.
32. Вольпер Д. Е. Секционные кривизны нестандартных метрик на CP^{2n+1} // Сиб. мат. журн.—1999.—Т. 40, № 1.—С. 49–56.
33. Вольпер Д. Е. Семейство метрик на 15-мерной сфере // Сиб. мат. журн.—1997.—Т. 38, № 2.—С. 263–275.
34. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны.—М.: Наука, 1982.—480 с.
35. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Изд. 4-е, доп.—М.: Наука, 1988.—548 с.
36. Горбачевич В. В., Онищик А. Л. Группы Ли преобразований // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления.—М.: ВИНТИ, 1988.—Т. 20.—С. 103–240.
37. Громол Д., Клинггенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом.—М.: Мир, 1971.—343 с.
38. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры.—М.: Мир, 1978.—409 с.
39. Кайзер В. В. Сопряженные точки левоинвариантных метрик на группах Ли // Изв. вузов. Математика.—1990.—№ 11.—С. 27–37.
40. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства (сборник статей).—М.: ИЛ, 1949.—381 с.
41. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии.—М.: Наука, 1986.—224 с.

42. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2.—М.: Наука, 1981.—344 с.+428 с.
43. Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. тр.—2008.—Т. 11, № 2.—С. 115–147.
44. Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. тр.—2009.—Т. 12, № 1.—С. 40–116.
45. Лидский В. Б. О собственных значениях суммы и произведения эрмитовых матриц // Докл. АН СССР.—1950.—Т. 75.—С. 769–772.
46. Мантуров О. В. Однородные римановы многообразия с неприводимой группой изотропии // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.—1966.—Т. 13.—С. 68–145. Engl. transl.: Manturov O.V. Homogeneous Riemannian spaces with irreducible rotation group // Tensor and vector analysis.—Amsterdam: Gordon and Breach, 1998.—P. 101–192.
47. Никоноров Ю. Г. Векторные поля Киллинга и тензор кривизны риманова многообразия // Мат. тр.—(в печати).
48. Огникян А. А. Комбинаторное построение касательных векторных полей на сферах // Мат. заметки.—2008.—Т. 83, № 4.—С. 590–605.
49. Ониицк А. Л. Отношение включения между транзитивными компактными группами преобразований // Тр. Моск. мат. о-ва.—1962.—Т. 9.—С. 199–242.
50. Ониицк А. Л. Топология транзитивных групп преобразований.—М.: Физматлит, 1995.—384 с.
51. Смоленцев Н. К. Пространство римановых метрик // Современная математика и ее приложения. Геометрия.—2005.—Т. 31.—С. 69–147.
52. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии.—М.: Мир, 1970.—412 с.
53. Стинрод Н. Топология косых произведений.—М.: Изд-во иностр. лит., 1953.—275 с.
54. Сян У. И. Когомологическая теория топологических групп преобразований.—М.: Мир, 1979.—247 с.
55. Топоногов В. А. Метрическая структура римановых пространств неотрицательной кривизны, содержащих прямые линии // Сиб. мат. журн.—1964.—Т. 5, № 6.—С. 1358–1369.
56. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли.—М.: Мир, 1987.—302 с.
57. Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.—М.: МЦНМО, 2003.—216 с.
58. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.—М.: Мир, 1964.—533 с.
59. Ху Сы-цзян. Теория гомотопий.—М.: Мир, 1964.—467 с.
60. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства.—М.: Мир, 1970.—442 с.
61. Шарафутдинов В. А. Полные открытые многообразия неотрицательной кривизны // Сиб. мат. журн.—1974.—Т. 15, № 1.—С. 177–191.
62. Шарафутдинов В. А. Теорема Погорелова — Клингенберга для многообразий, гомеоморфных $\mathbb{R}^n$ // Сиб. мат. журн.—1977.—Т. 18, № 4.—С. 915–925.

63. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия.— М.: Изд-во иностр. лит., 1948.—158 с.
64. Якимова О. С. Слабо симметрические римановы многообразия, имеющие редуктивную группу изометрий // Мат. сб.—2004.—Т. 195, № 4.—С. 143–160.
65. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти.—М.: Изд-во иностр. лит., 1957.—153 с.
66. Abresh U., Meyer W. T. Injectivity radius estimates and sphere theorems // Comparison geometry / Ed. by K. Grove et al.—New York: Cambridge University Press, 1997.—P. 1–47.
67. Adams J. F. Lectures on exceptional Lie groups.—Chicago–London: The University of Chicago Press, 1996.—xiv+122 p.
68. Adams J. F. Vector fields on spheres // Ann. Math.—1962.—Vol. 75, № 3.—P. 603–632.
69. Adams J. F., Lax P. D., Phillips R. S. On matrices whose real linear combinations are non-singular // Proc. Amer. Math. Soc.—1965.—Vol. 16, № 2.—P. 318–322; correction: Ibid.—1966.—Vol. 17.—P. 945–947.
70. Akhiezer D. N., Vinberg E. B. Weakly symmetric spaces and spherical varieties // Transformation Groups.—1999.—Vol. 4, № 1.—P. 3–24.
71. Alekseevsky A. V., Alekseevsky D. V. Riemannian G -manifolds with one dimensional orbit space // Ann. Global Anal. Geom.—1993.—Vol. 11, № 3.—P. 197–211.
72. Alekseevsky D. V., Arvanitoyeorgos A. Riemannian flag manifolds with homogeneous geodesics // Trans. Amer. Math. Soc.—2007.—Vol. 359, № 8.—P. 3769–3789.
73. Alekseevsky D. V., Nikonov Yu. G. Compact Riemannian manifolds with homogeneous geodesics // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA).—2009.—Vol. 5 (093).—16 p.
74. Alexandroff P., Hopf H. Topologie, I. — Berlin: Springer, 1935.—viii+636 p.
75. Aloff S., Wallach N. An infinite family of distinct 7-manifolds admitting positively curved Riemannian structures // Bull. Amer. Math. Soc.—1975.—Vol. 81, № 1.—P. 93–97.
76. Ambrose W., Singer I. M. On homogeneous Riemannian manifolds // Duke Math. J.—1958.—Vol. 25, № 4.—P. 647–669.
77. Azencott R., Wilson E. Homogeneous manifolds with negative curvature, I // Trans. Amer. Math. Soc.—1976.—Vol. 215.—P. 323–362.
78. Azencott R., Wilson E. Homogeneous manifolds with negative curvature, II // Mem. Amer. Math. Soc.—1976.—Vol. 8, № 178.—iii+102 p.
79. Ball K. M. An elementary introduction to modern convex geometry // Flavors of Geometry / Ed. by S. Levy.—New York: Cambridge University Press, 1997.—Vol. 31.—P. 1–58.
80. Bangert V. On the lengths of closed geodesics on almost round spheres // Math. Z.—1986.—Vol. 191, № 4.—P. 549–558.
81. Barbano P. E. Automorphisms and quasi-conformal mappings of Heisenberg type groups // J. Lie Theory.—1998.—Vol. 8, № 2.—P. 255–277.
82. Bellaïche A., Risler J.-J., eds. Sub-Riemannian Geometry // Progress in Mathematics.—Basel: Birkhäuser, 1996.—Vol. 144.—viii+393 p.
83. Belgun F., Moroianu A., Semmelmann U. Symmetries of contact metric manifolds // Geom. Dedicata.—2003.—Vol. 101, № 1.—P. 203–216.

84. *Bérard Bergery L.* Les variétés riemanniennes invariantes homogènes simplement connexes de dimension impaire à courbure strictement positive // *J. Math. Pures Appl. Ser. IX.*—1976.—Vol. 55, № 1.—P. 47–68.
85. *Bérard Bergery L.* Sur la courbure des métriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogènes // *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*—1978.—Vol. 11, № 4.—P. 543–576.
86. *Berestovskii V. N., Guijarro L.* A metric characterization of Riemannian submersions // *Ann. Global Anal. Geom.*—2000.—Vol. 18, № 6.—P. 577–588.
87. *Berestovskii V. N., Nikitenko E. V., Nikonorov Yu. G.* Classification of generalized normal homogeneous Riemannian manifolds of positive Euler characteristic // *Differential Geom. Appl.*—2011.—Vol. 29, № 4.—P. 533–546.
88. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* Clifford–Wolf homogeneous Riemannian manifolds // *J. Differ. Geom.*—2009.—Vol. 82, № 3.—P. 467–500.
89. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* Killing vector fields of constant length on locally symmetric Riemannian manifolds // *Transformation Groups.*—2008.—Vol. 13, № 1.—P. 25–45.
90. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* On δ -homogeneous Riemannian manifolds // *Differential Geom. Appl.*—2008.—Vol. 26, № 5.—P. 514–535.
91. *Berestovskii V. N., Plaut C.* Homogeneous spaces of curvature bounded below // *J. Geom. Anal.*—1999.—Vol. 9, № 2.—P. 203–219.
92. *Berger M.* Les variétés riemanniennes homogènes normales à courbure strictement positive // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. Sér. 3.*—1961.—Vol. 15, № 3.—P. 179–246.
93. *Berger M.* Trois remarques sur les variétés riemanniennes à courbure positive // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A–B.*—1966.—Vol. 263.—P. 76–78.
94. *Berndt J., Kowalski O., Vanhecke L.* Geodesics in weakly symmetric spaces // *Ann. Global Anal. Geom.*—1997.—Vol. 15, № 2.—P. 153–156.
95. *Berndt J., Tricerri F., Vanhecke L.* Generalized Heisenberg groups and Damek–Ricci harmonic spaces.—Berlin: Springer, 1995.—viii+125 p.—(Lecture Notes in Math., Vol. 1598).
96. *Bianchi L.* Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni.—Pisa: Spoerri, 1918.—vi+590 p.
97. *Blair D.* Contact manifolds in Riemannian geometry.—Berlin–New York: Springer Verlag, 1976.—vi+146 p.—(Lecture Notes in Math., Vol. 509).
98. *Bochner S.* Vector fields and Ricci curvature // *Bull. Amer. Math. Soc.*—1946.—Vol. 52, № 9.—P. 776–797.
99. *Bolsinov A. V.* Integrable geodesic flows on Riemannian manifolds // *J. of Math. Sci.*—2004.—Vol. 123, № 4.—P. 4185–4197.
100. *Bolsinov A. V., Jovanović B.* Noncommutative Integrability, Moment Map and Geodesic Flows // *Ann. Global Anal. Geom.*—2003.—Vol. 23, № 4.—P. 305–322.
101. *Borel A.* Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori // *Bull. Amer. Math. Soc.*—1949.—Vol. 55, № 6.—P. 580–587.
102. *Borel A.* Le plant projectif des octaves et les spheres comme espaces homogènes // *C. R. Acad. Sci. Paris.*—1950.—Vol. 230.—P. 1378–1380.
103. *Borel A., de Siebenthal J.* Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos // *Comment. Math. Helv.*—1949.—Vol. 23, № 1.—P. 200–221.

104. *Bott R.* Vector fields and characteristic numbers // *Michigan Math. J.*—1967.—Vol. 14, № 2.—P. 231–244.
105. *Boyer C., Galicki K.* On Sasakian–Einstein geometry // *Intern. J. Math.*—2000.—Vol. 11, № 7.—P. 873–909.
106. *Brendle S.* Ricci flow and the sphere theorem.—Providence (R. I.): Amer. Math. Soc., 2010.—viii+176 p.—(Graduate Stud. in Math. Vol. 111).
107. *Cartan É., Schouten J. A.* On Riemannian geometries admitting an absolute parallelism // *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.*—1926.—Vol. 29.—P. 933–946.
108. *Cheeger J., Gromoll D.* On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature // *Ann. Math.*—1972.—Vol. 96, № 3.—P. 413–443.
109. *Cohn-Vossen S.* Existenz kürzester Wege // *Compositio Math.*—1936.—Vol. 3.—P. 441–452.
110. *Crandall G., Dódziuk J.* Integral structures on H -type Lie algebras // *J. Lie Theory.*—2002.—Vol. 12, № 1.—P. 69–79.
111. *Damek E., Ricci F.* A class of nonsymmetric harmonic Riemannian spaces // *Bull. Amer. Math. Soc.*—1992.—Vol. 27, № 1.—P. 139–142.
112. *D'Atri J. E., Nickerson H. K.* The existence of special orthonormal frames // *J. Differ. Geom.*—1968.—Vol. 2, № 4.—P. 393–409.
113. *D'Atri J. E., Ziller W.* Naturally reductive metrics and Einstein metrics on compact Lie groups // *Mem. Amer. Math. Soc.*—1979.—Vol. 18, № 215.—iii+72 p.
114. *Deng S., Hou Z.* The group of isometries of a Finsler Space // *Pacific J. Math.*—2002.—Vol. 207, № 1.—P. 149–155.
115. *Dotti Miatello I., Miatello R. J.* Transitive isometry groups with noncompact isotropy // *Pacific J. Math.*—1988.—Vol. 131, № 1.—P. 167–178.
116. *Dušek Z.* Explicit geodesic graphs on some H -type groups // *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Ser. II.*—2002.—Vol. 69.—P. 77–88.
117. *Dušek Z.* Structure of geodesics in a 13-dimensional group of Heisenberg type // *Proc. Coll. Diff. Geom. in Debrecen.*—2001.—P. 95–103.
118. *Dušek Z.* Structure of geodesics in the flag manifold $SO(7)/U(3)$ // *Differential geometry and its application: Proc. of the 10th Intern. Conf. Dga 2007 Olomouc, Czech Republic, 27–31 August 2007.*—World Scientific, 2008.—P. 89–98.
119. *Dušek Z., Kowalski O., Nikčević S.* New examples of Riemannian g. o. manifolds in dimension 7 // *Differential Geom. Appl.*—2004.—Vol. 21, № 1.—P. 65–78.
120. *Eberlein P.* Clifford algebras (Lecture notes).—URL: <http://www.math.unc.edu/Faculty/pbe/publications>.
121. *Eberlein P., Heber T.* Quarter pinched homogeneous spaces of negative curvature // *Intern. J. Math.*—1996.—Vol. 7, № 4.—P. 441–500.
122. *Eckmann B.* Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz–Radon über die Komposition quadratischer Formen // *Comment. Math. Helv.*—1943.—Vol. 15, № 1.—P. 358–366.
123. *Eliasson H. I.* Die Krümmung des Raumes $Sp(2)/SU(2)$ von Berger // *Math. Ann.*—1966.—Vol. 164, № 4.—P. 317–327.
124. *Epstein D. B. A.,* Periodic flows on three-manifolds // *Ann. Math.*—1971.—Vol. 95, № 1.—P. 68–82.
125. *Epstein D. B. A., Vogt E.* A counterexample to the periodic orbit conjecture in codimension 3 // *Ann. Math.*—1978.—Vol. 108, № 3.—P. 539–552.
126. *Eschenburg J.-H., Kollross A., Shankar K.* Free, isometric circle actions on compact symmetric spaces // *Geom. Dedicata.*—2003.—Vol. 102, № 1.—P. 35–44.

127. *Falcitelli M., Ianus S., Pastore A. M.* Riemannian submersions and related topics.—New Jersey: World Scientific, 2004.—xiv+277 p.
128. *Fels M. E., Renner A. G.* Non-reductive homogeneous pseudo-Riemannian manifolds of dimension four // *Canad. J. Math.*—2006.—Vol. 58, № 2.—P. 282–331.
129. *Freudenthal H.* Clifford-Wolf-Isometrien symmetrischer Räume // *Math. Ann.*—1963.—Vol. 150, № 2.—P. 136–149.
130. *Gilbert J., Murray M.* Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.—viii+334 p.
131. *Gordon C.* Homogeneous Riemannian manifolds whose geodesics are orbits // *Topics in geometry: in memory of Joseph D'Atri.*—Boston: Birkhäuser, 1996.—P. 155–174.—(Progress in Nonlinear Differential Equations. Vol. 20).
132. *Gordon C., Kerr M.* New homogeneous Einstein metrics of negative Ricci curvature // *Ann. Global Anal. Geom.*—2001.—Vol. 19, № 1.—P. 75–101.
133. *Gromoll D., Grove K.* A generalization of Berger's rigidity theorem for positively curved manifolds // *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*—1987.—Vol. 20, № 2.—P. 227–239.
134. *Gromoll D., Meyer W.* An exotic sphere with nonnegative sectional curvature // *Ann. Math.*—1974.—Vol. 100, № 2.—P. 401–406.
135. *Grove K., Ziller W.* Cohomogeneity one manifolds with positive Ricci curvature // *Invent. Math.*—2002.—Vol. 149, № 3.—P. 619–646.
136. *Heber J.* Noncompact homogeneous Einstein spaces // *Invent. Math.*—1998.—Vol. 133, № 2.—P. 279–352.
137. *Heber J.* On harmonic and asymptotically harmonic homogeneous spaces // *Geom. Funct. Anal.*—2006.—Vol. 16, № 4.—P. 869–890.
138. *Heintze E.* On homogeneous manifolds of negative curvature // *Math. Ann.*—1974.—Vol. 211, № 1.—P. 23–34.
139. *Heintze E.* The curvature of $SU(5)/Sp(2) \times S^1$ // *Invent. Math.*—1971.—Vol. 13, № 3.—P. 205–212.
140. *Helgason S.* Totally geodesic spheres in compact symmetric spaces // *Math. Ann.*—1966.—Vol. 165, № 4.—P. 309–317.
141. *Hopf H., Rinow W.* Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche // *Comment. Math. Helv.*—1931.—Vol. 3, № 1.—P. 209–225.
142. *Hopf H., Samelson H.* Ein Satz über die Wirkungräume geschlossener Liescher Gruppen // *Comment. Math. Helv.*—1940/1941.—Vol. 13, № 1.—P. 240–251.
143. *Huang H.-M.* Some remarks on the pinching problems // *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.*—1981.—Vol. 9, № 2.—P. 321–340.
144. *Hurwitz A.* Über die Komposition der quadratischer Formen // *Math. Ann.*—1922.—Vol. 88, № 1–2.—P. 1–25.
145. *John F.* Extremum problems with inequalities as subsidiary condition // *Courant Anniversary Volume.*—New York: Interscience, 1948.—P. 187–204.
146. *Jovanović B.* Geodesic flows on Riemannian g. o. spaces // *Regular and Chaotic Dynamics.*—2011.—Vol. 16, № 5.—P. 504–513.
147. *Kaplan A.* On the geometry of groups of Heisenberg type // *Bull. London Math. Soc.*—1983.—Vol. 15, № 1.—P. 35–42.
148. *Karcher H.* Submersions via Projections // *Geom. Dedicata.*—1999.—Vol. 74, № 3.—P. 249–260.
149. *Kerr M.* A deformation of quaternionic hyperbolic space // *Proc. Amer. Math. Soc.*—2006.—Vol. 134, № 2.—P. 559–569.

150. Kerr M. Some new homogeneous Einstein metrics on symmetric spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1996.—Vol. 348, № 1.—P. 153–171.
151. Killing W. Über die Grundlagen der Geometrie // J. Reine Angew. Math.—1892.—Vol. 109.—P. 121–186.
152. Kobayashi S. Fixed points of isometries // Nagoya Math. J.—1958.—Vol. 13.—P. 63–68.
153. Kobayashi S. Homogeneous Riemannian manifolds of negative curvature // Tohoku Math. J.—1962.—Vol. 14, № 14.—P. 413–415.
154. Kostant B. Holonomy and the Lie algebra of infinitesimal motions of a Riemannian manifold // Trans. Amer. Math. Soc.—1955.—Vol. 80, № 2.—P. 520–542.
155. Kostant B. On convexity, the Weil group and the Iwasawa decomposition // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.—1973.—Vol. 6, № 4.—P. 413–455.
156. Kostant B. On differential geometry and homogeneous spaces, I, II // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.—1956.—Vol. 42.—P. 258–261, 354–357.
157. Kostant B. On holonomy and homogeneous spaces // Nagoya Math. J.—1957.—Vol. 12.—P. 31–54.
158. Kostant B. Root systems for Levi factors and Borel-de Siebenthal theory // Symmetry and spaces: in honor of Gerry Schwarz.—Boston: Birkhäuser, 2010.—P. 129–152.—(Progress in Mathematics. Vol. 278).
159. Kowalski O., Nikčević S. On geodesic graphs of Riemannian g. o. spaces // Arch. Math.—1999.—Vol. 73, № 3.—P. 223–234.
160. Kowalski O., Nikčević S., Vlášek Z. Homogeneous geodesics in homogeneous Riemannian manifolds — examples // Geometry and Topology of Submanifolds, X (Beijing/Berlin, 1999).—River Edge, New Jersey: World Scientific, 2000.—P. 104–112.
161. Kowalski O., Szenthe J. On the existence of homogeneous geodesics in homogeneous Riemannian manifolds // Geom. Dedicata.—2000.—Vol. 81, № 1–3.—P. 209–214; correction: Geom. Dedicata.—2001.—Vol. 84, № 1–3.—P. 331–332.
162. Kowalski O., Vanhecke L. Riemannian manifolds with homogeneous geodesics // Boll. Unione Mat. Ital. Ser. B.—1991.—Vol. 5, № 1.—P. 189–246.
163. Krämer M. Eine Klassifikation bestimmter Untergruppen kompakter zusammenhängender Liegruppen // Comm. Alg.—1975.—Vol. 3, № 8.—P. 691–737.
164. Krämer M. Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen // Compositio Math.—1979.—Vol. 38, № 2.—P. 129–153.
165. Kreck M., Stolz S. Some nondiffeomorphic homeomorphic homogeneous 7-manifolds with positive sectional curvature // J. Differ. Geom.—1991.—Vol. 33, № 2.—P. 465–486.
166. Lacombe E. A. Mechanical systems with symmetry on homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc.—1973.—Vol. 185.—P. 477–491.
167. Lauret J. Commutative spaces which are not weakly symmetric // Bull. London Math. Soc.—1998.—Vol. 30, № 1.—P. 29–37.
168. Leite M. L., Miatello I. D. Metrics of negative Ricci curvature on $SL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 3$ // J. Differ. Geom.—1982.—Vol. 17, № 4.—P. 635–641.
169. Lewis A. S. Convex analysis on Cartan subspaces // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications.—2000.—Vol. 42, № 5.—P. 813–820.
170. Lewis A. S. Group invariance and convex matrix analysis // SIAM. J. Matrix Anal. and Appl.—1996.—Vol. 17, № 4.—P. 927–949.

171. *Lindenstrauss J., Milman V. D.* The local theory of normed spaces and its application to convexity // Handbook of convex geometry.—Amsterdam: Elsevier, 1993.—P. 1149–1220.
172. *Lohkamp J.* Metrics of negative Ricci curvature // Ann. Math.—1994.—Vol. 140, № 3.—P. 655–683.
173. *Mao Y.* A converse of the Gelfand theorem // Proc. Amer. Math. Soc.—1997.—Vol. 125, № 9.—P. 2699–2702.
174. *Michor P. W.* Isometric actions of the Lie groups and invariants // Lecture course at the University of Vienna, 1996/1997.—URL: <http://www.mat.univie.ac.at/michor/tgbook.pdf>.
175. *Milnor J.* Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math.—1976.—Vol. 21, № 3.—P. 293–329.
176. *Mimura M., Toda H.* Topology of Lie groups, I and II / Transl. of Math. Monographs. Vol. 91.—Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1991.—iv+451 p.
177. *Montgomery D., Samelson H.* Groups transitive on the n -dimensional torus // Bull. Amer. Math. Soc.—1943.—Vol. 49, № 6.—P. 455–456.
178. *Montgomery D., Samelson H.* Transformation groups of spheres // Ann. Math.—1943.—Vol. 44, № 3.—P. 454–470.
179. *Montgomery D., Yang C. T.* On homotopy seven-spheres that admit differentiable pseudo-free circle actions // Michigan Math. J.—1973.—Vol. 20, № 3.—P. 193–216.
180. *Myers S. B.* Riemannian manifolds with positive mean curvature // Duke Math. J.—1941.—Vol. 8, № 2.—P. 401–404.
181. *Myers S. B., Steenrod N.* The group of isometries of Riemannian manifold // Ann. Math.—1939.—Vol. 40, № 2.—P. 400–416.
182. *Nash J. C.* Positive Ricci curvature on fibre bundles // J. Differ. Geom.—1979.—Vol. 14, № 2.—P. 241–254.
183. *Neretin Yu. A.* A construction of finite-dimensional faithful representation of Lie algebra // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.—2003.—Vol. 71.—P. 159–161.
184. *Neretin Yu. A.* On Jordan angles and the triangle inequality in Grassmann manifolds // Geom. Dedicata.—2001.—Vol. 86, № 1–3.—P. 81–92.
185. *Nguyễn H. D.* Compact weakly symmetric spaces and spherical pairs // Proc. Amer. Math. Soc.—2000.—Vol. 128, № 11.—P. 3425–3433.
186. *Nikolaev I. G.* Stability problems in a theorem of F. Schur // Comment. Math. Helv.—1995.—Vol. 70, № 2.—P. 210–234.
187. *Nikonorov Yu. G.* Compact homogeneous Einstein 7-manifolds // Geom. Dedicata.—2004.—Vol. 109.—P. 7–30.
188. *Nikonorov Yu. G.* Geodesic orbit manifolds and Killing fields of constant length // Hiroshima Math. J.—2013.—(to appear).—[available at <http://arxiv.org/abs/1104.2664>].
189. *Nomizu K.* Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. J. Math.—1954.—Vol. 76, № 1.—P. 33–65.
190. *Nomizu K.* On local and global existence of Killing vector fields // Ann. Math.—1960.—Vol. 72, № 1.—P. 105–120.
191. *O'Neill B.* The fundamental equations of a submersion // Michigan Math. J.—1966.—Vol. 13, № 4.—P. 459–469.

192. *Onishchik A. L.* The group of isometries of a compact Riemannian homogeneous space // Differential geometry and its applications (Eger, 1989). Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 56.—Amsterdam: North-Holland, 1992.—P. 597–616.
193. *Ozols V.* Clifford translations of symmetric spaces // Proc. Amer. Math. Soc.—1974.—Vol. 44, № 1.—P. 169–175.
194. *Ozols V.* Periodic orbits of isometric flows // Nagoya Math. J.—1972.—Vol. 48.—P. 160–172.
195. *Pantilie R., Wood J. C.* Topological restrictions for circle actions and harmonic morphisms // Manuscripta Math.—2003.—Vol. 110, № 3.—P. 351–364.
196. *Penrose R.* Techniques of differential topology in relativity.—Philadelphia, PA: SIAM, 1972.—viii+72 p.
197. *Perelman G.* Proof of the soul conjecture of Cheeger and Gromoll // J. Differ. Geom.—1994.—Vol. 40, № 1.—P. 209–212.
198. *Petersen P., Tao T.* Classification of almost quarter-pinched manifolds // Proc. Amer. Math. Soc.—2009.—Vol. 137, № 7.—P. 2437–2440.
199. *Püttmann T.* Optimal pinching constants of odd-dimensional homogeneous spaces // Invent. Math.—1999.—Vol. 138, № 3.—P. 631–684.
200. *Radon J.* Lineare Scharen orthogonaler Matrizen // Abh. Math. Sem. Hamburg.—1921.—Vol. 1.—P. 1–14.
201. *Reinhart B. L.* Closed metric foliations // Michigan Math. J.—1961.—Vol. 8, № 1.—P. 7–9.
202. *Ricci G., Levi-Chivita T.* Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications // Math. Ann.—1901.—Vol. 54.—P. 125–201.
203. *Rodionov E. D., Slavskii V. V.* Curvatures estimations of left invariant Riemannian metrics on three dimensional Lie groups // Differential Geometry and Application. Satellite Conference of ICM in Berlin. Aug. 10–14, 1998, Brno Masaryk University in Brno (Czech Republic).—Brno, 1999.—P. 111–126.
204. *Sagle A., Winter D. J.* On homogeneous spaces and reductive subalgebras of simple Lie algebras // Trans. Amer. Math. Soc.—1967.—Vol. 128, № 1.—P. 142–147.
205. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tohoku Math. J.—1958.—Vol. 10, № 3.—P. 338–354; II: 1962.—Vol. 14, № 2.—P. 146–155.
206. *Selberg A.* Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces, with applications to Dirichlet series // J. Indian Math. Soc.—1956.—Vol. 20.—P. 47–87.
207. *Shchetinin A. N.* On a class of compact homogeneous spaces, I // Ann. Global Anal. Geom.—1988.—Vol. 6, № 2.—P. 119–140.
208. *Shchetinin A. N.* On a class of compact homogeneous spaces, II // Ann. Global Anal. Geom.—1990.—Vol. 8, № 3.—P. 227–247.
209. *Sullivan D.* A counterexample to the periodic orbit conjecture // Publ. Math. IHES.—1976.—Vol. 46.—P. 5–14.
210. *Sullivan D.* A foliation of geodesics is characterized by having no «tangent homologies» // J. Pure Appl. Algebra.—1978.—Vol. 13, № 1.—P. 101–104.
211. *Synge J. L.* On the connectivity of spaces of positive curvature // Quart. J. Math. Ser. 1.—1936.—Vol. 7, № 1.—P. 316–320.
212. *Szenthe J.* Sur la connexion naturelle à torsion nulle // Acta Sci. Math. (Szeged).—1976.—Vol. 38, № 3–4.—P. 383–398.

213. *Tamaru H.* Riemannian geodesic orbit metrics on fiber bundles // *Algebras Groups Geom.*—1998.—Vol. 15.—P. 55–67.
214. *Tamaru H.* Riemannian g. o. spaces fibered over irreducible symmetric spaces // *Osaka J. Math.*—1999.—Vol. 36.—P. 835–851.
215. *Tanno S.* Killing vectors and geodesic flow vectors on tangent bundles // *J. Reine Angew. Math.*—1976.—Vol. 282.—P. 162–171.
216. *Tóth G. Z.* On Lagrangian and Hamiltonian systems with homogeneous trajectories // *J. Phys. A: Math. Theor.*—2010.—Vol. 43, № 38 (385206).—19 p.
217. *Tuschmann W.* On the structure of compact simply connected manifolds of positive sectional curvature // *Geom. Dedicata.*—1997.—Vol. 67, № 1.—P. 107–116.
218. *Verdiani L., Ziller W.* Positively curved homogeneous metrics on spheres // *Math. Zeitschrift.*—2009.—Vol. 261, № 3.—P. 473–488.
219. *Wadsley A. W.* Geodesic foliations by circles // *J. Differ. Geom.*—1975.—Vol. 10, № 4.—P. 541–549.
220. *Wallach N. R.* Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature // *Ann. Math.*—1972.—Vol. 96, № 2.—P. 277–295.
221. *Wang H. C.* Homogeneous spaces with non-vanishing Euler characteristic // *Ann. Math.*—1949.—Vol. 50, № 4.—P. 925–953.
222. *Wang M., Ziller W.* Existence and non-existence of homogeneous Einstein metrics // *Invent. Math.*—1986.—Vol. 84, № 1.—P. 177–194.
223. *Wang M., Ziller W.* On isotropy irreducible Riemannian manifolds // *Acta Math.*—1991.—Vol. 166.—P. 223–261.
224. *Weinstein A.* A fixed point theorem for positively curved manifolds // *J. Math. Mech.*—1969.—Vol. 18, № 2.—P. 149–153.
225. *Wilking B.* A duality theorem for Riemannian foliations in nonnegative sectional curvature // *Geom. Funct. Anal.*—2007.—Vol. 17, № 4.—P. 1297–1320.
226. *Wilking B.* Index parity of closed geodesics and rigidity of Hopf fibrations // *Invent. Math.*—2001.—Vol. 144, № 2.—P. 281–295.
227. *Wilking B.* The normal homogeneous space $SU(3) \times SO(3)/U(2)$ has positive sectional curvature // *Proc. Amer. Math. Soc.*—1999.—Vol. 127, № 4.—P. 1191–1194.
228. *Wolf J. A.* Elliptic spaces in Grassmann manifolds // *Illinois J. Math.*—1963.—Vol. 7, № 3.—P. 447–462.
229. *Wolf J. A.* Geodesic spheres in Grassmann manifolds // *Illinois J. Math.*—1963.—Vol. 7, № 3.—P. 425–446.
230. *Wolf J. A.* Harmonic Analysis on Commutative Spaces.—University of California, Berkeley: Amer. Math. Soc., 2007.—xvi+387 p.
231. *Wolf J. A.* Homogeneity and bounded isometries in manifolds of negative curvature // *Illinois J. Math.*—1964.—Vol. 8, № 1.—P. 14–18.
232. *Wolf J. A.* Locally symmetric homogeneous spaces // *Comment. Math. Helv.*—1962/1963.—Vol. 37.—P. 65–101.
233. *Wolf J. A.* On the geometry and classification of absolute parallelisms, I // *J. Differ. Geom.*—1972.—Vol. 6, № 3.—P. 317–342.
234. *Wolf J. A.* On the geometry and classification of absolute parallelisms, II // *J. Differ. Geom.*—1972.—Vol. 7, № 1–2.—P. 19–44.
235. *Wolf J. A.* Sur la classification des variétés riemanniennes homogènes à courbure constante // *C. R. Acad. Sci. Paris.*—1960.—Vol. 250.—P. 3443–3445.

-
236. Wolf J. A. The geometry and structure of isotropy irreducible homogeneous spaces // Acta Math.—1968.—Vol. 120.—P. 59–148; correction: Acta Math.—1984.—Vol. 152.—P. 141–142.
237. Wolf J. A. Vincent's conjecture on Clifford translations of the sphere // Comment. Math. Helv.—1961.—Vol. 36.—P. 33–41.
238. Yamabe H. On an arcwise connected subgroup of a Lie group // Osaka Math. J.—1950.—Vol. 2, № 1.—P. 13–14.
239. Yang C. T. On problem of Montgomery // Proc. Amer. Math. Soc.—1957.—Vol. 8, № 2.—P. 255–257.
240. Ziller W. Homogeneous Einstein metrics on spheres and projective spaces // Math. Ann.—1982.—Vol. 259.—P. 351–358.
241. Ziller W. The Jacobi equation on naturally reductive compact Riemannian homogeneous spaces // Comment. Math. Helv.—1977.—Vol. 52.—P. 573–590.
242. Ziller W. Weakly symmetric spaces // Topics in geometry: in memory of Joseph D'Atri.—Boston: Birkhäuser, 1996.—P. 355–368.—(Progress in Nonlinear Differential Equations. Vol. 20).
243. Zvengrowski P. Canonical vector Fields on Spheres // Comment. Math. Helv.—1968.—Vol. 43.—P. 341–347.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- δ -вектор, 294
- δ -заземленность, 75
 - пары, 226
- δ -перенос, 271

- СК*-пространство, 359

- Алгебра Клиффорда, 366
- Алгебра Ли,
 - коммутативная, 79
 - компактная, 100
 - комплексная, 111
 - нильпотентная, 90
 - полупростая, 89
 - простая, 89
 - разрешимая, 90
 - унимодулярная, 91
- Алгебра Ли группы Ли, 78

- Вариация геодезических, 58
- Векторное поле, 31
 - параллельное вдоль кривой, 57
- Вещественная форма комплексной алгебры Ли, 111
 - компактная, 112
- Внутренняя метрика, 323
- Внутренняя метрика на римановом многообразии, 65
- Вполне геодезическое подпространство, 255

- Геодезическая, 57
 - однородная, 237
- Геодезически орбитальное пространство, 238
- Геодезический вектор, 242
- Геодезический граф, 246
- Геодезический поток, 61
- Геодезическое векторное поле, 60
- Гладкая кривая, 53
- Гладкий путь, 32, 53
- Гладкое действие группы Ли, 87
- ГО-многообразие, 238
- ГО-пространство, 238
 - собственное, 262
- Гомоморфизм групп Ли, 77
- Группа Вейля,
 - компактной алгебры Ли, 106
 - компактной группы Ли, 106
 - корневой системы, 107
- Группа Ли, 77
 - нильпотентная, 90
 - разрешимая, 90
 - унимодулярная, 91

- Дизъюнктные модули, 254
- Дифференциал функции, 34
- Дифференцирование алгебры Ли, 92
 - внутреннее, 93
- Длина гладкого пути, 53

- Единичная сфера Радона, 371
- Зеркало, 107
- Идеал алгебры Ли, 89
- Изометрия риманова многообразия, 117
- Изоморфизм групп Ли, 77
- Инвариантная билинейная симметричная форма, 100
- Инвариантная норма, 113
- Инвариантное скалярное произведение, 113
- Интегральная кривая векторного поля, 36
- Касательное векторное пространство, 26
- Касательное многообразие, 30
- Касательное расслоение, 31
- Касательный вектор, 25
- Киллингово векторное поле, 118
- постоянной длины,
 - — квазирегулярное, 130
 - — регулярное, 130
- Ковариантная производная, 42
- Комплексификация вещественной алгебры Ли, 111
- Корень,
- длинный, 109
 - короткий, 109
 - отрицательный, 108
 - положительный, 108
 - простой, 108
- Корень компактной алгебры Ли, 106
- Корень компактной группы Ли, 106
- Корневая система, 107
- неприводимая, 108
 - приведенная, 107
- Кривизна, 51
- Риччи, 51
 - секционная, 51
- Критерий,
- Картана, 91
 - полупростоты, 91
- Левинвариантное векторное поле, 77
- Линейная группа изотропии, 88
- Метрика Сасаки, 163
- Метрический тензор, 43
- Метрический эндоморфизм, 204
- Метрическое пространство,
- δ -однородное, 271
 - ограничено δ -однородное, 272
 - ограничено однородное по Клиффорду — Вольфу, 272
 - однородное по Клиффорду — Вольфу, 271
 - сильно однородное по Клиффорду — Вольфу, 355
- Многообразие, 23
- гладкое, 23
 - риманово, 43
- Многообразие с внутренней метрикой,
- обобщенное нормальное однородное, 272, 329
- Модуль Клиффорда, 367
- Мономорфизм групп Ли, 77
- Нильрадикал алгебры Ли, 90
- Нормализатор подалгебры Ли, 89

- Общая линейная группа, 83
- Овеществление комплексной алгебры Ли, 111
- Однопараметрическая подгруппа группы Ли, 80
- Однородное пространство, 190
- изотропно неприводимое, 201
 - редуktивное, 193
 - строго изотропно неприводимое, 201
- Орбита точки, 88
- Параметризация, 54
- гладкой кривой, 53
 - длиной дуги, 54
- Первая вариация длины кривой, 57
- Перенос,
- левый, 77
 - правый, 77
- Перенос Клиффорда — Вольфа, 271
- в римановом многообразии, 129
- Погружение, 32
- Подалгебра Картана, 103
- Подгруппа группы Ли, 86
- виртуальная, 86
- Подгруппа изотропии точки, 88
- Подмногообразие, 32
- виртуальное, 32
- Поле Якоби, 58
- Поток векторного поля, 37
- Правоинвариантное векторное поле, 77
- Представление алгебры Ли, 83
- присоединенное, 84
- Представление группы Ли, 83
- присоединенное, 84
 - точное, 83
- Производная Ли тензорного поля, 42
- Производная алгебра алгебры Ли, 89
- Пространство Клиффорда — Киллинга, 359
- Пространство с внутренней метрикой, 324
- Путь,
- гладкий, 53
 - регулярный, 53
- Радикал алгебры Ли, 90
- Радиус инъективности, 63
- Ранг компактной алгебры Ли, 105
- Распределение, 38
- вполне интегрируемое, 39
 - инволютивное, 39
- Редуktивное разложение, 193
- Риманова метрика, 43
- биинвариантная, 97
 - левоинвариантная, 93
- Риманова нормальная система координат, 63
- Риманова субмерсия, 69
- Риманово многообразие, 43
- геодезически орбитальное, 238
 - естественно редуktивное, 200
 - нормальное однородное, 200, 272
 - обобщенное нормальное однородное, 272
 - однородное, 196
 - со свойством Киллинга, 360

- Риманово многообразие стандартное однородное, 201
 — строго изотропно неприводимое, 201
- Связность**,
 — Леви-Чивита, 44
 — линейная, 42
- Символы Кристоффеля, 45
- Симметрическое пространство, 197
- Скобка Ли,
 — векторных полей, 35
- Слабо симметрическое пространство, 239
- Слой вполне интегрируемого распределения, 39
- Стабилизатор точки, 87
- Стационарная подгруппа точки, 87
- Субмерсия, 32
 — риманова, 69
- Субметрия, 74
- Субриманова метрика, 223
- Сфера Хелгасона, 377
- Схема Дынкина, 108
- Тензор** О'Нейла, 70
- Тензор Риччи, 50
 — линейной связности, 50
 — риманова многообразия, 50
- Тензор кривизны,
 — линейной связности, 46
 — риманова многообразия, 49
 — ковариантный, 49
- Тензор кручения линейной связности, 43
- Тензорное поле, 40
- Теорема,
 — Адо, 88
 — Берже, 136
 — Бохнера, 139
 — Г. Вейля, 99
 — Картана, 86
 — Леви — Мальцева, 91
 — Майерса, 67
 — Майерса — Стинрода, 189
 — С. Ли третья, 88
 — Синга, 138
 — Топоногова, 277
 — Хопфа — Ринова, 65
 — Хопфа — Самельсона, 194
 — Энгеля, 90
- Точная гомотопическая последовательность расслоения, 230
- Тройная система Ли, 373
- Ф**лаговые многообразия, 211
- Форма Киллинга, 91
- Ц**ентр алгебры Ли, 89
- Централизатор подалгебры Ли, 89
- Ч**ebyшевская норма, 281, 323
- Э**кспоненциальное отображение группы Ли, 81
- Экспоненциальное отображение риманова многообразия, 62
- Эпиморфизм групп Ли, 77
- Я**дро неэффективности, 88

Научное издание

Серия

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

Выпуск 4

**Берестовский Валерий Николаевич,
Никоноров Юрий Геннадьевич**

**РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ
И ОДНОРОДНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ**

Ответственный редактор

Е. Д. Родионов

Редакторы серии:

Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев

*Утверждено к печати Ученым советом
Южного математического института
Владикавказского научного центра
Российской академии наук*

Компьютерная верстка: *М. У. Вазагаева*

Зав. редакцией: *В. В. Кибизова*

Подписано в печать 06.08.2012.
Формат бумаги $60 \times 84^{1/16}$. Усл. п. л. 24,06.
Тираж 200 экз. Заказ № 93.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

ISBN 978-5-904695-13-2



9 785904 695132