

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

И Т О Г И Н А У К И • Ю Г Р О С С И И

С Е Р И Я
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

В ы п у с к 7

С. Б. Климентов
ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Владикавказ
2014

ББК 22.151.5
УДК 517.518.234 + 517.548.3
К-49

Ответственный редактор
д. ф.-м. н. В. Т. ФОМЕНКО

Рецензенты:
д. ф.-м. н. А. В. АБАНИН,
д. ф.-м. н. З. Д. УСМАНОВ

Редакторы серии:
д. ф.-м. н. Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК,
д. ф.-м. н. А. Г. КУСРАЕВ

Работа выполнена при финансовой поддержке внутреннего гранта ЮФУ,
проект № 213.01-24/2013-66.

Климентов С. Б.

Граничные свойства обобщенных аналитических функций / отв.
ред. В. Т. Фоменко.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А,
2014.—200 с.—(Итоги науки. Юг России. Математическая моногра-
фия. Вып. 7).

Настоящая монография подытоживает многолетние исследования автора,
связанные с классами Харди, Смирнова и ВМО (Bounded Mean Oscillation) обоб-
щенных аналитических функций, а также решений уравнения Бельтрами. По-
дробно изучена краевая задача Римана — Гильберта в этих классах. Получен ряд
вспомогательных результатов по интегральным операторам и квазиконформным
отображениям, которые представляют и самостоятельный интерес.

Klimentov S. B.

Boundary Properties of the Generalized Analytic Functions / ed. V. T. Fo-
menko.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—200 p.

The present monograph sums up the long-term researches of the author. These
researches are connected with classes of Hardy, Smirnov and BMO (Bounded
Mean Oscillation) of the generalized analytical functions, and also solutions to the
Beltrami equation. The Riemann–Hilbert boundary value problem in these classes
is investigated in detail. A number of auxiliary results on integral operators and
quasiconformal mappings are also obtained.

ISBN 978-5-904695-26-2

© Южный математический институт
ВНЦ РАН и РСО-А, 2014
© С. Б. Климентов, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава 1. Вспомогательные сведения	11
1.1. Неравенства	11
1.2. Функциональные пространства	11
1.3. Классы кривых и областей	12
1.4. Интегральные операторы	14
1.5. Интегральные формулы	28
1.6. Обобщенные аналитические функции	29
1.7. Классы Харди голоморфных функций	32
1.8. Классы Смирнова голоморфных функций	35
1.9. Классы BMO (Bounded Mean Oscillation)	40
1.10. Краевая задача Римана — Гильберта для голоморфных функций	45
1.10.1. Задача Римана — Гильберта для голоморфных функций в классах Смирнова в области с ляпуновской границей	45
1.10.2. Задача Римана — Гильберта для голоморфных функций в классах Смирнова в области с радоновской границей	55
1.10.3. Краевая задача Римана и Римана — Гильберта в классах $BMOA$	62

1.10.4. Пример однородной задачи с непрерывным коэффициентом класса Λ_l с нулевым индексом, не имеющей нетривиальных решений класса $BMOA$	71
1.10.5. Пример неоднородной задачи Римана — Гильберта с неотрицательным индексом и ограниченной правой частью, неразрешимой в $BMOA$	73
1.11. Неканонические эллиптические системы	73
1.12. Квазиконформные отображения	75
1.13. Историко-библиографические замечания	85
Глава 2. Классы Харди обобщенных аналитических функций	87
2.1. Определение. Первоначальные свойства	87
2.2. Представления второго рода	95
2.3. Теорема двойственности для классов Харди обобщенных аналитических функций	108
2.3.1. Обобщенная задача Шварца	108
2.3.2. Доказательство теоремы 2.3.1	112
2.4. Историко-библиографические замечания	114
Глава 3. Классы Смирнова обобщенных аналитических функций	115
3.1. Определение. Базовые свойства	115
3.2. Представления второго рода	126
3.3. Историко-библиографические замечания	128
Глава 4. Классы BMO обобщенных аналитических функций	129
4.1. Определение. Базовые свойства	129
4.1.1. Базовые свойства	129

4.1.2. Введение нормы	130
4.1.3. Оценки обобщенного интеграла типа Коши	131
4.2. Представления второго рода	133
4.3. Двойственность $\operatorname{Re} H_1(A, B)$ и BMO	136
4.4. Историко-библиографические замечания	138
Глава 5. Краевая задача Римана — Гильберта	139
5.1. Общая формулировка	139
5.2. Задача Римана — Гильберта в классах	
Харди $H_p(A, B)$	140
5.2.1. Задача Римана — Гильберта	
при каноническом краевом условии	141
5.2.2. Случай неканонического краевого условия	142
5.3. Задача Римана — Гильберта в классах	
Смирнова $E_p(A, B)$	145
5.3.1. Вспомогательные построения	147
5.3.2. Формулировка основных результатов	150
5.3.3. Специальные представления второго рода	
для функций класса $E_p(A, B)$	151
5.3.4. Доказательство основных результатов	161
5.4. Задача Римана — Гильберта в классах $BMO(A, B)$...	163
5.4.1. Регуляризирующий множитель	164
5.4.2. Доказательство теоремы 5.4.1	164
5.5. Историко-библиографические замечания	168
Глава 6. Классы Харди решений уравнения	
Бельтрами	169
6.1. Определение. Базовые свойства	169
6.2. Представления второго рода	176
6.2.1. Формулировка главных результатов	177

6.2.2. Вспомогательные построения	179
6.2.3. Доказательства главных результатов	182
6.3. Историко-библиографические замечания	188
Глава 7. Некоторые нерешенные задачи	189
Литература	191
Предметный указатель	196

ПРЕДИСЛОВИЕ

Следуя И. Н. Векуа [5], *обобщенными аналитическими функциями* называют решения канонической эллиптической системы первого порядка на плоскости

$$\partial_{\bar{z}}w + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0,$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, u и v — ее действительная и мнимая части, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$ — производная в смысле Соболева. Впрочем, как и в [5], так и в других источниках такое название используется и для решений общих эллиптических систем

$$\partial_{\bar{z}}w - q_1(z)\partial_zw - q_2(z)\partial_{\bar{z}}\bar{w} + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0,$$

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} \right], \quad |q_1(z)| + |q_2(z)| \leq q_0 = \text{const} < 1,$$

а также для их различных частных случаев (см. параграф 1.11).

Классы Смирнова для обобщенных аналитических функций были впервые введены К. М. Мусаевым в работе [47]. В дальнейшем им и Т. Х. Гасановой исследовались различные свойства этих классов в [48–51, 75]. Краевые задачи ими не рассматривались, за исключением «задачи о скачке» [75]. Автор, первоначально не зная о работах К. М. Мусаева и Т. Х. Гасановой, предпринял самостоятельное исследование классов Харди и Смирнова обобщенных аналитических функций и краевых задач в них. Т. Х. Гасанова, увидев публикацию автора [28], любезно сообщила об их работах, прислав некоторые оттиски. Поскольку работы автора были ориентированы на исследование краевых задач и охватывали классы *ВМО*, пересечений получилось совсем немного.

Вместе с тем классы Харди решений сопряженной системы Бельтрами изучались в [67] посредством сведения вопроса к известным на тот момент [24] свойствам классов Харди обобщенных аналитических функций. Поскольку авторы статьи [67] не были знакомы с

работой [24], нужные им частные случаи результатов из [24] они получили самостоятельно.

Настоящая монография подытоживает многолетние исследования автора, связанные с обобщенными классам Харди, Смирнова и BMO [15–39, 73, 74]. Как и при всякой новой разработке, остаются нерешенными многие задачи, возникающие в процессе исследования, возможно, более интересные, чем уже решенные. Некоторые из них сформулированы в главе 7.

Структуру книги и ее тематику легко уяснить из оглавления, в связи с чем подробно на этом останавливаться не будем.

Первая глава содержит вспомогательные для основного материала сведения. Сюда также вынесены некоторые недавние результаты автора по операторам «типа T », краевым задачам голоморфных функций и квазиконформным отображениям, необходимые при изучении соответствующих вопросов теории обобщенных аналитических функций и представляющие самостоятельный интерес.

Далее, вторая и третья главы посвящены классам Харди и Смирнова для обобщенных аналитических функций. Эти главы вполне можно было бы объединить в одну (тем более, что во вспомогательных сведениях многие результаты излагаются сразу для классов Смирнова), но разделение на две главы было продиктовано решением излагать исследование краевой задачи Римана — Гильберта отдельно для обобщенных классов Харди и Смирнова. Это связано с гораздо большей наглядностью этого изложения в случае классов Харди.

В четвертой главе внимание сосредоточено только лишь на классах $BMO(A, B)$ и $LMO(A, B)$, хотя было бы вполне естественно рассмотреть обобщение более обширных классов BMO_f . Такое расширение исследования вынесено в нерешенные задачи.

В главе 5 следует отметить принадлежащее автору небольшое «открытие», что норма операторов «типа T », как операторов в пространстве суммируемых функций, может быть сделана сколь угодно малой при подходящей гомотетии. Это позволяет избежать использования теорем Фредгольма, которое в контексте краевых задач в обобщенных классах Смирнова достаточно затруднено, и свести все к принципу сжатых отображений. Такой прием используется и в главе 6, где с помощью соответствующих примеров обосновывается, что без дополнительных ограничений на коэффициент уравнения Бельтрами невозможны представления «второго рода» для классов Хар-

ди решений уравнения Бельтрами. Последнее обстоятельство, правда, не препятствует исследованию краевой задачи Римана — Гильберта в этих классах, поскольку она тривиальным образом сводится к голоморфному случаю.

В главе 5 подробно не обсуждаются случаи неразрешимости в $ВМО$ краевой задачи Римана — Гильберта с коэффициентом краевого условия из пространства мультипликаторов и правой его частью из $ВМО$, поскольку они проанализированы в голоморфном случае в главе 1.

Конечно, уместно задаться вопросом: а каковы связи теории пространств Харди, Смирнова и $ВМО$ для обобщенных аналитических функций с вероятностным подходом к этим пространствам? Ведь для голоморфных функций существует весьма продуктивная вероятностная версия этих пространств (см. [77] и приведенную там литературу). Тем более, что для краевой задачи Римана — Гильберта для голоморфных функций и решений уравнения Бельтрами удастся вполне результативно применить вероятностный подход [20–22, 25]. К сожалению, имеющиеся результаты по вероятностному подходу к обобщенным аналитическим функциям [23, 73] нельзя назвать положительными. Не удалось пока что выделить *единный случайный процесс*, каковым в голоморфном случае является винеровский процесс, на основе которого можно было бы записать любое решение данной канонической эллиптической системы. Показано только, что для любой фиксированной обобщенной аналитической функции можно подобрать соответствующий процесс (вообще говоря, свой для каждого отдельного решения). В связи с этим вероятностный подход в данной книге не рассматривается (кроме главы с формулировкой нерешенных задач).

Каждая глава (кроме последней) заканчивается историко-библиографическими замечаниями, содержащими известные автору сведения о приоритетах и литературные ссылки, касающиеся результатов, не сопровождаемых ссылками в тексте главы. Обычно это результаты, принадлежащие автору.

Книга доступна студентам старших курсов и аспирантам математических специальностей вузов при некоторой (не малой) дополнительной подготовке. К такой подготовке следует отнести знакомство с теорией краевых задач голоморфных функций в объеме основных положений книг [8] и [13], основными положениями теории классов Харди, Смирнова и $ВМО$ в объеме основного содержания книг [7]

и [43], а также с основными положениями теории обобщенных аналитических функций из книги [5]. Формулировки практически всех необходимых для понимания основного содержания книги фактов приведены в главе 1.

С. Б. Климентов
Ноябрь 2013 г.

ГЛАВА 1

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Неравенства

Приведем два хорошо известных неравенства:

$$(a+b)^\gamma \leq a^\gamma + b^\gamma, \quad a, b \geq 0, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (1.1)$$

$$(a+b)^\gamma \leq 2^{\gamma-1}(a^\gamma + b^\gamma), \quad a, b \geq 0, \quad \gamma \geq 1, \quad (1.2)$$

которые доказываются исследованием на экстремум функции

$$f(x) = \frac{(1+x)^\gamma}{1+x^\gamma}, \quad x \in [0, 1], \quad \gamma > 0.$$

Неравенство Минковского [66, с. 176]. Если Ω — измеримое пространство, $f, g, \dots, l \in L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, то имеет место неравенство

$$\|f + g + \dots + l\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p} + \dots + \|l\|_{L_p}. \quad (1.3)$$

1.2. Функциональные пространства

Обозначим через G ограниченную односвязную область в комплексной z -плоскости E , $z = x + iy$, $i^2 = -1$, со спрямляемой границей $\Gamma = \partial G$; $\overline{G} = G \cup \Gamma$.

В работе используются стандартные обозначения функциональных пространств, которые описывать подробно не будем, отсылая читателя к общеизвестным источникам.

$W_p^k(\overline{G})$, $k = 0, 1, \dots$, $p > 1$, — банахово пространство комплекснозначных функций, определенных в $\overline{G}$, обладающих обобщенными в смысле Соболева производными до k -го порядка, суммируемыми в $\overline{G}$ с показателем p , со стандартной нормой (см. [5, гл. 1, § 5; 61, гл. 1, § 6]); $W_p^0(\overline{G}) \equiv L_p(\overline{G})$.

$C_\alpha^k(\overline{G})$, $k = 0, 1, \dots$, $0 < \alpha \leq 1$, — банахово пространство комплекснозначных функций, определенных в $\overline{G}$, обладающих непрерывными

в G и непрерывно продолжимыми на Γ производными до k -го порядка, удовлетворяющими в $\overline{G}$ условию Гёльдера (Липшица) с показателем α , со стандартной нормой (см. [5, гл. 1, § 1]); $C_\alpha^0(\overline{G}) \equiv C_\alpha(\overline{G})$.

$C^k(\overline{G})$, $k = 0, 1, \dots$, — банахово пространство комплекснозначных функций, определенных в $\overline{G}$, обладающих непрерывными в G и непрерывно продолжимыми на Γ производными до k -го порядка, со стандартной нормой (см. [5, гл. 1, § 1]); $C^0(\overline{G}) \equiv C(\overline{G})$.

Аналогично будем обозначать соответствующие банаховы пространства функций одной вещественной переменной (а также двух вещественных переменных (x, y)).

1.3. Классы кривых и областей

Пусть Γ — некоторая простая замкнутая или незамкнутая жорданова кривая. Тогда ее уравнение можем записать в виде

$$z(s) = x(s) + iy(s), \quad (1.4)$$

где $z(s)$ — аффикс точки кривой Γ , соответствующей длине дуги s , отсчитываемой от некоторой фиксированной точки на Γ . Пусть l — длина кривой Γ . Начало отсчета дуги всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось условие $0 \leq s \leq l$. Если кривая замкнута, то $z(0) = z(l)$. В случае замкнутой кривой часто удобно считать функцию $z(s)$ продолженной на всю вещественную прямую $\mathbb{R}$ по периодичности. В дальнейшем будем использовать это замечание без специальных оговорок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.1. Будем говорить, что Γ — *регулярная кривая класса C^k* , $k = 1, 2, \dots$, если $z(s) \in C^k[0, l]$ и $z'(s) \neq 0$.

Аналогично Γ — *регулярная кривая класса C_α^k* , $0 < \alpha \leq 1$, $k = 1, 2, \dots$, если $z(s) \in C_\alpha^k[0, l]$ и $z'(s) \neq 0$.

В случае, если Γ — замкнутая кривая, в вышеприведенных соотношениях нужно заменить $z(s) \in C^k[0, l]$ на $z(s) \in C^k(\mathbb{R})$ (соответственно $z(s) \in C_\alpha^k(\mathbb{R})$).

Если из контекста ясно, о замкнутой или не замкнутой кривой идет речь (или это не важно), записывать это будем так: $\Gamma \in C^k$ ($\Gamma \in C_\alpha^k$). В случае, если Γ ограничивает область G , в этом случае также будем писать $G \in C^k$ ($G \in C_\alpha^k$) и говорить, что область G принадлежит соответствующему классу.

Обозначим через $\theta(s)$ угол между касательной к кривой Γ и фиксированным направлением. Регулярная кривая характеризуется тем,

что угол $\theta(s)$ может быть определен на $[0, l]$ (или $\mathbb{R}$) как непрерывная функция параметра s .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.2. Регулярная кривая Γ называется *кривой Ляпунова* (*ляпуновской кривой*), если $\theta(s) \in C_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ (соответственно на $[0, l]$ или $\mathbb{R}$).

Таким образом, Γ — ляпуновская кривая тогда и только тогда, когда $\Gamma \in C_\alpha^1$.

Если Γ — спрямляемая жорданова кривая, то функция (1.4) дифференцируема почти всюду на $[0, l]$ и почти всюду (с точностью до кратного 2π) определен угол $\theta(s)$. На множестве меры нуль его можно доопределить произвольно (см. [13, с. 17]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.3. Если угол $\theta(s)$, в каждой точке s определяемый с точностью до кратного 2π , может быть выбран так, чтобы функция $\theta(s)$ имела ограниченную вариацию на $[0, l]$, то кривую Γ будем называть *кривой Радона* (*радоновой кривой*).

В случае, если Γ ограничивает область G , то также будем говорить, что область G — *радоновская*.

Такие кривые рассматривал впервые, по-видимому, И. Радон [78] в связи с исследованием краевых задач логарифмического потенциала и называл их *кривыми с ограниченным вращением* (встречается также название *кривые с ограниченной вариацией поворота* [1, 57, 58]).

Полная вариация $V_0^l(\theta)$ функции $\theta(s)$ на сегменте $[0, l]$ конечна для кривой ограниченного вращения. Следовательно, скачки функции $\theta(s)$, абсолютная величина которых больше π , могут встречаться только в конечном числе точек. От этих скачков можно освободиться, переопределяя угол $\theta(\bmod 2\pi)$. После того, как это выполнено, величина $V_0^l(\theta)$ называется *абсолютным вращением кривой* Γ . Таким образом, можно предполагать, что скачки $h(s)$ функции $\theta(s)$ по абсолютному значению не превосходят π . Те точки, в которых $|h(s)| = \pi$, называются *точками заострения кривой* Γ (их не более чем конечное число). Если $0 < |h(s)| < \pi$, то соответствующая точка называется *угловой*. Таких точек на кривой Радона не более, чем счетное количество. Отметим, что, тем не менее, множество угловых точек может быть всюду плотным на Γ . Во всех точках непрерывности угла $\theta(s)$ кривая Γ изменяется гладко (т. е. радоновская кривая дифференцируема почти всюду).

Лемма 1.3.1 [13, с. 17, 20]. Если Γ — замкнутая кривая Радона без точек заострения с параметрическими уравнениями $z = z(s)$ и длиной дуги $s \in [0, l]$, то $|dz| = |ds|$ почти всюду на Γ , и существует такая пара чисел $k_0, \delta_0 > 0$, что

$$|s - \sigma| \geq |z(s) - z(\sigma)| \geq k_0 |s - \sigma|, \quad \forall s, \sigma : |s - \sigma| \leq \delta_0. \quad (1.5)$$

Замечание 1.3.1. Для кривых Ляпунова утверждение леммы 1.3.1 тривиально.

Для функции $f(z)$, $z \in \Gamma$, запись $f(z) \in L_p(\Gamma)$ означает $f(z(s)) \in L_p[0, l]$ и $\|f\|_{L_p(\Gamma)} = \|f(z(s))\|_{L_p[0, l]}$.

Пусть $\varphi = \varphi(z)$ — однолистное конформное отображение области $G \equiv G_z$ в плоскости комплексной переменной z на ограниченную односвязную область G_φ в плоскости комплексной переменной φ . Очевидно, что граничные свойства функции $\varphi(z)$ и обратной функции $z(\varphi)$ зависят от гладкости границ областей G_z и G_φ . Хорошо известно следующее утверждение (см. [5, с. 36–37; 9, с. 411; 82]).

Теорема 1.3.1 (ТЕОРЕМА КЕЛЛОГА). Если $\varphi = \varphi(z)$ — однолистное конформное отображение области G_z с границей класса C_α^k , $k = 1, 2, \dots$, на область G_φ с границей класса C_α^k , $k = 1, 2, \dots$, то $\varphi(z)$ продолжается до гомеоморфизма $\overline{D}_z$ на $\overline{G}_\varphi$, причем $\varphi(z) \in C_\alpha^k(\overline{D}_z)$, а обратное отображение принадлежит классу $C_\alpha^k(\overline{G}_\varphi)$.

1.4. Интегральные операторы

В настоящей работе широко используются различные интегральные операторы, определения и основные хорошо известные свойства которых собраны в этом параграфе.

Следуя [5, с. 42, 45], обозначим:

$$T_G f(z) \equiv T f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad f(z) \in L_p(\overline{G}), \quad p \geq 1. \quad (1.6)$$

Отдельно будем выделять случай, когда $G = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг с центром в нуле. В этом случае для G будем использовать обозначение $D (= G)$, т. е. если для области используется обозначение D , то подразумевается, что это единичный круг с центром в нуле и $\partial D = \Gamma = \{z : |z| = 1\}$.

Пусть $\varkappa \geq 0$ — целое число. Следуя [5, с. 293], обозначим:

$$T_{\varkappa}f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z^{2\varkappa+1} \overline{f(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}z} \right) d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (1.7)$$

Также будем рассматривать следующие операторы:

$$T_n f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_G f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z} - P(z, \zeta, z_1, \dots, z_n) \right] d\xi d\eta, \quad (1.8)$$

где

$$P(z, \zeta, z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=1}^n \frac{(z - z_1) \dots (z - z_{k-1})(z - z_{k+1}) \dots (z - z_n)}{(z_k - z_1) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_n)} \cdot \frac{1}{\zeta - z_k},$$

$\zeta = \xi + i\eta$, $z_1, \dots, z_n \in \overline{G}$, z_k , $k = 1, \dots, n$, попарно различны;

$$\begin{aligned} T_{\varkappa, n} f(z) = & -\frac{1}{\pi} \iint_D \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z^{2\varkappa+1} \overline{f(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}z} \right] d\xi d\eta - \\ & - \frac{1}{\pi} \iint_D \sum_{k=1}^{2\varkappa+1} P'_k(z, z_1, \dots, z_{2\varkappa+1}) \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta} - \bar{z}_k} d\xi d\eta + \\ & + \frac{1}{\pi} \iint_D \sum_{k=1}^{2\varkappa+1} P''_k(z, z_1, \dots, z_{2\varkappa+1}) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_k} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} P'_k(z, z_1, \dots, z_{2\varkappa+1}) = & \frac{(1 - z\bar{z}_1) \dots (1 - z\bar{z}_{k-1})(1 - z\bar{z}_{k+1}) \dots (1 - z\bar{z}_{2\varkappa+1})}{(\bar{z}_k - \bar{z}_1) \dots (\bar{z}_k - \bar{z}_{k-1})(\bar{z}_k - \bar{z}_{k+1}) \dots (\bar{z}_k - \bar{z}_{2\varkappa+1})}, \\ P''_k(z, z_1, \dots, z_{2\varkappa+1}) = & \frac{(z - z_1) \dots (z - z_{k-1})(z - z_{k+1}) \dots (z - z_{2\varkappa+1})}{(z_k - z_1) \dots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \dots (z_k - z_{2\varkappa+1})}, \end{aligned}$$

$\zeta = \xi + i\eta$, z_k , $k = 1, \dots, \varkappa + 1$, — произвольные попарно различные точки контура Γ , $\varkappa \geq 0$ — целое число. По определению положим $T_0 = T$, $T_{\varkappa, 0} = T_{\varkappa}$.

Использование этих операторов базируется на основном их свойстве — каждый из них является правым обратным к оператору обобщенного дифференцирования по Соболеву (см. [5, с. 40, 50])

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad z = x + iy, \quad i^2 = -1.$$

В дальнейшем, говоря сразу обо всех операторах (1.7)–(1.9), а также о других сходных операторах с тем же свойством, будем иногда называть их «*операторами типа T* ».

Теорема 1.4.1 [5, с. 45]. Пусть G — ограниченная область. Если $f \in L_1(\overline{G})$, то $T_G f$ существует для всех точек z вне $\overline{G}$, причем функция $T_G f(z)$ голоморфна вне $\overline{G}$ и обращается в нуль на бесконечности.

Очевидно следующее следствие теоремы 1.4.1.

Следствие 1.4.1. Пусть G — ограниченная область. Если $f \in L_1(\overline{G})$, то $T_n f$ существует для всех точек z вне $\overline{G}$, причем функция $T_n f(z)$ голоморфна вне $\overline{G}$ и имеет полюс порядка $n - 1$ на бесконечности.

Теорема 1.4.2 [5, с. 45]. Пусть G — ограниченная область. Если $f \in L_1(\overline{G})$, то $T_G f(z)$, как функция точки $z \in G$, существует почти всюду и принадлежит любому классу $L_p(\overline{G}_*)$, где p — любое число, удовлетворяющее условию $1 \leq p < 2$, а G_* — любая ограниченная область плоскости.

Теорема 1.4.3 [5, с. 54]. Пусть G — ограниченная область. Если $f \in L_p(\overline{G})$, $p > 2$, то функция $g(z) = T_G f(z)$ удовлетворяет условиям

$$|g(z)| \leq M_1 \|f\|_{L_p(\overline{G})}, \quad z \in E, \quad (1.10)$$

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq M_2 \|f\|_{L_p(\overline{G})} |z_1 - z_2|^\alpha, \quad \alpha = \frac{p-2}{p}, \quad (1.11)$$

где z_1 и z_2 — произвольные точки плоскости E , а M_1 и M_2 — постоянные, причем M_1 зависит от p и G , а M_2 — только от p .

Теорема 1.4.4 [5, с. 63–65]. Пусть G — ограниченная область. Линейный оператор T_G вполне непрерывен в $L_p(\overline{G})$, $1 \leq p \leq 2$.

Теорема 1.4.5 [5, с. 66]. Пусть G — ограниченная область, и $A(z) \in L_p(\overline{G})$, $p > 2$. В таком случае линейный оператор

$$P_G f = -\frac{1}{\pi} \int_G \frac{A(\zeta)f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\eta = T(Af), \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

вполне непрерывен в $L_q(\overline{G})$ при $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$.

Следствие 1.4.2. *Линейный оператор P_G вполне непрерывен в $C(\overline{G})$.*

Теорема 1.4.6. *Если D — единичный круг $|z| < 1$, $A(z) \in L_p(\overline{D})$, то линейный (над полем вещественных чисел) оператор $P_{\varkappa,n} f = T_{\varkappa,n}(Af)$ вполне непрерывен в пространствах $C(\overline{D})$ и $L_q(\overline{D})$, $q \geq \frac{p}{p-1}$, причем он отображает $C(\overline{D})$ в $C_{\frac{p-2}{p}}(\overline{D})$, а $L_q(\overline{D})$ при $q \geq \frac{2p}{p-2}$ — в $C_\nu(\overline{D})$, где $\nu = 1 - 2(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})$.*

◁ Для $P_{\varkappa} = P_{\varkappa,0}$ теорема доказана в [5, с. 293–294]. Распространение ее утверждений на случай $P_{\varkappa,n} f$ тривиально. ▷

Теорема 1.4.7. *Обозначим через $\Gamma_r \in C^1$ кусочно гладкую замкнутую жорданову кривую, расположенную внутри G . Если $f \in L_q(\overline{G})$, $1 < q \leq 2$ (при формулировке утверждений для $T_{\varkappa} f$ и $T_{\varkappa,n} f$ считаем $G = D$), то $Tf, T_{\varkappa} f, T_n f, T_{\varkappa,n} f \in L_\gamma(\Gamma_r)$, где γ — такое произвольное число, что $1 < \gamma < \frac{q}{2-q}$, а также имеют место оценки*

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L_\gamma(\Gamma_r)} &\leq M_{q,\gamma} \|f\|_{L_q(\overline{G})}, \\ \|T_{\varkappa} f\|_{L_\gamma(\Gamma_r)} &\leq M'_{q,\gamma} \|f\|_{L_q(\overline{G})}, \\ \|T_n f\|_{L_\gamma(\Gamma_r)} &\leq M_{n,q,\gamma} \|f\|_{L_q(\overline{G})}, \\ \|T_{\varkappa,n} f\|_{L_\gamma(\Gamma_r)} &\leq M'_{n,q,\gamma} \|f\|_{L_q(\overline{G})}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где константы $M_{q,\gamma}$, $M'_{q,\gamma}$, $M_{n,q,\gamma}$, $M'_{n,q,\gamma}$ от f и Γ_r не зависят.

Если граница Γ области G кусочно гладкая или радонова, то Γ_r может совпадать с Γ .

Замечание 1.4.1. Далее, в случае единичного круга D в качестве Γ_r будут фигурировать только окружности $\Gamma_r = \{z : |z| = r \leq 1\}$, а в остальных случаях — конформные образы этих окружностей.

◁ В [5, с. 67–68] теорема 1.4.7 доказана для оператора Tf в случае $\Gamma_r = \Gamma$. В остальных случаях и для остальных операторов доказательство почти дословно повторяется. Возможность положить $\Gamma_r = \Gamma$ для радоновской границы Γ обосновывается так же, только с использованием леммы 1.4.1 вместо сноски в [5, с. 68]. ▷

Сделаем несколько очевидных замечаний.

Во-первых, $T_n f(z_k) = 0$, $k = 1, \dots, n$.

При $z \in \Gamma$

$$\operatorname{Re} \{ z^{-\varkappa} T_{\varkappa, n} f(z) \} = 0 \quad (1.13)$$

всюду либо почти всюду на Γ .

Если $T_{\varkappa, n} f(z) \in C(\Gamma)$, то

$$T_{\varkappa, n} f(z_k) = 0, \quad k = 1, \dots, 2\varkappa + 1. \quad (1.14)$$

Пусть, как и выше, D — единичный круг $|z| < 1$.

Теорема 1.4.8. Если $f \in L_p(\overline{D})$, $1 < p \leq 2$, то

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |Tf(e^{i\theta}) - Tf(re^{i\theta})|^\gamma d\theta = 0, \quad 1 \leq \gamma < \frac{p}{2-p}. \quad (1.15)$$

Аналогичное утверждение справедливо для $T_\varkappa f$, $T_n f$, $T_{\varkappa, n} f$.

◁ Очевидно неравенство

$$|Tf(e^{i\theta}) - Tf(re^{i\theta})| \leq \frac{|1-r|}{\pi} \iint_D |f(\zeta)| \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - e^{i\theta}| |\zeta - re^{i\theta}|}. \quad (1.16)$$

Предположим сначала, что $p < \gamma < \frac{p}{2-p}$, и положим $0 < 2\alpha = \frac{1}{\gamma} - \frac{2}{p} + 1 < \frac{1}{q}$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Так как $\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma-p}{\gamma p} + \frac{1}{q} = 1$, то, применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} J_1 &= \iint_D |f(\zeta)| \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - e^{i\theta}| |\zeta - re^{i\theta}|} \leq \\ &\leq \left(\iint_D |f(\zeta)|^p |\zeta - e^{i\theta}|^{-1+\alpha\gamma} |\zeta - re^{i\theta}|^{-1+\alpha\gamma} d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{\gamma}} \times \\ &\quad \times \left(\iint_D |f(\zeta)|^p d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}} \times \\ &\quad \times \left(\iint_D |\zeta - e^{i\theta}|^{-2+q\alpha} |\zeta - re^{i\theta}|^{-2+q\alpha} d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

при этом $0 < q\alpha < \frac{1}{2}$. В силу этих неравенств, последний сомножитель в правой части (1.17) оценивается величиной $\text{const} |1-r|^{-\frac{2}{q}+2\alpha}$ (см. [5, с. 55]), где константа от r не зависит.

Далее, рассмотрим интеграл

$$J_2 = \int_0^{2\pi} |\zeta - e^{i\theta}|^{-1+\alpha\gamma} |\zeta - re^{i\theta}|^{-1+\alpha\gamma} d\theta.$$

Если $\alpha\gamma \geq 1$, то J_2 ограничен равномерно по $\zeta \in \overline{D}$, и r такое, что $\frac{1}{2} < r < \frac{3}{2}$.

Пусть $\alpha\gamma < 1$. Будем пока считать, что $\frac{1}{2} < r < 1$.

Если $r \leq |\zeta| \leq \frac{1+r}{2}$, то, очевидно,

$$|\zeta - re^{i\theta}| \geq r|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|, \quad |\zeta - e^{i\theta}| \geq \frac{1}{2}|1-r|,$$

где $\varphi = \arg \zeta$, и в этом случае имеем оценку

$$J_2 \leq \text{const} |1-r|^{-1+\alpha\gamma}, \quad (1.18)$$

где константа от r не зависит.

Если $\frac{1+r}{2} \leq |\zeta| \leq 1$, то $|\zeta - re^{i\theta}| \geq \frac{1}{2}|1-r|$, и с учетом равномерной по $\zeta \in \overline{D}$ ограниченности интеграла (см. [5, с. 68])

$$\int_0^{2\pi} |\zeta - e^{i\theta}|^{-\lambda} d\theta, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (1.19)$$

также имеем оценку (1.18) (см. лемму 1.4.1).

Если $|\zeta| < r$, то $|\zeta - e^{i\theta}| \geq |1-r|$, и с учетом равномерной по $\zeta \in \overline{D}$ ограниченности интеграла (1.19) также получаем (1.18).

В случае $1 < r < \frac{3}{2}$ для всякого $\zeta \in \overline{D}$ очевидно $|\zeta - re^{i\theta}| \geq |1-r|$, и аналогично предыдущему опять получаем (1.18).

Сопоставляя (1.17) и (1.18), при $\alpha\gamma < 1$ и $\frac{1}{2} < r < \frac{3}{2}$ получаем

$$\int_0^{2\pi} J_1^\gamma d\theta \leq \text{const} \|f\|_{L_p(\overline{D})}^\gamma |1-r|^{(3\alpha-\frac{2}{q}-\frac{1}{\gamma})\gamma}, \quad (1.20)$$

где константа от r и f не зависит.

При $\alpha\gamma \geq 1$ оценка (1.20) упрощается:

$$\int_0^{2\pi} J_1^\gamma d\theta \leq \text{const} \|f\|_{L_p(\overline{D})}^\gamma |1-r|^{(2\alpha-\frac{2}{q})\gamma}, \quad (1.21)$$

где константа от r и f не зависит.

Итак, при $\alpha\gamma < 1$ из (1.16) и (1.20) имеем

$$\int_0^{2\pi} |Tf(e^{i\theta}) - Tf(re^{i\theta})|^\gamma d\theta \leq \text{const} \|f\|_{L_p(\overline{D})}^\gamma |1-r|^{\alpha\gamma}, \quad (1.22)$$

где константа от r и f не зависит, $\alpha\gamma > 0$, а при $\alpha\gamma \geq 1$ получаем

$$\int_0^{2\pi} |Tf(e^{i\theta}) - Tf(re^{i\theta})|^\gamma d\theta \leq \text{const} \|f\|_{L_p(\overline{D})}^\gamma |1-r|, \quad (1.23)$$

где константа от r и f не зависит.

Из (1.22) и (1.23) получаем утверждение теоремы для Tf при $p < \gamma < \frac{p}{2-p}$. Очевидно, отсюда следует и утверждение теоремы при $1 \leq \gamma \leq p$.

Так как выражение

$$\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{zf(\zeta)}{1-\bar{\zeta}z} d\xi d\eta$$

конформным отображением второго рода $z = \frac{1}{\bar{z}}$ переводится в $\overline{Tf(z')}$, случай $T_\kappa f$ сводится к утверждению для Tf . Перенос на $T_n f$ и $T_{\kappa,n} f$ очевиден. $\triangleright$

Лемма 1.4.1. *Обозначим, как и выше, комплексную плоскость через E , и пусть граница области G — кривая Радона без точек заострения либо кривая Ляпунова. При $0 < \beta < 1$*

$$\sup_{\substack{\frac{1}{2} < r < 1, \\ t \in E}} \int_{\Gamma_r} \frac{|dz|}{|t-z|^\beta} < \infty, \quad (1.24)$$

где Γ_r — образ окружности $|\zeta| = r \leq 1$ при однолистом конформном отображении $\omega = \omega(\zeta)$ единичного круга $\overline{D} = \{\zeta : |\zeta| \leq 1\}$ на $\overline{G}$.

◁ Рассмотрим сначала случай $r = 1$.

Для любого $t \in \Gamma$ найдется $\varepsilon > 0$ (не зависящее от t) такое, что круг $U_t^\varepsilon = \{z : |t - z| < \varepsilon\}$ пересекается с Γ по связной дуге [13, с. 21] (если Γ — кривая Ляпунова, то это очевидно). Отметим, что в силу непрерывности конформного отображения $\omega(\zeta)$ в $\overline{D}$, $\varepsilon > 0$ можно выбрать таким, чтобы это свойство выполнялось для любого r , $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$, когда $t \in \Gamma_r$.

С другой стороны, если σ и s — дуговые абсциссы на Γ , соответствующие точкам t и z , то найдутся такие константы $k_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$, что

$$|\sigma - s| \geq |t - z| \geq k_0 |\sigma - s|, \quad (1.25)$$

как только $|\sigma - s| \leq \varepsilon$ (см. лемму 1.3.1), причем ε и k_0 можно выбрать так, что (1.25) выполнено для всех Γ_r , $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$ (см. [13, с. 18–19]).

Зафиксируем $k_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ такими, чтобы пересечение $U_t^\varepsilon \cap \Gamma$ было связной дугой для любого $t \in \Gamma$, и чтобы выполнялось (1.25).

Пусть теперь расстояние от t до Γ не меньше ε . Тогда

$$\int_{\Gamma} \frac{|dz|}{|t - z|^\beta} \leq |\Gamma| \varepsilon^{-\beta}, \quad (1.26)$$

где $|\Gamma|$ — длина кривой Γ .

Рассмотрим случай, когда расстояние от t до Γ меньше ε . Обозначим: $t_0 \in \Gamma$ — точка, ближайшая к точке t , и $\gamma^\varepsilon = U_{t_0}^\varepsilon \cap \Gamma$. Поскольку все точки дуги γ^ε расположены вне круга с центром в точке t и радиуса $|t - t_0|$, то для любого $z \in \gamma^\varepsilon$ имеем оценку

$$|t - z| \geq \frac{1}{2} |t_0 - z|. \quad (1.27)$$

Далее, учитывая (1.25) и (1.27), получим

$$\int_{\gamma^\varepsilon} \frac{|dz|}{|t - z|^\beta} \leq \frac{2}{k_0} \int_{\gamma^\varepsilon} \frac{ds}{|\sigma - s|^\beta} \leq \frac{2}{k_0(1 - \beta)} |\gamma^\varepsilon|^{1-\beta}, \quad (1.28)$$

где $|\gamma^\varepsilon|$ — длина дуги γ^ε , а σ — дуговая абсцисса точки t_0 . Вместе с тем

$$\int_{\Gamma \setminus \gamma^\varepsilon} \frac{|dz|}{|t - z|^\beta} \leq |\Gamma| \varepsilon^{-\beta}. \quad (1.29)$$

Если же теперь вместо Γ возьмем кривую Γ_r и запишем для нее оценки (1.26), (1.28) и (1.29), то, очевидно, правые части этих неравенств будут допускать оценку, равномерную по $r \in [\frac{1}{2}, 1]$, откуда получим (1.24). $\triangleright$

Как и выше, через Γ_r будем обозначать образ окружности $|\zeta| = r \leq 1$ при конформном отображении $\omega = \omega(\zeta)$ единичного круга $D_\zeta = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на область G .

Теорема 1.4.8 также частично является следствием следующего утверждения.

Теорема 1.4.9. Пусть граница Γ области G — кривая Ляпунова либо кривая Радона без точек заострения. Если $f(t) \in L_q(\overline{G})$, $1 < q < 2$, то

$$\|Tf(z + \Delta z) - Tf(z)\|_{L_\gamma(\Gamma_r)} \leq M_{q,\gamma}^*(G) \|f\|_{L_q(\overline{G})} |\Delta z|^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad (1.30)$$

где γ — любое действительное число, удовлетворяющее условиям $1 \leq \gamma < \frac{q}{2-q}$, константы $M_{q,\gamma}(G)$ и $M_{q,\gamma}^*(G)$ зависят от γ , q , G и не зависят от r и f .

$\triangleleft$ Доказательство основано на рассуждениях из [5, с. 68].

Вначале предположим, что $q < \gamma < \frac{q}{2-q}$. Имеем

$$\begin{aligned} |\Delta T| &\equiv |Tf(z + \Delta z) - Tf(z)| \leq \frac{|\Delta z|}{\pi} \iint_G \frac{|f(t)|}{|t - z||t - z - \Delta z|} dx dy \leq \\ &\leq \frac{|\Delta z|}{\pi} \iint_G |f(t)|^{\frac{q}{\gamma}} (|t - z||t - z - \Delta z|)^{-\frac{1}{\gamma} + \alpha} \cdot |f(t)|^{q(\frac{1}{q} - \frac{1}{\gamma})} \times \\ &\quad \times (|t - z||t - z - \Delta z|)^{-\frac{2}{q'} + \alpha} dx dy, \end{aligned}$$

где $2\alpha = \frac{1}{\gamma} - \frac{2}{q} + 1 > 0$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Так как $\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma - q}{\gamma q} + \frac{1}{q'} = 1$, то, применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} |\Delta T| &\leq \frac{|\Delta z|}{\pi} \left(\iint_G |f(t)|^q (|t - z||t - z - \Delta z|)^{-1 + \gamma\alpha} dx dy \right)^{\frac{1}{\gamma}} \times \\ &\times \left(\iint_G |f(t)|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\gamma}} \left(\iint_G (|t - z||t - z - \Delta z|)^{-2 + q'\alpha} dx dy \right)^{\frac{1}{q'}}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Для последнего сомножителя в (1.31) имеем следующую оценку (см. [5, с. 56]):

$$\left(\iint_G (|t-z||t-z-\Delta z|)^{-2+q'\alpha} dx dy \right)^{\frac{1}{q'}} \leq C_{q,\gamma}(G) |\Delta z|^{\frac{1}{\gamma}-1}, \quad (1.32)$$

где константа $C_{q,\gamma}(G)$ зависит только от γ, q, G .

Далее, учитывая, что $0 < \alpha\gamma < 1$ и используя неравенство (1.1), а также лемму 1.4.1, имеем ($z = z(s)$)

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_r} (|t-z||t-z-\Delta z|)^{-1+\alpha\gamma} ds = \\ & = |\Delta z|^{-1+\alpha\gamma} \int_{\Gamma_r} \left| \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-z-\Delta z} \right|^{1-\alpha\gamma} ds \leq \\ & \leq |\Delta z|^{-1+\alpha\gamma} \left\{ \int_{\Gamma_r} \frac{ds}{|t-z|^{1-\alpha\gamma}} + \int_{\Gamma_r} \frac{ds}{|t-z-\Delta z|^{1-\alpha\gamma}} \right\} \leq \\ & \leq C_{q,\gamma}^*(G) |\Delta z|^{-1+\alpha\gamma}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

где константа $C_{q,\gamma}^*(G)$ зависит только от γ, q, G .

Сопоставляя (1.31), (1.32) и (1.33), получим (1.30). Теперь, очевидно, можно снять ограничение $\gamma > q$. $\triangleright$

Следствие 1.4.3. *Отображение $T : L_q(\overline{G}) \rightarrow L_\gamma(\Gamma_r)$, $\frac{1}{2} < r \leq 1$, вполне непрерывно.*

$\triangleleft$ Доказательство сразу получается из (1.5), (1.12), (1.30) и теоремы Арцела — Асколи (см. [41, с. 113–114]). $\triangleright$

Очевидно также

Следствие 1.4.4. *Пусть $z \in \Gamma$, $\omega(z) = e^{i\theta}$, $\omega(z_r) = re^{i\theta}$. Если $f(t) \in L_q(\overline{G})$, $1 < q < 2$, то*

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{\Gamma} |Tf(z) - Tf(z_r)|^\gamma |dz| = 0, \quad 1 \leq \gamma < \frac{q}{2-q}.$$

Широко используется в теории обобщенных аналитических функций оператор (см. [5, гл. 1, §§ 8–9])

$$\Pi f \equiv \Pi_G f = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (1.34)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Отметим, что $\Pi f = \partial_z T f$, где $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ — обобщенное дифференцирование в смысле Соболева (см. [5, гл. 1, §§ 8–9]). В литературе этот оператор иногда называют *оператором Берлинга* (см., например, [67]).

Конечно, также используются другие производные по z операторов «типа T », например, $\Pi_{\varkappa} f = \partial_z T_{\varkappa} f$.

Теорема 1.4.10 [5, гл. 1, § 8; гл. 4, § 9]. Пусть граница Γ области G принадлежит классу C_{α}^{k+1} , $k = 0, 1, \dots$, $0 < \alpha < 1$. Тогда линейный оператор Πf (а в случае $G = D$ и $\Pi_{\varkappa} f$) непрерывно отображает банахово пространство $C_{\alpha}^k(\overline{G})$ ($C_{\alpha}^k(\overline{D})$) в себя.

Теорема 1.4.11 [5, гл. 1, § 9; гл. 4, § 9]. Линейный оператор Πf (а в случае $G = D$ и $\Pi_{\varkappa} f$) непрерывно отображает банахово пространство $L_p(\overline{G})$, $p > 1$ ($L_p(\overline{D})$, $p > 1$), в себя.

Если p достаточно близко к двум, то нормы этих операторов меньше единицы, т. е. они являются операторами сжатия.

Лемма 1.4.2. Пусть граница Γ области G — кривая Радона без точек заострения или кривая Ляпунова, $f(z) \in L_p(\Gamma)$, $p \geq 1$, $0 < \alpha < 1$. Тогда интеграл

$$If(\zeta) = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{|z - \zeta|^{1-\alpha}} dz$$

почти в каждой точке $t \in \Gamma$ имеет конечный некасательный предел

$$\begin{aligned} If(t) &= \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{|z - t|^{1-\alpha}} dz \in L_q(\Gamma), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha, \\ \|If(t)\|_{L_q(\Gamma)} &\leq \text{const} \|f\|_{L_p(\Gamma)}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где константа от f не зависит. Если $p = \infty$, то $q = \infty$ и $If(\zeta) \in L_{\infty}(\overline{G})$.

◁ Если $t \in \Gamma$, то утверждение, что $If(t)$ конечен почти для всех $t \in \Gamma$ и выполнено (1.35), следует из [63, с. 141] и леммы 1.3.1.

Из рассуждений, приведенных в [8, с. 34–36], следует, что в каждой точке гладкости $t \in \Gamma$ существует конечный некасательный предел

$$\lim_{\zeta \rightarrow t} \int_{\Gamma} \frac{dz}{|z - \zeta|^{1-\alpha}} = \int_{\Gamma} \frac{dz}{|z - t|^{1-\alpha}}. \quad (1.36)$$

Отсюда с очевидностью вытекает, что если $f \in L_\infty(\Gamma)$, то почти всюду (в каждой точке гладкости контура Γ) существует конечный некасательный предел $\lim_{\zeta \rightarrow t} If(\zeta) = If(t) \in L_\infty(\Gamma)$ и $If(\zeta) \in L_\infty(\overline{G})$.

Рассмотрим срезку функции $f(z) \in L_p(\Gamma)$:

$$f_a(z) = \begin{cases} f(z), & z \in M_a = \{z : |f(z)| \leq a\}, \\ 0, & z \in \Gamma \setminus M_a. \end{cases}$$

Для почти всех $t \in \Gamma$ при любом a существует конечный предел по некасательным направлениям:

$$\lim_{\zeta \rightarrow t} If_a(\zeta) = If_a(t). \quad (1.37)$$

Зафиксируем произвольную точку $t_0 \in \Gamma$, в которой конечен интеграл $If(t_0)$, и существует предел (1.37) (множество таких точек — полной меры).

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку $\text{mes}(\Gamma \setminus M_a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$, при подходящих $a > 0$ и $\delta > 0$, если $|\zeta - t_0| < \delta$, то

$$\left| \int_{\Gamma} [f(z) - f_a(z)] \left[\frac{1}{|z - \zeta|^{1-\alpha}} - \frac{1}{|z - t_0|^{1-\alpha}} \right] dz \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.38)$$

Действительно, применив неравенство (1.1), будем иметь

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma} [f(z) - f_a(z)] \left[\frac{1}{|z - \zeta|^{1-\alpha}} - \frac{1}{|z - t_0|^{1-\alpha}} \right] dz \right| \leq \\ & \leq \int_{\Gamma} |f(z) - f_a(z)| \left| \frac{\zeta - t_0}{\zeta - t} \right|^{1-\alpha} \frac{|dz|}{|z - t_0|^{1-\alpha}}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Из условия, что $\zeta \rightarrow t_0$ по *некасательному* пути, имеем

$$\left| \frac{\zeta - t}{\zeta - t_0} \right| \geq \text{const} > 0 \quad (1.40)$$

как только $|\zeta - t_0| < \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало (см. [8, с. 34–35]).

Вместе с тем из конечности $If(t_0)$ и абсолютной непрерывности интеграла Лебега имеем

$$\int_{\Gamma} |f(z) - f_a(z)| \frac{|dz|}{|z - t_0|^{1-\alpha}} \rightarrow 0, \quad a \rightarrow +\infty. \quad (1.41)$$

Сопоставив (1.39), (1.40) и (1.41), получим (1.38).

Зафиксируем $a > 0$ и $\delta > 0$ такие, чтобы выполнялось неравенство (1.38). В силу (1.37), при подходящем δ_1 ($0 < \delta_1 \leq \delta$) будем иметь

$$\left| \int_{\Gamma} f_a(z) \left[\frac{1}{|z - \zeta|^{1-\alpha}} - \frac{1}{|z - t_0|^{1-\alpha}} \right] dz \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.42)$$

Из (1.38) и (1.42) получаем

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) \left[\frac{1}{|z - \zeta|^{1-\alpha}} - \frac{1}{|z - t_0|^{1-\alpha}} \right] dz \right| < \varepsilon$$

при $|\zeta - t_0| < \delta_1$, что доказывает первое утверждение леммы 1.4.2. $\triangleright$

Лемма 1.4.3. Пусть граница Γ области G — кривая Радона без точек заострения или кривая Ляпунова, функция $n = n(z, \zeta)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} |n(z, \zeta)| &\leq M, \quad |n(z, \zeta)| \leq M|z - \zeta|^\alpha, \\ |n(z_1, \zeta) - n(z_2, \zeta)| &\leq M_1|z_1 - z_2|^\alpha, \\ |n(z, \zeta_1) - n(z, \zeta_2)| &\leq M_2|\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha, \end{aligned} \quad (1.43)$$

где M, M_1, M_2 — конечные константы, $z, \zeta \in \overline{G}$, $0 < \alpha < 1$.

Тогда интеграл

$$I_1(z) = \int_{\Gamma} \frac{n(z, \zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

почти в каждой точке $t \in \Gamma$ имеет конечный некасательный предел

$$I_1(t) = \int_{\Gamma} \frac{n(t, \zeta)}{\zeta - t} d\zeta \in L_\infty(\Gamma), \quad (1.44)$$

а следовательно, $I_1(z) \in L_\infty(\overline{G})$.

◁ Если $t \in \Gamma$, то из леммы 1.3.1 и (1.43) для почти всех t будем иметь

$$|I_1(t)| \leq \text{const} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{|\sigma - s|^{1-\alpha}} < \infty, \quad t = t(s), \quad \zeta = \zeta(\sigma),$$

и (1.44) доказано.

Пусть $t \in \Gamma$, $z \in G$. С учетом (1.43) будем иметь

$$\begin{aligned} & |I_1(z) - I_1(t)| \leq \\ & \leq \left| \int_{\Gamma} \frac{n(z, \zeta) - n(t, \zeta)}{\zeta - z} + n(t, \zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - t} \right] d\zeta \right| \leq \\ & \leq |z - t|^\alpha \int_{\Gamma} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} + \left| \int_{\Gamma} \frac{n(t, \zeta)}{\zeta - z} - \int_{\Gamma} \frac{n(t, \zeta)}{\zeta - t} \right| = J_1(z) + J_2(z). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Оценим поведение слагаемых в правой части (1.45) при $z \rightarrow t$ по некасательным путям. Воспользовавшись (1.1) и (1.38), получим

$$\begin{aligned} |J_1(z)| & \leq |z - t|^{\frac{\alpha}{2}} \left[\int_{\Gamma} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{1-\frac{\alpha}{2}}} + \int_{\Gamma} \left| \frac{\zeta - t}{\zeta - z} \right|^{\frac{\alpha}{2}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - t|^{1-\frac{\alpha}{2}}} \right] \leq \\ & \leq |z - t|^{\frac{\alpha}{2}} \text{const} \int_{\Gamma} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{1-\frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Поскольку интеграл в правой части (1.46) ограничен (см. лемму 1.4.2), то $J_1(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow t$ для почти всех $t \in \Gamma$.

Из формул Сохоцкого — Племяля (1.88) для почти всех $t \in \Gamma$ имеем

$$\lim_{z \rightarrow t} J_2(z) = \left| \pi i n(t, t) + \int_{\Gamma} \frac{n(t, \zeta)}{\zeta - t} - \int_{\Gamma} \frac{n(t, \zeta)}{\zeta - t} \right| = 0,$$

и лемма 1.4.3 доказана полностью. ▷

Лемма 1.4.4. Пусть граница Γ области G — кривая Радона без точек заострения или кривая Ляпунова, функция $n(z, \zeta)$ удовлетворяет условиям (1.43), $f(\zeta) \in L_p(\Gamma)$, $p \geq 1$. Тогда интеграл

$$I_2 f(z) = \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{n(z, \zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

почти в каждой точке $t \in \Gamma$ имеет конечный некасательный предел

$$I_2 f(t) = \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{n(t, \zeta)}{\zeta - t} d\zeta \in L_q(\Gamma), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha, \quad (1.47)$$

$$\|I_2 f(t)\|_{L_q(\Gamma)} \leq \text{const} \|f\|_{L_p(\Gamma)},$$

где константа от f не зависит. Если $p = \infty$, то $q = \infty$ и $I_2 f(\zeta) \in L_{\infty}(\overline{G})$.

◁ Из леммы 1.4.3 с очевидностью следует утверждение леммы 1.4.4 в случае $p = \infty$, а также в случае $t \in \Gamma$ (1.47).

Как и при доказательстве леммы 1.4.2 рассмотрим срезку функции $f(z) \in L_p(\Gamma)$:

$$f_a(z) = \begin{cases} f(z), & z \in M_a = \{z : |f(z)| \leq a, \\ 0, & z \in \Gamma \setminus M_a. \end{cases}$$

Для почти всех $t \in \Gamma$ при любом a существует конечный предел по некасательным направлениям

$$\lim_{\zeta \rightarrow t} I_2 f_a(\zeta) = I_2 f_a(t). \quad (1.48)$$

Зафиксируем произвольную точку $t_0 \in \Gamma$, в которой конечен интеграл $I_2 f(t_0)$ и существует предел (1.48) (множество таких точек — полной меры). Окончание доказательства леммы 1.4.4 — простой синтез доказательства леммы 1.4.3 и окончания доказательства леммы 1.4.2. ▷

1.5. Интегральные формулы

Формулы Грина [5, с. 70–71]. Если G_0 — некоторая область такая, что $\overline{G} \subset G_0$ (G не обязательно односвязная, со спрямляемой границей), $\partial_{\bar{z}} w \in L_p(G_0)$, $p > 1$. Тогда имеет место следующая формула:

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} w(z) dz = \iint_G \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dx dy, \quad z = x + iy. \quad (1.49)$$

Если же $\partial_z w \in L_p(G_0)$, $p > 1$, тогда

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} w(z) d\bar{z} = - \iint_G \frac{\partial w}{\partial z} dx dy, \quad z = x + iy. \quad (1.50)$$

Формулы (1.49), (1.50) остаются в силе и в том случае, когда $\Gamma = \partial G$ состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых и если $w \in C(\overline{G})$, $\partial_{\bar{z}} w \in L_p(\overline{G})$ или $\partial_z w \in L_p(\overline{G})$, $p > 2$, соответственно (см. [5, с. 70–71]).

Формулы Помпейю. С помощью формул (1.49), (1.50) легко выводятся следующие *формулы Помпейю* (см. [5, с. 41, 57]):

$$w(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(z)}{z - \zeta} dz - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}} \frac{dx dy}{z - \zeta}, \quad \zeta \in G, \quad (1.51)$$

$$w(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(z)}{\bar{z} - \bar{\zeta}} d\bar{z} - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\partial w(z)}{\partial z} \frac{dx dy}{\bar{z} - \bar{\zeta}}, \quad \zeta \in G. \quad (1.52)$$

1.6. Обобщенные аналитические функции

Как и выше, обозначим через G ограниченную односвязную область в комплексной z -плоскости, $z = x + iy$, $i^2 = -1$, со спрямляемой границей $\Gamma = \partial G$; $\overline{G} = G \cup \Gamma$. Пусть $A(z), B(z) \in L_s(\overline{G})$, $s > 2$ — заданные комплексные функции.

Рассмотрим в $\overline{G}$ каноническую эллиптическую систему в комплексной записи

$$\partial_{\bar{z}} w + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0, \quad (1.53)$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, u и v — ее действительная и мнимая части, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ — производная в смысле Соболева.

Решение $w(z)$ системы (1.53) называют *обобщенной аналитической функцией* (см. [5, с. 148]).

Лемма 1.6.1 [5, с. 156, 175–177]. Для обобщенной аналитической функции $w(z)$, определенной в G , имеет место представление

$$w(z) = \Phi(z) \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \right\}, \quad (1.54)$$

где

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad g(z) = \begin{cases} A(z) + B(z)\frac{\overline{w}}{w}, & w \neq 0, \\ 0, & w = 0, \end{cases}$$

$\Phi(z)$ — голоморфная в G функция, однозначно определяемая функцией $w(z)$.

Если в соотношении (1.54) задана голоморфная в G функция $\Phi(z)$ (произвольной структуры), то по ней однозначно определяется обобщенная аналитическая функция $w(z)$.

Следуя [5], представление (1.54) будем называть «*представлением первого рода*».

С использованием формулы (1.51) доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.6.2 [5, с. 41, 57]. Пусть $G \in C^1$. Если $w(z) \in W_s^1(\overline{G})$ — непрерывное в $\overline{G}$ решение системы (1.53), то имеет место соотношение

$$w(z) + T(Aw + B\overline{w})(z) = \Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t-z} dt. \quad (1.55)$$

Очевидно, $\Phi(z)$ — голоморфная в G функция и $\Phi(z) \in W_s^1(\overline{G})$.

Если $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная в G функция класса $W_s^1(\overline{G})$, $s > 2$, то соотношением (1.55) однозначно определяется решение $w(z)$ системы (1.53) класса $W_s^1(\overline{G})$.

Следуя [5], представление (1.55) будем называть «*представлением второго рода*».

Представления второго рода, аналогичные (1.55), имеют место и с участием других операторов типа T .

Лемма 1.6.3 [5, гл. 4, § 7]. Пусть $G = D$ — единичный круг. Если $w(z) \in W_s^1(\overline{D})$ — непрерывное в $\overline{D}$ решение системы (1.53), то имеет место соотношение

$$w(z) + T_{\varkappa}(Aw + B\overline{w})(z) = \Phi(z), \quad (1.56)$$

где $\Phi(z) \in W_s^1(\overline{D})$, $\Phi(z)$ — голоморфная в D функция, причем

$$\operatorname{Re}\{z^{-\varkappa}w(z)\} = \operatorname{Re}\{z^{-\varkappa}\Phi(z)\}, \quad z \in \Gamma. \quad (1.57)$$

Если $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная в D функция класса $W_s^1(\overline{G})$, $s > 2$, то соотношением (1.56) однозначно определяется решение $w(z)$ системы (1.53) класса $W_s^1(\overline{G})$, причем будут выполнены равенство (1.57). Также имеют место утверждения, аналогичные леммам 1.6.2, 1.6.3, содержащие, соответственно, операторы $T_n, T_{\varkappa,n}$.

Лемма 1.6.4 [5, с. 178, 179, 185]. Пусть $G \in C^1$. Если $w(z) \in C(\overline{G})$ — решение уравнения (1.53), то имеет место представление (обобщенная формула Коши)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) w(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{w(\zeta)} d\bar{\zeta} = \begin{cases} w(z), & z \in G, \\ \frac{1}{2}w(z), & z \in \Gamma, \\ 0, & z \notin \overline{G}, \end{cases} \quad (1.58)$$

где

$$\Omega_1(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - z} + O(|\zeta - z|^{-\frac{2}{s}}), \quad \Omega_2(z, \zeta) = O(|\zeta - z|^{-\frac{2}{s}}), \quad (1.59)$$

— обобщенные ядра Коши уравнения (1.53) (см. [5, с. 179]), $\Omega_1(z, \zeta), \Omega_2(z, \zeta) \in C_{\alpha}, \alpha = \frac{s}{s-2}$, по каждой переменной z, ζ при $z \neq \zeta$,

$$\Omega_1(z, \zeta) = \frac{e^{\omega_1(z, \zeta) + \omega_2(z, \zeta)}}{2(\zeta - z)}, \quad \Omega_2(z, \zeta) = \frac{e^{\omega_1(z, \zeta) - \omega_2(z, \zeta)}}{2(\zeta - z)}, \quad (1.60)$$

$$|\omega_j(z, \zeta)| \leq M_s, \quad |\omega_j(z, \zeta)| \leq M_s |z - \zeta|^{\alpha}, \quad j = 1, 2, \quad (1.61)$$

$$|\omega_j(z_1, \zeta) - \omega_j(z_2, \zeta)| \leq M'_s |z_1 - z_2|^{\alpha} \quad (1.62)$$

$$|\omega_1(z, \zeta) - \omega_2(z, \zeta)| \leq M''_s |z - \zeta|^{\alpha}, \quad (1.63)$$

где M_p, M'_p, M''_p — конечные константы, зависящие только от s и норм $\|A\|_{L_s(\overline{G})}, \|B\|_{L_s(\overline{G})}$.

Замечание 1.6.1. При $A = B \equiv 0$ $\Omega_1(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$, $\Omega_2(z, \zeta) \equiv 0$, и формула (1.58) превращается в формулу Коши для голоморфных функций.

Лемма 1.6.5 [5, с. 194, 151–152]. Если $w(z) \in C(\overline{D})$ — решение уравнения (1.53),

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t - z} dt, \quad (1.64)$$

то

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) \Phi(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{\Phi(\zeta)} d\bar{\zeta} \equiv \mathcal{H}\Phi(z). \quad (1.65)$$

Обратно, если $\Phi(z)$ — голоморфная в D и непрерывная в $\overline{D}$ функция, то (1.65) — непрерывное в $\overline{D}$ решение уравнения (1.53), и имеет место представление (1.64).

1.7. Классы Харди голоморфных функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7.1. Говорят, что голоморфная в единичном круге функция $\Phi(z)$ принадлежит классу Харди H_p , $p > 0$, если для некоторой постоянной $M_p(\Phi) < +\infty$ она удовлетворяет условию

$$\mu_p(\rho, \Phi) = \int_0^{2\pi} |\Phi(\rho e^{i\sigma})|^p d\sigma \leq M_p(\Phi), \quad 0 \leq \rho < 1, \quad p > 0. \quad (1.66)$$

Аналогично определяются классы Харди гармонических функций (см. [7, гл. 2; 9, гл. 9; 13, гл. 3; 43, гл. 3–7]), которые, следуя [13, с. 71], будем обозначать через h_p .

Множество ограниченных голоморфных в D функций будем обозначать через H_∞ . Очевидно, при $0 < p < q$ справедливы включения $H_p \supset H_q \supset H_\infty$.

Приведем некоторые свойства функций из классов Харди.

Лемма 1.7.1 [13, с. 77]. *Какова бы ни была голоморфная регулярная в круге D функция $\Phi(z)$, величина $\mu_p(\rho, \Phi)$, определенная формулой (1.66), при любом $p > 0$ представляет собой возрастающую (в широком смысле) функцию от ρ , $0 \leq \rho < 1$.*

Предположим, что внутри круга D задана последовательность точек $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$. Если в каждом круге $|z| \leq r < 1$ лежит только конечное число точек ζ_n , без нарушения общности можно считать ее занумерованной в порядке неубывания модулей. Это именно такой случай, когда выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\zeta_n|) < \infty. \quad (1.67)$$

Некоторые из точек ζ_n могут повторяться, однако каждая из них в силу (1.67) имеет конечную кратность. Предельные точки последовательности $\{\zeta_n\}$ могут лежать только на окружности Γ .

Лемма 1.7.2 [13, с. 75]. *Если выполнены условия (1.67), то внутри единичного круга D существует голоморфная функция $b(z)$, задаваемая формулой*

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_n - z}{1 - \bar{\zeta}_n z} \frac{|\zeta_n|}{\zeta_n}, \quad (1.68)$$

модуль которой не превосходит 1, а совокупность нулей в точности совпадает с множеством $\{\zeta_n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7.2. Функцию (1.68) называют *произведением Бляшке* соответствующей последовательности $\{\zeta_n\}$.

Выпишем в виде последовательности $\{\zeta_n\}$ множество нулей функции $\Phi(z) \in H_p$, $p > 0$, внутри D , повторяя каждый нуль столько раз, какова его кратность. Эта последовательность удовлетворяет условию (1.67) (см. [13, с. 78]). Соответствующее произведение, существующее в силу леммы 1.7.2, называется *функцией Бляшке*, соответствующей функции $\Phi(z)$.

Лемма 1.7.3 [13, с. 78]. Произведение Бляшке (1.68) почти во всех точках окружности Γ имеет конечные некасательные предельные значения $b^+(e^{i\sigma})$, по модулю равные единице.

Теорема 1.7.1 (Ф. Рисс [13, с. 79]). Каждая функция $\Phi(z) \neq 0$ из класса H_p , $p > 0$, допускает представление

$$\Phi(z) = b(z)\Phi_0(z), \quad z \in D, \quad (1.69)$$

где $b(z)$ — произведение Бляшке функции $\Phi(z)$, а функция $\Phi_0(z)$, не имеющая нулей в круге D , принадлежит H_p и $\mu_p(r, \Phi_0) \leq M_p(\Phi)$.

Теорема 1.7.2 [43, с. 92]. Если $\Phi(z) \in H_p$, $p > 0$, то для почти всех точек $e^{i\sigma} \in \Gamma$ существует конечный предел $\Phi^+(e^{i\sigma})$ при $z \rightarrow e^{i\sigma}$, $z \in D$, по некасательным к Γ путям. При этом $\Phi^+(e^{i\sigma}) \in L_p[0, 2\pi]$.

Теорема 1.7.3 [7, гл. 2, § 1]. При $1 \leq p < \infty$ H_p является банаховым пространством с нормой

$$\|\Phi\|_p \equiv \|\Phi\|_{H_p} = \left[\int_0^{2\pi} |\Phi^+(e^{is})|^p ds \right]^{\frac{1}{p}}; \quad (1.70)$$

H_∞ является банаховым пространством с нормой

$$\|\Phi\|_\infty \equiv \|\Phi\|_{H_\infty} = \sup_{z \in D} |\Phi(z)|; \quad (1.71)$$

при $0 < p < 1$ H_p является полным метрическим пространством с метрикой

$$\rho(0, \Phi) = \|\Phi\|_p \equiv \|\Phi\|_{H_p} = \int_0^{2\pi} |\Phi^+(e^{is})|^p ds. \quad (1.72)$$

Теорема 1.7.4 (Ф. Рисс [13, с. 80]). Для любой функции $\Phi(z) \in H_p$, $p > 0$, имеют место соотношения

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |\Phi(re^{i\sigma})|^p d\sigma = \int_0^{2\pi} |\Phi^+(e^{i\sigma})|^p d\sigma, \quad (1.73)$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |\Phi(re^{i\sigma}) - \Phi^+(e^{i\sigma})|^p d\sigma = 0, \quad (1.74)$$

где $\Phi^+(e^{i\sigma})$ — предельные значения $\Phi(z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7.3. Интегралом типа Коши — Лебега называется выражение

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{is} f(e^{is})}{e^{is} - z} ds, \quad z \in \Gamma, \quad (1.75)$$

где f — произвольная функция из $L_1(\Gamma)$ ($f(e^{is}) \in L_1[0, 2\pi]$).

Выражение (1.75) называется *интегралом Коши — Лебега*, если плотность f почти всюду на окружности Γ совпадает с предельными некасательными значениями $\Phi^+(e^{is})$ представленной этим интегралом функции.

Теорема 1.7.5 (Ф. Рисс, М. Рисс [13, с. 85]). Класс аналитических функций $\Phi(z)$, регулярных в D и представимых интегралом Коши — Лебега, совпадает с H_1 .

Теорема 1.7.6 (В. И. Смирнов [13, с. 83]). Пусть $\Phi(z) \in H_p$, $p > 0$. Если почти для всех $s \in [0, 2\pi]$ имеет место неравенство $|\Phi^+(e^{is})| \leq M$, $M = \text{const} < \infty$, то $|\Phi(z)| \leq M$ во всем круге D . Если же $\Phi^+(e^{is}) \in L_q[0, 2\pi]$ при $q > p$, то $\Phi(z) \in H_q$.

Теорема 1.7.7 (Ф. Рисс, М. Рисс [13, с. 85]). Для каждой функции $\Phi(z) \in H_1$ имеет место равенство

$$\int_0^{2\pi} \Phi^+(e^{is}) de^{is} = 0. \quad (1.76)$$

Теорема 1.7.8 [13, с. 85]. Если функция $\Phi(z) \in H_p$, $p > 0$, на множестве $e \subset \Gamma$ положительной меры имеет нулевые некасательные предельные значения, то $\Phi(z) \equiv 0$.

Для формулировки результата о сопряженных пространствах введем некоторые обозначения:

$$H_p(0) \doteq \left\{ \Phi \in H_p : \int_0^{2\pi} \Phi(e^{is}) ds = 0 \right\} = zH_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (1.77)$$

как элемент соответствующего банахова пространства отождествляется со своими предельными значениями $\Phi^+(e^{is})$; обозначение L_p/H_p (и аналогичные) означает фактор-пространство классов смежности $f + \Phi$, $f \in L_p[0, 2\pi]$, $\Phi \in H_p$.

Теорема 1.7.9 [43, с. 173–176]. Если $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $H_p(0)$ — пространство, сопряженное с L_q/H_q , а $L_q/H_q(0)$ — пространство, сопряженное с H_p при билинейном спаривании

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(e^{is}) g(e^{is}) ds. \quad (1.78)$$

При спаривании (1.78) для H_1 сопряженным служит $L_\infty/H_\infty(0)$.

К вопросу о пространстве, сопряженном с H_1 , еще вернемся в параграфе 1.9.

1.8. Классы Смирнова голоморфных функций

Будем теперь рассматривать ограниченную односвязную область G , обладающую спрямляемой границей Γ .

Предварительно сделаем несколько замечаний о конформном однолистом отображении $z = \omega(\zeta)$ круга $|\zeta| < 1$ на G . Не ограничивая общности, будем предполагать, что $\omega'(0) > 0$.

Теорема 1.8.1 [13, с. 88]. Функция $\omega(\zeta)$, конформно и однолистно отображающая круг $|\zeta| < 1$ на область G со спрямляемой границей Γ , непрерывна в замкнутом круге $|\zeta| \leq 1$ и абсолютно непрерывна на окружности $\zeta = e^{i\sigma}$, $0 \leq \sigma \leq 2\pi$, $\omega'(\zeta) \in H_1$, и имеет место формула

$$\frac{d}{d\sigma} \omega(e^{i\sigma}) = ie^{i\sigma} \omega'(e^{i\sigma}) \quad (1.79)$$

почти для всех $\sigma \in [0, 2\pi]$, и длина дуги $s = s(\sigma)$ является абсолютно непрерывной функцией σ .

Последнее утверждение означает, в частности, что каждое множество меры нуль на окружности $|\zeta| = 1$ при отображении $z = \omega(e^{i\sigma})$ переходит в множество меры нуль на Γ . Верно и обратное, каждое множество нулевой меры на Γ отображается функцией, обратной к $\omega(\zeta)$, в множество меры нуль на $|\zeta| = 1$ (см., например, [9, гл. 3, § 1]). Поэтому функция $\sigma = \sigma(s)$, обратная к $s = s(\sigma)$, также абсолютно непрерывна. Конформность отображения $z = \omega(\zeta)$ имеет место и почти всюду на окружности $|\zeta| = 1$, так что там $\omega'(\zeta) \neq 0$ почти всюду.

Теорема 1.8.2 [13, с. 88]. Пусть $\Gamma = \partial G$ — кривая Радона, так что $\theta(s)$ — функция ограниченной вариации. Тогда функция $\arg \omega'(\zeta)$ ограничена в круге $|\zeta| < 1$, и в каждой точке гладкости кривой Γ имеет место формула

$$\arg \omega'(e^{i\sigma}) = \theta(s(\sigma)) - \sigma - \frac{\pi}{2}. \quad (1.80)$$

Теорема 1.8.3 [13, с. 89–90]. В условиях теоремы 1.8.2 функция $\ln \omega'(\zeta) \in H_p$ для любого $p > 0$.¹

Следствие 1.8.1. Гармоническая функция $\ln |\omega'(\zeta)|$ представима в круге $|\zeta| < 1$ интегралом Пуассона — Лебега, и, следовательно, аналитическая функция $\ln \omega'(\zeta)$ представима интегралом Шварца через $\ln |\omega'(\zeta)|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8.1. Области G , для которых имеет место следствие 1.8.1, называются *областями класса $\mathcal{C}$* (В. И. Смирнова).

Таким образом, радоновские области входят в класс $\mathcal{C}$. Для областей с ляпуновской границей это очевидно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8.2. Пусть $\{G_n\}$ — последовательность односвязных областей, замыкания которых лежат в G , границы Γ_n этих областей спрямляемы и сходятся к Γ в том смысле, что каждая точка $z \in G$ принадлежит всем G_n , начиная с некоторого номера. Говорят, что регулярная в G голоморфная функция $\Phi(z)$ принадлежит классу E_p , $p > 0$ (В. И. Смирнова), если для некоторой постоянной $M_p(\Phi) < \infty$, не зависящей от n , имеют место неравенства

$$\int_{\Gamma_n} |\Phi(z)|^p |dz| \leq M_p(\Phi), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.81)$$

¹На самом деле, $\ln \omega'(\zeta) \in BMOA \subset \bigcap_{p>0} H_p$ (см. определение $BMOA$ в следующем параграфе).

хотя бы для одной последовательности спрямляемых кривых $\{\Gamma_n\}$ с указанным свойством.

Аналогично определяются классы Смирнова (в частности, Харди) для функций, голоморфных во внешности области G .

Это определение класса E_p принадлежит М. В. Келдышу и М. А. Лаврентьеву [71]. Первоначальное определение В. И. Смирнова требовало, чтобы были ограничены интегралы (1.81) по образам Γ_r окружностей $|\zeta| = r$, $0 \leq r < 1$, при конформном отображении $z = \omega(\zeta)$ (см. выше) единичного круга $|\zeta| < 1$ на область G . Эти определения эквивалентны (см. [13, с. 91]).

Очевидно, если $G = D$, то $E_p = H_p$.

Лемма 1.8.1 [13, с. 91]. *Голоморфная в G функция $\Phi(z)$ принадлежит классу E_p , $p > 0$, тогда и только тогда, когда голоморфная в круге $|\zeta| < 1$ функция*

$$\Psi(\zeta) = \Phi[\omega(\zeta)] [\omega'(\zeta)]^{\frac{1}{p}} \quad (1.82)$$

принадлежит классу H_p , при этом

$$\int_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\sigma})|^p d\sigma = \int_{\Gamma_r} |\Phi(z)|^p |dz| \leq M_p(\Phi). \quad (1.83)$$

Теорема 1.8.4 [13, с. 91]. *Каждая функция $\Phi(z) \in E_p$, $p > 0$, в области со спрямляемой границей Γ имеет предельные значения $\Phi^+(t)$, $t \in \Gamma$, по всем некасательным к Γ путям почти всюду на Γ , функция $|\Phi^+(t)|^p$ суммируема вдоль Γ и*

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\Gamma_r} |\Phi(z)|^p |dz| = \int_{\Gamma} |\Phi^+(t)|^p |dt|. \quad (1.84)$$

Непосредственным следствием леммы 1.8.1, теоремы 1.8.4 и теоремы 1.7.3 является следующее утверждение.

Теорема 1.8.5. *Множество E_p , $p \geq 1$, с нормой*

$$\|\Phi\|_{E_p} \equiv \|\Phi\|_p = \left[\int_{\Gamma} |\Phi^+(t)|^p |dt| \right]^{\frac{1}{p}} \quad (1.85)$$

является банаховым пространством.

Теорема 1.8.6 [13, с. 92]. Пусть $\Phi(z) \in E_1$ в области со спрямляемой границей Γ . Тогда

$$\int_{\Gamma} \Phi^+(t) dt = 0.$$

Теорема 1.8.7 (В. И. Смирнов [13, с. 92]). Пусть $\Phi(z) \in E_p$, $p > 0$, в области с границей из класса $\mathcal{C}$. Если граничные некасательные предельные значения $\Phi^+(t) \in L_q(\Gamma)$, $q > p$, то $\Phi(z) \in E_q$.

Рассмотрим интеграл типа Коши:

$$\Phi(z) = Kf(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad z \in G. \quad (1.86)$$

Теорема 1.8.8 [13, с. 125, 136]. Пусть граница Γ области G есть кривая Ляпунова либо кривая Радона без точек заострения, $f \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$. Тогда $Kf(z) \in E_p$, оператор $K : L_p(\Gamma) \rightarrow E_p$ непрерывен, т. е.

$$\|Kf(z)\|_{E_p} \leq \text{const} \|f(t)\|_{L_p(\Gamma)}, \quad (1.87)$$

где const от f не зависит, и почти для каждой точки $z_0 \in \Gamma$ имеют место формулы Соболевского — Племелья:

$$\Phi^{\pm}(z_0) = \pm \frac{1}{2} f(z_0) + Kf(z_0), \quad (1.88)$$

где $\Phi^{\pm}(z_0)$ — некасательные предельные значения соответственно изнутри области G ($\Phi^+(z_0)$) и снаружи ($\Phi^-(z_0)$), $Kf(z_0)$ — сингулярный интеграл.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8.1. Если в формуле (1.86) $f(t) \in L_1(\Gamma)$, то, вообще говоря, $Kf(z) \notin E_1$ (см. теорему 1.8.9).

Теорема 1.8.9 [9, с. 423–424]. Класс регулярных голоморфных в G функций, представимых интегралом Коши — Лебега, совпадает с E_1 .

Лемма 1.8.2. Пусть граница области G — кривая Радона без точек заострения либо кривая Ляпунова. Если $\Phi(z) \in E_p$, $p \geq 1$, то $\Phi(z) \in L_m(\overline{G})$ для любого m такого, что $1 \leq m < 2p$, причем

вложение $E_p \subset L_m(\overline{G})$ непрерывно, т. е. имеет место неравенство (с соответствующими упрощениями при $p = 1$)

$$\|\Phi\|_{L_m(\overline{G})} \leq C \left[M\left(\frac{m}{m+\mu}, \Gamma\right) \right]^{\frac{1}{p'}} \left[M\left(\frac{2\mu}{m+\mu}, G\right) \right]^{\frac{1}{m}} \|\Phi\|_{E_p}, \quad (1.89)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $0 < \mu < 1$, $C = \frac{1}{2\pi}$,

$$M(\lambda, \Gamma) = \sup_{z \in E} \int_{\Gamma} |z - \zeta|^{-\lambda} ds, \quad (1.90)$$

$$M(\lambda, G) = \sup_{z \in E} \iint_G |\zeta - z|^{-2+\lambda} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (1.91)$$

Отметим, что константа $M(\lambda, \Gamma)$, $\lambda < 1$, конечна в силу леммы 1.4.1. Конечность $M(\lambda, G)$, $\lambda > 0$, легко усматривается после перехода к полярным координатам с центром в точке z .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8.2. Лемма 1.8.2 (кроме неравенства) сформулирована в [46, с. 96]. В доказательстве при этом имеется ошибка, приводящая к неверному неравенству для норм. В связи с этим доказательство неравенства проведем подробно (основываясь на конструкции из [46, с. 96]).

$\triangleleft$ Будем считать $p > 1$. В случае $p = 1$ упрощения очевидны. Представляя функцию $\Phi(z) \in E_p$, $p > 1$, интегралом Коши — Лебега (теорема 1.8.9), и применяя неравенство Гёльдера с показателями $m = (2 - \mu)p$, $r = \frac{p}{\alpha}$ и $\lambda = \frac{p}{p-1}$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda} = 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} (2\pi)^m \iint_G |\Phi(z)|^m dx dy &\leq \iint_G \left(\int_{\Gamma} |\Phi(t)| |t - z|^{-1} ds \right)^m dx dy \leq \\ &\leq \iint_G \left[\int_{\Gamma} |\Phi(t)|^{1-\alpha} |t - z|^{-\beta} (|\Phi(t)|^{\alpha} |t - z|^{\beta-1}) ds \right]^m dx dy \leq \\ &\leq \|\Phi\|_{L_p(\Gamma)}^{\alpha m} \iint_G \left(\int_{\Gamma} |t - z|^{-\beta\lambda} ds \right)^{\frac{m}{\lambda}} \left(\int_{\Gamma} |\Phi(t)|^p |t - z|^{(\beta-1)m} ds \right) dx dy, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \frac{1-\mu}{2-\mu}, \quad \beta = \frac{m-2+\mu}{m+\mu}.$$

Поскольку $\beta\lambda = \frac{m}{m+\mu}$, $(1-\beta)m = \frac{2m}{m+\mu}$, а $\alpha + \frac{p}{m} = 1$, то получаем (1.89). $\triangleright$

Лемма 1.8.3. Пусть граница области G — кривая Радона без точек заострения либо кривая Ляпунова. Если $\Phi(z) \in E_p$, $p > 0$, то $\Phi(z) \in L_m(\overline{G})$, $0 < m < 2p$.

$\triangleleft$ Выпишем для функции $\Phi(z)$ соотношение (1.82) и обозначим через $b(\zeta)$ функцию Бляшке для $\Psi(\zeta)$.

Тогда, в силу (1.69), $\Phi(z) = b(\zeta(z))\Phi_0(z)$, где $z = z(\zeta)$ — конформное отображение, обратное $\omega(\zeta)$, $|\Phi(z)| \leq |\Phi_0(z)|$, $\Phi_0(z) \in E_p$, $\Phi_0(z) \neq 0$.

В силу последнего соотношения функция $\Phi_1(z) = [\Phi_0(z)]^{p/2}$ однозначна и принадлежит классу E_2 . Далее, $\Phi_1(z) \in L_q(\overline{G})$ для любого q такого, что $1 \leq q < 4$ (лемма 1.8.2). Положив $m = \frac{pq}{2} < 2p$, получаем

$$\iint_G |\Phi(z)|^m dx dy \leq \iint_G |\Phi_0(z)|^m dx dy = \iint_G |\Phi_1(z)|^q dx dy < \infty. \triangleright$$

1.9. Классы BMO (Bounded Mean Oscillation)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9.1. Вещественная функция $\varphi \in L_1(\Gamma)$, $\varphi = \varphi(e^{is}) \equiv \varphi(s)$ называется *функцией класса BMO_f* (Bounded Mean Oscillation) (см. [7, с. 227; 70]), если

$$\sup_I \frac{1}{f(I)|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I| ds = \|\varphi\|_{*,f} < \infty,$$

где $I \subset \Gamma$ — произвольный интервал на Γ , $|I|$ — его длина, f — неубывающая положительная функция, определенная на $[0, \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 2\pi$, $\varphi_I = \frac{1}{|I|} \int_I \varphi ds$.

Для комплекснозначной функции $\varphi \in L_1(\Gamma)$ определение аналогично.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9.2. Следуя [7, с. 269], будем говорить, что функция $\Phi(z)$, аналитическая в D , принадлежит классу $BMOA_f$, если $\Phi(z)$ принадлежит классу Харди H_2 , и ее некасательные предельные значения $\Phi^+(e^{is}) \equiv \Phi(s)$ на Γ принадлежат классу BMO_f .

Будем говорить, что функция $\Phi(z)$, аналитическая и ограниченная в дополнении круга D , принадлежит классу $BMOA_f$, если $\Phi(1/z) \in BMOA_f$.

Если $f \equiv 1$, то будем использовать обозначение $BMO_1 = BMO$, $\|\cdot\|_{*,1} = \|\cdot\|_*$.

Если $f = \ln^{-1} 1/r$, то будем использовать обозначения $BMO_f = LMO$, $\|\cdot\|_{*,f} = \|\cdot\|_l$. Очевидно, $LMO \subset BMO$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9.3. Будем говорить, что $\varphi(\theta) \in \Lambda_f$, если

$$\operatorname{ess\,sup}_{s,\theta} \frac{|\varphi(s) - \varphi(\theta)|}{f(|s - \theta|)} = \|\varphi\|_{\Lambda_f} < \infty.$$

Очевидно, что $\Lambda_f \subset BMO_f$.

Имеет место следующее очевидное утверждение [70].

Лемма 1.9.1. Если $|F(x) - F(y)| \leq C|x - y|$, где C — некоторая постоянная, то

$$\int_I |F(\varphi(\theta)) - [F(\varphi)]_I| d\theta \leq 2C \int_I |\varphi(\theta) - \varphi_I| d\theta.$$

Очевидно

Следствие 1.9.1. Если $\varphi \in BMO_f$, то $F(\varphi) \in BMO_f$.

Следствие 1.9.2. Если значения комплекснозначной функции $\varphi \in BMO_f$ принадлежат области, в которой функция F удовлетворяет условию Липшица, то $F(\varphi) \in BMO_f$.

Лемма 1.9.2. Если $\varphi \in BMO_f$, то $|\varphi| \in BMO_f$.

Если при этом $0 < k_1 \leq |\varphi| \leq k_2$, где k_1 и k_2 — некоторые постоянные, то $\frac{1}{\varphi} \in BMO_f$.

Если $\varphi_1, \varphi_2 \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, то произведение $\varphi_1 \varphi_2 \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$.

◁ Первое утверждение сразу же следует из неравенства

$$\int_I ||\varphi| - |\varphi|_I| d\theta \leq \int_I |\varphi - \varphi_I| d\theta.$$

Для доказательства второго утверждения достаточно оценить величину (см. [7, с. 224])

$$\int_I \left| \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi_I} \right| d\theta.$$

Далее, имеем

$$\int_I \left| \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi_I} \right| d\theta \leq \frac{1}{k_1^2} \int_I |\varphi - \varphi_I| d\theta,$$

откуда получаем второе утверждение.

Третье утверждение вытекает из того, что $LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ — мультипликатор BMO . $\triangleright$

Из следствия 1.9.2 и леммы 1.9.2 получаем

Следствие 1.9.3. Если $\lambda(t) \in LMO$ и удовлетворяет неравенствам

$$0 < k_1 \leq |\lambda(t)| \leq k_2 < \infty,$$

где k_1, k_2 — некоторые постоянные, то $\omega(t) = \arg \lambda(t) \in LMO$.

Теорема 1.9.1. Множество BMO с нормой

$$\|\varphi\|_{BMO} = \frac{1}{2\pi} \|\varphi\|_{L_1(\Gamma)} + \|\varphi\|_*$$

является банаховым пространством.

Множество LMO с нормой

$$\|\varphi\|_{LMO} = \frac{1}{2\pi} \|\varphi\|_{L_1(\Gamma)} + \|\varphi\|_l$$

является банаховым пространством.

Следствие 1.9.4. Множество $BMOA$ с нормой

$$\|\Phi\|_{BMOA} = \frac{1}{2\pi} \|\Phi^+\|_{L_1(\Gamma)} + \|\Phi^+\|_*$$

является банаховым пространством.

Множество $LMOA$ с нормой

$$\|\Phi\|_{LMOA} = \frac{1}{2\pi} \|\Phi^+\|_{L_1(\Gamma)} + \|\Phi^+\|_l$$

является банаховым пространством.

Известно (см. [44, с. 223; 70; 80]), что $LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ есть мультипликатор пространства BMO , т. е. максимально широкое множество функций, умножение на которые есть непрерывный линейный оператор из BMO в BMO .

Следуя имеющейся традиции, введем обозначение:

$$\tilde{u}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + e^{is}}{e^{i\sigma} - e^{is}} d\sigma = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma. \quad (1.92)$$

Это хорошо известная формула Гильберта (см. [8, с. 59]), связывающая граничные значения сопряженных гармонических в D функций $u(z)$ и $\tilde{u}(z)$. Она верна, когда $u(z) \in h_p$, $p > 1$, при этом $\tilde{u}(z)$ также принадлежит классу h_p , а граничные значения $u(s)$, $\tilde{u}(s) \in L_p(\Gamma)$ (см. [13, гл. 3, §§ 9, 12]).

Имеет место соотношение (см. [8, с. 59])

$$i\tilde{u}(s) = 2Ku(s) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\sigma) d\sigma + v_0, \quad (1.93)$$

где $v_0 = \operatorname{const}$,

$$Ku(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\sigma)}{\tau - t} d\tau, \quad \tau = e^{i\sigma}, \quad t = e^{is}. \quad (1.94)$$

Теорема 1.9.2 (Ч. Л. ФЕФФЕРМАН [43, с. 298–299]). *Пространство, сопряженное к $\operatorname{Re} H_1(0)$ — это $BMO/(\text{постоянные функции})$. Если $F \in L_1[0, 2\pi]$ — вещественная функция, то следующие условия на F эквивалентны:*

1) *предел $\lim_{t \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{is}) F(s) ds = L \operatorname{Re} f$ существует для любой функции $f \in H_1(0)$, и L — линейный непрерывный функционал на $\operatorname{Re} H_1(0)$;*

2) *$F(s) = \varphi(s) + \tilde{\psi}(s)$, где φ и ψ — вещественные функции класса $L_\infty[0, 2\pi]$;*

3) *$F \in BMO$.*

В случае, когда $F \in BMO$, норма непрерывного линейного функционала L , определенного в 1), эквивалентна $\|F\|_*$, и можно найти вещественные функции $\varphi_1, \psi_1 \in L_\infty[0, 2\pi]$ такие, что

$$F(s) = \varphi_1(s) + \tilde{\psi}_1(s) + \operatorname{const},$$

причем

$$\|\varphi_1\|_\infty + \|\psi_1\|_\infty \leq A\|F\|_* \leq B(\|\varphi_1\|_\infty + \|\psi_1\|_\infty)$$

для некоторых числовых констант A и B . Таким образом, $BMO = \text{Re } L_\infty + \text{Re } \widetilde{L_\infty}$.

С учетом связи ядра преобразования Гильберта (1.92) и ядра Коши (см. [8, с. 58]), из теоремы 1.9.2, вложения $BMO \subset H_p$, $p > 1$, и теоремы 1.8.8 непосредственно следует следующая теорема.

Теорема 1.9.3. Если плотность $f(t)$ интеграла типа Коши (1.86) на единичной окружности $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$ принадлежит классу $L_\infty(\Gamma)$ или классу BMO , то $Kf(z) \in BMOA$ в D , и имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|Kf(z)\|_{BMOA} &\leq \text{const} \|f\|_{L_\infty(\Gamma)}, \\ \|Kf(z)\|_{BMOA} &\leq \text{const} \|f\|_{BMO}, \end{aligned} \quad (1.95)$$

где константы от f не зависят, и справедливы формулы Сохоцкого — Племеля (1.88).

Следствие 1.9.5. Если $t \in \Gamma$ и плотность $f(t)$ интеграла типа Коши (1.86) на единичной окружности $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$ принадлежит классу $L_\infty(\Gamma)$ или классу BMO , то для сингулярного интеграла $Kf(t)$ имеем оценки

$$\begin{aligned} \|Kf(t)\|_{BMO} &\leq \text{const} \|f\|_{L_\infty(\Gamma)}, \\ \|Kf(t)\|_{BMO} &\leq \text{const} \|f\|_{BMO}, \end{aligned} \quad (1.96)$$

где константы от f не зависят.

Замечание 1.9.1. Известно, что сингулярный оператор, в том числе и (1.92), (1.94), ограничен и в LMO [68, 76].

Пусть $\varphi(s) \in L_1(\Gamma)$ и $\delta > 0$. Положим (в обозначениях определения 1.9.1)

$$M_\delta(\varphi) = \sup_{|I| < \delta} \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi(s) - \varphi_I| ds.$$

Тогда $\varphi \in BMO$ тогда и только тогда, когда $M_\delta(\varphi)$ ограничена и $\|\varphi\|_* = \lim_{\delta \rightarrow 2\pi} M_\delta(\varphi)$.

Определение 1.9.4. Будем говорить, что функция φ имеет исчезающую среднюю осцилляцию или $\varphi \in VMO$ (VMO — Vanishing Mean Oscillation), если

- 1) $\varphi \in BMO$;
- 2) $M_0(\varphi) = \lim_{\delta \rightarrow 0} M_\delta(\varphi) = 0$.

VMO — замкнутое подпространство в банаховом пространстве BMO (см. [7, с. 249]). Очевидно, что $LMO \subset VMO$.

Аналогично определению пространства $BMOA$ определим множество $VMOA$ как подмножество $BMOA$ функций, чьи некасательные предельные значения на Γ принадлежат классу VMO . Ясно, что $VMOA$ — замкнутое подпространство в банаховом пространстве $BMOA$, и $LMOA \subset VMOA$. Поскольку H_∞ плотно в $BMOA$ (см. [7, с. 245–248]), то получаем следующее очевидное утверждение.

Лемма 1.9.3. *Разность $H_\infty \setminus LMOA$ не пуста, т. е. существуют ограниченные аналитические в D функции, не принадлежащие $LMOA$.*

1.10. Краевая задача Римана — Гильберта для голоморфных функций

Как установлено в [13, 59, 60] (см. там же дальнейшую литературу), при изучении *задач Римана и Римана — Гильберта для голоморфных функций* с непрерывными (но не гёльдеровыми), а также разрывными коэффициентами, при суммируемых правых частях, наиболее естественными пространствами, в которых следует искать решения, являются классы Харди и Смирнова. Изучению этих краевых задач в таких предположениях и посвящен настоящий параграф. Сюда тесно примыкают и задачи в классах BMO .

1.10.1. Задача Римана — Гильберта для голоморфных функций в классах Смирнова в области с ляпуновской границей. Задача Римана для голоморфных функций в классах Смирнова изучалась в следующих работах: в [60] для областей с ляпуновскими границами, в [13] для областей с ляпуновскими и радоновскими границами. Некоторые обобщения этих результатов содержатся в [72] (см. там же более подробный обзор результатов по обсуждаемой теме).

В [60] и [13, с. 272–273] намечено сведение задачи Гильберта в классах Смирнова к уже исследованной задаче Римана по схеме, обобщающей схему Н. И. Мусхелишвили (см. [52, с. 140–155]). Вместе с тем прямое исследование задачи Гильберта по схеме Ф. Д. Гахова (см. [8, с. 264–285]) имеет самостоятельный интерес в плане применения теории к краевым задачам для обобщенных аналитических функций. Такому прямому исследованию и посвящен настоящий пункт. Поскольку случай нерегулярной (радоновской) границы методом регуляризующего множителя исследовать затруднительно,

он требует некоторых дополнительных рассуждений и будет рассмотрен в следующем пункте.

Как и выше, обозначим через G ограниченную односвязную область в комплексной z -плоскости, $z = x + iy$, $i^2 = -1$, с ляпуновской границей $\Gamma = \partial G$, $\overline{G} = G \cup \Gamma$ (см. определение 1.3.2).

В работе рассматривается задача Римана — Гильберта (Гильберта) в следующей постановке: найти голоморфную в G функцию $\Phi(z) \in E_p$, $p > 1$ (см. определение 1.8.2), предельные значения которой на Γ по некасательным направлениям почти всюду на Γ удовлетворяют краевому условию

$$\operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(t)} \Phi(t) \} = g(t), \quad (1.97)$$

где $t = t(s)$, $s \in [0, l]$, — аффикс точки, принадлежащей кривой Γ , $\lambda = \lambda(t)$ — комплекснозначная измеримая функция, определенная на Γ , удовлетворяющая условию $0 < k_0 \leq |\lambda(t)| \leq k_1 < \infty$, k_0, k_1 — вещественные постоянные, $g(t) = g(t(s)) \equiv g(s) \in L_p(\Gamma) \equiv L_p[0, l]$ — определенная на Γ вещественная функция. Разделив (1.97) на $|\lambda(t)|$, придем к эквивалентному краевому условию, в котором $|\lambda(t)| \equiv 1$:

$$\operatorname{Re} \{ e^{-i\omega(t)} \Phi(t) \} = g(t), \quad (1.98)$$

где $\omega(t) = \arg \lambda(t)$.

Обобщая [5, с. 301], однородной задачей, сопряженной задаче (1.97), будем называть задачу отыскания определенной в G функции $\Phi^*(z) \in E_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, предельные значения которой на Γ по некасательным направлениям почти всюду на Γ удовлетворяют краевому условию

$$\operatorname{Re} \{ \lambda(t) t'(s) \Phi^*(t) \} = 0. \quad (1.99)$$

Аналогично переходу от (1.97) к (1.98), от (1.99) можно перейти к эквивалентному краевому условию

$$\operatorname{Re} \{ e^{i\omega(t)} t'(s) \Phi^*(t) \} = 0. \quad (1.100)$$

Следуя [13, с. 190], предположим, что при выборе хотя бы одной точки начала отсчета $s = 0$ длины дуги s на Γ функция $\omega(s)$ удовлетворяет условию

$$\omega(s) = \tilde{\omega}_0(s) + \tilde{\omega}_1(s) + \omega_2(s), \quad (1.101)$$

где $\tilde{\omega}_0(s)$ — непрерывная функция в каждой точке сегмента $[0, l]$ (в крайних точках имеется в виду односторонняя непрерывность),

$\tilde{\omega}_1(s)$ — функция ограниченной вариации на сегменте $[0, l]$, $\omega_2(s)$ — измеримая на $[0, l]$ функция, удовлетворяющая условию

$$|\omega_2(s)| \leq \nu\pi, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2p}, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \quad (1.102)$$

Не ограничивая общности, можем считать (см. [13, с. 190]), что $\omega(0) = \omega(S)$ и $\tilde{\omega}_1(s)$ непрерывна справа в точке $s = 0$. После этого (1.101) можно переписать в виде (см. [13, с. 190])

$$\omega(s) = \omega_0(s) + \omega_1(s) + \omega_2(s), \quad (1.103)$$

где $\omega_2(s)$ — прежняя, $\omega_1(s)$ — функция скачков $\tilde{\omega}_1(s)$, s_k — не более чем счетное множество точек разрыва $\tilde{\omega}_1(s)$:

$$\omega_1(0) = 0, \quad \omega_1(s) = \sum_{0 < s_k < s} h_k + [\tilde{\omega}_1(s) - \tilde{\omega}_1(s-0)], \quad 0 < s \leq S, \quad (1.104)$$

$h_k = \tilde{\omega}_1(s_k + 0) - \tilde{\omega}_1(s_k - 0)$, а непрерывная на $[0, l]$ функция $\omega_0(s)$ равна сумме $\tilde{\omega}_0(s) + [\tilde{\omega}_1(s) - \omega_1(s)]$.

Построим в единичном круге $D : |\zeta| < 1$ комплексной ζ -плоскости функцию

$$\Psi(\zeta) = \Phi(w(\zeta)) [w'(\zeta)]^{\frac{1}{p}}, \quad (1.105)$$

где $w = w(\zeta)$ — однолистное конформное отображение единичного круга D на область G . Как известно (лемма 1.8.1), $\Phi(z) \in E_p$ в G тогда и только тогда, когда $\Psi(\zeta) \in H_p$.

Поскольку $w'(\zeta) \neq 0$ при $|\zeta| < 1$, и область с ляпуновской границей является областью Смирнова (см. определение 1.8.1), то при $|\zeta| < 1$ можно определить однозначную гармоническую функцию $\arg w'(\zeta)$ всюду на окружности $C = \{\zeta : \zeta = e^{i\sigma}\}$, имеющую некасательные предельные значения, причем в каждой точке кривой Γ имеет место соотношение (см. [13, с. 88, 272])

$$\arg w'(e^{i\sigma}) = \theta(s(\sigma)) - \sigma - \frac{\pi}{2}. \quad (1.106)$$

В силу (1.105) краевая задача (1.98) будет эквивалентна краевой задаче

$$\operatorname{Re} \{ \overline{\mu(\zeta)} \Psi(\zeta) \} = g(t(\zeta)), \quad \zeta = e^{i\sigma}, \quad (1.107)$$

где, с учетом (1.106),

$$\mu(\zeta) \equiv \mu(\sigma) = |w'(e^{i\sigma})|^{-\frac{1}{p}} e^{i\nu(\sigma)}, \quad (1.108)$$

$$\nu(\sigma) = \omega(s(\sigma)) + \frac{1}{p} \left(\theta(s(\sigma)) - \sigma - \frac{\pi}{2} \right). \quad (1.109)$$

Индекс краевого условия. Если в (1.103) $\omega_1(s) \equiv 0$, и имеет место (1.102), то *индексом краевого условия* (1.98) (а также (1.97)) будем называть число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} (\omega_0(l) - \omega_0(0)), \quad (1.110)$$

которое, следуя [13, с. 215], будем предполагать целым. В случае сведения задачи Гильберта к задаче Римана методом Н. И. Мусхелишвили, это, в сочетании с (1.102), эквивалентно предположениям о коэффициенте задачи Римана, принятым в [60]. Будем использовать обозначение $\text{ind}_\Gamma \lambda(t) = \varkappa$, где $\lambda(t)$ — коэффициент краевого условия (1.97).

Пусть теперь в (1.103) $\omega_2(s) \equiv 0$. Обозначим через h_k^+ и h_k^- положительные скачки и модули отрицательных скачков из (1.104) соответственно. Упорядочим их так, чтобы последовательности $\{h_k^+\}$ и $\{h_k^-\}$ были убывающими. Показатели p и p' в (1.102) будем считать такими, что

$$\frac{h_k^-}{2\pi} \neq \frac{1}{2p'}, \quad \frac{h_k^+}{2\pi} \neq \frac{1}{2p}, \quad (1.111)$$

и, следуя [13, с. 209], обозначим через $\varkappa_1^{(p)}$ такое число, что

$$\frac{h_k^-}{2\pi} > \frac{1}{2p'}, \quad k = 1, 2, \dots, \varkappa_1^{(p)}; \quad \frac{h_k^-}{2\pi} < \frac{1}{2p'}, \quad k > \varkappa_1^{(p)}; \quad (1.112)$$

а через $\varkappa_2^{(p)}$ — такое, что

$$\frac{h_k^+}{2\pi} > \frac{1}{2p}, \quad k = 1, 2, \dots, \varkappa_2^{(p)}; \quad \frac{h_k^+}{2\pi} < \frac{1}{2p}, \quad k > \varkappa_2^{(p)}. \quad (1.113)$$

Далее, обозначим: $h_0 = h_0^{(1)} - h_0^{(0)}$, где $h_0^{(0)} = \omega_0(l) - \omega_0(0)$, $h_0^{(1)} = \omega_1(0+0) - \omega_1(l-0)$, и, следуя [13, с. 206], определим целое число $\varkappa_0$, исходя из условий

$$2h_0 = 2\pi \varkappa_0 + h_0^+, \quad 0 \leq h_0^+ < 2\pi. \quad (1.114)$$

Индексом краевого условия (1.98) в этом случае будем называть число

$$\varkappa = \varkappa_1^{(p)} - \varkappa_2^{(p)} - \varkappa_0, \quad (1.115)$$

при условии, что решение краевой задачи ищется в классе E_p (т. е. индекс в этом случае зависит от класса, которому принадлежат решения).

Регуляризирующий множитель. Следуя [8, с. 275], *регуляризирующим множителем* функции $\lambda(t)$, определенной на контуре Γ , в случае, если в (1.103) $\omega_1(s) \equiv 0$ и имеет место (1.102), будем называть такую действительную положительную функцию $p(t)$ точек контура Γ , что, умножив $\lambda(t)$ на $p(t)$, получим произведение $t^\varkappa$ ($\varkappa = \text{ind}_\Gamma \lambda(t)$ — индекс краевого условия) на краевое значение на Γ голоморфной функции из подходящего класса, согласованного с классом, в котором ищется решение рассматриваемой задачи.

В случае, если в (1.103) $\omega_2(s) \equiv 0$, а $\omega_1(s) \not\equiv 0$, то регуляризирующий множитель мы не используем, поэтому и не определяем.

Лемма 1.10.1. Если Γ — единичная окружность $|\zeta| = 1$, а в представлении (1.103) $\omega_1(s) \equiv 0$, то регуляризирующим множителем функции $\lambda(s) = e^{i\omega(s)}$ будет функция $p(s) = e^{-\psi_1(s)}$, где

$$\begin{aligned} \gamma(\zeta) &= \psi(\zeta) + i\psi_1(\zeta) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\omega(\sigma) - \varkappa\sigma] \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma = S(\omega - \varkappa\sigma)(\zeta), \end{aligned} \quad (1.116)$$

$$e^{\pm i\gamma(\zeta)} \in H_{p+\varepsilon}, H_{p'+\varepsilon}, \quad (1.117)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$, p и p' удовлетворяют (1.102).

< В условиях леммы без ограничения общности можно считать, что функция $\omega_0(s)$ в (1.103) гёльдерова [60]. В этом случае однозначная голоморфная функция $S(\omega_0 - \varkappa\sigma)(\zeta)$ гёльдерова в $G \cup \Gamma$ (см. [8, с. 60]), и для доказательства (1.117) достаточно показать, что

$$e^{\pm iS(\omega_2(\zeta))} \in H_{p+\varepsilon}, H_{p'+\varepsilon}.$$

Но последнее включение вытекает из соотношения

$$\frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma = -\frac{d\sigma}{2\pi} + \frac{1}{2\pi i} \frac{2de^{i\sigma}}{e^{i\sigma} - \zeta}, \quad (1.118)$$

условий (1.102) и формул (19.8) из [13, с. 196].

То, что $p(s)$ — регуляризующий множитель, с очевидностью следует из соотношения $p(s)\lambda(s) = \zeta^\varkappa e^{i\gamma(\zeta)}$, $\zeta = e^{is}$. $\triangleright$

Лемма 1.10.2. *Задача Шварца*

$$\operatorname{Re} \{\chi(\zeta)\} = f(\zeta) \in L_q(C), \quad \zeta \in C, \quad (1.119)$$

в классе H_q , $q > 1$, имеет общее решение вида

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\sigma}) \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma + ic_0, \quad (1.120)$$

где c_0 — произвольная вещественная постоянная.

$\triangleleft$ Доказательство см. в [14, с. 447]. $\triangleright$

Рассмотрим теперь в круге D несколько модифицированную задачу Шварца: найти голоморфную в D функцию, допускающую в нуле полюс порядка не выше $\varkappa \geq 0$, удовлетворяющую на окружностях $\Gamma_r = \{\zeta : |\zeta| = r, 0 < r < 1\}$, неравенствам (1.81), $p = q > 1$, и на C краевому условию (1.119). Следуя [8, с. 269], будем называть такую задачу *задачей А*.

Лемма 1.10.3. *Задача А в классе H_q , $q > 1$, имеет общее решение вида*

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\sigma}) \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma + Q(\zeta), \quad (1.121)$$

где

$$Q(\zeta) = \sum_{k=0}^{\varkappa} (c_k \zeta^k - \bar{c}_k \zeta^{-k}), \quad (1.122)$$

где $c_0, \dots, c_\varkappa$ — произвольные комплексные постоянные. Отметим, что фактически c_0 — чисто мнимая постоянная.

$\triangleleft$ Рассмотрим сначала случай однородного краевого условия ($f \equiv 0$). Выпишем разложение искомой функции в окрестности нуля:

$$Q(\zeta) = Q_0(\zeta) + Q_1(\zeta),$$

$$Q_0(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k, \quad Q_1(\zeta) = \sum_{k=-\varkappa}^{-1} c_k \zeta^k.$$

Поскольку $Q(\zeta)$ на окружностях $\Gamma_r = \{\zeta : |\zeta| = r, 0 < r < 1\}$, удовлетворяет неравенствам (1.81), то $Q_0(\zeta) \in H_q$, а следовательно,

обе эти функции имеют некасательные предельные значения класса L_q почти всюду на C . Но поскольку $Q_1(\zeta)$ аналитична вблизи C , а $\operatorname{Re} Q(e^{i\sigma}) = 0$, то функция $\operatorname{Re} Q_0(e^{i\sigma})$ (вещественно) аналитична по σ , а следовательно, $Q_0(e^{i\sigma})$ и $Q(e^{i\sigma})$ (вещественно) аналитичны по σ . Теперь, (1.122) следует из [8, с. 269–270], а (1.121) — из (1.120). $\triangleright$

Лемма 1.10.4. В условиях леммы 1.10.1 оператор

$$\tilde{S}f(s) = \frac{e^{-\psi_1(s)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\psi_1(\sigma)} f(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma, \quad |\zeta| = e^{is}, \quad (1.123)$$

ограничен в $L_p(C)$, $p > 1$.

$\triangleleft$ Доказательство непосредственно следует из [13, с. 144–145]. $\triangleright$

Теорема 1.10.1. Если в (1.103) $\omega_1(s) \equiv 0$, а $\varkappa \geq 0$, где $\varkappa$ определено в (1.110), то однородная задача (1.98) (при $g(t) \equiv 0$) имеет точно $2\varkappa + 1$ линейно независимых в вещественном смысле решений класса E_p , $p > 1$, а неоднородная задача разрешима в E_p при любой правой части краевого условия $g(t) \in L_p(\Gamma)$.

Общее решение задачи (1.98) при этом задается формулой

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & [\zeta'(z)]^{\frac{1}{p}} [\zeta(z)]^{\varkappa} e^{i\gamma(\zeta(z))} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^l e^{\psi_1(\sigma(s))} g(s) |\zeta'_z|^{-\frac{1}{p}} \frac{e^{i\sigma(s)} + \zeta(z)}{e^{i\sigma(s)} - \zeta(z)} \frac{d\sigma}{ds} ds + Q(\zeta(z)) \right\}, \end{aligned} \quad (1.124)$$

где $\zeta = \zeta(z)$ — однолистное конформное отображение области G на единичный круг D , $\sigma = \sigma(s)$ — соответствующее отображение сегмента $[0, l]$ на сегмент $[0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \gamma(\zeta(z)) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^l \left[\omega(s) + \frac{1}{p} \left(\theta(s) - \sigma(s) - \frac{\pi}{2} \right) - \varkappa \sigma(s) \right] \times \\ & \times \frac{e^{i\sigma(s)} + \zeta(z)}{e^{i\sigma(s)} - \zeta(z)} \frac{d\sigma}{ds} ds, \end{aligned} \quad (1.125)$$

$\psi_1(\sigma) = \operatorname{Im} \gamma(e^{i\sigma})$, $Q(\zeta)$ определено формулой (1.122).

Если $\varkappa < 0$, то однородная задача (1.98) не имеет в E_p ненулевого решения, а неоднородная задача разрешима в E_p единственным образом тогда и только тогда, когда выполнены $-2\varkappa - 1$

(вещественных) условий на свободный член $g(t)$ краевого условия (1.98):

$$\int_{\Gamma} g(s) e^{i\omega(s)} \Phi_k^*(t) t'(s) ds = 0, \quad (1.126)$$

где $\Phi_k^*(t) \in E_{p'+\varepsilon}$, $E_{p+\varepsilon}$, $k = 1, \dots, -2\kappa - 1$, — полная система линейно независимых в вещественном смысле решений сопряженной к (1.98) краевой задачи (1.100), имеющей индекс $\kappa^* = -\kappa - 1 \geq 0$. Решение при этом задается формулой (1.124), в которой следует положить $Q(\zeta) \equiv 0$.

◁ Конформным отображением $w = w(\zeta)$ перейдем к краевой задаче (1.107) в единичном круге D с границей C . Поскольку Γ — кривая Ляпунова, $w(\zeta) \in C_\alpha^1(\overline{D})$, $0 < \alpha < 1$ (теорема 1.3.1), и $w'(\zeta) \in C_\alpha(\overline{D})$. В силу последнего обстоятельства

$$\operatorname{ind}_C e^{i\nu(\sigma)} = \operatorname{ind}_\Gamma e^{i\omega(s)} = \kappa, \quad \sigma \in [0, 2\pi], \quad (1.127)$$

и от краевого условия (1.107) можно перейти к краевому условию

$$\operatorname{Re} \{ e^{-i\nu(\sigma)} \Psi(\zeta) \} = g_1(\sigma), \quad (1.128)$$

где $g_1(\sigma) = g(t(\zeta)) |w'(e^{i\sigma})|^{1/p} \in L_p(C)$, а $\Psi(\zeta)$ — искомая функция класса H_p .

Разделим (1.128) на регуляризующий множитель коэффициента $e^{i\nu(\sigma)}$ $p(\sigma) = e^{-\psi_1(\sigma)}$, определенный в (1.116):

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\Psi(\zeta)}{\zeta^\kappa e^{i\gamma(\zeta)}} \right\} = e^{\psi_1(\sigma)} g_1(\sigma), \quad |\zeta| = 1. \quad (1.129)$$

Если $\Psi(\zeta) \in H_p$, то в силу (1.117)

$$\frac{\Psi(\zeta)}{e^{i\gamma(\zeta)}} \in H_q, \quad q > 1. \quad (1.130)$$

Из (1.129), (1.130) и леммы 1.10.3 получаем, что при $\kappa \geq 0$

$$\Psi(\zeta) = \zeta^\kappa e^{i\gamma(\zeta)} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\psi_1(\sigma)} g_1(e^{i\sigma}) \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma + Q(\zeta) \right\}, \quad (1.131)$$

где $Q(\zeta)$ определено в (1.122).

В силу (1.117) $\Psi(\zeta) \in H_q$ при некотором $q > 0$, а следовательно, имеет на C некасательные предельные значения из $L_q(C)$. Вместе с тем в силу леммы 1.10.4 граничные значения $\Psi(\zeta) \in L_p(C)$, а следовательно, $\Psi(\zeta) \in H_p$ (теорема 1.7.6). Из (1.131), (1.105), (1.109) и (1.116) получаем (1.124) и (1.125).

Если $\varkappa < 0$, то из (1.129) также получим (1.131), только при $Q(\zeta) \equiv 0$. Чтобы при этом $\Psi(\zeta)$ была аналитична в D , необходимо и достаточно, чтобы интеграл в (1.131) при $\zeta = 0$ имел нуль порядка $-\varkappa$.

Пользуясь соотношением (1.118), разложим интеграл в (1.131) по степеням ζ и, учитывая (1.117), получим, что неоднородная задача (1.128) разрешима в H_p тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} e^{\psi_1(\sigma)} g_1(\sigma) e^{-ik\sigma} d\sigma = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -\varkappa - 1, \quad (1.132)$$

что эквивалентно $-2\varkappa - 1$ вещественным условиям на $g_1(\sigma)$.

Преобразуем условия (1.132). С этой целью рассмотрим однородную краевую задачу (1.100), сопряженную (1.98). Посредством конформного отображения $w = w(\zeta)$ она преобразуется в краевую задачу

$$\operatorname{Re} \{ e^{i\nu(\sigma)} \zeta'(\sigma) \Psi^*(\zeta) \} = 0, \quad |\zeta| = 1, \quad (1.133)$$

сопряженную (1.128). Здесь $\Psi^*(\zeta) = \Phi^*(w(\zeta)) [w'(\zeta)]^{1/p'}$, $\nu(\sigma)$ определено в (1.109).

Индекс краевого условия (1.133) равен $\varkappa^* = -\varkappa - 1$, откуда, с учетом (1.131), получим, что общее решение задачи (1.133) имеет вид

$$\Psi^*(\zeta) = \zeta^{-\varkappa-1} e^{i\gamma^*(\zeta)} Q^*(\zeta) \in H_{p+\varepsilon}, H_{p'+\varepsilon}, \quad (1.134)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma^*(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[-\omega(s(\sigma)) - \frac{1}{p} \left(\theta(s(\sigma)) - \sigma - \frac{\pi}{2} \right) + \right. \\ \left. + \varkappa\sigma - \frac{\pi}{2} \right] \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta} d\sigma, \end{aligned} \quad (1.135)$$

$$Q^*(\zeta) = \sum_{k=0}^{-\varkappa-1} (c_k^* \zeta^k - \bar{c}_k^* \zeta^{-k}), \quad (1.136)$$

где c_k^* — произвольные комплексные постоянные (c_0^* — чисто мнимая).

С учетом (1.133)–(1.136) очевидно следующее соотношение:

$$\int_C e^{i\nu(\sigma)} \Psi^*(\zeta) g_1(\sigma) d\zeta = \int_0^{2\pi} e^{i\psi_1(\sigma)} Q^*(\zeta) g_1(\sigma) d\sigma. \quad (1.137)$$

Из (1.132), (1.136) и (1.137) получаем, что при $\varkappa < 0$ неоднородная задача (1.128) разрешима в H_p тогда и только тогда, когда

$$\int_C e^{i\nu(\sigma)} \Psi_k^*(\zeta) g_1(\sigma) d\zeta = 0, \quad k = 1, \dots, -2\varkappa - 1, \quad (1.138)$$

где $\Psi_k^*(\zeta)$, $k = 1, \dots, -2\varkappa - 1$, — полная система линейно независимых в вещественном смысле решений задачи (1.133).

Учитывая, что левая часть формулы (1.138) получается из левой части формулы (1.126) после преобразования $w = w(\zeta)$, получаем утверждение теоремы при $\varkappa < 0$. $\triangleright$

Теорема 1.10.2. Если в (1.103) $\omega_2(s) \equiv 0$, а $\varkappa^{(p)} \geq 0$, где $\varkappa^{(p)}$ определено в (1.115), то однородная задача (1.98) (при $g(t) \equiv 0$) имеет точно $\varkappa^{(p)} + 1$ линейно независимых в вещественном смысле решений класса E_p , $p > 1$, а неоднородная задача разрешима в E_p при любой правой части краевого условия $g(t) \in L_p(\Gamma)$.

Если $\varkappa^{(p)} < 0$, то однородная задача (1.98) не имеет ненулевых решений класса E_p , $p > 1$, а неоднородная разрешима единственным образом тогда и только тогда, когда выполнены $k = -\varkappa^{(p)} - 1$ (вещественных) линейных условий на свободный член $g(t)$ краевого условия (1.98), аналогичных (1.126).

Отметим, что $k = 0$ при $\varkappa^{(p)} = -1$, что означает однозначную безусловную разрешимость неоднородной задачи.

$\triangleleft$ Дословно повторяет доказательство теоремы 1.10.3 (см. следующий пункт). $\triangleright$

Замечание 1.10.1. Так как классы Харди H_p есть частный случай классов Смирнова E_p , то теоремами 1.10.1 и 1.10.2 устанавливается соответствующая картина разрешимости задачи Римана — Гильберта в классах Харди.

1.10.2. Задача Римана — Гильберта для голоморфных функций в классах Смирнова в области с радоновской границей. В настоящем пункте исследуется случай радоновской границы без точек заострения сведением к задаче Римана.

Обозначим через G ограниченную односвязную область в комплексной z -плоскости, $z = x + iy$, $i^2 = -1$, с радоновской границей без точек заострения (см. определение 1.3.3 и далее) $\Gamma = \partial G$, $\overline{G} = G \cup \Gamma$.

Так же, как и в предыдущем пункте рассматривается краевая задача (1.97) в той же постановке.

Предположения о $\omega(s)$ несколько отличаются, а именно, *предположим*, что при выборе хотя бы одной точки начала отсчета $s = 0$ длины дуги s на Γ функция $\omega(s)$ удовлетворяет условию

$$\omega(s) = \tilde{\omega}_0(s) + \tilde{\omega}_1(s), \quad (1.139)$$

где $\tilde{\omega}_0(s)$ — непрерывная функция в каждой точке сегмента $[0, l]$ (в крайних точках имеется в виду односторонняя непрерывность), $\tilde{\omega}_1(s)$ — функция ограниченной вариации на сегменте $[0, l]$.

Не ограничивая общности, можем считать (см. [13, с. 190]), что $\omega(0) = \omega(l)$ и $\tilde{\omega}_1(s)$ непрерывна справа в точке $s = 0$. После этого, аналогично тому, как это сделано в предыдущем пункте, (1.139) можно переписать в виде

$$\omega(s) = \omega_0(s) + \omega_1(s), \quad (1.140)$$

где $\omega_1(s)$ — функция скачков $\tilde{\omega}_1(s)$, s_k — не более чем счетное множество точек разрыва $\tilde{\omega}_1(s)$:

$$\omega_1(0) = 0, \quad \omega_1(s) = \sum_{0 < s_k < s} h_k + [\tilde{\omega}_1(s) - \tilde{\omega}_1(s-0)], \quad 0 < s \leq S, \quad (1.141)$$

$h_k = \tilde{\omega}_1(s_k + 0) - \tilde{\omega}_1(s_k - 0)$, а непрерывная на $[0, l]$ функция $\omega_0(s)$ равна сумме $\tilde{\omega}_0(s) + [\tilde{\omega}_1(s) - \omega_1(s)]$.

Не более чем счетное множество точек скачков функции $\omega(s)$ обозначим через $\Xi = \{s_k\}$.

Поскольку функция $\theta(s)$ имеет ограниченную вариацию (см. определение 1.3.3), то для нее имеет место разложение, аналогичное (1.140):

$$\theta(s) = \theta_0(s) + \theta_1(s), \quad (1.142)$$

где функция $\theta_0(s)$ непрерывна на $[0, l]$, а $\theta_1(s)$ — функция скачков (см. [13, с. 11–13]). Скачки функции $\theta(s)$ обозначим через f_n ,

а не более чем счетное множество скачков функции $\theta(s)$ — через $\Theta = \{f_n\}$.

Очевидно, что начало отсчета $s = 0$ длины дуги s можно считать не попадающим в $\Xi \cup \Theta$.

Далее, так же, как и в предыдущем пункте, перейдем к новой искомой функции Ψ по формуле (1.105).

Поскольку Γ — кривая Радона (а следовательно, область G принадлежит классу Смирнова $\mathcal{C}$, см. определение 1.8.1), а при $|\zeta| < 1$ $w'(\zeta) \neq 0$, то в круге $|\zeta| < 1$ можно определить однозначную ограниченную гармоническую функцию $\arg w'(\zeta)$, имеющую некасательные предельные значения почти всюду на окружности $C = \{\zeta : \zeta = e^{i\sigma}\}$, причем в каждой точке гладкости кривой Γ имеет место соотношение (1.106).

В силу (1.105) краевая задача (1.98) будет эквивалентна краевой задаче (1.107).

Отметим, что здесь произведение граничных значений функции $\Psi(\zeta) \in H_p$, $p > 1$, на $\mu(\zeta)$ принадлежит $L_p(C)$.

Так как функция $s(\sigma)$ и обратная к ней абсолютно непрерывны (см. [13, с. 87]), то функция $\nu(\sigma)$, определенная в (1.109), имеет ограниченную вариацию, и для нее имеет место разложение, аналогичное (1.140), (1.142):

$$\nu(\sigma) = \nu_0(\sigma) + \nu_1(\sigma), \quad (1.143)$$

где функция скачков $\nu_1(\sigma)$ имеет следующий вид:

$$\nu_1(\sigma) = \omega_1(s(\sigma)) + \frac{1}{p} \theta_1(s(\sigma)). \quad (1.144)$$

Очевидно, что не более чем счетное множество точек скачков функции $\nu(\sigma)$ есть образ множества $\Xi \cup \Theta$ при отображении $\sigma(s) : [0, l] \rightarrow [0, 2\pi]$. Занумеруем как-либо это множество и обозначим его через $\{\sigma_k\}$. Скачки функции $\nu(\sigma)$ в точках $\{\sigma_k\}$ очевидно равны

$$n_k = h_k + \frac{1}{p} f_k, \quad (1.145)$$

где h_k, f_k — скачки функций $\omega(s)$ и $\theta(s)$ в прообразе точки σ_k на $[0, l]$, причем в точках непрерывности этих функций скачки считаем нулевыми.

Индекс краевого условия. Обозначим через n_k^+ и n_k^- соответственно положительные скачки и модули отрицательных скачков из (1.145), а точки этих скачков — через σ_k^+ и σ_k^- соответственно. Упорядочим их так, чтобы последовательности $\{n_k^+\}$ и $\{n_k^-\}$ были убывающими. Сопряженные показатели p и p' ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) будем считать такими, что

$$\frac{n_k^-}{2\pi} \neq \frac{1}{2p'}, \quad \frac{n_k^+}{2\pi} \neq \frac{1}{2p}, \quad (1.146)$$

и, следуя [13, с. 209], обозначим через $\varkappa_1^{(p)}$ такое число, что

$$\frac{n_k^-}{2\pi} > \frac{1}{2p'}, \quad k = 1, 2, \dots, \varkappa_1^{(p)}; \quad \frac{n_k^-}{2\pi} < \frac{1}{2p'}, \quad k > \varkappa_1^{(p)};$$

а через $\varkappa_2^{(p)}$ — такое, что

$$\frac{n_k^+}{2\pi} > \frac{1}{2p}, \quad k = 1, 2, \dots, \varkappa_2^{(p)}; \quad \frac{n_k^+}{2\pi} < \frac{1}{2p}, \quad k > \varkappa_2^{(p)}.$$

Далее, обозначим: $n_0 = n_0^{(1)} - n_0^{(0)}$, где $n_0^{(0)} = \nu_0(2\pi) - \nu_0(0)$, $n_0^{(1)} = \nu_1(0+0) - \nu_1(2\pi-0)$, и, следуя [13, с. 206], определим целое число $\varkappa_0$, исходя из условий

$$2n_0 = 2\pi \varkappa_0 + n_0^+, \quad 0 \leq n_0^+ < 2\pi.$$

Индексом краевого условия (1.98) в этом случае будем называть число

$$\varkappa = \varkappa_1^{(p)} - \varkappa_2^{(p)} - \varkappa_0 \quad (1.147)$$

при условии, что решение краевой задачи ищется в классе E_p (т. е. индекс в этом случае зависит от класса, которому принадлежат решения).

Теорема 1.10.3. Если $\varkappa^{(p)} \geq 0$, где $\varkappa^{(p)}$ определено в (1.115), то однородная задача (1.98) (при $g(t) \equiv 0$) имеет точно $\varkappa^{(p)} + 1$ линейно независимых в вещественном смысле решений класса E_p , $p > 1$, а неоднородная задача разрешима в E_p при любой правой части краевого условия $g(t) \in L_p(\Gamma)$.

Если $\mathcal{K}^{(p)} < 0$, то однородная задача (1.98) не имеет ненулевых решений класса E_p , $p > 1$, а неоднородная разрешима единственным образом тогда и только тогда, когда выполнены $-\mathcal{K}^{(p)} - 1$ (вещественных) линейных условий на свободный член $g(t)$ краевого условия (1.98)

$$\int_{\Gamma} e^{i\omega(s)} \Phi_k^*(t(s)) t'(s) g(s) ds = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\mathcal{K}^{(p)} - 1, \quad (1.148)$$

где $\{\Phi_k^*(z)\}$ — полная система линейно независимых (в вещественном смысле) решений класса $E_{p'}$ задачи (1.100), сопряженной (1.98).

Отметим, что $k = 0$ при $\mathcal{K}^{(p)} = -1$, что означает однозначную безусловную разрешимость неоднородной задачи.

◁ Конформным отображением $w = w(\zeta)$ перейдем к краевой задаче (1.107) в единичном круге D с границей C , причем $w'(\zeta) \in H_1$ (см. [13, с. 89]), а $\Psi(\zeta)$ — искомая функция класса H_p .

Повторяя рассуждения из [52, § 41], получим, что решения класса H_p задачи (1.107) есть в точности решения при $\zeta \in D$ класса H_p задачи Римана

$$\Psi^+(t) = G_0(t) \Psi^-(t) + f(t), \quad t = e^{i\sigma} \in C, \quad (1.149)$$

где

$$G_0(t) = -e^{2i\nu(\sigma)}, \quad f(t) = 2g(s(\sigma)) [w'(e^{i\sigma})]^{\frac{1}{p}} e^{i\omega(s(\sigma))}, \quad (1.150)$$

и $\Psi^{\pm}(t)$ — некасательные предельные значения на C функции $\Psi(\zeta) \in H_p$ изнутри и снаружи области D соответственно, и решения задачи (1.149) имеют следующий вид:

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{2}(\Psi(\zeta) + \Psi_*(\zeta)), \quad \Psi_*(\zeta) = \overline{\Psi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}. \quad (1.151)$$

Очевидно, что $f(t) \in L_p(C)$.

Если $\mathcal{K}^{(p)} \geq 0$, где $\mathcal{K}^{(p)}$ определено в (1.147), то с учетом (1.146) в силу теоремы 19.2 из [13, с. 213] общее решение однородной задачи (1.149), ограниченное на бесконечности, имеет вид $\Psi(\zeta) = Z(\zeta)Q_m(\zeta)$, где $Z(\zeta) \in H_{p+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, — вполне определенное (каноническое) решение

однородной задачи (1.149), а $Q_m(\zeta)$ — многочлен степени $m \leq \binom{p}{\mathcal{K}}$ с комплексными коэффициентами.

Выпишем подробное решение $Z(\zeta)$, подобрав его так, чтобы было выполнено соотношение

$$Z_*(\zeta) = \{\zeta\}^{\binom{p}{\mathcal{K}}} Z(\zeta). \quad (1.152)$$

С учетом (1.144) решение $Z(\zeta)$ можно взять в виде (см. [13, с. 210]):

$$Z(\zeta) = C_0 \tilde{\Psi}(\zeta) [\zeta - \zeta(0)]^{\kappa_0} \prod_{k=1}^{\binom{p}{\mathcal{K}_2}} [\zeta - \zeta(\sigma_k^+)] \prod_{k=1}^{\binom{p}{\mathcal{K}_1}} [\zeta - \zeta(\sigma_k^-)]^{-1}, \quad (1.153)$$

где C_0 — не равная нулю комплексная постоянная,

$$\tilde{\Psi}(\zeta) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\nu}(\sigma) \frac{de^{i\sigma}}{e^{i\sigma} - \zeta} \right\},$$

$$\tilde{\nu}(\sigma) = 2 \left(\omega(s(\sigma)) + \frac{\theta(s(\sigma)) - \sigma}{p} \right) + \frac{\pi}{p'}.$$

Поскольку (см. [52, с. 147])

$$\tilde{\Psi}_*(\zeta) = \tilde{\Psi}(\zeta) e^{-i\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\nu}(\sigma) d\sigma,$$

то положив в (1.153)

$$C_0 = e^{\frac{i}{2}(-\alpha + \pi \binom{p}{\mathcal{K}})} \prod_{k=1}^{\binom{p}{\mathcal{K}_2}} e^{-i \frac{\sigma_k^+}{2}} \prod_{k=1}^{\binom{p}{\mathcal{K}_1}} e^{i \frac{\sigma_k^-}{2}}, \quad (1.154)$$

получим выполнение (1.152).

Таким образом, общее решение однородной задачи Римана (1.149) при $\binom{p}{\mathcal{K}} \geq 0$ имеет вид:

$$\Psi(\zeta) = Z(\zeta)(q_m \zeta^m + \dots + q_1 \zeta + q_0), \quad (1.155)$$

где q_j , $j = 0, 1, \dots, m \leq \binom{p}{\mathcal{K}}$, — произвольные комплексные постоянные, а $Z(\zeta) \in H_{p+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, определена формулами (1.153), (1.154).

Отметим, что при этом

$$Z^{\pm}(\zeta), [Z^{\pm}(\zeta)]^{-1} \in L_{p+\varepsilon}(C), L_{p'+\varepsilon}(C), \quad (1.156)$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое положительное число (см. [13, с. 217]).

Подставляя (1.155) в (1.151) и учитывая (1.152), получим, что общее решение однородной задачи Гильберта (1.107) задается формулой (1.155) при $\zeta \in D$ и выполнении условий

$$q_j = \bar{q}_{m-j}, \quad j = 0, 1, \dots, m \leq \mathcal{K}^{(p)}. \quad (1.157)$$

Таким образом, однородная задача Гильберта (1.107) при $\mathcal{K}^{(p)} \geq 0$ имеет точно $\mathcal{K}^{(p)} + 1$ линейно независимых в действительном смысле решений класса $H_{p+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, а следовательно, однородная задача (1.98) при $\mathcal{K}^{(p)} \geq 0$ имеет точно $\mathcal{K}^{(p)} + 1$ линейно независимых в действительном смысле решений класса E_p .

Поскольку при $\mathcal{K}^{(p)} < 0$ однородная задача Римана (1.149) не имеет ненулевых решений, ограниченных на бесконечности и класса H_p (см. [13, с. 215]), однородная задача Гильберта (1.107) в этом случае также не имеет ненулевых решений класса H_p , а следовательно, не имеет ненулевых решений класса E_p однородная задача (1.98).

Итак, все утверждения теоремы, касающиеся однородной задачи, доказаны.

Перейдем к обсуждению неоднородной задачи. С учетом (1.156) получаем, что частное решение класса H_p неоднородной задачи Римана (1.149) при $\mathcal{K}^{(p)} \geq -1$ задается формулой (см. [13, с. 219])

$$\Psi_0(\zeta) = \frac{Z(\zeta)}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{Z^+(t)} \frac{dt}{t - \zeta}, \quad (1.158)$$

т. е. с учетом формул (1.151) и (1.152), неоднородная задача (1.98) при $\mathcal{K}^{(p)} \geq -1$ безусловно разрешима в классе E_p при любой правой части $g(s) \in L_p(\Gamma)$, откуда получаем утверждение теоремы в случае $\mathcal{K}^{(p)} \geq -1$.

Рассмотрим теперь неоднородную задачу при $\mathcal{K}^{(p)} < -1$. Поскольку функция (1.158) удовлетворяет краевому условию (1.149) и имеет

на бесконечности полюс порядка $-\frac{(p)}{\varkappa} - 1$, для (однозначной) разрешимости задачи (1.149) в классе кусочно голоморфных функций класса H_p , ограниченных на бесконечности, а следовательно, для однозначной разрешимости задачи (1.107) в классе H_p , необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_C \frac{t^k f(t)}{Z^+(t)} dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -\frac{(p)}{\varkappa} - 2. \quad (1.159)$$

Принимая во внимание (1.150), перепишем (1.159) в следующем виде:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k + \frac{(p)}{2})\sigma} M(\sigma) d\sigma = 0, \quad k = 1, \dots, -\frac{(p)}{\varkappa} - 1, \quad (1.160)$$

где

$$M(\sigma) = \frac{ig(s(\sigma))|w'(e^{i\sigma})|^{\frac{1}{p}}}{e^{-i(\nu(\sigma) - \frac{(p)}{2}\sigma)} Z^+(e^{i\sigma})}.$$

Так как функция $\tilde{Z}(\zeta) = \zeta^{\frac{(p)}{2}} Z(\zeta)$ удовлетворяет однородному краевому условию (1.149) (при нечетном $\frac{(p)}{\varkappa}$ фиксируем какую-либо ветвь), и в силу (1.152) $\tilde{Z}_*(\zeta) = \tilde{Z}(\zeta)$, то функция $\tilde{Z}(\zeta)$, $\zeta \in D$, удовлетворяет краевому условию (1.107), и функция $M(\sigma)$ вещественнозначная. В силу (1.156) интеграл в (1.160) определен корректно.

При четном $\frac{(p)}{\varkappa}$ соотношения (1.160) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos k\sigma M(\sigma) d\sigma &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, -\frac{(p)}{2} - 1, \\ \int_0^{2\pi} \sin k\sigma M(\sigma) d\sigma &= 0, \quad k = 1, \dots, -\frac{(p)}{2} - 1, \end{aligned} \quad (1.161)$$

а при нечетном $\mathcal{K}^{(p)}$ — в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \sigma M(\sigma) d\sigma &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) \sigma M(\sigma) d\sigma &= 0, \\ k &= 0, 1, \dots, -\frac{\mathcal{K}^{(p)} + 1}{2} - 1. \end{aligned} \quad (1.162)$$

Итак, при любом $\mathcal{K}^{(p)} \leq -2$ равенства (1.159) эквивалентны $-\frac{\mathcal{K}^{(p)}}{2} - 1$ линейно независимым вещественным условиям на правую часть краевого условия (как (1.107), так и (1.98)).

Дословным повторением рассуждений из [5, с. 234–235] с использованием теоремы Коши для функций класса E_1 (см. [13, с. 92]) выводим необходимость условий (1.148). Поскольку линейно независимых достаточных условий ((1.161) либо (1.162)) на правую часть $g(s)$ столько же и задача линейная, то получаем достаточность (1.148). ▸

1.10.3. Краевая задача Римана и Римана — Гильберта в классах $ВМОА$. Рассмотрим в комплексной z -плоскости единичный круг $D = \{z : |z| < 1\}$, $z = re^{i\theta}$, с границей $\partial D = \Gamma = \{z : |z| = 1\}$. Через t обозначим аффикс $t = e^{is}$ точки на Γ . В данном пункте основной целью является рассмотрение задачи Римана — Гильберта (1.97) в классе функций $ВМОА$ (см. определение 1.9.2). В качестве средства для ее исследования рассматривается также следующая

Задача Римана [8, § 14]. Найти две функции класса $ВМОА$: $\Phi^+(z)$ — аналитическую в $D (= D^+)$, и $\Phi^-(z)$ — аналитическую в D^- — дополнении D , включая $z = \infty$, некасательные предельные значения которых почти всюду на контуре Γ удовлетворяют линейному соотношению

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad (\text{однородная задача}) \quad (1.163)$$

или

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad (\text{неоднородная задача}). \quad (1.164)$$

Функцию $G(t)$ называют *коэффициентом задачи Римана*, а функцию $g(t)$ — ее *свободным членом*.

Поскольку на Γ $t = e^{is}$, везде далее для функций, определенных на Γ пишем $\varphi(e^{is}) \equiv \varphi(s)$.

Разумеется, постановка задачи наиболее естественна при предположении, что коэффициенты краевых условий принадлежат пространству мультипликаторов $LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ функций из класса BMO (см. параграф 1.9), а свободные члены краевых условий принадлежат BMO . Именно в такой постановке рассматриваются в настоящем пункте задачи Римана и Римана — Гильберта для голоморфных функций.

Строятся примеры, когда задачи с неотрицательным индексом в такой постановке (даже с непрерывными коэффициентами из LMO) неразрешимы в $BMOA$.

Хорошо известны примеры неразрешимости задач Римана и Гильберта с непрерывными коэффициентами и правыми частями в непрерывных в замкнутой области голоморфных функциях [59] (а умножение непрерывных функций на непрерывные из класса непрерывных функций не выводит). Причина этого явления состоит в неограниченности сингулярного оператора в непрерывных функциях. В то же время сингулярный оператор в пространстве BMO ограничен!

В нашем случае неразрешимость возникает по другой причине по сравнению с непрерывным случаем, а именно, из-за того, что экспоненты функций классов BMO и LMO , вообще говоря, не принадлежат BMO .

Приводятся достаточные условия на коэффициенты, при которых картина разрешимости та же, что и при гильбертовых коэффициентах, а также пример, демонстрирующий, что при нарушении этих достаточных условий задача в классе $BMOA$ может быть неразрешимой (при разрешимости в классе Харди H_2).

Индекс краевого условия. Везде далее в этом пункте будем считать, что $G(s), \lambda(s) \in L_\infty(\Gamma)$,

$$0 < k_1 \leq |G(s)| \leq k_2, \quad 0 < k_1 \leq |\lambda| \leq k_2, \quad (1.165)$$

где k_1, k_2 — некоторые постоянные, вообще говоря, различные в (1.163) и (1.97).

Обозначим:

$$G(t) = |G(t)|e^{i\theta(t)}, \quad \lambda(t) = |\lambda(t)|e^{i\omega(t)},$$

т. е. $\theta(s) = \theta(e^{is}) = \arg G$, $\omega(s) = \omega(e^{is}) = \arg \lambda$. Аналогично (1.103) и (1.102) будем предполагать, что $\theta(s) = \theta_0(s) + \theta_2(s)$, $\omega(s) = \omega_0(s) + \omega_2(s)$, где $\theta_0(s)$ и $\omega_0(s)$ — непрерывные на $[0, 2\pi]$ функции, $\theta_2(s)$ и $\omega_2(s)$ — ограниченные и измеримые на том же сегменте, причем

$$\sup |\theta_2(s)| < \frac{\pi}{2}, \quad \sup |\omega_2(s)| < \frac{\pi}{4}. \quad (1.166)$$

Аналогично (1.110) индексом задачи (1.164) будем называть число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} (\theta_0(2\pi) - \theta_0(0)) = \text{ind}_\Gamma G(t),$$

а индексом задачи (1.97) — число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} (\omega_0(2\pi) - \omega_0(0)) = \text{ind}_\Gamma \lambda(t),$$

которые, так же, как и в (1.110), будем предполагать целыми.

Теорема 1.10.4. Пусть в (1.163)²

$$K \ln G(t) \in L_\infty(\Gamma). \quad (1.167)$$

При $\varkappa = \text{ind}_\Gamma G(t) \geq 0$ задача (1.163) имеет точно $\varkappa + 1$ линейно независимых в комплексном смысле решений класса ВМОА (которые будут даже из $L_\infty(\overline{D})$).

Общее решение задается формулой

$$\Phi(z) = P_\varkappa(z)X(z), \quad (1.168)$$

где $P_\varkappa(z)$ — произвольный многочлен (с комплексными коэффициентами) степени не выше $\varkappa$,

$$X(z) = X^+(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\ln [\tau^{-\varkappa} G(\tau)]}{\tau - z} d\tau \right\}, \quad z \in D^+, \quad (1.169)$$

$$X(z) = X^-(z) = z^{-\varkappa} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\ln [\tau^{-\varkappa} G(\tau)]}{\tau - z} d\tau \right\}, \quad z \in D^-. \quad (1.170)$$

²Везде далее при $f \in L_\infty$ считаем, что $|f| \leq \text{const} < \infty$.

При $\varkappa < 0$ задача (1.163), безотносительно к условию (1.167), в классе $ВМОА$ имеет только тривиальное (нулевое) решение.

Если при этом $G(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, то решение (1.168) при любом фиксированном многочлене $P_\varkappa(z)$ будет класса $LMOA \cap L_\infty(\overline{D})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10.2. В силу (1.93) условия $\tilde{\mu}(s) \in L_\infty(\Gamma)$ и $K\mu(s) \in L_\infty(\Gamma)$ эквивалентны как для действительной, так и для комплексной функции $\mu(s)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10.3. Отказ от условия (1.167) может привести к тому, что при $\varkappa \geq 0$ задача не будет иметь нетривиальных решений класса $ВМОА$. В то же время это достаточное условие необходимым не является (см. пример из п. 1.10.4).

Теорема 1.10.5. При $\varkappa \geq 0$ для разрешимости однородной задачи (1.163) в классе $ВМОА \cap L_\infty$ необходимо и достаточно, чтобы $\exp\{K \ln G(t)\} \in L_\infty(\Gamma)$.

Если при этом $G(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, для разрешимости в $LMOA \cap L_\infty$ необходимо и достаточно, чтобы $\exp\{K \ln G(t)\} \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$.

При $G(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ для разрешимости в $ВМОА$ необходимо и достаточно, чтобы $\exp\{K \ln G(t)\} \in ВМО$.

Во всех случаях общее решение дается формулой (1.168).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10.4. В том случае, когда $G(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, но $\exp\{K \ln G(t)\} \notin L_\infty(\Gamma)$, то о примере разрешимости в $ВМОА$ см. замечание 1.10.11.

Теорема 1.10.6. Пусть для краевого условия (1.164) выполнено (1.167), $G(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$.

При $\varkappa = \text{ind}_\Gamma G(t) \geq 0$ задача (1.164) разрешима в классе $ВМОА$ при любом свободном члене $g(t) \in ВМО$, и ее общее решение дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z)P_\varkappa(z), \quad (1.171)$$

где $X(z)$ определена в (1.169), (1.170), а $P_\varkappa(z)$ — многочлен степени $\varkappa$ с произвольными комплексными коэффициентами.

Если $\varkappa = -1$, задача (1.164) разрешима в классе $ВМОА$ и имеет единственное решение

$$\Psi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}. \quad (1.172)$$

В случае $\varkappa < -1$ для разрешимости в классе $BMOA$ необходимо и достаточно, чтобы свободный член удовлетворял $-\varkappa - 1$ условиям

$$\int_{\Gamma} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\varkappa - 1. \quad (1.173)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10.5. В отличие от однородной задачи (см. теорему 1.10.4), снижение требований на коэффициент $G(t)$ до принадлежности лишь $L_{\infty}(\Gamma)$ приводит, вообще говоря, к неразрешимости задачи при $\varkappa \geq 0$ в классе $BMOA$ даже при $g(t) \in L_{\infty}(\Gamma)$ (см. пример из п. 1.10.5).

Теорема 1.10.7. Для того чтобы при $G(t) \in LMO \cap L_{\infty}(\Gamma)$ и отказе от условия (1.167) имели место все утверждения теоремы 1.10.6, достаточно, чтобы $\exp \{\pm K \ln G(t)\} \in LMO \cap L_{\infty}(\Gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10.6. Вопрос о необходимых условиях пока остается открытым.

Перейдем теперь к обсуждению краевой задачи Римана — Гильберта (1.97).

Теорема 1.10.8. Пусть в (1.97)

$$\tilde{\omega}(t) \in L_{\infty}(\Gamma), \quad (1.174)$$

где $\omega(t) = \arg \lambda(t)$.

При $\varkappa = \text{ind}_{\Gamma} \lambda \geq 0$ однородная задача (1.97) имеет $2\varkappa + 1$ линейно независимых в действительном смысле решений класса $BMOA$ (которые будут даже из $L_{\infty}(\overline{D})$).

Общее решение задается формулой

$$\Phi(z) = z^{\varkappa} e^{i\gamma(z)} Q(z), \quad (1.175)$$

где

$$\gamma(z) = S[\omega(t) - \varkappa \arg t](z), \quad (1.176)$$

$S\varphi = \varphi + i\tilde{\varphi}$ — оператор Шварца,

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{\varkappa} \{c_k z^k - \bar{c}_k z^{-k}\}, \quad (1.177)$$

β_0 — произвольная вещественная постоянная, c_k , $k = 1, \dots, \varkappa$, — произвольные комплексные постоянные.

При $\varkappa < 0$ однородная задача (1.97) в классе $ВМОА$ имеет только тривиальное (нулевое) решение.

Если при этом $\lambda(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, то решение (1.175) при любых фиксированных постоянных $\beta_0, c_k, k = 1, \dots, \varkappa$, будет класса $LMO \cap L_\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10.7. Отказ от условия (1.174) может привести к тому, что при $\varkappa \geq 0$ задача не будет иметь нетривиальных решений класса $ВМОА$. В то же время это достаточное условие необходимым не является (см. пример из п. 1.10.4).

Теорема 1.10.9. При $\varkappa \geq 0$ для разрешимости однородной задачи (1.97) в классе $ВМОА \cap L_\infty(\overline{D})$ необходимо и достаточно, чтобы $e^{-\tilde{\omega}(s)} \in L_\infty(\Gamma)$.

Если при этом $\lambda(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, для разрешимости в $LMO \cap L_\infty(\overline{D})$ необходимо и достаточно, чтобы $e^{-\tilde{\omega}(s)} \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$.

При $\lambda(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ для разрешимости в $ВМОА$ необходимо и достаточно, чтобы $e^{-\tilde{\omega}(s)} \in ВМО$.

Во всех случаях решение дается формулой (1.175).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10.8. В случае, когда $\lambda(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, но $e^{-\tilde{\omega}(s)} \notin L_\infty(\Gamma)$, о примере разрешимости в $ВМОА$ см. замечание 1.10.11.

Теорема 1.10.10. Пусть для краевого условия (1.97) выполнено (1.174) и $\lambda(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$.

При $\varkappa = \text{ind}_\Gamma \lambda(t) \geq 0$ неоднородная задача (1.97) разрешима в классе $ВМОА$ при любом свободном члене $c(s) \in ВМО$, и ее общее решение дается формулой

$$\Phi(z) = z^\varkappa e^{i\gamma(z)} \left[S \left(\frac{e^{\tilde{\omega}(t)} c(t)}{|t|^\varkappa |\lambda(t)|} \right) (z) + Q(z) \right], \quad (1.178)$$

где $\tilde{\omega}(t) = \text{Im } \gamma(t)$, $\gamma(z)$ и $Q(z)$ определены формулами (1.176) и (1.177).

При $\varkappa < 0$ неоднородная задача (1.97) разрешима и имеет в классе $ВМОА$ единственное решение

$$\Phi(z) = z^\varkappa e^{i\gamma(z)} \left[S \left(\frac{e^{\tilde{\omega}(t)} c(t)}{|t|^\varkappa |\lambda(t)|} \right) (z) \right] \quad (1.179)$$

тогда и только тогда, когда выполнены $-2\varkappa - 1$ действительных усло-

вий разрешимости

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{\tilde{\omega}(s)} c(s) \cos ks}{|\lambda(s)|} ds = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{\tilde{\omega}(s)} c(s) \sin ks}{|\lambda(s)|} ds = 0, \quad (1.180)$$

$$k = 0, 1, \dots, -\varkappa - 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10.9. В отличие от однородной задачи (см. теорему 1.10.8), снижение требований на коэффициент $\lambda(t)$ до принадлежности лишь $L_\infty(\Gamma)$ приводит, вообще говоря, к неразрешимости задачи при $\varkappa \geq 0$ в классе $BMOA$ даже при $c(s) \in L_\infty(\Gamma)$ (см. пример из п. 1.10.5).

Теорема 1.10.11. Для того чтобы при $\lambda(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ и отказе от условия (1.174) имели место все утверждения теоремы 1.10.10, достаточно, чтобы $e^{\pm \tilde{\omega}(s)} \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10.10. Вопрос о необходимых условиях пока остается открытым.

Все нижеследующие доказательства из данного пункта являются модификациями соответствующих рассуждений из [8].

◁ **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.10.4.** Рассмотрим случай $\varkappa \geq 0$.

Повторяя соответствующие рассуждения из [8, с. 107–109], с учетом того, что «задача о скачке»

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t) \in L_p(\Gamma), \quad p > 1, \quad (1.181)$$

имеет в классе $H_p \supset BMO$ единственное решение (см. [13, с. 193])

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau \in H_p, \quad (1.182)$$

получаем, что для предельных некасательных значений на Γ «канонической функции» (см. [8, с. 107–109]) $X(z)$, определяемой в (1.169), (1.170), соотношение

$$G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}. \quad (1.183)$$

В силу (1.167)

$$X^\pm(t) \in L_\infty(\Gamma), \quad 0 < c_1 \leq |X^\pm(t)| \leq c_2, \quad t \in \Gamma, \quad (1.184)$$

где c_1, c_2 — некоторые постоянные.

Далее, следуя [8, с. 109], подставим (1.183) в (1.163) и получим

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}. \quad (1.185)$$

В (1.185) слева и справа граничные значения на Γ функций класса H_p и на бесконечности $\frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)}$ имеет полюс порядка не выше $\varkappa$. Отсюда следует, что функция $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ есть многочлен степени не выше $\varkappa$ (см. [13, с. 194]), т. е. справедлива формула (1.168).

Поскольку $X^\pm(t) \in L_\infty(\Gamma)$, то $\Phi^\pm(t) \in L_\infty(\Gamma) \subset BMO$.

Если $G(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, то по следствию 1.9.2 $\ln G(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, а в силу ограниченности оператора K в LMO и (1.167)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln [\tau^{-\varkappa} G(\tau)]}{\tau - t} d\tau \in LMO \cap L_\infty(\Gamma).$$

Повторно применяя следствие 1.9.2, получаем $X^\pm(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$. Поскольку $P_\varkappa(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, то из леммы 1.9.2 имеем

$$\Phi^\pm(t) = X^\pm(t)P_\varkappa(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma).$$

Пусть $\varkappa < 0$. Тогда $\frac{\Phi^-(\infty)}{X^-(\infty)} = 0$ и из (1.185), (1.181) и (1.182) получаем $\Phi(z) \equiv 0$. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.10.5. ДОСТАТОЧНОСТЬ — это повторение доказательства теоремы 1.10.4.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Из (1.169), переходя к пределу по некасательным путям при $z \rightarrow t \in \Gamma$, с учетом формул Сохоцкого — Племяля (1.88) получаем

$$X^+(t) = [t^{-\varkappa} G(t)]^{\frac{1}{2}} \exp \{K \ln [t^{-\varkappa} G(t)]\}. \quad (1.186)$$

Отсюда, с учетом леммы 1.9.2, следствия 1.9.2 и того, что $LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ — мультипликатор BMO , получаем все наши утверждения. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.10.6. Рассмотрим случай $\varkappa \geq 0$.

Подставляя в (1.164) выражение (1.183), приведем (1.164) к виду

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)},$$

откуда, с учетом формул Сохоцкого — Племяля (1.88), получаем, что выражение (1.172) есть частное решение задачи (1.164).

В силу (1.184) по лемме 1.9.2 $\frac{1}{X^+(\tau)} \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, а следовательно, $\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \in BMO$. Отсюда, ввиду ограниченности оператора K в BMO , имеем $\Psi(z) \in BMOA$.

Добавляя к $\Psi(z)$ общее решение (1.168) однородной задачи (1.163), получим (1.171).

В случае $\varkappa = -1$ общее решение однородной задачи нулевое, а $\Psi(z)$ ограничена на ∞ .

В случае $\varkappa < -1$ функция $\Psi(z)$, вообще говоря, имеет полюс порядка $-\varkappa - 1$ на ∞ , и условия (1.173) получаем, следуя [8, с. 112], приравниванием к нулю коэффициентов при положительных степенях z в разложении $\Psi(z)$ в ряд Тейлора в окрестности ∞ . $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.10.7. Из условия теоремы $X^+(t)$, $[X^+(t)]^{-1} \in LMOA \cap L_\infty$. Далее повторяется доказательство теоремы 1.10.6. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.10.8. Рассмотрим случай $\varkappa \geq 0$. Известно (см. теорему 1.10.1 и замечание 1.10.1), что формула (1.175) дает решение однородной задачи (1.97) в любом классе Харди H_p , $p > 1$. В силу (1.174) получаем $\Phi(z) \in L_\infty \cap BMOA$.

Утверждение, касающееся случая $\varkappa < 0$, следует опять же из теоремы 1.10.1 и замечания 1.10.1.

Если $\varkappa \geq 0$ и $\lambda(t) \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, то по следствию 1.9.3 $\omega(t) \in LMO$. В силу ограниченности оператора S в LMO и (1.174) имеем $\gamma(z) \in LMOA \cap L_\infty$, откуда, с учетом следствия 1.9.2 и леммы 1.9.2, получаем $\Phi(z) \in LMOA \cap L_\infty$. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.10.9 аналогично доказательству теоремы 1.10.5. Или можно сослаться на сводимость задачи Римана — Гильберта к задаче Римана (см. [8, с. 290–291]). $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.10.10. Так как $\gamma(z) \in LMOA \cap L_\infty$, то по следствию 1.9.2 $e^{\gamma(z)} \in LMOA \cap L_\infty$, а по лемме 1.9.2 $\frac{1}{|\lambda(t)|} \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$. Отсюда получаем, что

$$\frac{e^{\tilde{\omega}(t)} c(t)}{|t|^\varkappa |\lambda(t)|} \in BMO$$

и

$$S \left(\frac{e^{\tilde{\omega}(t)} c(t)}{|t|^\varkappa |\lambda(t)|} \right) (z) \in BMOA.$$

Таким образом, частное решение класса H_p , $p > 1$ (см. теорему 1.10.1 и замечание 1.10.1), (1.179) неоднородной задачи (1.97) при $\varkappa \geq 0$ (а также и при $\varkappa < 0$, когда это решение) принадлежит $BMOA$.

Сопоставляя это с теоремой 1.10.8, получаем, что при $\varkappa \geq 0$ общее решение (1.178) принадлежит классу $BMOA$.

Условия разрешимости (1.180), так же, как и в [8, с. 283], получаем как требование того, чтобы функция

$$S \left(\frac{e^{\tilde{\omega}(t)} c(t)}{|t|^\varkappa |\lambda(t)|} \right) (z)$$

имела нуль порядка $-\varkappa$ в начале координат. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.10.11. Это повторение доказательства теоремы 1.10.10. $\triangleright$

1.10.4. Пример однородной задачи с непрерывным коэффициентом класса Λ_l с нулевым индексом, не имеющей нетривиальных решений класса $BMOA$. Здесь строится пример задачи Римана — Гильберта, с коэффициентом, для которого $\tilde{\omega} \notin L_\infty(\Gamma)$. Поскольку в единичном круге задача Римана — Гильберта сводится к задаче Римана (см. [8, с. 290–291]), этот пример распространяется и на однородную задачу Римана.

Следующее утверждение является частным случаем теоремы 1 из [70].

Лемма 1.10.5. $LMO = \Lambda_l + \widetilde{\Lambda_l}$. Более точно, если $\varphi_j \in \Lambda_l$, $j = 1, 2$, то $\|\varphi_1 + \tilde{\varphi}_2\|_l \leq \text{const} \sum_{j=1}^2 \|\varphi_j\|_{\Lambda_l}$, и если $\varphi \in LMO$, то найдутся $\varphi_j \in \Lambda_l$, $j = 1, 2$, такие, что $\varphi = \varphi_1 + \tilde{\varphi}_2$ и $\sum_{j=1}^2 \|\varphi_j\|_{\Lambda_l} \leq \text{const} \|\varphi\|_l$, где константы от φ , φ_1 , φ_2 не зависят.

Рассмотрим на Γ функцию равную $2 \ln |\ln |s||$ в малой окрестности нуля и непрерывно продолженную константой вне этой окрестности. Чтобы не усложнять обозначений, будем обозначать ее так: $2 \ln |\ln |s|| \in LMO$. По лемме 1.10.5 $2 \ln |\ln |s|| = \varphi_1 + \tilde{\varphi}_2$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in \Lambda_l$. Отсюда

$$\varphi_2 = - \widetilde{(2 \ln |\ln |s|| - \varphi_1)} \in \Lambda_l.$$

Обозначим: $\varkappa = \text{ind}_\Gamma e^{i\varphi_2(s)}$ и положим $\omega(s) = -\varphi_2(s) + \varkappa s$. Тогда $\omega(s) \in \Lambda_l$, $\text{ind}_\Gamma e^{i\theta(s)} = 0$ и $\tilde{\omega}(s) \notin L_\infty(\Gamma)$.

Рассмотрим однородную краевую задачу Римана — Гильберта:

$$\operatorname{Re} \{e^{-i\omega(s)} \Phi(s)\} = 0. \quad (1.187)$$

Покажем, что эта задача не имеет нетривиальных решений в классе $BMOA$.

Эта задача имеет одно нетривиальное линейно независимое решение в любом классе Харди H_p , $p > 1$, и для решения справедлива формула Гахова из [8, с. 281] (см. теорему 1.10.1 и замечание 1.10.1):

$$\Phi(z) = i\beta_0 e^{i\gamma(z)},$$

где $\beta_0 = \text{const}$, $\gamma(z) = S\omega(z)$,

$$S\omega(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma + i\sigma_0,$$

— оператор Шварца.

Для граничных некасательных предельных значений $\gamma(e^{is}) = \gamma(s)$ имеем $\gamma(s) = \omega(s) + i\tilde{\omega}(s)$, т. е.

$$\Phi(s) = i\beta_0 e^{i\omega(s)} e^{-\tilde{\omega}(s)} = \ln^2 |s| F(s),$$

где $\ln^2 |s|$ продолжена вне малой окрестности нуля константой, $F(s) = i\beta_0 e^{i\omega(s) + \varphi_1(s)} \in \Lambda_l \subset LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, причем $|F(s)| > 0$, откуда

$$\frac{1}{|F(s)|} \in \Lambda_l \subset LMO \cap L_\infty(\Gamma) \quad (1.188)$$

— мультипликатор BMO .

Таким образом, $\Phi(s) \notin BMO$. Действительно, если предположить противное, то в силу (1.188) получим

$$\ln^2 |s| = \frac{|\Phi(s)|}{|F(s)|} \in BMO,$$

что неверно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10.11. Если рассуждения начать с $\ln |\ln |s||$ (убрав двойку), то получим задачу, разрешимую в $BMOA$, для которой $\tilde{\omega} \notin L_\infty(\Gamma)$.

Таким образом, достаточные условия (1.167) и (1.174) необходимыми не являются.

1.10.5. Пример неоднородной задачи Римана — Гильберта с неотрицательным индексом и ограниченной правой частью, неразрешимой в $BMOA$. Поскольку в единичном круге задача Римана — Гильберта сводится к задаче Римана [8, с. 290–291], то этот пример распространяется и на неоднородную задачу Римана.

Возьмем функцию $\omega(z) + i\tilde{\omega}(z) \in H_\infty \setminus LMOA$ такую, что для некасательных граничных значений $\omega(s)$ выполнено (1.166) (согласно лемме 1.9.3 такая функция существует).

Рассмотрим краевую задачу (1.97) при $\lambda(t) = e^{i\omega(t)} \in L_\infty(\Gamma)$. Тогда $\text{ind}_\Gamma \lambda(t) = 0$, $\lambda(t) \notin LMO$ (см. следствие 1.9.3), и выполнено (1.174).

При подходящем выборе $c(s)$ произведение $\varphi(s) = e^{\tilde{\omega}(s)}c(s)$ — произвольная функция из $L_\infty(\Gamma)$.

Рассмотрим функцию $e^{-\tilde{\omega}(s)}\tilde{\varphi}(s)$. В силу произвольности $\varphi(s) \in L_\infty(\Gamma)$, $\tilde{\varphi}(s) = \varphi_1(s) + \varphi_2(s)$, где $\varphi_1(s)$ — произвольная функция из BMO , а $\varphi_2(s) \in L_\infty(\Gamma)$ (см. теорему 1.9.2). Поскольку $e^{-\tilde{\omega}(s)} \notin LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, то при подходящем подборе $\varphi(s)$ ($c(s)$) произведение $e^{-\tilde{\omega}(s)}\varphi_1(s) \notin BMO$. Отсюда получаем, что для рассматриваемой задачи никакое решение (1.178) не принадлежит $BMOA$.

1.11. Неканонические эллиптические системы

Рассмотрим в области G систему уравнений вида

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + b_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + a_1 u + b_1 v &= 0, \\ a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + b_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + a_2 u + b_2 v &= 0, \end{aligned} \quad (1.189)$$

где a_{jk} , b_{jk} , a_j , b_j — заданные вещественные функции двух вещественных переменных x , y , а u и v — искомые вещественные функции переменных x , y .

Система (1.189) называется *эллиптической* в области G , если в этой области

$$a = \frac{a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12}}{\Delta} > 0$$

и

$$\begin{aligned} \Delta &= (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})(a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11}) - \\ &- \frac{1}{4}(a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} - a_{22}b_{11})^2 > 0, \end{aligned}$$

(см. [5, с. 137; 56, с. 47]). Если $a \geq \text{const} > 0$, $\Delta \geq \text{const} > 0$, то систему называют *равномерно эллиптической*.

Из неравенства $\Delta > 0$ следует неравенство $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \neq 0$ (см. [5, с. 137]), поэтому в случае эллиптичности системы (1.189) ее всегда можно переписать в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial y} + a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y} + a_1u + b_1v &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y} + a_2u + b_2v &= 0. \end{aligned} \quad (1.190)$$

В этом случае условие эллиптичности примет следующий вид:

$$a_{11} > 0 \quad (a_{22} > 0), \quad \Delta = a_{11}a_{22} - \frac{1}{4}(a_{12} + a_{21})^2 > 0.$$

Таким образом, (1.190) можно считать общим видом однородной линейной эллиптической системы первого порядка на плоскости.

Введя в рассмотрение комплексную функцию $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, систему (1.190) можно привести к виду

$$\partial_{\bar{z}}w - q_1(z)\partial_zw - q_2(z)\partial_{\bar{z}}\bar{w} + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0, \quad (1.191)$$

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right], \quad \partial_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right],$$

где коэффициенты $q_1(z)$, $q_2(z)$, $A(z)$, $B(z)$ вполне определенным образом выражаются через коэффициенты системы (1.190) [5, с. 214].

Условие (равномерной) эллиптичности при этом запишется следующим образом (см. [5, с. 214]):

$$|q_1(z)| + |q_2(z)| \leq q_0 = \text{const} < 1.$$

Частные случаи.

1) $q_1(z) = q_2(z) \equiv 0$. Получаем уравнение (1.53), решения которой называют *обобщенными аналитическими функциями*.

2) Пусть $q_2(z) = A(z) = B(z) \equiv 0$. Получившееся уравнение будем записывать в виде

$$\partial_{\bar{z}}w - q(z)\partial_zw = 0, \quad |q(z)| \leq q_0 = \text{const} < 1. \quad (1.192)$$

Уравнение (1.192) называют *уравнением Бельтрами* (см. [5, гл. 2]).

3) Подобно предыдущему, пусть $q_1(z) = A(z) = B(z) \equiv 0$. Получившееся уравнение будем записывать в виде

$$\partial_{\bar{z}}w - q(z)\partial_{\bar{z}}\bar{w} = 0, \quad |q(z)| \leq q_0 = \text{const} < 1. \quad (1.193)$$

Уравнение (1.193) называют *сопряженным уравнением Бельтрами*.

4) Если $A(z) = B(z) \equiv 0$, получившееся уравнение

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}w - q_1(z)\partial_zw - q_2(z)\partial_{\bar{z}}\bar{w} &= 0, \\ |q_1(z)| + |q_2(z)| &\leq q_0 = \text{const} < 1, \end{aligned} \quad (1.194)$$

называют *обобщенным уравнением Бельтрами*.

При изучении свойств решений общей эллиптической системы (1.191) и ее различных частных случаев большую роль играют аналоги представлений «первого рода» (1.54) и «второго рода» (1.55), (1.56). Для непрерывных в замыкании области G решений представления первого рода были построены в [4] (см. также [5, гл. 3, § 17]), а некоторые представления второго рода — в [17, 18].

В главе 6 будут рассмотрены представления первого и второго рода для решений класса Харди уравнения Бельтрами, а некоторые новые свойства гомеоморфных решений уравнения Бельтрами и обобщенного уравнения Бельтрами — в следующем параграфе.

1.12. Квазиконформные отображения

Следуя [2, гл. 5], *квазиконформные отображения* будем рассматривать как гомеоморфные решения уравнения Бельтрами (1.192) с измеримым коэффициентом $q(z)$, называемым *комплексной характеристикой* отображения. Отметим, что при таком подходе гомеоморфные решения обобщенного уравнения Бельтрами (1.194) являются квазиконформными отображениями, поскольку, если $w = w(z)$ — решение уравнения (1.194), то эта же функция будет решением уравнения (1.192) с коэффициентом

$$q(z) = q_1(z) + q_2(z)\frac{\partial_{\bar{z}}\bar{w}}{\partial_zw}, \quad |q(z)| \leq q_0 < 1.$$

Для формулировки и доказательства части главных результатов главы 6 нам необходимы некоторые утверждения о квазиконформных отображениях.

Теорема 1.12.1. Существует единственное решение $w(z)$ уравнения (1.192) класса $W_s^1(\overline{D}_z)$, $s > 2$, гомеоморфно отображающее замкнутый круг $\overline{D}_z = \{z : |z| \leq 1\}$ на замкнутый круг $\overline{D}_w = \{w : |w| \leq 1\}$, удовлетворяющее нормировке $w(0) = 0$, $w(1) = 1$. При этом обратное отображение $z = z(w) \in W_s^1(\overline{D}_w)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.12.1. Существование квазиконформного отображения единичного круга на себя с заданной измеримой комплексной характеристикой $|q(z)| \leq q_0 = \text{const} < 1$, $z \in \overline{D}$, доказано в [4] с помощью двумерных сингулярных интегральных уравнений. Тот же результат без использования сингулярных интегральных уравнений доказан в [3, с. 32]. Здесь приводится новое доказательство этого хорошо известного факта. Применяемый здесь при доказательстве теоремы 1.12.1 метод позволяет уточнить поведение отображения вблизи границы в случае регулярного коэффициента $q(z)$ (см. теорему 1.12.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.12.2. В [2, с. 80] высказано утверждение, что гомеоморфизм плоскости $w(z)$ при $|q(z)| \leq q_0 = \text{const} < 1$ и $q(z)$ измеримом (локально) принадлежит любому W_p^1 , $p > 2$, т. е. в формулировке теоремы 1.12.1, казалось бы, можно считать $s > 2$ произвольным. Это верно при непрерывном коэффициенте $q(z)$ [6, 45], а при разрывном $q(z)$, как показывает нижеследующий пример, вообще говоря, неверно.

ПРИМЕР 1.12.1 [19]. Положим в (1.192) $q(z) = \frac{\beta}{\beta-2} e^{2i \arg z}$, $\beta = \text{const}$, $0 < \beta < 1$. Функция $w(z) = z|z|^{-\beta}$ в этом случае есть решение уравнения (1.192), о котором шла речь в теореме 1.12.1 и $q_0(\beta) = \frac{\beta}{2-\beta} < 1$. При этом $\partial_z w, \partial_{\bar{z}} w \in L_s(\overline{D})$ для любого s такого, что $2 < s < \frac{2}{\beta}$ и $\partial_z w, \partial_{\bar{z}} w \notin L_s(\overline{D})$ для любого $s \geq \frac{2}{\beta}$. Отметим, что при $\beta \rightarrow 1$ $\frac{2}{\beta} \downarrow 2$, а $q_0(\beta) \uparrow 1$.

Гомеоморфизмы такого сорта («радиальное растяжение») впоследствии использовались многими авторами (см., например, [69]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12.1. Построенный в теореме 1.12.1 гомеоморфизм $w = w(z)$ будем называть *основным гомеоморфизмом уравнения* (1.192).

◁ **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.12.1.** Положим

$$q_\varepsilon(z) = \begin{cases} 0, & |z| \leq \varepsilon, \\ q(z), & \varepsilon < |z| \leq 1, \end{cases} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Продолжим функцию $q_\varepsilon(z)$ вне круга $\overline{D}$ по формуле

$$q_\varepsilon(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 \overline{q_\varepsilon\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad |z| > 1, \quad (1.195)$$

и сохраним за продолженной функцией прежнее обозначение. Аналогично продолжим $q(z)$.

Сначала докажем теорему 1.12.1 для уравнения (1.192) с коэффициентом $q_\varepsilon(z)$. Построим для уравнения Бельтрами (1.192) с продолженным по формуле (1.195) коэффициентом $q_\varepsilon(z)$ решение $w_\varepsilon = w_\varepsilon(z)$, гомеоморфно отображающее z -плоскость на w -плоскость и такое, что

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 1, \quad |w|_{|z|=1} = 1, \quad w(\infty) = \infty. \quad (1.196)$$

Сначала построим $w_\varepsilon(z)$ для $|z| \leq 1$. Решение $w_\varepsilon(z)$ уравнения (1.192) будем искать в виде

$$w_\varepsilon(z) = z \exp T\varphi_\varepsilon, \quad (1.197)$$

где

$$T\varphi(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \left[\frac{\varphi(t)}{t-z} - \frac{z\overline{\varphi(t)}}{z\bar{t}-1} - \frac{\varphi(t)}{t-1} + \frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar{t}-1} \right] dx dy, \quad (1.198)$$

$t = x + iy$ и $\varphi \in L_\nu(\overline{D})$ при некотором $\nu > 2$. Отметим, что

$$\operatorname{Re} T\varphi|_{|z|=1} = 0, \quad T\varphi(1) = 0, \quad (1.199)$$

а также $\partial_{\bar{z}} T\varphi(z) = \varphi(z)$ (см. [5, с. 50]).

Подставив (1.197) в (1.192), получим для нахождения $\varphi_\varepsilon(z)$ двумерное сингулярное интегральное уравнение

$$\varphi_\varepsilon(z) - q_\varepsilon(z) \Pi \varphi_\varepsilon = -\frac{q_\varepsilon(z)}{z}, \quad |z| \leq 1, \quad (1.200)$$

где $\Pi f = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(Tf)$. Очевидно $\frac{q_\varepsilon(z)}{z} \in L_\nu(\overline{D})$ для любого $\nu > 0$.

Норма $q_\varepsilon \Pi$ как линейного оператора из $L_\nu(\overline{D})$ в $L_\nu(\overline{D})$ при некотором $\nu > 2$ (достаточно близком к двум) будет меньше единицы (следствие теоремы Кальдерона — Зигмунда) (см. [4], [5, с. 333–338]).

Зафиксировав такое $\nu > 2$, по принципу сжатых отображений получим решение $\varphi_\varepsilon(z) \in L_\nu(\overline{D})$ уравнения (1.200) и по формуле (1.197) решение $w_\varepsilon(z) \in W_\nu^1(\overline{D})$ уравнения (1.192) в круге $\overline{D}$, $w_\varepsilon(z) \neq 0$ при $z \neq 0$ (см. [5, с. 88–89]).

Продолжим функцию $w_\varepsilon(z)$ вне круга $\overline{D}$ по формуле

$$w_\varepsilon(z) = \frac{1}{w_\varepsilon\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad |z| > 1, \quad (1.201)$$

и сохраним за продолженной функцией прежнее обозначение. В силу (1.197)–(1.199) функция $w_\varepsilon(z)$ непрерывна в z -плоскости E и удовлетворяет условиям (1.196). Легко проверить, что вне круга $\overline{D}$ функция $w_\varepsilon(z)$ также задается формулой (1.197). Отсюда, из свойств оператора $T\varphi$ (см. параграф 1.4, [5, гл. 1, § 6]) и формулы (1.195) заключаем, что $w_\varepsilon(z)$ — обобщенное в смысле Соболева решение уравнения (1.192), непрерывное на E и класса W_ν^1 в любой конечной части плоскости E .

Докажем гомеоморфность отображения $w_\varepsilon = w_\varepsilon(z)$ z -плоскости на w -плоскость. Рассмотрим функцию $\omega(z) = w_\varepsilon(z) - a$, где a — произвольное фиксированное комплексное число. Из формул (1.197), (1.198) видно, что на окружности $|z| = R$ при R достаточно большим $|w_\varepsilon|$ сколь угодно велик, и что $w_\varepsilon(z) \neq 0$ при $z \neq 0$. Отсюда по принципу аргумента для решений уравнения Бельтрами с разрывным коэффициентом [4]

$$\text{ind}_{|z|=R} \omega(z) = \text{ind}_{|z|=R} w_\varepsilon(z) = \text{ind}_{|z|=\frac{1}{R}} w_\varepsilon(z) = 1, \quad (1.202)$$

где

$$\text{ind } f(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg f(z).$$

Последнее равенство в (1.202) следует из гомеоморфности отображения $w_\varepsilon = w_\varepsilon(z)$ в окрестности нуля, вытекающей из не равенства нулю якобиана этого отображения в некоторой окрестности точки $z = 0$:

$$J_\varepsilon(z) = |\partial_z w_\varepsilon|^2 - |\partial_{\bar{z}} w_\varepsilon|^2 = |\partial_z w_\varepsilon|^2 (1 - |q_\varepsilon(z)|^2) \neq 0, \quad |z| \leq 1, \quad (1.203)$$

поскольку $|\partial_z w_\varepsilon| \neq 0$ в некоторой окрестности точки $z = 0$ [5, с. 104].

Таким образом, функция $\omega(z)$ имеет единственный нуль в круге достаточно большого радиуса, откуда следует биективность отображения $w_\varepsilon = w_\varepsilon(z)$. Биективность влечет за собой гомеоморфность,

поскольку и прямое и обратное отображения удовлетворяют условию Гёльдера с некоторым показателем (теорема Мори) [2, с. 48], а следовательно, непрерывны. В силу (1.196) сужение $w_\varepsilon = w_\varepsilon(z)$ на единичный круг $\overline{D}_z$ дает гомеоморфизм на $\overline{D}_w$.

Отметим, что два гомеоморфизма уравнения (1.192) из $\overline{D}_z$ на $\overline{D}_w$, удовлетворяющие нормировке (1.196), получаются друг из друга посредством суперпозиции с конформным автоморфизмом круга $\overline{D}_w$, удовлетворяющим (1.196) (см. [5, с. 104–105]), откуда получаем единственность гомеоморфизма $w_\varepsilon = w_\varepsilon(z)$.

Построим теперь другим способом решение уравнения (1.192) с коэффициентом $q_\varepsilon(z)$, гомеоморфно отображающее z -плоскость на w -плоскость и удовлетворяющее нормировке (1.196).

Первоначально будем искать решение уравнения (1.192) на плоскости E в виде

$$w_\varepsilon^*(z) = z + T_0 f_\varepsilon(z), \quad (1.204)$$

где

$$T_0 f_\varepsilon(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_E f_\varepsilon(t) \left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} \right] dx dy, \quad t = x + iy,$$

$$f_\varepsilon(z) \in L_m(E), \quad m > 2.$$

Подставляя (1.204) в (1.192), для нахождения $f_\varepsilon(z)$ получим двумерное сингулярное интегральное уравнение

$$f_\varepsilon(z) - q_\varepsilon(z) \Pi_0 f_\varepsilon(z) = q_\varepsilon(z), \quad (1.205)$$

где $\Pi_0 f = \frac{\partial}{\partial z}(T_0 f)$.

Норма $q_\varepsilon \Pi_0$ как линейного оператора из $L_m(E)$ в $L_m(E)$ при некотором $m > 2$ (достаточно близком к двум) будет меньше единицы (теорема Кальдерона — Зигмунда, см. [4; 5, с. 97]). Зафиксировав такое $m > 2$, по принципу сжатых отображений получим решение $f_\varepsilon(z) \in L_m(E)$ уравнения (1.205) и по формуле (1.204) решение $w_\varepsilon^*(z) \in W_m^1(E)$ уравнения (1.192) на плоскости E , гомеоморфно отображающее z -плоскость на w -плоскость, причем $w_\varepsilon^*(0) = 0$ (очевидно из (1.204)) и $w_\varepsilon^*(\infty) = \infty$ (см. [5, с. 108]).

Обозначим: $1/k(\varepsilon) = w_\varepsilon^*(1)$. Очевидно, что функция $\hat{w}_\varepsilon(z) = k(\varepsilon)w_\varepsilon^*(z) \in W_m^1(E)$ есть решение уравнения (1.192), гомеоморфно отображающее z -плоскость на w -плоскость и оставляющее неподвижными точки 0, 1, ∞ . Отсюда следует, что $\hat{w}_\varepsilon(z) \equiv w_\varepsilon(z)$ [2, с. 90], а следовательно, для $\hat{w}_\varepsilon(z)$ выполняется (1.196).

Покажем, что последовательность гомеоморфизмов $w_{\varepsilon_n}(z)$ для некоторой последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$ равномерно на компактах сходится к решению уравнения (1.192) с коэффициентом $q(z)$, гомеоморфно отображающему z -плоскость на w -плоскость и удовлетворяющему (1.196).

Обозначим:

$$q_{1\varepsilon}(z) = \begin{cases} 0, & |z| \leq \varepsilon, |z| > 1, \\ q(z), & \varepsilon < |z| \leq 1, \end{cases} \quad 0 \leq \varepsilon < 1,$$

$$q_{2\varepsilon}(z) = \begin{cases} 0, & |z| < 1, |z| \geq \frac{1}{\varepsilon}, \\ q(z), & 1 < |z| < \frac{1}{\varepsilon}, \end{cases} \quad 0 \leq \varepsilon < 1.$$

При $\varepsilon = 0$ считаем $\frac{1}{\varepsilon} = \infty$.

Известно (см. [2, с. 90–91]), что гомеоморфизм $w_\varepsilon(z)$ представим в виде суперпозиции $w_\varepsilon = w_\varepsilon^1 \circ w_\varepsilon^2$, где w_ε^2 — гомеоморфное на плоскости решение уравнения (1.192) с коэффициентом $q_{2\varepsilon}(z)$, оставляющее неподвижными точки $0, 1, \infty$, а w_ε^1 — гомеоморфное на плоскости решение уравнения (1.192) с коэффициентом

$$\lambda_\varepsilon = \left[\frac{q_\varepsilon - q_{2\varepsilon}}{1 - q_\varepsilon \bar{q}_{2\varepsilon}} \frac{\partial_z w_\varepsilon^2}{\partial_{\bar{z}} \bar{w}_\varepsilon^2} \right] \circ (w_\varepsilon^2)^{-1} = \left[q_{1\varepsilon} \frac{\partial_z w_\varepsilon^2}{\partial_{\bar{z}} \bar{w}_\varepsilon^2} \right] \circ (w_\varepsilon^2)^{-1},$$

удовлетворяющее той же нормировке.

Поскольку при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\|\partial_z w_\varepsilon^2 - \partial_z w_0^2\|_{L_m} \rightarrow 0$ и $\|w_\varepsilon^2 - w_0^2\|_C \rightarrow 0$ на компактах (см. [2, с. 87, 90–91]), то для некоторой последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$ $\lambda_{\varepsilon_n} \rightarrow \lambda_0$, $q_{2\varepsilon_n} \rightarrow q_{20}$ почти всюду, и гомеоморфизмы $w_{\varepsilon_n}^1$ и $w_{\varepsilon_n}^2$ сходятся равномерно на компактах к нормированным гомеоморфизмам уравнения (1.192) с коэффициентами λ_0 и q_{20} соответственно (см. [2, с. 87, 90–91]), а следовательно, $w_{\varepsilon_n}(z)$ сходится равномерно на компактах к гомеоморфизму $w(z)$ уравнения (1.192) с коэффициентом $q(z)$, удовлетворяющим (1.196).

Принадлежность на компактах $w(z), z(w) \in W_s^1$ при некотором $s > 2$ — факт известный (см. [2, с. 84–90; 5, с. 96–98]). $\triangleright$

Теорема 1.12.2. Если в (1.192) $q(z) \in C_\alpha^k(\bar{D}_z)$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, то основной гомеоморфизм уравнения (1.192) $w(z) \in C_\alpha^{k+1}(\bar{D}_z)$. При этом обратное отображение $z = z(w) \in C_\alpha^{k+1}(\bar{D}_w)$.

Замечание 1.12.3. Исследование регулярности основного гомеоморфизма вблизи границы при $q(z) \in C_\alpha^k(\bar{D}_z)$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$,

предпринималось в [45]. Там доказано, что при таком предположении $w(z) \in C_{\beta}^{k+1}(\overline{D}_z)$ для любого β такого, что $0 < \beta < \alpha$.

Теорема 1.12.2 в случае малости нормы $\|q(z)\|_{C_{\alpha}^k(\overline{D}_z)}$ следует из результатов работы [12].

Доказательство теоремы 1.12.2 не опирается на работы [12, 45].

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.12.2. *Схема доказательства.*

Допустим, мы доказали теорему в двух частных случаях: когда носитель коэффициента $q(z)$ $\text{supp } q(z) \subset D_z$, и когда $\text{supp } q(z) \subset \overline{D}_z \setminus \{0\}$.

Далее, с помощью двухэлементного разбиения единицы класса $C^{\infty}(\overline{D}_z)$ $\{\psi_1(z), \psi_2(z)\}$ такого, что $\text{supp } \psi_1 \subset D_z$, $\text{supp } \psi_2 \subset \overline{D}_z \setminus \{0\}$ (см., например, [64, с. 66]), представим $q(z)$ в виде суммы $q(z) = q_1(z) + q_2(z)$, где $q_j(z) \in C_{\alpha}^k(\overline{D}_z)$, $j = 1, 2$, $|q_j(z)| \leq q_0 < 1$, $q_j(z) = \psi_j(z)q(z)$, $\text{supp } q_1(z) \subset D_z$, $\text{supp } q_2(z) \subset \overline{D}_z \setminus \{0\}$.

После этого по схеме, использованной в доказательстве теоремы 1.12.2, гомеоморфизм $w(z)$ представим в виде суперпозиции $w = w^1 \circ w^2$, где $w^2 \in C_{\alpha}^{k+1}(\overline{D}_z)$ — решение уравнения Бельтрами с коэффициентом $q_2(z)$, гомеоморфно отображающее единичный круг на себя и удовлетворяющее нормировке $w^2(0) = 0$, $w^2(1) = 1$, а w^1 — решение уравнения Бельтрами с коэффициентом

$$\lambda = \left[\frac{q - q_2}{1 - q\overline{q_2}} \frac{\partial_z w^2}{\partial_{\bar{z}} \overline{w^2}} \right] \circ (w^2)^{-1} = \left[q_1 \frac{\partial_z w^2}{\partial_{\bar{z}} \overline{w^2}} \right] \circ (w^2)^{-1},$$

гомеоморфно отображающее единичный круг $\overline{D}_{w^2}$ на единичный круг D_w и удовлетворяющее той же нормировке.

Поскольку $\partial_z w^2 \neq 0$ (см. [5, с. 104]), то $\lambda \in C_{\alpha}^k(\overline{D}_{w^2})$, $\text{supp } \lambda = \text{supp } q_1$ и $w^1 \in C_{\alpha}^{k+1}(\overline{D}_{w^2})$.

Отсюда получим утверждение теоремы.

Итак, достаточно рассмотреть два вышеупомянутых частных случая.

Пусть $\text{supp } q(z) \in D_z$. Отметим, что из $q(z) \in C_{\alpha}^k(\overline{D}_z)$ следует, что $w \in C_{\alpha}^{k+1}(D_z)$ (см. [5, с. 104]). Далее, построенный в теореме 1.12.2 гомеоморфизм $w(z)$ конформно отображает некоторое кольцо $D_z^* = \{z : 1 - \varepsilon < |z| < 1\}$ ($\varepsilon > 0$ достаточно мало) на двухсвязную область $G \subset D_w$, причем внешняя компонента границы области G совпадает с окружностью $|w| = 1$, а внутренняя компонента границы области G , в силу $w \in C_{\alpha}^{k+1}(D_z)$, будет класса C_{α}^{k+1} . Отсюда следует, что конформное отображение $w : D_z^* \rightarrow G$ принадлежит

классу $C_{\alpha}^{k+1}(\overline{D}_z^*)$ (см. [5, с. 37]), а следовательно, $w(z) \in C_{\alpha}^{k+1}(\overline{D}_z)$, и частный случай $\text{supp } q(z) \in D_z$ исчерпан.

Рассмотрим теперь случай $\text{supp } q(z) \subset \overline{D}_z \setminus \{0\}$, т. е. $q(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности нуля.

В представлении (1.197) $w(z) = z \exp T\varphi$ обозначим $\omega(z) = T\varphi(z)$. Тогда из (1.197), (1.192) и (1.199) получим, что функция $\omega(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\omega_{\bar{z}} - q(z)\omega_z = \frac{q(z)}{z} \in C_{\alpha}^k(\overline{D}_z), \quad (1.206)$$

и краевому условию

$$\text{Re } \omega(z)|_{z \in \Gamma} = 0. \quad (1.207)$$

Из (1.206) и (1.207) следует, что $\omega(z) \in C_{\alpha}^{k+1}(\overline{D}_z)$ [18], и второй частный случай исчерпан.

Утверждение о гладкости обратного отображения вытекает из теоремы об обратной функции и положительности якобиана (см. [5, с. 104])

$$J(z) = |\partial_z w|^2 - |\partial_{\bar{z}} w|^2 = |\partial_z w|^2 (1 - |q(z)|^2) > 0, \quad |z| \leq 1. \triangleright$$

Приведем одно полезное следствие теоремы 1.12.2.

В комплексных плоскостях переменных z и w рассмотрим две ограниченные замкнутые односвязные области D_z и G_w с границами Γ и L соответственно, класса C_{α}^{k+1} , $k = 0, 1, 2, \dots$, $0 < \alpha < 1$. Далее, обозначаем: $\overline{D}_z = D_z \cup \Gamma$, $\overline{G}_w = G_w \cup L$.

Следующее утверждение обобщает теорему Келлога 1.3.1.

Теорема 1.12.3. Пусть $w = w(z)$ — гомеоморфное отображение области D_z на область G_w , причем $w(z)$ — решение уравнения (1.194), в котором $q_1(z), q_2(z) \in C_{\alpha}^k(\overline{D}_z)$. Тогда $w(z)$ продолжается до гомеоморфизма $\overline{D}_z$ на $\overline{G}_w$, причем $w(z) \in C_{\alpha}^{k+1}(\overline{D}_z)$, а обратное отображение принадлежит классу $C_{\alpha}^{k+1}(\overline{G}_w)$.

Замечание 1.12.4. Существование и условия единственности такого гомеоморфизма установлены в [4].

Частный случай теоремы 1.12.3 при $q_2(z) \equiv 0$ (случай уравнения Бельтрами) и когда D_z и G_w — единичные круги — это теорема 1.12.2, которая послужит отправной точкой при доказательстве.

Для доказательства теоремы 1.12.3 рассмотрим два частных случая: $q_2(z) \equiv 0$ и $q_1(z) \equiv 0$.

Лемма 1.12.1. Утверждение теоремы 1.12.3 справедливо при $q_2(z) \equiv 0$ (случай уравнения Бельтрами).

◁ Отобразим область D_z конформно на единичный круг $|\zeta| < 1$, для определенности пронормировав это конформное отображение условиями $\zeta(z_0) = 0$, $\zeta(z_1) = 1$, где $z_0 \in D_z$ — некоторая фиксированная точка внутри D_z , а z_1 — некоторая фиксированная точка на границе Γ , и перейдем в уравнении (1.194) (при $q_2(z) \equiv 0$) к аргументу ζ , изменяющемуся в единичном круге $D_\zeta = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$:

$$\partial_{\bar{\zeta}} w(z(\zeta)) - q_1(z(\zeta)) \frac{\overline{z'(\zeta)}}{z'(\zeta)} \partial_{\zeta} w = 0. \quad (1.208)$$

Поскольку, в силу теоремы 1.3.1, $z'(\zeta) \in C_{\alpha}^k(\overline{D_\zeta})$ и $z'(\zeta) \neq 0$, то коэффициент уравнения (1.208) будет принадлежать классу $C_{\alpha}^k(\overline{D_\zeta})$.

Обозначим через $\chi(\zeta)$ решение уравнения Бельтрами (1.208), квазиконформно отображающее единичный круг $\overline{D_\zeta}$ на единичный круг $\overline{D_\chi}$ и удовлетворяющее нормировке $\chi(0) = 0$, $\chi(1) = 1$. По теореме 1.12.2 такое отображение существует и $\chi(\zeta) \in C_{\alpha}^{k+1}(\overline{D_\zeta})$.

Далее, обозначим: $w_i = w(z_i)$, $i = 0, 1$, и $\Phi(\chi)$ — конформное отображение единичного круга D_χ на область G_w , удовлетворяющее нормировке $\Phi(0) = w_0$, $\Phi(1) = w_1$. В силу теоремы 1.3.1 $\Phi(\chi) \in C_{\alpha}^{k+1}(\overline{D_\chi})$.

Суперпозиция $\Phi(\chi(\zeta(z))) \in C_{\alpha}^{k+1}(\overline{D_z})$ есть решение уравнения (1.194) (при $q_2(z) \equiv 0$), квазиконформно отображающее $\overline{D_z}$ на $\overline{G_w}$, которое, в силу нормировок, совпадает с $w(z)$ [4].

Утверждение об обратном отображении $z(w) \in C_{\alpha}^{k+1}(\overline{G_w})$ следует из положительности якобиана $J(z) = |w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2 > 0$ [4]. ▷

Лемма 1.12.2. Утверждение теоремы 1.12.3 справедливо при $q_1(z) \equiv 0$ (случай сопряженного уравнения Бельтрами).

◁ Гомеоморфизм $w = w(z)$ принадлежит классу Соболева $W_p^1(\overline{D_z})$ при некотором $p > 2$ (вообще говоря, p близко к двум), при этом обратное отображение $z = z(w) \in W_p^1(\overline{G_w}) \subset C_{\beta}(\overline{G_w})$, $\beta = \frac{p-2}{p}$ [4].

Покажем, что обратное отображение $z = z(w)$ удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{w}} + q_2(z(w)) \frac{\partial z}{\partial w} = 0. \quad (1.209)$$

Рассуждения аналогичны приведенным в [5, с. 104–105] рассуждениям для гомеоморфизма уравнения Бельтрами.

Учитывая, что $w(z)$ есть решение сопряженного уравнения Бельтрами

$$\partial_{\bar{z}}w - q_2(z)\overline{\partial_z w} = 0,$$

будем иметь (производные понимаются в смысле Соболева)

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial w} + \overline{q_2(z(w))} \frac{\partial z}{\partial \bar{w}} \right), \\ 0 &= \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial z}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{w}} + q_2(z(w)) \frac{\partial z}{\partial w} \right). \end{aligned} \quad (1.210)$$

Из первого соотношения (1.210) получаем, что почти всюду в D_z $\partial_z w \neq 0$. Поскольку при квазиконформном гомеоморфизме $w = w(z)$ множество нулевой меры переходит в множество нулевой же меры [4], то с учетом этого неравенства из второго соотношения (1.210) получим (1.209).

Итак, $z = z(w) \in W_p^1$, $p > 2$, — гомеоморфизм уравнения Бельтрами (1.209), в котором $q_2(z(w)) \in C_\gamma(\overline{G}_w)$, где, по крайней мере, $\gamma = \alpha\beta$, $\beta = \frac{p-2}{p}$. Отсюда, по лемме 1.12.1, получаем $z(w) \in C_\gamma^1(\overline{G}_w)$, что влечет за собой $q_2(z(w)) \in C_\alpha(\overline{G}_w)$ и, по лемме 1.12.1, $z(w) \in C_\alpha^1(\overline{G}_w)$. Если $k > 0$, то из последнего соотношения получим $q_2(z(w)) \in C_\alpha^1(\overline{G}_w)$ и, по лемме 1.12.1, будем иметь $z(w) \in C_\alpha^2(\overline{G}_w)$ и т. д. Окончательно будем иметь $z(w) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{G}_w)$ и, в силу положительности якобиана $J(z) = |w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2 > 0$ [4], $w(z) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_z)$. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.12.3. Обозначим теперь через $\zeta = \zeta(z)$ гомеоморфизм уравнения Бельтрами

$$\partial_{\bar{z}}\zeta - \mu(z)\partial_z\zeta = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \mu(z) &= 2q_1(1 + |q_1|^2 - |q_2|^2 + \sqrt{\Delta})^{-1} \in C_\alpha^k(\overline{D}_z), \\ \Delta &= (1 - |q_1|^2 - |q_2|^2)^2 - 4|q_1|^2|q_2|^2 \geq (1 - q_0^2)^2 > 0, \\ |\mu(z)| &\leq \frac{1}{2 - q_0^2} < 1, \end{aligned}$$

квазиконформно отображающий область D_z на единичный круг D_ζ с нормировкой $\zeta(z_0) = 0$, $\zeta(z_1) = 1$ (обозначения из доказательства леммы 1.12.1). В силу леммы 1.12.1 $\zeta(z) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_z)$.

Если перейти в уравнении (1.194) к аргументу ζ , то оно примет следующий вид (см. [46, с. 222–223]):

$$\partial_{\bar{\zeta}} w - \nu(\zeta) \overline{\partial_{\zeta} w} = 0, \quad w(\zeta) \equiv w(z(\zeta)), \quad (1.211)$$

где

$$\begin{aligned} \nu(\zeta) &= \frac{q_2(1 - |\mu|^2)}{|1 - q_1 \bar{\mu}|^2 - |q_2 \mu|^2} \in C_{\alpha}^k(\overline{D_{\zeta}}), \\ |\nu(\zeta)| &= |q_2| \frac{\sqrt{\Delta} + 1 + |q_1|^2 - |q_2|^2}{\sqrt{\Delta} + 1 - |q_1|^2 - |q_2|^2} \leq \\ &\leq |q_2| + |q_1| \frac{|q_2| |q_1|}{1 - q_0^2 + |q_2| |q_1|} \leq q_0 < 1. \end{aligned}$$

Обозначим через $W = W(\zeta)$ гомеоморфизм уравнения (1.211), квазиконформно отображающий единичный круг D_{ζ} на область G_w с нормировкой $W(0) = w_0$, $W(1) = w_1$ (обозначения из доказательства леммы 1.12.1). Существование и единственность такого гомеоморфизма установлены в [4]. В силу леммы 1.12.2 $W = W(\zeta) \in C_{\alpha}^{k+1}(\overline{D_{\zeta}})$. Из нормировок следует, что $w(z) \equiv W(\zeta(z))$ [4]. Таким образом, $w(z) \in C_{\alpha}^{k+1}(\overline{D_z})$.

Утверждение об обратном отображении $z(w) \in C_{\alpha}^{k+1}(\overline{G_w})$ следует из положительности якобиана $J(z) = |w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2 > 0$ [4]. $\triangleright$

1.13. Историко-библиографические замечания

Теорема 1.4.8 опубликована в [31].

Утверждение леммы 1.4.1 в случае кусочно-гладкой границы области G приведено в [5, с. 68] без доказательства. В том виде, как оно сформулировано в лемме 1.4.1, утверждение доказано в [37, 74]. Там же опубликовано утверждение теоремы 1.4.9.

В [5] нет доказательства обобщенных формул Сохоцкого даже для непрерывной вплоть до края области обобщенной аналитической функции. Как элемент аккуратного обоснования формул (2.17), леммы 1.4.2–1.4.4 здесь сформулированы и доказаны впервые.

Лемма 1.8.2 опубликована в [37, 74].

Лемма 1.8.3 в разных вариантах общности опубликована в [24, 37, 74].

Пункт 1.10.1 изложен на основе статьи [34], пункт 1.10.2 — на основе статьи [36]. Определение индекса задачи здесь и везде далее следует из [13, гл. 5, § 19].

Пункты 1.10.3–1.10.5 изложены на основе статьи [33].

Теоремы 1.12.1 и 1.12.2 взяты из статьи [39], теорема 1.12.3 — из статьи [40].

ГЛАВА 2

КЛАССЫ ХАРДИ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

2.1. Определение. Первоначальные свойства

Как и в главе 1, обозначим через $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z -плоскости, $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга D ; $\overline{D} = D \cup \Gamma$; $A(z), B(z) \in L_s(\overline{D})$, $s > 2$.

Рассмотрим в $\overline{D}$ каноническую эллиптическую систему в комплексной записи (1.53):

$$\partial_{\bar{z}} w + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0,$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная (обобщенная аналитическая) функция, u и v — ее действительная и мнимая части, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$ — производная в смысле Соболева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. Будем говорить, что решение системы (1.53) принадлежит классу $H_p(A, B)$, $p > 0$, если оно для некоторой положительной постоянной $M_p(w) < +\infty$ удовлетворяет условию

$$\mu(\rho, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |w(\rho e^{i\sigma})|^p d\sigma \leq M_p(w),$$
$$\forall \rho : 0 \leq \rho < 1, \rho e^{i\sigma} = z \in D.$$

При $A = B \equiv 0$ имеем классический класс Харди H_p (см. определение 1.7.1).

Множество ограниченных в D решений системы (1.53) будем обозначать через $H_\infty(A, B)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.1. Для голоморфной функции класса H_p величина $\mu(\rho, w)$ не убывает по ρ (см. лемму 1.7.1). Для функций класса $H_p(A, B)$ это свойство не сохраняется.

ПРИМЕР 2.1.1. Положим $A(z) = \frac{z}{1+z\bar{z}}$, $w(z) = \frac{1}{1+z\bar{z}}$. Имеет место соотношение $\partial_{\bar{z}}w + A(z)w = 0$, и $\mu(\rho, w)$ убывает при $\rho \rightarrow 1$.

Теорема 2.1.1. Для того чтобы обобщенная аналитическая функция $w(z)$ принадлежала классу $H_p(A, B)$, $0 < p \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы в представлении (1.54) $\Phi \in H_p$.

◁ В силу предположения $A(z), B(z) \in L_s(\overline{D})$, $s > 2$, интеграл в представлении (1.54) для любого $w(z)$ принадлежит классу $C_\alpha(\overline{D})$, $\alpha = \frac{s-2}{s}$ (см. теорему 1.4.3), откуда непосредственно следует утверждение теоремы 2.1.1. ▷

Также непосредственным следствием формулы (1.54) и соответствующих свойств для голоморфных функций класса H_p (см. теоремы 1.7.1, 1.7.2, 1.7.8, 1.7.6) являются следующие утверждения.

Теорема 2.1.2. Каждая функция $w(z) \not\equiv 0$ из класса $H_p(A, B)$, $p > 0$, обладает функцией Бляшке, определяемой ее нулями.

Теорема 2.1.3. Функция $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 0$, для почти всех точек t окружности Γ имеет предельные значения по некасательным путям $w^+(t) \in L_p(\Gamma)$. Если же $w^+(t) \in L_q(\Gamma)$, $q > p$, то $w(z) \in H_q(A, B)$.

Теорема 2.1.4. Если функция $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 0$, на множестве $e \subset \Gamma$ положительной меры имеет нулевые некасательные предельные значения, то $w(z) \equiv 0$.

Теорема 2.1.5. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 0$. то $w(z) \in L_m(\overline{D})$ для любого m такого, что $0 < m < 2p$.

◁ Доказательство непосредственно следует из леммы 1.8.3 и теоремы 2.1.1. ▷

Теорема 2.1.6. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $0 < p < \infty$, то

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |w^+(e^{i\theta})|^p d\theta; \quad (2.1)$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta}) - w^+(e^{i\theta})|^p d\theta = 0, \quad (2.2)$$

где $w^+(e^{i\theta})$ — предельные значения по некасательным путям на Γ функции $w(z)$, $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$.

◁ Рассмотрим случай $p \geq 1$. Докажем сначала (2.2). Из представления (1.54) $w(z) = \Phi(z)w_0(z)$, где $\Phi(z) \in H_p$, $w_0(z) \in C_\alpha(\overline{D})$, используя неравенство (1.2), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta}) - w^+(e^{i\theta})|^p d\theta \leq \\ & \leq 2^{p-1} \sup_{z \in \overline{D}} |w_0(z)| \int_0^{2\pi} |\Phi(re^{i\theta}) - \Phi^+(e^{i\theta})|^p d\theta + \\ & + 2^{p-1} \int_0^{2\pi} |\Phi^+(e^{i\theta})|^p |w_0(re^{i\theta}) - w_0(e^{i\theta})|^p d\theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Первое слагаемое в правой части (2.3) стремится к нулю при $r \rightarrow 1$ в силу соответствующего свойства для голоморфных функций класса H_p (см. (1.74)), а второе — слагаемое в силу равномерной в $\overline{D}$ непрерывности функции $w_0(z)$. Таким образом, при $p \geq 1$ соотношение (2.2) доказано.

Далее, при $p \geq 1$ из неравенства Минковского имеем

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} & \leq \left\{ \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta}) - w^+(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} + \\ & + \left\{ \int_0^{2\pi} |w^+(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

откуда, в силу (2.2),

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} |w^+(e^{i\theta})|^p d\theta. \quad (2.4)$$

Вместе с тем из теоремы 2.1.3 и леммы Фату (см. [53, с. 133–134]) имеем

$$\int_0^{2\pi} |w^+(e^{i\theta})|^p d\theta \leq \underline{\lim}_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})|^p d\theta. \quad (2.5)$$

Сопоставляя (2.4) и (2.5), получим (2.1) при $p \geq 1$.

Обратимся теперь к случаю $0 < p < 1$. Обозначим через $b(z)$ функцию Бляшке голоморфной функции $\Phi(z)$ (см. теорему 1.7.1) в представлении (1.54).

Далее, положим $\Phi_0(z) = \frac{\Phi(z)}{b(z)}$, $W_0(z) = \Phi_0(z)w_0(z) = \frac{w(z)}{b(z)}$. Здесь (см. теорему 1.7.1)

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &\neq 0, \quad z \in D, \quad \Phi_0(z) \in H_p, \\ |\Phi(z)| &\leq |\Phi_0(z)|, \quad |\Phi(\zeta)| = |\Phi_0(\zeta)|, \quad \zeta \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В силу (2.6) имеем соотношения

$$|w(z)| \leq |W_0(z)|, \quad z \in D, \quad |W_0(\zeta)| = |w^+(\zeta)|, \quad \zeta \in \Gamma. \quad (2.7)$$

Так как $\Phi_0(z) \neq 0$ в D , то голоморфная функция $\Phi_1(z) = [\Phi_0(z)]^{p/2}$ однозначна, и в силу (2.6) $\Phi_1(z) \in H_2$.

Несложным вычислением проверяется, что

$$\begin{aligned} [W_0(z)]^{\frac{p}{2}} &= W_1(z) = \\ &= \Phi_1(z) \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A_1(\zeta) + B_1(\zeta) \frac{\overline{W_1(\zeta)}}{W_1(\zeta)}}{\zeta - z} d\xi d\eta \right\}, \quad (2.8) \\ \zeta &= \xi + i\eta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \frac{p}{2} A(z) \in L_s(\overline{D}), \\ B_1(z) &= \frac{p}{2} B(z) \frac{\overline{b(z)}}{b(z)} \left(\frac{W_0(z)}{\overline{W_0(z)}} \right)^{\frac{p}{2}-1} \in L_s(\overline{D}). \end{aligned}$$

Из (2.8) и теоремы 2.1.1 получаем $W_1(z) \in H_2(A_1, B_1)$. Отсюда, в силу (2.1), уже доказанного для $p \geq 1$,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |W_0(re^{i\theta})|^p d\theta = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |W_1(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} |W_0(e^{i\theta})|^p d\theta,$$

или, с учетом (2.7), получаем (2.4) при $0 < p < 1$. Применяя лемму Фату, получим (2.1) для любого $p > 0$.

Перейдем к доказательству (2.2) при $0 < p < 1$. Очевидно, достаточно показать, что (2.2) имеет место для любой последовательности $\{r_n\} \rightarrow 1 - 0$.

С использованием неравенства (1.1) для любых измеримых множеств $h \subset [0, 2\pi]$ и $E = [0, 2\pi] \setminus h$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |w(r_n e^{i\theta}) - w^+(e^{i\theta})|^p d\theta &\leq \int_E |w(r_n e^{i\theta}) - w^+(e^{i\theta})|^p d\theta + \\ &+ \int_h |w(r_n e^{i\theta})|^p d\theta + \int_h |w^+(e^{i\theta})|^p d\theta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В соответствии с теоремой Егорова [53, с. 97] множество E выберем так, чтобы последовательность $\{w(r_n e^{i\theta})\}$ равномерно по $\theta \in E$ сходилась к $w^+(e^{i\theta})$ при $r_n \rightarrow 1$. Тогда при $r_n \rightarrow 1$ первое слагаемое в правой части (2.9) стремится к нулю и, кроме того,

$$\lim_{r_n \rightarrow 1} \int_E |w(r_n e^{i\theta})|^p d\theta = \int_E |w^+(e^{i\theta})|^p d\theta.$$

Отсюда, в силу уже доказанного равенства (2.1) также получим

$$\lim_{r_n \rightarrow 1} \int_h |w(r_n e^{i\theta})|^p d\theta = \int_h |w^+(e^{i\theta})|^p d\theta.$$

Следовательно, последние два слагаемых в правой части (2.9) можно сделать сколь угодно малыми, устремляя (по теореме Егорова) меру множества h к нулю, а r_n — к 1. Теорема 2.1.6 полностью доказана. ▸

Для вывода обобщенных формул Коши для функций класса $H_p(A, B)$ нам необходимы некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 2.1.1. *Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $p \geq 1$, то имеют место соотношения (формулы Грина, см. (1.49), (1.50))*

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} w(z) dz = \iint_D \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dx dy, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} w(z) d\bar{z} = - \iint_G \frac{\partial w}{\partial z} dx dy, \quad z = x + iy. \quad (2.11)$$

◁ Рассмотрим последовательность окружностей $\Gamma_n = \{z : |z| = r_n = 1 - \frac{1}{n}\}$. Обозначим: $D_n = \{z : |z| < 1 - \frac{1}{n}\}$. Поскольку $w \in C_\alpha(\overline{D_n})$, $\alpha = \frac{s-2}{s}$ [5, с. 152], то имеет место соотношение (см. (1.49))

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma_n} w(z) dz = \iint_{D_n} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dx dy. \quad (2.12)$$

Далее,

$$\int_{\Gamma_n} w(z) dz = ir_n \int_{\Gamma} w(r_n e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta.$$

Отсюда и из (2.31) имеем

$$\int_{\Gamma_n} w(z) dz \rightarrow \int_{\Gamma} w(z) dz, \quad n \rightarrow \infty.$$

Вместе с тем в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега

$$\iint_{D_n} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dx dy \rightarrow \iint_D \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dx dy, \quad n \rightarrow \infty.$$

Переходя к пределу в (2.12) при $n \rightarrow \infty$ и учитывая два последних соотношения, получим (2.10).

Формула (2.11) доказывается аналогично. ▷

Рассмотрим наряду с (1.53) сопряженное уравнение

$$\partial_{\bar{z}} w' - A(z)w' - \overline{B(z)}\overline{w'} = 0. \quad (2.13)$$

Лемма 2.1.2. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $p \geq 1$, а $w'(z) \in H_q(-A, -\overline{B})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, — решение уравнения (2.13) (при $p = 1$ $q = \infty$), то имеет место соотношение (тождество Грина)

$$\operatorname{Im} \left(\int_{\Gamma} w(z) w'(z) dz \right) = 0. \quad (2.14)$$

◁ Для произведения ww' имеем

$$\frac{\partial(ww')}{\partial \bar{z}} = 2i \operatorname{Im} \{ \overline{B} \overline{w'} w \} = C(z)ww',$$

где

$$C(z) = \frac{2i \operatorname{Im} \{\overline{B} \overline{w'} w\}}{ww'} \quad \text{при } ww' \neq 0,$$

$$C(z) = 0 \quad \text{при } ww' = 0.$$

Таким образом, $C(z) \in L_s(\overline{D})$, а $ww' \in H_1(-C, 0)$. Применяя к ww' формулу (2.10), будем иметь

$$\int_{\Gamma} w(z) w'(z) dz = 2i \iint_D \frac{\partial(ww')}{\partial \bar{z}} dx dy = -4 \iint_D \operatorname{Im} \{\overline{B} \overline{w'} w\} dx dy,$$

откуда получаем (2.14). $\triangleright$

Теорема 2.1.7. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $p \geq 1$, то имеет место представление (1.58) (обобщенная формула Коши)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) w(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{w(\zeta)} d\bar{\zeta} = \begin{cases} w(z), & z \in D, \\ \frac{1}{2}w(z), & z \in \Gamma, \\ 0, & z \notin \overline{D}, \end{cases} \quad (2.15)$$

где при $\zeta \in \Gamma$ $w(\zeta) \equiv w^+(\zeta)$ — предельные значения $w(z)$ на Γ при $z \rightarrow \zeta \in \Gamma$ по некасательным путям.

$\triangleleft$ Рассуждения дословно повторяют соответствующие построения из [5, с. 183–185], только вместо тождества Грина из [5, с. 180] следует использовать (2.14). $\triangleright$

Рассмотрим теперь обобщенный интеграл типа Коши:

$$w(z) = \mathcal{K} \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{\varphi(\zeta)} d\bar{\zeta}, \quad (2.16)$$

где $\varphi(\tau) \in L_p(\Gamma)$, $p \geq 1$. То, что $w(z)$ является в D решением уравнения (1.53) — факт известный [5, с. 187]. Установим для (2.16) обобщенные формулы Сохоцкого — Племеля.

Теорема 2.1.8. Если в (2.16) $\varphi(\tau) \in L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, то обобщенный интеграл типа Коши (2.16) почти для каждого $t \in \Gamma$ имеет конечные некасательные предельные значения $w_+(t) \in L_p(\Gamma)$ при $z \rightarrow t$, $z \in D$, или $w_-(t) \in L_p(\Gamma)$ при $z \rightarrow t$, $z \in E \setminus \overline{D}$, и имеют место соотношения (обобщенные формулы Сохоцкого — Племеля)

$$w_{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(t, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \Omega_2(t, \zeta) \overline{\varphi(\zeta)} d\bar{\zeta}. \quad (2.17)$$

◁ Формулы (2.17) непосредственно следуют из формул Сохоцкого — Племелья для обычного интеграла типа Коши — Лебега (1.88), соотношений (1.60)–(1.63) и леммы 1.4.4. Утверждение $w_{\pm}(t) \in L_p(\Gamma)$ следует опять таки из (1.60)–(1.63), леммы 1.4.4 и ограниченности в $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, сингулярного интеграла с ядром Коши (см. [13, с. 199]). ▷

Теорема 2.1.9. Пусть $\varphi(\tau) \in L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$. Тогда обобщенный интеграл типа Коши (2.16) принадлежит классу $H_p(A, B)$.

◁ В силу (1.59) можем переписать (2.16) в виде

$$w(z) = \Phi(z) + \Psi(z), \quad (2.18)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \Psi(z) = \int_{\Gamma} \Omega_*(z, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta, \quad (2.19)$$

$$\Omega_*(z, \zeta) = O(|z - \zeta|^{-\frac{2}{s}}).$$

Поскольку $\varphi(\zeta) \in L_p(\Gamma)$, то в (2.19) $\Phi(z) \in H_p$ (см. теорему 1.8.8).

В силу (2.19) имеем

$$\int_{\Gamma} |\Omega_*(re^{i\theta}, \zeta)| d\theta \leq C_1 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|re^{i\theta} - \zeta|^{\frac{2}{s}}}, \quad (2.20)$$

где C_1 — положительная константа, не зависящая от r и ζ . Очевидно, интеграл в правой части (2.20) не зависит от $\zeta \in \Gamma$. Вместе с тем этот интеграл монотонно возрастает по r (см. лемму 1.7.1) и при $r = 1$ конечен. Отсюда имеем

$$\int_{\Gamma} |\Omega_*(re^{i\theta}, \zeta)| d\theta \leq C_2 = \text{const} < \infty, \quad (2.21)$$

где константа C_2 от r и ζ не зависит.

Из (2.21) и (2.19) получаем

$$\int_{\Gamma} |\Psi(re^{i\theta})| d\theta \leq C_3 = C_3(\|\varphi\|_{L_1(\Gamma)}) = \text{const} < \infty. \quad (2.22)$$

Таким образом, $w(z) \in H_1(A, B)$. Поскольку по теореме 2.1.8 $w_+(\zeta) \in L_p(\Gamma)$, из теоремы 2.1.3 получаем $w(z) \in H_p(A, B)$. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.2. Если в (2.16) $\varphi(t) \in L_1(\Gamma)$, то, вообще говоря, $\mathcal{H}\varphi(z) \notin H_1(A, B)$ (это связано с неограниченностью сингулярного интеграла в $L_1(\Gamma)$; комментарии для голоморфного случая можно найти в [7, с. 119]).

Теорема 2.1.10. Для того чтобы функция $w(z) \in H_p(A, B)$, $1 \leq p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась обобщенным интегралом Коши

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) w(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{w(\zeta)} d\bar{\zeta}, \quad (2.23)$$

где $w(\zeta) \equiv w_+(\zeta)$ — предельные значения по некасательным путям функции $w(z)$ при $z \rightarrow \zeta \in \Gamma$, причем $w(\zeta) \in L_p(\Gamma)$.

$\triangleleft$ **НЕОБХОДИМОСТЬ** — это теорема 2.1.7.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Случай $p > 1$ рассмотрен в теореме 2.1.9. Рассмотрим случай $p = 1$. Из (2.23) для $w(z)$ имеем представление (2.18), где $\varphi(\zeta) \equiv w_+(\zeta) \in L_1(\Gamma)$. Интеграл типа Коши $\Phi(z)$ в (2.18) принадлежит классу H_γ при некотором $\gamma > 0$ (см. [13, с. 82]), а для $\Psi(z)$ справедлива оценка (2.22). Таким образом, $w(z) \in H_\gamma(A, B)$, $\gamma > 0$. Поскольку $w_+(\zeta) \in L_1(\Gamma)$, то из теоремы 2.1.3 имеем $w(z) \in H_1(A, B)$. $\triangleright$

Непосредственно из (2.17) и (2.23) получаем

Следствие 2.1.1. Для того чтобы функция $\varphi(\zeta) \in L_p(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$, была граничными значениями функции $w(z) \in H_p(A, B)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\varphi(\zeta) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(\zeta, t) \varphi(t) dt - \Omega_2(\zeta, t) \overline{\varphi(t)} d\bar{t} = 0. \quad (2.24)$$

2.2. Представления второго рода

Приведем обобщение представления (1.55) на классы $H_p(A, B)$.

Теорема 2.2.1. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 1$, то имеет место соотношение (1.55), где $\Phi(z) \in H_p$.

$\triangleleft$ По теореме 2.1.5 $w(z) \in L_m(\overline{D})$, $0 < m < 2p$. Покажем, что $Aw + B\overline{w} \in L_q(\overline{D})$ при некотором q , $1 < q \leq 2$ (достаточно установить это для Aw).

Будем пока считать, что

$$p > \frac{s}{2(s-1)}. \quad (2.25)$$

Используя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\begin{aligned} & \iint_D |A(z)w(z)|^q dx dy \leq \\ & \leq \left[\iint_D |A(z)|^{q\alpha} dx dy \right]^{\frac{1}{\alpha}} \left[\iint_D |w(z)|^{q\beta} dx dy \right]^{\frac{1}{\beta}}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Подберем α, β, q , так, чтобы $1 < q \leq 2$, и чтобы правая часть (2.26) была ограничена.

Положим $\alpha q = s$, тогда первый сомножитель в правой части неравенства (2.26) конечен. Далее будем иметь $q\beta = \frac{\alpha q}{\alpha-1} = \frac{sq}{s-q}$. Очевидно, зафиксировав q ($q > 1$) достаточно близким к единице, и m такое, что $2p > m > \frac{s}{s-1}$ (что в силу (2.25) возможно) будем иметь $m \geq \frac{sq}{s-q} = \beta q$, и второй сомножитель в (2.26) при этом будет конечен. Теперь требование (2.25) можно снять, поскольку в проделанном рассуждении s ($s > 2$) можно считать настолько близким к двум, что при данном $p > 1$ (2.25) будет выполнено.

При зафиксированном таким образом q по теореме 1.4.7

$$T(Aw + B\overline{w}) \in L_\gamma(\Gamma_r) \quad (2.27)$$

для любых γ и r таких, что $1 < \gamma < \frac{q}{2-q}$, $0 < r \leq 1$. Зафиксируем $\gamma \leq p$. Поскольку $Aw + B\overline{w} \in L_q(\overline{D})$, из (1.53) $\partial_{\bar{z}}w \in L_q(\overline{D})$, и вследствие этого имеет место равенство (см. [5, с. 50])

$$w(z) + T(Aw + B\overline{w})(z) = \Phi(z), \quad (2.28)$$

где $\Phi(z)$ — голоморфная в D функция.

Используя неравенство (1.2), из (2.28), (2.27) и теоремы 1.4.7 будем иметь

$$\int_{\Gamma_r} |\Phi(t)|^\gamma dt \leq 2^{\gamma-1} \left\{ \int_{\Gamma_r} |w(t)|^\gamma dt + \int_{\Gamma_r} |T(Aw + B\overline{w})(t)|^\gamma dt \right\} \leq C_\gamma, \quad (2.29)$$

где константа C_γ от r не зависит.

Таким образом, $\Phi(z)$ в (2.28) принадлежит классу H_γ , а следовательно, имеет почти всюду на Γ предельные значения по некасательным путям $\Phi^+(t) \in L_\gamma(\Gamma)$ (см. теорему 1.7.2) и представима интегралом Коши — Лебега (теорема 1.7.5):

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi^+(t)}{t-z} dt. \quad (2.30)$$

Лемма 2.2.1. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{r \rightarrow 1} T(Aw + B\overline{w})(re^{i\theta}) = T(Aw + B\overline{w})(t) \quad (2.31)$$

для почти всех $t = e^{i\theta} \in \Gamma$.

◁ Так как в (2.43) $w(z) \in H_1(A, B)$, $\Phi(z) \in H_1$, то при $z \rightarrow t \in \Gamma$, $z \in D$, по некасательным путям $w(z)$ и $\Phi(z)$ имеют пределы $w(t)$ и $\Phi(t)$ для почти всех $t \in \Gamma$ (теорема 2.1.3). Отсюда получаем, что $T(Aw + B\overline{w})(z)$ при $z \rightarrow t \in \Gamma$, $z \in D$, по некасательным путям имеет предел T^+ для почти всех $t \in \Gamma$.

Поскольку $T(Aw + B\overline{w})(z)$ в силу (1.15) сходится в среднем к $T(Aw + B\overline{w})(t)$, то поточечный предел T^+ при $z \in D$, $z \rightarrow t$ почти всюду будет такой же, откуда следует (2.31) при $r \rightarrow 1 - 0$.

Рассмотрим (2.31) при $r > 1$. В силу теоремы 1.4.7 $T(Aw + B\overline{w})(z)$, $|z| > 1$, есть конформный образ функции класса H_γ , $\gamma > 1$. Отсюда получаем, что $T(Aw + B\overline{w})(z)$ имеет предел T^- по некасательным путям при $z \rightarrow t \in \Gamma$, $|z| > 1$, для почти всех $t \in \Gamma$. Опять отметив, что предел в среднем в (1.15) почти всюду совпадает с поточечным T^- , получаем (2.31) при любом r . ▷

С учетом леммы 2.2.1 положим в равенстве (2.28) $z \in \Gamma$ и применим к обеим частям равенства оператор

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bullet}{z-\zeta} dz, \quad \zeta \in D.$$

Поскольку $w^+(z) \in L_p(\Gamma)$ (теорема 2.1.3), а

$$\int_{\Gamma} \frac{T(Aw + B\overline{w})(z)}{z-\zeta} dz = 0$$

при $\zeta \in D$ (см. [5, с. 69]), получим

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w^+(z)}{z-\zeta} dz. \quad (2.32)$$

Из (2.32) и (1.88)

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}w^+(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w^+(z)}{z-t} dz \in L_p(\Gamma). \quad (2.33)$$

Таким образом, по теореме В. И. Смирнова 1.8.7 $\Phi(z) \in H_p$. $\triangleright$

Имея (2.32), можно было бы сразу сослаться на теорему 1.8.8, но нам ниже понадобится соотношение (2.33).

Теорема 2.2.2. Уравнение $w(z) + T(Aw + B\bar{w})(z) = \Phi(z)$ при любом $\Phi(z) \in H_p$, $p > 1$, имеет единственное решение $w(z) \in H_p(A, B)$.

$\triangleleft$ По лемме 1.8.3 $\Phi \in L_m(\overline{D})$, $0 < m < 2p$. Существование и единственность решения $w \in L_m(\overline{D})$, $m \geq \frac{s}{s-1}$, следует из рассуждений, приведенных в [5, с. 167–168].

Покажем, что $w(z) \in H_p(A, B)$. То, что $w(z)$ — решение уравнения (1.53) — хорошо известный факт [5, с. 168–169]. Аналогично (2.29) получим $w(z) \in H_\gamma(A, B)$ для некоторого $\gamma > 1$. Отсюда, по теореме 2.1.3 существуют почти всюду на Γ предельные значения по некасательным путям $w^+(t) \in L_\gamma(\Gamma)$, и в силу теоремы 2.2.1 и теоремы 1.8.8 имеет место соотношение (2.33).

Обратимся теперь к представлению (1.54) для полученного решения $w(z) = \tilde{\Phi}(z)w_0(z)$, где $w_0(z) = e^{-T(A+B\frac{\bar{z}}{z})} \in C_\alpha(\overline{D})$, $\alpha = \frac{s-2}{s}$.

По теореме 2.1.1 $\tilde{\Phi}(z) \in H_\gamma$ и предельные значения $\tilde{\Phi}^+(t) \in L_\gamma(\Gamma)$. Подставим $w^+(t) = \tilde{\Phi}^+(t)w_0(t)$ в (2.33):

$$\begin{aligned} \Phi^+(t)w_0^{-1}(t) &= \frac{1}{2}\tilde{\Phi}^+(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\Phi}^+(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta + \\ &+ \frac{w_0^{-1}(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(w_0(\zeta) - w_0(t))\tilde{\Phi}^+(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Поскольку $\tilde{\Phi}^+(t)$ — предельные значения на Γ аналитической в D функции класса H_γ , $\gamma > 1$, то в силу формул Сохоцкого — Племяля (1.88)

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\Phi}^+(\zeta)}{\zeta-t} d\zeta = \tilde{\Phi}^+(t),$$

и соотношение (2.34) принимает следующий вид:

$$\Phi^+(t)w_0^{-1}(t) = \tilde{\Phi}^+(t) + \frac{w_0^{-1}(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(w_0(\zeta) - w_0(t))\tilde{\Phi}^+(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta. \quad (2.35)$$

Левая часть в (2.35) принадлежит классу $L_p(\Gamma)$, а интеграл в (2.35) имеет ядро со слабой особенностью (порядка $|\zeta - t|^{-2/s}$), т. е. действует из L_γ в L_β , где $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\gamma} - \frac{s-2}{s}$ (см., например, [63, с. 140]), поэтому из (2.35) получаем $\tilde{\Phi}^+(t) \in L_p(\Gamma)$, а следовательно, по теореме В. И. Смирнова 1.8.7 $\tilde{\Phi}(z) \in H_p$, и по теореме 2.1.1 $w(z) \in H_p(A, B)$. $\triangleright$ Далее нам уже не обойтись без нормы на $H_p(A, B)$.

Теорема 2.2.3. Множество $H_p(A, B)$, $p \geq 1$ ($H_\infty(A, B)$), с нормой

$$\|w\|_{H_p} = \left\{ \int_{\Gamma} |w(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (2.36)$$

$$\left(\|w\|_{H_\infty} = \sup_{z \in D} |w(z)| \right) \quad (2.37)$$

является действительным банаховым пространством. Здесь $w(e^{i\theta})$ — некасательные предельные значения $w(z)$ на Γ .

$\triangleleft$ То, что (2.36), (2.37) — нормы, очевидно. Пусть $\{w_n(z)\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность в норме (2.36). Эта последовательность сходится равномерно внутри D к решению $w(z)$ уравнения (1.53) (см. [5, с. 187]):

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{\varphi(\zeta)} d\bar{\zeta}, \quad (2.38)$$

где $\varphi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(z)$, $z \in \Gamma$; предел понимается в норме $L_p(\Gamma)$, $p \geq 1$.

Рассмотрим случай $p = 1$. Убедимся, что $w(z)$ из (2.38) принадлежит $H_1(A, B)$. Очевидно неравенство

$$\int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta}) - w_n(re^{i\theta})| d\theta + \int_0^{2\pi} |w_n(re^{i\theta})| d\theta,$$

для всякого r такого, что $0 < r < 1$.

Покажем, что последний интеграл ограничен равномерно по n и r . По формуле (1.54) $w_n = \Phi_n e^{\omega_n}$, $z \in D$. Последовательность $\{\omega_n(z)\}$ ограничена в $\overline{D}$ равномерно по n . Далее,

$$\int_0^{2\pi} |w_n(re^{i\theta})| d\theta \leq C_1 \int_0^{2\pi} |\Phi_n(re^{i\theta})| d\theta,$$

где константа C_1 от n и r не зависит. Интеграл $\int_0^{2\pi} |\Phi_n(re^{i\theta})| d\theta$ монотонно возрастает по r (см. лемму 1.7.1). В то же время в силу ограниченности фундаментальной последовательности

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_n(e^{i\theta})| d\theta \leq C_2 \int_0^{2\pi} |w_n(e^{i\theta})| d\theta \leq C_3,$$

где константы C_2 и C_3 от n не зависят.

Теперь осталось отметить, что в силу равномерной внутри D сходимости $\{w_n\} \rightarrow w$, и какое бы r , $0 < r < 1$, мы не зафиксировали,

$$\int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta}) - w_n(re^{i\theta})| d\theta \leq 1$$

для достаточно больших n . Это доказывает, что $w(z) \in H_1(A, B)$.

Отсюда, по теореме 2.1.7,

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) w(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{w(\zeta)} d\bar{\zeta}, \quad (2.39)$$

где $w(\zeta) \equiv w_+(\zeta)$ при $z \rightarrow \zeta \in \Gamma$, $z \in D$, по некасательным путям.

По обобщенным формулам Сохоцкого (2.17) при $z \rightarrow t \in \Gamma$ из (2.38) имеем

$$w_{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(t, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \Omega_2(t, \zeta) \overline{\varphi(\zeta)} d\bar{\zeta}, \quad (2.40)$$

где $w_+(t)$ — предельные некасательные значения при $z \rightarrow t$, $z \in D$, а $w_-(t)$ — при $z \notin \overline{D}$. Аналогично из (2.39)

$$w_{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} w(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(t, \zeta) w(\zeta) d\zeta - \Omega_2(t, \zeta) \overline{w(\zeta)} d\bar{\zeta}. \quad (2.41)$$

Вычитая (2.40) и (2.41), для разности $h = \varphi - w$ получим

$$\pm \frac{1}{2} h(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(t, \zeta) h(\zeta) d\zeta - \Omega_2(t, \zeta) \overline{h(\zeta)} d\bar{\zeta} = 0,$$

т. е. $h(t)$ есть граничное значение функции из $H_1(A, B)$ (см. следствие 2.1.1), т. е. $\varphi(t)$ — также граничное значение функции из $H_1(A, B)$, и $\varphi(t) = w(t)$ почти всюду на Γ . Таким образом, $H_1(A, B)$ с нормой (2.36) полно.

Если $p > 1$, то в (2.39) $w(z) \in H_p(A, B)$, поскольку $\varphi(t) = w(t) \in L_p(\Gamma)$ (теорема 2.1.9).

Для нормы (2.37) утверждение теоремы — факт известный (см. [5, с. 165]). $\triangleright$

Лемма 2.2.2. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $1 \leq p < \infty$, то

$$\|w\|_{L_m(\overline{D})} \leq \text{const} \|w\|_{H_p}, \quad (2.42)$$

где константа зависит от m и p , а от w не зависит.

$\triangleleft$ Доказательство непосредственно следует из (1.54) и (1.89). $\triangleright$

Подытожим и несколько углубим результаты теорем 2.2.1 и 2.2.2 в виде следующего утверждения.

Теорема 2.2.4. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $1 \leq p \leq \infty$, то имеет место соотношение

$$w(z) + T(Aw + B\overline{w})(z) = \Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t - z} dt, \quad (2.43)$$

и функция $\Phi(z) \in H_p$.

Если $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная функция класса H_p , $1 \leq p \leq \infty$, то соотношением (2.43) однозначно определяется решение $w(z)$ системы (1.53) класса $H_p(A, B)$, и формула (2.43) устанавливает (вещественный) линейный изоморфизм банаховых пространств $H_p(A, B)$ и H_p .

$\triangleleft$ В случае, когда $1 < p < \infty$ — это результаты теорем 2.2.1 и 2.2.2 (без утверждения об изоморфизме).

Рассмотрим случай $p = 1$. По теореме 2.1.5, если $w(z) \in H_1(A, B)$, то $w(z) \in L_m(\overline{D})$, $0 < m < 2$. Покажем, что в этом случае $Aw + B\overline{w} \in L_q(\overline{D})$ при некотором q , $1 < q \leq 2$ (достаточно установить это для Aw).

Используя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\begin{aligned} & \iint_D |A(z)w(z)|^q dx dy \leq \\ & \leq \left[\iint_D |A(z)|^{q\alpha} dx dy \right]^{\frac{1}{\alpha}} \left[\iint_D |w(z)|^{q\beta} dx dy \right]^{\frac{1}{\beta}}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Подберем α, β, q , так, чтобы $1 < q \leq 2$ и чтобы правая часть (2.44) была ограничена.

Положим $\alpha q = s$, тогда первый сомножитель в правой части неравенства (2.44) конечен. Далее будем иметь $q\beta = \frac{\alpha q}{\alpha-1} = \frac{sq}{s-q}$. Покажем, что можно считать $m > \frac{s}{s-1}$. Действительно, выражение, стоящее в правой части этого неравенства, монотонно убывает на промежутке $[2, +\infty)$ от 2 до 1, и если $s > 2$, то m можно выбрать так, что $\frac{s}{s-1} < m < 2$. Очевидно, зафиксировав при этом q достаточно близко к единице ($q > 1$), будем иметь $m \geq \frac{sq}{s-q} = \beta q$, и второй сомножитель в (2.44) при этом будет конечен.

При зафиксированном таким образом q , по теореме 1.4.7

$$T(Aw + B\overline{w}) \in L_\gamma(\Gamma_r) \quad (2.45)$$

для любых γ и r таких, что $1 < \gamma < \frac{q}{2-q}$, $0 < r \leq 1$. Поскольку $Aw + B\overline{w} \in L_q(\overline{D})$, из (1.53) $\partial_{\bar{z}}w \in L_q(\overline{D})$, и вследствие этого имеет место следующее равенство (см. [5, с. 50]):

$$w(z) + T(Aw + B\overline{w})(z) = \Phi(z), \quad (2.46)$$

где $\Phi(z)$ — голоморфная в D функция.

Из (2.46)

$$\int_{\Gamma_r} |\Phi(t)| dt \leq \int_{\Gamma_r} |w(t)| dt + \int_{\Gamma_r} |T(Aw + B\overline{w})(t)| dt.$$

Отсюда, а также из (2.45), леммы 2.2.2 и теоремы 1.4.7, используя неравенство Гёльдера, будем иметь $\Phi(z) \in H_1$ и

$$\|\Phi\|_{H_1} \leq \text{const} \|w\|_{H_1}, \quad (2.47)$$

где константа от Φ и w не зависит.

С учетом леммы 2.2.1 рассмотрим теперь (2.43) при $z \in \Gamma$. Представление функции $\Phi(z)$ в виде интеграла типа Коши в (2.43) получается применением к (2.43) оператора

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bullet}{z - \zeta} dz,$$

с учетом (2.45), а также теоремы Коши для функций класса H_1 и того, что интеграл $T(Aw + B\overline{w})(z)$ вне D есть голоморфная функция — конформный образ функции класса H_1 , равная нулю на бесконечности, а $\Phi(z) \in H_1$ представима своим интегралом Коши [7, с. 68].

Первая часть теоремы 2.2.4 при $p = 1$ доказана.

Поскольку можно считать, что $\frac{s}{s-1} < m < 2$, а $\Phi(z) \in L_m(\overline{D})$, существование и единственность решения $w \in L_m(\overline{D})$ уравнения (2.43) при известной правой части следует из рассуждений [5, с. 167–168]. То, что при этом $w(z)$ — решение уравнения (1.53) — хорошо известный факт [5, с. 168–169].

Далее, из

$$\int_{\Gamma_r} |w(t)| dt \leq \int_{\Gamma_r} |\Phi(t)| dt + \int_{\Gamma_r} |T(Aw + B\overline{w})(t)| dt,$$

(2.45), (1.12) и $\Phi(z) \in H_1$, применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\|w\|_{H_1} \leq \|\Phi\|_{H_1} + \text{const} \|w\|_{L_\lambda(\overline{D})}$$

при некотором λ , $1 < \lambda < 2$, где константа от Φ и w не зависит. Так как $\|w\|_{L_\lambda(\overline{D})} \leq \text{const} \|\Phi\|_{L_\lambda(\overline{D})}$ (см. (1.54)), где константа от Φ и w не зависит, то отсюда и из (2.42) имеем $w(z) \in H_1(A, B)$ и

$$\|w\|_{H_1} \leq \text{const} \|\Phi\|_{H_1}, \quad (2.48)$$

где константа от Φ и w не зависит.

Из (2.47) и (2.48) следует утверждение об изоморфизме при $p = 1$. Изоморфизм при $p > 1$ доказывается аналогично.

Рассмотрим случай $p = \infty$. Пусть $w(z) \in H_\infty(A, B)$, тогда имеет место (2.43), где $\Phi(z) \in H_p$ при любом $p \geq 1$. Но в этом случае $Aw + B\overline{w} \in L_s(\overline{D})$ и $T(Aw + B\overline{w})(z) \in C_\alpha(\overline{D})$, $\alpha = \frac{s-2}{s}$ (см. (1.11)), а следовательно, $\Phi(z) \in H_\infty$.

Поскольку (см. (1.10))

$$\|T(Aw + B\overline{w})\|_{L_\infty} \leq \text{const} \|Aw + B\overline{w}\|_{L_s(\overline{D})} \leq \text{const} \|w\|_{H_\infty},$$

где константа от w не зависит, из (2.43) получаем

$$\|\Phi\|_{H_\infty} \leq \text{const} \|w\|_{H_\infty}, \quad (2.49)$$

где константа от w и Φ не зависит.

Если задана $\Phi(z) \in H_\infty$, то из (2.43) однозначно определяется $w(z) \in H_p(A, B)$, при произвольном $p \geq 1$. В этом случае $Aw + B\overline{w} \in L_q(\overline{D})$ при некотором $q > 2$, а $T(Aw + B\overline{w})(z) \in C_\beta(\overline{D})$ при некотором β , $0 < \beta < 1$ (см. (1.11)), откуда получаем $w \in H_\infty(A, B)$.

Итак, с учетом (2.49), получаем, что отображение

$$w \in H_\infty(A, B) \rightarrow \Phi \in H_\infty$$

по формуле (2.43) биективно и непрерывно, а следовательно, по теореме Банаха является изоморфизмом. $\triangleright$

Теорема 2.2.5. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $1 \leq p \leq \infty$, то имеет место соотношение

$$w(z) + T_n(Aw + B\overline{w})(z) = \Phi(z), \quad (2.50)$$

и функция $\Phi(z) \in H_p$.

Если $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная функция класса H_p , то соотношением (2.50) однозначно определяется решение $w(z)$ системы (1.53) класса $H_p(A, B)$ и формула (2.50) устанавливает (вещественный) линейный изоморфизм банаховых пространств $H_p(A, B)$ и H_p .

$\triangleleft$ Доказательство этой теоремы почти дословно является повторением доказательства теоремы 2.2.4. $\triangleright$

Теорема 2.2.6. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $1 \leq p \leq \infty$, то имеет место соотношение

$$w(z) + T_{\kappa, n}(Aw + B\overline{w}) = \Phi(z), \quad (2.51)$$

где $\Phi(z) \in H_p$, и почти всюду на Γ

$$\text{Re} \{t^{-\kappa} w(t)\} = \text{Re} \{t^{-\kappa} \Phi(t)\}, \quad t \in \Gamma. \quad (2.52)$$

Если $\Phi(z) \in H_p$, то соотношением (2.51) однозначно определяется функция $w(z) \in H_p(A, B)$, удовлетворяющая на Γ условию (2.52),

и формула (2.51) устанавливает (вещественный) линейный изоморфизм банаховых пространств $H_p(A, B)$ и H_p .

◁ Доказательство проведем для оператора $T_{\varkappa}f$. В случае $T_{\varkappa, n}f$ рассуждения почти дословно повторяются.

Рассмотрим случай $p = 1$. Поскольку выражение

$$\iint_D \frac{z^{2\varkappa+1} \overline{f(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}z} d\xi d\eta \in H_1 \quad (2.53)$$

голоморфно при $|z| < 1$ (см. теорему 1.4.8 и доказательство леммы 2.2.1), то из (1.55) непосредственно следует (2.51), где $\Phi(z)$ — некоторая голоморфная в D функция. Покажем, что $\Phi(z) \in H_1$.

Из (2.51) имеем

$$\int_{\Gamma_r} |\Phi(t)| dt \leq \int_{\Gamma_r} |w(t)| dt + \int_{\Gamma_r} |T_{\varkappa}(Aw + B\overline{w})(t)| dt.$$

Функция $Aw + B\overline{w} \in L_q(\overline{D})$ при некотором q , $1 < q \leq 2$ (см. доказательство теоремы 2.2.4). При зафиксированном таким образом q , по теореме 1.4.7

$$T_{\varkappa}(Aw + B\overline{w}) \in L_{\gamma}(\Gamma_r) \quad (2.54)$$

для любых γ и r таких, что $1 < \gamma < \frac{q}{2-q}$, $0 < r \leq 1$.

Отсюда, а также из теоремы 1.4.7 и леммы 2.2.2, используя неравенство Гёльдера, будем иметь $\Phi(z) \in H_1$ и

$$\|\Phi\|_{H_1} \leq \text{const} \|w\|_{H_1}, \quad (2.55)$$

где константа от Φ и w не зависит.

Лемма 2.2.3. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{r \rightarrow 1} T_{\varkappa}(Aw + B\overline{w})(re^{i\theta}) = T_{\varkappa}(Aw + B\overline{w})(t) \quad (2.56)$$

для почти всех $t = e^{i\theta} \in \Gamma$

◁ Равенство (2.56) непосредственно следует из (2.31), (2.53) и теоремы 1.4.8. ▷

В силу (2.56) в (2.51) можно положить $z \in \Gamma$, после чего выполнение (2.52) становится очевидным.

Первая часть теоремы 2.2.6 при $p = 1$ доказана.

Если в (2.51) $\Phi \in H_1$, то по лемме 1.8.2 $\Phi(z) \in L_m(\overline{D})$, где m можно считать таким, что $\frac{s}{s-1} < m < 2$. В этом случае существование и единственность решения $w \in L_m(\overline{D})$ уравнения (2.51) при известной правой части следует из рассуждений [5, с. 293–295]. То, что при этом $w(z)$ — решение уравнения (2.51) — хорошо известный факт [5, с. 168–169].

Далее, из

$$\int_{\Gamma_r} |w(t)| dt \leq \int_{\Gamma_r} |\Phi(t)| dt + \int_{\Gamma_r} |T_{\kappa}(Aw + B\overline{w})(t)| dt,$$

(2.54), (1.12) и $\Phi(z) \in H_1$, применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\|w\|_{H_1} \leq \|\Phi\|_{H_1} + \text{const} \|w\|_{L_\lambda(\overline{D})}$$

при некотором λ , $1 < \lambda < 2$, где константа от Φ и w не зависит. Так как $\|w\|_{L_\lambda(\overline{D})} \leq \text{const} \|\Phi\|_{L_\lambda(\overline{D})}$, где константа от Φ и w не зависит (см. (1.54)), то отсюда и из (1.89) имеем $w(z) \in H_1(A, B)$ и

$$\|w\|_{H_1} \leq \text{const} \|\Phi\|_{H_1}, \quad (2.57)$$

где константа от Φ и w не зависит.

Из (2.55) и (2.57) следует утверждение об изоморфизме. Из леммы 2.2.3 вытекает выполнение (2.52). Случай $p = 1$ исчерпан.

Рассмотрим случай $1 < p \leq \infty$. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, то по уже доказанному имеют место соотношения (2.51), (2.52), где $\Phi(z) \in H_1$. Из (2.51) аналогично доказательству теоремы 2.2.1 получим

$$\int_{\Gamma_r} |\Phi(t)|^\gamma dt \leq 2^{\gamma-1} \left\{ \int_{\Gamma_r} |w(t)|^\gamma dt + \int_{\Gamma_r} |T_{\kappa}(Aw + B\overline{w})(t)|^\gamma dt \right\} \leq \tilde{C}_\gamma,$$

где $\gamma > 1$, и константа от r и w не зависит, т. е. $\Phi(z) \in H_\gamma$.

Поскольку при $t \in \Gamma$ $\{t^{-\kappa}w(t)\} \in L_p(\Gamma)$ (см. теорему 2.1.3), из $\Phi(z) \in H_\gamma$, (2.52) и теоремы 1.10.1 будем иметь $\Phi(z) \in H_p$ при $1 < p < \infty$. При $p = \infty$ $\Phi(z) \in H_\infty$ в силу теоремы 1.10.9.

Если теперь нам задана функция $\Phi(z) \in H_p$, то из (2.51) по доказанному получим $w(z) \in H_1(A, B)$, удовлетворяющую (2.52). Аналогично предыдущему, для некоторого $\gamma > 1$ получим $w(z) \in H_\gamma(A, B)$.

Воспользуемся представлением (1.54) для этого $w(z)$:

$$w(z) = \tilde{\Phi}(z)w_0(z), \quad \tilde{\Phi}(z) \in H_\gamma, \quad w_0(z) \in C_\alpha(\overline{D}), \quad \alpha = \frac{s-2}{s}.$$

В силу (2.52) функция $\tilde{\Phi}(z) \in H_\gamma$ удовлетворяет на Γ краевому условию

$$\operatorname{Re} \{t^{-\varkappa} \tilde{\Phi}(t)\} = \operatorname{Re} \{t^{-\varkappa} \Phi(t)[w_0(t)]^{-1}\} \in L_p(\Gamma),$$

откуда, аналогично предыдущему, $\tilde{\Phi}(z) \in H_p$ и $w(z) \in H_p(A, B)$.

Нам осталось доказать изоморфизм при $p > 1$, т. е. что линейный оператор $(I + T_\varkappa)w = w + T_\varkappa(Aw + B\overline{w}) : H_p(A, B) \rightarrow H_p$ непрерывен и имеет ограниченный обратный, т. е. из (2.51) следует

$$\|(I + T_\varkappa)w\|_{H_p} \leq \operatorname{const} \|w\|_{H_p}, \quad (2.58)$$

и

$$\|w\|_{H_p} \leq \operatorname{const} \|\Phi\|_{H_p}, \quad (2.59)$$

где константы от w не зависят.

Итак, пусть $w(z) \in H_p(A, B)$, $1 < p < \infty$. Пусть r такие, что $0 < r \leq 1$ и $\Gamma_r = \{z : |z| = r\}$. Очевидно неравенство

$$\begin{aligned} & \|w + T_\varkappa[Aw + B\overline{w}]\|_{L_p(\Gamma_r)} \leq \\ & \leq \|w\|_{L_p(\Gamma_r)} + \|T_\varkappa[Aw + B\overline{w}]\|_{L_p(\Gamma_r)}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Зафиксируем q , $\frac{1}{q} = \frac{1}{m} + \frac{1}{s}$, $2 < m < 2p$. Поскольку $s > 2$ и $m > 2$, то m можно зафиксировать таким, что $1 < q \leq 2$, причем аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 2.2.1, s ($s > 2$) можно считать сколь угодно близким к двум. За счет этого m можно выбирать сколь угодно близким к $2p$. Убедимся, что при этом можно добиться выполнения неравенства $\frac{q}{q-2} > p$. Это неравенство эквивалентно неравенству $\frac{1}{p} + 1 > 2(\frac{1}{s} + \frac{1}{m})$. Но при s ($s > 2$) близком к двум и m близком к $2p$ это неравенство становится очевидным.

Итак, зафиксируем q таким, чтобы $1 < q \leq 2$, $1 < p < \frac{q}{q-2}$. По теореме 1.4.7, из неравенства Гёльдера и (2.42) будем иметь

$$\|T_\varkappa[Aw + B\overline{w}]\|_{L_p(\Gamma_r)} \leq \operatorname{const} \|w\|_{L_m(\overline{D})} \leq \operatorname{const} \|w\|_{H_p}.$$

Сопоставляя полученную оценку и (2.60), получаем (2.58). Оценка (2.59) есть непосредственное следствие доказанной разрешимости (2.51) относительно w при заданной Φ , (2.58) и теоремы Банаха.

Оценки (2.58), (2.59) при $p = \infty$ выводятся аналогично тому, как это было проделано в доказательстве теоремы 2.2.4. $\triangleright$

2.3. Теорема двойственности для классов Харди обобщенных аналитических функций

Настоящий параграф посвящен обобщению теоремы 1.7.9 на обобщенные классы Харди $H_p(A, B)$, $1 < p < \infty$. Связь с классами ВМО в случае $p = 1$ как для голоморфных функций (теорема 1.9.2), так и, разумеется, для обобщенных аналитических функций — особый случай, поэтому его рассмотрение откладывается до главы 4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.1. Будем говорить, что $w(z) \in H_p^0(A, B)$, $1 \leq p \leq \infty$, если $\frac{w(z)}{z} \in H_p(A, B)$.

Везде далее при $t \in \Gamma$ запись $w(t) \in H_p(A, B)$ будет означать некасательные предельные значения на Γ функции $w(z) \in H_p(A, B)$ (то же для $H_p^0(A, B)$). В этом случае под $H_p(A, B)$ ($H_p^0(A, B)$) понимается банахово пространство соответствующих предельных значений на Γ .

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 2.3.1. При билинейном спаривании

$$(f, g) = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) d\theta, \quad t = e^{i\theta}, \quad (2.61)$$

пространством, сопряженным вещественному банахову пространству $H_p(A, B)$, $1 \leq p < \infty$, является фактор-пространство $L_q(\Gamma)/H_q^0(-A, -\overline{B})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (при $p = 1$ $q = \infty$), где $L_q(\Gamma)$ — вещественное банахово пространство комплексных функций на Γ , суммируемых с показателем q по мере $d\theta$. В формуле (2.61) $f \in H_p(A, B)$, $g \equiv g(t) + H_q^0(-A, -\overline{B})$ — класс смежности в фактор-пространстве $L_q(\Gamma)/H_q^0(-A, -\overline{B})$.

При $p > 1$ имеет место изоморфизм

$$L_q(\Gamma)/H_q^0(-A, -\overline{B}) \approx \overline{H_q(-A, -\overline{B})} \quad (2.62)$$

(справа пространство функций, комплексно сопряженных функциям из $H_q(-A, -\overline{B})$).

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2.3.1, получим некоторые вспомогательные результаты.

2.3.1. Обобщенная задача Шварца.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.2. Обобщенной задачей Шварца будем называть задачу нахождения в D решения уравнения (1.53) $w(z) \in H_p(A, B)$, чьи некасательные предельные значения $w(t)$ на Γ удовлетворяют краевому условию

$$\operatorname{Re} w(t) = \gamma(t) \in L_p(\Gamma), \quad 1 < p < \infty. \quad (2.63)$$

В случае $A(z) = B(z) \equiv 0$ имеем обычную задачу Шварца для голоморфных функций (см. лемму 1.10.2).

Положим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \gamma(t) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t}. \quad (2.64)$$

По лемме 1.10.2 функция $\Phi(z)$ в (2.64) принадлежит классу H_p и является голоморфным решением задачи Шварца (2.63), нормированным условием $\operatorname{Im} \Phi(0) = 0$, причем, по лемме 1.10.4,

$$\|\Phi\|_{H_p} \leq \operatorname{const} \|\gamma\|_{L_p(\Gamma)}, \quad (2.65)$$

где константа от γ не зависит.

Из теоремы 2.2.6 следует, что для $\Phi(z)$ из (2.64) уравнение (2.51) (при $\varkappa = 0$) имеет единственное решение

$$w(z) = (I + T_0)^{-1} \Phi(z) \equiv S\gamma(z), \quad (2.66)$$

причем в силу (2.59) и (2.65)

$$\|w\|_{H_p} \leq \operatorname{const} \|\gamma\|_{L_p(\Gamma)}, \quad (2.67)$$

где константа от γ не зависит, и $\operatorname{Re}\{w(t)\} = \gamma(t)$, $t \in \Gamma$.

Оператор S в (2.66), следуя [5, с. 310], будем называть *обобщенным оператором Шварца для уравнения (1.53)*. Из (2.67) имеем следующее утверждение.

Лемма 2.3.1. Обобщенный оператор Шварца $S : L_p(\Gamma) \rightarrow H_p(A, B)$, $1 < p < \infty$, непрерывен, т. е.

$$\|S\gamma\|_{H_p} \leq \operatorname{const} \|\gamma\|_{L_p(\Gamma)}, \quad (2.68)$$

где константа от γ не зависит.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.1. В силу теоремы 2.2.6 общее решение $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 1$, обобщенной задачи Шварца имеет вид

$$w(z) = S\gamma(z) + (I + T_0)^{-1}(iC), \quad (2.69)$$

где C — произвольная вещественная постоянная.

Уточним зависимость константы C в (2.69) от $w(z)$. Применяя к (2.69) $(I + T_0)$ и полагая $z = 0$, получим

$$w(0) - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A(\zeta)w(\zeta) + B(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\zeta} d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\gamma(t)}{t} dt + iC. \quad (2.70)$$

Вместе с тем имеет место следующее соотношение (см. (2.43)):

$$w(0) - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A(\zeta)w(\zeta) + B(\zeta)\overline{w(\zeta)}}{\zeta} d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t} dt. \quad (2.71)$$

Из (2.70) и (2.71) получаем

$$C = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Im}\{w(t)\}}{t} dt.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.3.2. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $1 < p < \infty$, то имеет место однозначное представление

$$w(z) = S\{\operatorname{Re} w\}(z) + (I + P_0)^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Im}\{w(t)\}}{t} dt \right\}.$$

Рассмотрим оператор

$$\tilde{T}_0 f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{z\overline{f(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}z} \right] d\xi d\eta.$$

Очевидно, для него имеет место утверждение, аналогичное лемме 2.2.3, откуда получаем, что при почти всех $t \in \Gamma$ имеет место соотношение $\operatorname{Im} \tilde{T}_0 f(t) = 0$. Дословным повторением рассуждений, приведенных выше и соответствующих рассуждений, касающихся

уравнения (2.51) из доказательства теоремы 2.2.6, устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 2.3.3. *Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $1 < p < \infty$, то имеет место соотношение*

$$w(z) + \tilde{T}_0(Aw + B\bar{w}) = \Phi(z), \quad (2.72)$$

где $\Phi(z) \in H_p$ и

$$\operatorname{Im}\{w(t)\} = \operatorname{Im}\{\Phi(t)\} \quad (2.73)$$

для почти всех $t \in \Gamma$.

Обратно, если $\Phi(z) \in H_p$, то соотношением (2.72) однозначно определяется функция $w(z) \in H_p(A, B)$, удовлетворяющая почти всюду на Γ условию (2.73).

Обозначим:

$$w(z) = \tilde{S}\gamma(z) = (I + \tilde{T}_0)^{-1}\Phi(z),$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \gamma(t) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t}, \quad \gamma(t) \in L_p(\Gamma), \quad p > 1.$$

Очевидно, $\operatorname{Im}\{\Phi(t)\} = \operatorname{Im}\{w(t)\} = \gamma(t)$ для почти всех $t \in \Gamma$, а также очевидна

Лемма 2.3.2. *Оператор $\tilde{S} : L_p(\Gamma) \rightarrow H_p(A, B)$, $1 < p < \infty$, непрерывен, т. е.*

$$\|\tilde{S}\gamma\|_{H_p} \leq \operatorname{const} \|\gamma\|_{L_p(\Gamma)},$$

где константа от $\gamma(t)$ не зависит.

Аналогично теореме 2.3.2 устанавливается следующее утверждение.

Теорема 2.3.4. *Общее решение краевой задачи $\operatorname{Im}\{w(t)\} = \gamma(t) \in L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, для уравнения (1.53) имеет вид*

$$w(z) = \tilde{S}\gamma(z) + (I + \tilde{T}_0)^{-1}\{C\},$$

где C — произвольная вещественная постоянная.

Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $1 < p < \infty$, то имеет место однозначное представление

$$w(z) = \tilde{S}\{\operatorname{Im} w\}(z) + (I + \tilde{T}_0)^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Re} w(t)}{t} dt \right\}.$$

2.3.2. Доказательство теоремы 2.3.1. Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2.3.1, рассмотрим следующую лемму.

Лемма 2.3.3. Пусть $1 \leq p < \infty$, $q = \frac{p}{p-1}$ (при $p = 1$ $q = \infty$), и пусть $g(t) \in L_q(\Gamma)$.

Для того чтобы функция $g(t)$ была некасательными предельными значениями на Γ функции $g(z) \in H_q^0(-A, -\overline{B})$, необходимо и достаточно, чтобы для некасательных предельных значений на Γ $f(t)$ произвольной функции $f(z) \in H_p(A, B)$ выполнялось соотношение

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} f(t) g(t) d\theta = 0, \quad t = e^{i\theta}. \quad (2.74)$$

Замечание 2.3.2. При $A = B \equiv 0$ получается вещественный вариант хорошо известного утверждения о голоморфных функциях (см. [7, с. 241]).

◁ **НЕОБХОДИМОСТЬ** — непосредственное следствие тождества Грина (2.14).

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть $X_k(z, t)$, $k = 1, 2$, — элементарные решения уравнения (1.53) (см. [5, с. 177–178]), связанные с обобщенными ядрами Коши (см. (1.60)) по формулам

$$\Omega_1(z, t) = X_1(z, t) + iX_2(z, t), \quad \Omega_2(z, t) = X_1(z, t) - iX_2(z, t).$$

Если зафиксировано z , $|z| > 1$, и $t \in \overline{D}$, то для любого p $X_k(z, t) \in H_p(A, B)$ как функция переменной t (см. лемму 1.6.4), и из формулы (2.74) имеем

$$\int_{\Gamma} X_k(z, t) g_*(t) dt - \overline{X_k(z, t)} \overline{g_*(t)} d\bar{t} = 0, \quad k = 1, 2,$$

где $g_*(t) = \frac{g(t)}{t}$. Умножив второе из этих соотношений ($k = 2$) на i и сложив с первым, получим

$$\int_{\Gamma} \Omega_1(z, t) g_*(t) dt - \overline{\Omega_2(z, t)} \overline{g_*(t)} d\bar{t} = 0.$$

Переходя здесь к пределу при $z \rightarrow \Gamma$, в силу обобщенных формул Сохоцкого (2.17) будем иметь

$$g_*(\zeta) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(\zeta, t) g_*(t) dt - \overline{\Omega_2(\zeta, t)} \overline{g_*(t)} d\bar{t} = 0,$$

откуда, в силу (2.23), $g(t) \in H_q^0(-A, -\overline{B})$. ▷

Лемма 2.3.3 и теорема Хана — Банаха дают

$$[H_p(A, B)]^* = L_q(\Gamma)/H_q^0(-A, -\overline{B}), \quad 1 \leq p < \infty,$$

где билинейное спаривание осуществляется по формуле (2.61).

Докажем изоморфизм (2.62). Для функций $\lambda = f + ig \in L_q(\Gamma)$ определим (вещественно) линейный оператор, положив

$$\begin{aligned} f_*(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}, \quad g_*(t) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{g(t)}{t} \right\} : \\ \Lambda(f + ig) &= f_* + ig_* - \\ &- i \operatorname{Im} \left\{ S(f_*) + (I + P_0)^{-1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{g_*}{t} dt \right] \right\} - \\ &- \operatorname{Re} \left\{ \tilde{S}(g_*) + (I + \tilde{P}_0)^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_*}{t} dt \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

операторы S и $\tilde{S}$ составлены для уравнения (2.13). В силу (2.68), (2.59), теоремы 2.3.2, леммы 2.3.2, теорем 2.3.3 и 2.3.4 имеем ограниченность оператора $\Lambda : L_q(\Gamma) \rightarrow L_q(\Gamma)$, $q > 1$. Из теорем 2.3.2 и 2.3.4 получаем, что ядро оператора Λ есть $H_q^0(-A, -\overline{B})$.

В силу (2.69) и теоремы 2.3.4 образ оператора Λ лежит в $\overline{H_q(-A, -\overline{B})} \equiv H$. Покажем, что образ оператора Λ есть все H .

Разложим пространство $L_q(\Gamma)$ в прямую сумму:

$$L_q(\Gamma) = L^r \oplus L^i \oplus L^c,$$

где

$$\begin{aligned} \lambda \in L^r &\Leftrightarrow \operatorname{Im} \lambda = 0, \quad \int_0^{2\pi} \lambda d\theta = 0, \\ \lambda \in L^i &\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad \int_0^{2\pi} \lambda d\theta = 0, \end{aligned}$$

L^c — пространство комплексных констант. Очевидно, достаточно рассматривать образ оператора $\Lambda_*(f_* + ig_*)$, определенного правой частью соотношения (2.75), $f_* + ig_* \in L_q(\Gamma)$.

В силу (2.69) в образ $\Lambda_*(L^r) \equiv H^r \subset H$ не входят функции $\overline{w(t)}$ такие, что $w(z) = (I + P_0)^{-1}(C' + iC)$, где C' и C — произвольные вещественные постоянные. Перепишем это соотношение в виде $w(z) = C'w_1(z) + Cw_2(z)$, где $\operatorname{Re}\{w_1(t)\} = 1$, $\operatorname{Re}\{w_2(t)\} = 0$, $t \in \Gamma$. Очевидно, функции из одномерных пространств H^{r1} и H^{r2} , порождаемых функциями $\overline{w_1(t)}$ и $\overline{w_2(t)}$ (по одной функции из каждого пространства) линейно независимы в вещественном смысле, и $H = H^r \oplus H^{r1} \oplus H^{r2}$ — прямая сумма.

Аналогично в $\Lambda_*(L^i) \equiv H^i \subset H$ не входят функции $\overline{w(t)}$ такие, что $w(z) = (I + \tilde{P}_0)^{-1}(K' + iK)$, где K' и K — произвольные вещественные постоянные, или $w(z) = K'\tilde{w}_1(z) + K\tilde{w}_2(z)$, где $\operatorname{Im}\{\tilde{w}_1(t)\} = 0$, $\operatorname{Im}\{\tilde{w}_2(t)\} = 1$, $t \in \Gamma$. $H = H^i \oplus H^{i1} \oplus H^{i2}$ — прямая сумма, где одномерные пространства H^{i1} и H^{i2} порождаются функциями $\overline{\tilde{w}_1(t)}$ и $\overline{\tilde{w}_2(t)}$.

Далее заметим, что в силу теоремы 2.3.2 $\int_0^{2\pi} \operatorname{Im}\{w_1(t)\} d\theta = 0$, а в силу теоремы 2.3.4 $\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\{\tilde{w}_2(t)\} d\theta = 0$, т. е. $\overline{w_1(t)} \in H^i$, а $\overline{\tilde{w}_2(t)} \in H^r$. Следовательно, $H^{r1} \subset H^i$, $H^{i2} \subset H^r$.

Вместе с тем $\Lambda_*(C') = \overline{C'w_1(t)} - C'\overline{\tilde{w}_1(t)}$, т. е. $H^{i1} \subset \Lambda_*(\operatorname{Re}L^c)$. Аналогично $\Lambda_*(iK) = -K\overline{\tilde{w}_2(t)} + K\overline{w_2(t)}$, т. е. $H^{r2} \subset \Lambda_*(i\operatorname{Im}L^c)$.

Сопоставляя все это, получаем, что

$$\Lambda_*(L_q(\Gamma)) = \Lambda(L_q(\Gamma)) = \overline{H_q(-A, -\overline{B})}.$$

Из того, что оператор Λ непрерывен и из теоремы об открытом отображении получаем (2.62).

Теорема 2.3.1 доказана полностью. $\triangleright$

2.4. Историко-библиографические замечания

Работы К. М. Мусаева и Т. Х. Гасановой (см. предисловие) обсуждим в параграфе 3.3.

Параграф 2.1 написан на основе статьи [24], параграф 2.2 — с использованием статей [24, 26, 31].

Параграф 2.3 написан на основе статьи [29].

ГЛАВА 3

КЛАССЫ СМИРНОВА ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

3.1. Определение. Базовые свойства

Пусть G — ограниченная односвязная область в комплексной z -плоскости со спрямляемой границей Γ , и $\{G_n\}$ — последовательность областей, замыкания которых лежат внутри G , границы Γ_n этих областей спрямляемы и сходятся к Γ в том смысле, что каждая точка $z \in G$ принадлежит всем G_n , начиная с некоторого номера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.1. Будем говорить, что решение системы (1.53) принадлежит классу $E_p(A, B)$, $p > 0$, если для некоторой постоянной $M_p(w) < \infty$, не зависящей от n , имеют место неравенства

$$\int_{\Gamma_n} |w(z)|^p |dz| \leq M_p(w), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

хотя бы для одной последовательности спрямляемых кривых $\{\Gamma_n\}$ с указанным выше свойством.

При $A = B \equiv 0$ имеем классический класс Смирнова (см. определение 1.8.2). Аналогично определяются классы Смирнова (в частности, Харди) для функций, обобщенных аналитических вне G .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.1. Сведение исследования свойств классов $E_p(A, B)$ к свойствам обобщенных классов Харди $H_p(A, B)$ посредством конформного отображения области G на единичный круг, как это делается в случае классических классов Смирнова E_p (лемма 1.8.1), не представляется возможным, поскольку при таком отображении, вообще говоря, сильно испортятся коэффициенты $A(z)$, $B(z)$ уравнения (1.53).

Теорема 3.1.1. Для того чтобы обобщенная аналитическая функция $w(z)$ принадлежала классу $E_p(A, B)$, $p > 0$, необходимо и достаточно, чтобы в представлении (1.54) $\Phi(z) \in E_p$.

◁ В силу предположения $A(z), B(z) \in L_s(\overline{G})$, $s > 2$, интеграл в представлении (1.54) для любого $w(z)$ принадлежит классу $C_\alpha(\overline{G})$, $\alpha = \frac{s-2}{s}$ (см. теорему 1.4.3), откуда непосредственно следует утверждение теоремы 3.1.1. ▷

Следствие 3.1.1. В определении 3.1.1 в качестве кривых Γ_n можно брать лишь образы окружностей $|\zeta| = r$, $0 \leq r < 1$, при конформном отображении единичного круга $|\zeta| < 1$ на область G .

◁ Доказательство непосредственно следует из теоремы 3.1.1 и соответствующего свойства для голоморфных функций класса E_p (см. [13, с. 91] и замечание после определения 1.8.2). ▷

Также непосредственным следствием формулы (1.54) и соответствующих свойств для голоморфных функций класса E_p (см. [13, с. 91–92]) являются следующие утверждения.

Теорема 3.1.2. Функция $w(z) \in E_p(A, B)$, $p > 0$, для почти всех точек t кривой Γ имеет предельные значения по некасательным путям $w_+(t) \in L_p(\Gamma)$. Если кривая Γ класса $\mathcal{C}$ и $w_+(t) \in L_q(\Gamma)$, $q > p$, то $w(z) \in E_q(A, B)$.

Теорема 3.1.3. Если функция $w(z) \in E_p(A, B)$, $p > 0$, на множестве $e \subset \Gamma$ положительной меры имеет нулевые некасательные предельные значения, то $w(z) \equiv 0$.

Из (1.54) и леммы 1.8.3 следует

Теорема 3.1.4. Если граница Γ области G — кривая Радона без точек заострения либо кривая Ляпунова, $w(z) \in E_p(A, B)$, $p > 0$, то $w(z) \in L_m(\overline{G})$, $0 < m < 2p$.

Теорема 3.1.5. Пусть $z = \omega(\zeta)$ — однолистное конформное отображение единичного круга $D_\zeta = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на G , Γ_r — образ окружности $|\zeta| = r < 1$. Если $w(z) \in E_p(A, B)$, $p > 0$, то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{\Gamma_r} |w(z)|^p |dz| = \int_{\Gamma} |w(z)|^p |dz|. \quad (3.2)$$

◁ Обозначим: $W(\zeta) \equiv W(re^{i\theta}) = w(\omega(\zeta)) \sqrt[p]{\omega'(\zeta)}$, $\zeta = re^{i\theta}$, $W_+(e^{i\theta}) = w_+(e^{i\theta}) \sqrt[p]{\omega'(e^{i\theta})}$. Покажем, что

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} |W(re^{i\theta}) - W_+(e^{i\theta})|^p d\theta = 0. \quad (3.3)$$

В силу теоремы 3.1.1 имеем представление $w(z) = \Phi(z)w_0(z)$, где $\Phi(z) \in E_p$, а $w_0(z) \in C_\alpha(\overline{G})$, $0 < \alpha < 1$. Отсюда получаем

$$W(\zeta) = \Psi(\zeta)W_0(\zeta), \quad (3.4)$$

где $\Psi(\zeta) = \Phi(\omega(\zeta)) \sqrt[p]{\omega'(\zeta)} \in H_p$ (лемма 1.8.1), $W_0(\zeta) = w_0(\omega(\zeta)) \in C(\overline{D})$, поскольку $z = \omega(\zeta) \in C(\overline{D})$ (см. [13, с. 88]).

Далее, из (3.4), используя неравенства (1.1) и (1.2), будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} |W(re^{i\theta}) - W_+(e^{i\theta})|^p d\theta \leq \\ & \leq C_p \sup_{\zeta \in D} |W_0(\zeta)|^p \int_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\theta}) - \Psi_+(e^{i\theta})|^p d\theta + \\ & + C_p \int_0^{2\pi} |\Psi_+(e^{i\theta})|^p |W_0(re^{i\theta}) - W_0(e^{i\theta})|^p d\theta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (3.5) стремится к нулю при $r \rightarrow 1$ в силу соответствующего свойства голоморфных функций класса H_p (теорема 1.7.4), а второе слагаемое — в силу равномерной в $\overline{D}$ непрерывности функции $W_0(\zeta)$. Таким образом, соотношение (3.3) доказано.

Далее, при $p \geq 1$ из неравенства Минковского имеем

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^{2\pi} |W(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} & \leq \left\{ \int_0^{2\pi} |W(re^{i\theta}) - W_+(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} + \\ & + \left\{ \int_0^{2\pi} |W_+(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

откуда, в силу (3.3),

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |W(re^{i\theta})|^p d\theta & = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \int_{\Gamma_r} |w(z)|^p |dz| \leq \\ & \leq \int_0^{2\pi} |W_+(e^{i\theta})|^p d\theta = \int_{\Gamma} |w_+(z)|^p |dz|. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Обоснование последнего равенства см. в [13, с. 87]. Вместе с тем из теоремы 2.1.3 и леммы Фату (см. [53, с. 133–134]) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |w_+(z)|^p |dz| &= \int_0^{2\pi} |W_+(e^{i\theta})|^p d\theta \leq \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |W(re^{i\theta})|^p d\theta = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{\Gamma_r} |w(z)|^p |dz|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Сопоставляя (3.6) и (1.1), получим (3.2) при $p \geq 1$.

Обратимся к случаю $0 < p < 1$. Обозначим через $b(\zeta)$ функцию Бляшке голоморфной функции $\Psi(\zeta)$ из представления (3.4) (см. теорему 1.7.1). Положим $\tilde{\Psi}(\zeta) = \frac{\Psi(\zeta)}{b(\zeta)}$. Имеют место соотношения

$$\tilde{\Psi}(\zeta) \in H_p, \quad \tilde{\Psi}(\zeta) \neq 0, \quad |\Psi(\zeta)| \leq |\tilde{\Psi}(\zeta)|, \quad |\Psi(e^{i\theta})| = |\tilde{\Psi}(e^{i\theta})|. \quad (3.8)$$

Рассмотрим функцию $\tilde{W}(\zeta) = \frac{W(\zeta)}{b(\zeta)} = \tilde{\Psi}(\zeta)W_0(\zeta)$, а также функцию $\tilde{w}(z) = \tilde{\Phi}(z)w_0(z)$, где $\tilde{\Phi}(z) = \tilde{\Psi}(\omega^{-1}(z)) / \sqrt{\omega'(\omega^{-1}(z))}$.

Поскольку $\tilde{\Psi} \in H_p$, то $\tilde{\Phi} \in E_p$ (лемма 1.8.1) и $\tilde{\Phi}(z) \neq 0$, $z \in G$. В силу последнего соотношения голоморфная в G функция $\Phi_1(z) = [\tilde{\Phi}(z)]^{p/2}$ однозначна и принадлежит классу E_2 , а также из (3.8) имеем

$$\begin{aligned} |w(z)| &\leq |\tilde{w}(z)|, \quad z \in G, \\ |w(z)| &= |\tilde{w}(z)|, \quad z \in \Gamma. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Несложным вычислением проверяется, что

$$\begin{aligned} [\tilde{w}(z)]^{\frac{p}{2}} &= w_1(z) = \\ &= \Phi_1(z) \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{A_1(t) + B_1(t) \frac{\overline{w_1(t)}}{w_1(t)}}{t - z} dx dy \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$t = x + iy,$$

где

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \frac{p}{2} A(z) \in L_s(\overline{G}), \\ B_1(z) &= \frac{p}{2} B(z) \left[\frac{\overline{w_1(z)}}{w_1(z)} \right]^{\frac{2}{p}-1} \frac{\overline{b(\omega^{-1}(z))}}{b(\omega^{-1}(z))} \in L_s(\overline{G}). \end{aligned}$$

Из (3.10) и теоремы 3.1.1 получаем, что $w_1(z) \in E_2(A_1, B_1)$. Отсюда, в силу (3.2), уже доказанного для $p \geq 1$,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\Gamma_r} |\tilde{w}(z)|^p |dz| = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{\Gamma_r} |w_1(z)|^2 |dz| = \int_{\Gamma} |\tilde{w}(z)|^p |dz|,$$

или, с учетом (3.9), получаем (3.6) при $0 < p < 1$. Применяя лемму Фату, получим (3.2) для любого $p > 0$. $\triangleright$

Лемма 3.1.1. *Если $w(z) \in E_p(A, B)$, $p \geq 1$, то имеет место соотношение (формула Грина)*

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} w(z) dz = \iint_G \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dx dy, \quad z = x + iy. \quad (3.11)$$

$\triangleleft$ Пусть как и выше $z = \omega(\zeta)$ — однолистное конформное отображение единичного круга $|\zeta| < 1$ на G , и Γ_r — образ окружности $|\zeta| = r < 1$, $G_r \subset G$ — область, ограниченная Γ_r . Поскольку $w(z) \in C_{\alpha}(\overline{G_r})$, $\alpha = \frac{s-2}{s}$ (см. (1.53)), имеет место соотношение (1.49):

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma_r} w(z) dz = \iint_{G_r} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dx dy, \quad z = x + iy. \quad (3.12)$$

Далее (см. [13, с. 87]),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_r} w(z) dz &= ir \int_0^{2\pi} w(\omega(re^{i\theta})) e^{i\theta} \omega'(re^{i\theta}) d\theta, \\ \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} w(z) dz &= i \int_0^{2\pi} w(\omega(e^{i\theta})) e^{i\theta} \omega'(e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из (3.13) имеем

$$\left| \int_{\Gamma} w(z) dz - \int_{\Gamma_r} w(z) dz \right| \leq J_1(r) + (1-r)J_2(r), \quad (3.14)$$

где

$$J_1(r) = \left| \int_0^{2\pi} \{w(\omega(e^{i\theta})) \omega'(e^{i\theta}) - w(\omega(re^{i\theta})) \omega'(re^{i\theta})\} e^{i\theta} d\theta \right|$$

и

$$J_2(r) = \left| \int_0^{2\pi} \{w(\omega(re^{i\theta})) \omega'(re^{i\theta})\} e^{i\theta} d\theta \right|.$$

Оценим правую часть (3.14) при $r \rightarrow 1 - 0$. Поскольку

$$J_2(r) = \left| \int_{\Gamma_r} w(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma_r} |w(z)| |dz| \leq M_1(w),$$

в силу $w \in E_1(A, B)$, $(1-r)J_2(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$.

Для $J_1(r)$ имеем

$$J_1(r) \leq \int_0^{2\pi} |w(\omega(e^{i\theta})) \omega'(e^{i\theta}) - w(\omega(re^{i\theta})) \omega'(re^{i\theta})| d\theta.$$

Правая часть этого неравенства в силу (3.3) стремится к нулю при $r \rightarrow 1$ (при $p = 1$).

Итак, $\int_{\Gamma_r} w(z) dz \rightarrow \int_{\Gamma} w(z) dz$, $r \rightarrow 1 - 0$. Вместе с тем в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега

$$\iint_{G_r} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dx dy \rightarrow \iint_G \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dx dy, \quad r \rightarrow 1 - 0.$$

Переходя к пределу в (3.12) при $r \rightarrow 1$ и учитывая два последних соотношения, получим (2.10). $\triangleright$

Лемма 3.1.2. Если $w(z) \in E_p(A, B)$, $p \geq 1$, а $w'(z) \in E_q(-A, -\overline{B})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ — решение уравнения (2.13), то имеет место соотношение (тождество Грина)

$$\operatorname{Im} \left(\int_{\Gamma} w(z) w'(z) dz \right) = 0. \quad (3.15)$$

$\triangleleft$ Дословно повторяет доказательство леммы 2.1.2, только с заменой обобщенных классов Харди на обобщенные классы Смирнова и с использованием (3.11) вместо (2.10). $\triangleright$

Теорема 3.1.6. Пусть $w(z) \in E_p(A, B)$, $p \geq 1$. Тогда имеет место представление (обобщенная формула Коши)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) w(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{w(\zeta)} d\bar{\zeta} = \begin{cases} w(z), & z \in G, \\ 0, & z \notin \overline{G}, \end{cases} \quad (3.16)$$

где при $\zeta \in \Gamma$ $w(\zeta) \equiv w_+(\zeta)$ — предельные значения на Γ $w(z)$ при $z \rightarrow \zeta \in \Gamma$ по некасательным путям,

$$\Omega_1(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - z} + O(|\zeta - z|^{-\frac{2}{s}}), \quad \Omega_2(z, \zeta) = O(|\zeta - z|^{-\frac{2}{s}}), \quad (3.17)$$

— обобщенные ядра Коши уравнения (1.53).

◁ Рассуждения дословно повторяют соответствующие построения из [5, с. 183–185], только вместо тождества Грина из [5, с. 180] следует использовать (3.15) (см. также теорему 2.1.7). ▷

Рассмотрим теперь *обобщенный интеграл типа Коши*:

$$w(z) = \mathcal{K}\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{\varphi(\zeta)} d\bar{\zeta}, \quad (3.18)$$

где $\varphi(\tau) \in L_p(\Gamma)$, $p \geq 1$. То, что $w(z)$ является в G решением уравнения (1.53) — факт известный [5, с. 187]. Установим для (3.18) обобщенные формулы Сохоцкого — Племеля.

Теорема 3.1.7. *Предположим, что Γ — кривая Радона без точек заострения или кривая Ляпунова. Если в формуле (3.18) $\varphi(\tau) \in L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, то обобщенный интеграл типа Коши (3.18) почти для каждого $t \in \Gamma$ имеет конечные некасательные предельные значения $w_+(t) \in L_p(\Gamma)$ при $z \rightarrow t$, $z \in G$, или $w_-(t) \in L_p(\Gamma)$ при $z \rightarrow t$, $z \in E \setminus \overline{G}$, и имеют место соотношения (обобщенные формулы Сохоцкого — Племеля)*

$$w_{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(t, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \Omega_2(t, \zeta) \overline{\varphi(\zeta)} d\bar{\zeta}. \quad (3.19)$$

◁ Дословно повторяет доказательство теоремы 2.1.8. ▷

Теорема 3.1.8. *Предположим, что Γ — кривая Радона без точек заострения или кривая Ляпунова. Пусть $\varphi(\tau) \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$. Тогда обобщенный интеграл типа Коши (3.18) принадлежит классу $E_p(A, B)$ и для его предельных значений $\mathcal{K}\varphi(t)$ на Γ имеет место неравенство*

$$\|\mathcal{K}\varphi(t)\|_{L_p(\Gamma)} \leq \text{const} \|\varphi(t)\|_{L_p(\Gamma)}, \quad (3.20)$$

где константа от φ не зависит.

◁ То, что $w(z)$ является решением уравнения (1.53) — факт известный [5, с. 198].

В силу (3.17) можем переписать (3.18) в виде

$$w(z) = \Phi(z) + \Psi(z), \quad (3.21)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \Psi(z) = \int_{\Gamma} \Omega_*(z, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta, \quad (3.22)$$

$$\Omega_*(z, \zeta) = O(|z - \zeta|^{-\frac{2}{s}}).$$

Поскольку $\varphi(\zeta) \in L_p(\Gamma)$, в (3.21) $\Phi(z) \in E_p$ (теорема 1.8.8).

В силу (3.22) имеем

$$\int_{\Gamma_r} |\Omega_*(z, \zeta)| |dz| \leq C_1 \int_{\Gamma_r} \frac{|dz|}{|z - \zeta|^{\frac{2}{s}}}, \quad (3.23)$$

где C_1 — константа, не зависящая от r и ζ , Γ_r — то же, что и в доказательстве леммы 3.1.1, т. е. образ окружности $|\tau| = r$ при конформном отображении $z = \omega(\tau)$ единичного круга $|\tau| < 1$ на G . Переходя в правом интеграле в (3.23) к переменной $\tau = \omega^{-1}(z)$, получаем, что он монотонно возрастает при $r \rightarrow 1 - 0$ (см. лемму 1.7.1), т. е.

$$\int_{\Gamma_r} |\Omega_*(z, \zeta)| |dz| \leq C_1 \int_{\Gamma} \frac{|dz|}{|z - \zeta|^{\frac{2}{s}}}. \quad (3.24)$$

Отсюда, с учетом леммы 1.4.3, будем иметь

$$\int_{\Gamma_r} |\Omega_*(z, \zeta)| |dz| \leq C_2, \quad (3.25)$$

где константа C_2 от r и $\zeta \in \Gamma$ не зависит.

Из (3.25) и (3.22) выводим

$$\int_{\Gamma_r} |\Psi(z)| |dz| \leq C_3 = C_3 (\|\varphi\|_{L_1(\Gamma)}) = \text{const} < \infty. \quad (3.26)$$

Таким образом, $w(z) \in E_1(A, B)$.

Непосредственно из формул Сохоцкого — Племяля (3.19) следует

$$\begin{aligned} w_{\pm}(t) &= \pm \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(t, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \Omega_2(t, \zeta) \overline{\varphi(\zeta)} d\bar{\zeta} = \\ &= \pm \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta + \int_{\Gamma} \Omega_*(t, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Последний интеграл в (3.27) в силу (3.22) имеет ядро со слабой особенностью (порядка $|\zeta - t|^{-2/s}$), т. е. непрерывно действует из $L_p(\Gamma)$ в $L_\beta(\Gamma)$, где $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} - \frac{s-2}{s}$ (см., например, [63, с. 140]), а сингулярный интеграл ограничен в $L_p(\Gamma)$ (см. [13, с. 139], а также теорему 1.8.8), откуда получаем $w_+(\zeta) \in L_p(\Gamma)$ и неравенство (3.20). По теореме 3.1.2 $w(z) \in E_p(A, B)$. $\triangleright$

Теорема 3.1.9. Пусть Γ — кривая Радона без точек заострения либо кривая Ляпунова. Для того чтобы функция $w(z) \in E_p(A, B)$, $p \geq 1$, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась обобщенным интегралом Коши

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) w(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{w(\zeta)} d\bar{\zeta}, \quad (3.28)$$

где $w(\zeta) \equiv w_+(\zeta) \in L_p(\Gamma)$ — предельные значения по некасательным путям функции $w(z)$ при $z \rightarrow \zeta \in \Gamma$.

$\triangleleft$ НЕОБХОДИМОСТЬ — это теорема 3.1.6.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Случай $p > 1$ рассмотрен в теореме 3.1.8. Рассмотрим случай $p = 1$. Аналогично (3.21) перепишем (3.28) в виде (3.21), где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \Psi(z) = \int_{\Gamma} \Omega_*(z, \zeta) w(\zeta) d\zeta. \quad (3.29)$$

Так как $\Omega_*(z, \zeta)$ — ядро со слабой особенностью при $z = \zeta$, интеграл $\Psi(t) = \int_{\Gamma} \Omega_*(t, \zeta) w(\zeta) d\zeta$ абсолютно сходится для почти всех $t \in \Gamma$ (см. [63, с. 141]), а отсюда получаем, что почти всюду на Γ существует предел по некасательным путям $\lim_{z \rightarrow t} \lim \Psi(z) = \Psi(t) \in L_\gamma(\Gamma)$, $1 < \gamma < \frac{s}{2}$ (см. лемму 1.4.4).

Поскольку по условию существует также аналогичный предел $\lim_{z \rightarrow t} w(z) = w(t)$, $t \in \Gamma$, то существует почти всюду на Γ предел по некасательным путям

$$\lim_{z \rightarrow t} \Phi(z) = \Phi_+(t) \equiv \Phi(t) \in L_1(\Gamma). \quad (3.30)$$

Перейдя к пределу в (3.21) при $z \rightarrow t$, получим почти всюду на Γ

$$w(t) = \Phi(t) + \Psi(t). \quad (3.31)$$

Далее, функция $\Psi(z)$ в (3.29) при $z \in E \setminus \overline{\Gamma}$, где E — комплексная плоскость, голоморфна [5, с. 193–194] и $\Psi(\infty) = 0$. Из оценки (3.26),

проведенной для Γ_r при $r > 1$ и близких к единице, получаем, что $\Psi(z)$ класса E_1 в $E \setminus \bar{G}$, откуда

$$\int_{\Gamma} \Psi(t) dt = 0. \quad (3.32)$$

Умножим (3.31) на $\frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t-z}$, $z \in G$, и проинтегрируем по Γ . В силу (3.32) будем иметь

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi(t)}{t-z} dt,$$

т. е. голоморфная функция $\Phi(z)$ имеет почти всюду на Γ предельные значения по некасательным путям класса $L_1(\Gamma)$ и представима интегралом Коши. Отсюда следует, что $\Phi(z) \in E_1$ (теорема 1.8.9). С учетом этого, из (3.31) и (3.26) получаем $w(z) \in E_1(A, B)$. $\triangleright$

Непосредственно из (3.27) и (3.28) получаем

Следствие 3.1.2. Для того чтобы функция $\varphi(\zeta) \in L_p(\Gamma)$, $p \geq 1$, была граничным значением функции $w(z) \in E_p(A, B)$, необходимо и достаточно, чтобы для почти всех $\zeta \in \Gamma$ выполнялось соотношение

$$\varphi(\zeta) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(\zeta, t) \varphi(t) dt - \Omega_2(\zeta, t) \overline{\varphi(t)} d\bar{t} = 0.$$

Теорема 3.1.10. Множество $E_p(A, B)$, $p \geq 1$, с нормой

$$\|w\|_{E_p} = \left\{ \int_{\Gamma} |w(t)|^p |dt| \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (3.33)$$

является действительным банаховым пространством. Здесь $w(t)$ — некасательные предельные значения $w(z)$ на Γ .

$\triangleleft$ Рассуждаем по аналогии с доказательством теоремы 2.2.3. То, что (3.33) — норма, очевидно. Пусть $\{w_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в норме (3.33). Эта последовательность сходится равномерно внутри G к решению $w(z)$ уравнения (1.53) [5, с. 187]:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{\varphi(\zeta)} d\bar{\zeta}, \quad (3.34)$$

где $\varphi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(z)$, $z \in \Gamma$, и предел понимается в норме $L_p(\Gamma)$, $p \geq 1$.

Рассмотрим случай $p = 1$. Убедимся, что $w(z)$ из (3.34) принадлежит $E_1(A, B)$.

Пусть $z = \omega(\zeta)$ — однолистное конформное отображение единичного круга $D_\zeta = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на G , Γ_r — образ окружности $|\zeta| = r < 1$.

Очевидно неравенство:

$$\int_{\Gamma_r} |w(t)| |dt| \leq \int_{\Gamma_r} |w(t) - w_n(t)| |dt| + \int_{\Gamma_r} |w_n(t)| |dt|, \quad 0 < r < 1.$$

Покажем, что последний интеграл ограничен равномерно по n и r . По формуле (1.54) $w_n = \Phi_n e^{\omega_n}$, $z \in G$. Последовательность $\{\omega_n(z)\}$ ограничена в $\overline{G}$ равномерно по n . Далее,

$$\int_{\Gamma_r} |w_n(t)| |dt| \leq C_1 \int_{\Gamma_r} |\Phi_n(t)| |dt|,$$

где константа C_1 от n и r не зависит. Интеграл

$$\int_{\Gamma_r} |\Phi_n(t)| |dt| = r \int_0^{2\pi} |\Phi_n(\omega(re^{i\theta})) \omega'(re^{i\theta})| d\theta$$

монотонно возрастает по r (см. лемму 1.7.1). В то же время, в силу ограниченности фундаментальной последовательности,

$$\int_{\Gamma} |\Phi_n(t)| |dt| \leq C_2 \int_{\Gamma} |w_n(t)| |dt| \leq C_3,$$

где константы C_2 и C_3 не зависят от n .

Теперь осталось отметить, что в силу равномерной внутри G сходимости $\{w_n\} \rightarrow w$, какое бы r ($0 < r < 1$) мы не зафиксировали,

$$\int_{\Gamma_r} |w(t) - w_n(t)| |dt| \leq 1$$

для достаточно больших n . Это доказывает, что $w(z) \in E_1(A, B)$.

Отсюда, по теореме 3.1.6,

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) w(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{w(\zeta)} d\bar{\zeta}, \quad (3.35)$$

где $w(\zeta) \equiv w_+(\zeta)$ при $z \rightarrow \zeta \in \Gamma$, $z \in G$, по некасательным путям.

По обобщенным формулам Сохоцкого (3.19) при $z \rightarrow t \in \Gamma$ из (3.34) имеем

$$w_{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(t, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \Omega_2(t, \zeta) \overline{\varphi(\zeta)} d\bar{\zeta}, \quad (3.36)$$

где $w_+(t)$ — предельные некасательные значения при $z \rightarrow t$, $z \in G$, а $w_-(t)$ — при $z \notin \overline{G}$. Аналогично из (3.35)

$$w_{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} w(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(t, \zeta) w(\zeta) d\zeta - \Omega_2(t, \zeta) \overline{w(\zeta)} d\bar{\zeta}. \quad (3.37)$$

Вычитая (3.36) и (3.37), для разности $h = \varphi - w$ получим

$$\pm \frac{1}{2} h(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(t, \zeta) h(\zeta) d\zeta - \Omega_2(t, \zeta) \overline{h(\zeta)} d\bar{\zeta} = 0,$$

т. е. $h(t)$ есть граничное значение функции из $E_1(A, B)$ (см. следствие 3.1.2), т. е. $\varphi(t)$ — также граничное значение функции из $E_1(A, B)$ и $\varphi(t) = w(t)$ почти всюду на Γ . Таким образом, $E_1(A, B)$ с нормой (3.33) полно.

Если $p > 1$, то в (3.35) $w(z) \in E_p(A, B)$, поскольку $\varphi(t) = w(t) \in L_p(\Gamma)$ (теорема 3.1.8). $\triangleright$

Аналогично лемме 2.2.2 имеет место

Лемма 3.1.3. Если $w(z) \in E_p(A, B)$, $1 \leq p < \infty$, то

$$\|w\|_{L_m(\overline{G})} \leq \text{const} \|w\|_{E_p}, \quad (3.38)$$

где константа зависит от G , m и p , а от w не зависит.

3.2. Представления второго рода

Нам потребуется следующее обобщение леммы 2.2.1.

Лемма 3.2.1. Если граница Γ области G — кривая Ляпунова либо кривая Радона без точек заострения, то при $z \rightarrow t \in \Gamma$ по некасательным путям, $z \in G$, имеет место соотношение

$$\lim_{z \rightarrow t} T(Aw + B\overline{w})(re^{i\theta}) = T(Aw + B\overline{w})(t), \quad (3.39)$$

для почти всех $t \in \Gamma$.

◁ Почти дословно повторяет доказательство леммы 2.1.3 с заменой ссылки на формулу (1.15) на ссылку на следствие 1.4.4. ▷

Теорема 3.2.1. *Если граница Γ области G есть кривая Ляпунова или кривая Радона без точек заострения, $w(z) \in E_p(A, B)$, $p > 1$, то имеет место соотношение*

$$w(z) + T_G(Aw + B\overline{w})(z) = \Phi(z), \quad (3.40)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t - z} dt \in E_p, \quad (3.41)$$

$w(t) \equiv w_+(t)$ — предельные значения по некасательным путям на Γ функции $w(z)$.

◁ Рассуждения почти дословно повторяют доказательство теоремы 2.2.1 с заменой H_p на E_p ; отличие также состоит в замене ссылок. Под Γ_r следует понимать образ окружности $|\zeta| = r$ при конформном отображении $\omega = \omega(\zeta)$ круга $|\zeta| < 1$ на G . Вместо теоремы 2.1.5 следует использовать теорему 3.1.4, вместо теоремы 1.7.5 — теорему 1.8.9, вместо леммы 2.2.1 — лемму 3.2.1. ▷

Теорема 3.2.2. *Если граница Γ области G есть кривая Ляпунова или кривая Радона без точек заострения, то уравнение (3.40) при любом $\Phi(z) \in E_p$, $p > 1$, имеет единственное решение $w(z) \in E_p(A, B)$.*

◁ Почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.2.2 с изменениями, описанными в доказательстве теоремы 3.2.1. ▷

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2.2.4, результаты теорем 3.2.1 и 3.2.2 уточняются следующим утверждением.

Теорема 3.2.3. *Если $w(z) \in E_p(A, B)$, $1 \leq p < \infty$, то имеют место соотношения (3.40), (3.41), и функция $\Phi(z) \in E_p$.*

Если $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная функция класса E_p , $1 \leq p < \infty$, то соотношением (3.40) однозначно определяется решение $w(z)$ системы (1.53) класса $E_p(A, B)$, и формула (3.40) устанавливает (вещественный) линейный изоморфизм банаховых пространств $E_p(A, B)$ и E_p .

Ясно, что при доказательстве теоремы 3.2.3 вместо леммы 2.2.2 нужно использовать лемму 3.1.3.

Обобщение на классы Смирнова $E_p(A, B)$ представлений второго рода, описанных в теореме 2.2.6, более естественно провести в контексте исследования краевой задачи Римана — Гильберта, поэтому мы его откладываем до главы 5.

3.3. Историко-библиографические замечания

Как уже отмечалось в предисловии, классы Смирнова для обобщенных аналитических функций были впервые введены К. М. Мусаевым в [47]. В дальнейшем им и Т. Х. Гасановой исследовались различные свойства этих классов в [48–51, 75]. Автор, первоначально не зная о работах К. М. Мусаева и Т. Х. Гасановой, предпринял самостоятельное исследование классов Харди и Смирнова обобщенных аналитических функций и краевых задач в них. Т. Х. Гасанова, увидев публикацию автора [28], любезно сообщила об их работах, прислав некоторые оттиски.

Параграф 3.1 написан на основе статьи [27].

Теорема 3.1.1, первое утверждение теоремы 3.1.2 и теорема 3.1.9 при $p = 1$ для области с гладкой границей впервые установлены в [47]. Теорема 3.1.5 впервые доказана в [49]. Формула (3.15) впервые доказана в [51].

В работе [50] рассмотрен случай более общей, чем у нас, границы Γ , а именно, кривая Γ предполагается удовлетворяющей условию

$$\sup_{\substack{z \in \mathbb{C}, \\ r > 0}} \frac{\text{mes} \{ \xi \in \Gamma : |\xi - z| \leq r \}}{r} < \infty,$$

где mes — линейная мера Лебега. Такие кривые называют *квазилипшицевыми*, а также *кривыми Карлесона*, *Альфorsa* либо *Салаева* (см., например, [55]). Для таких кривых в [50] доказаны теорема 3.1.8 и теорема 3.1.9 при дополнительном ограничении $p > \frac{s}{s-2}$. Требования на границу Γ , налагаемые в этой книге, ориентированы на постановку и исследование краевой задачи Римана — Гильберта.

Набросок доказательства обобщенных формул Сохоцкого для обобщенного интеграла типа Коши — Стильеса имеется в [75].

Теоремы 3.2.1 и 3.2.2 взяты из [27].

ГЛАВА 4

КЛАССЫ BMO ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

4.1. Определение. Базовые свойства

Рассмотрим в $D = \{z : |z| < 1\}$ каноническую эллиптическую систему (1.53), $\Gamma = \partial D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.1. Будем говорить, что решение $w(z)$ системы (1.53) принадлежит классу $BMO_f(A, B)$, если $w(z) \in H_2(A, B)$, и его некасательные предельные значения $w(t)$ на Γ принадлежат классу BMO_f .

При $A = B \equiv 0$ имеем голоморфный класс $BMOA_f$ (см. определение 1.9.2). Далее рассматриваются только классы $BMO(A, B)$ ($f \equiv 1$) и $LMO(A, B)$ ($f = \ln^{-1} \frac{1}{r}$) (см. замечания после определения 1.9.2). Следует также учитывать, что

$$LMO(A, B) \subset BMO(A, B). \quad (4.1)$$

4.1.1. Базовые свойства.

Теорема 4.1.1. Для того чтобы обобщенная аналитическая функция $w(z)$ принадлежала классу $BMO(A, B)$ ($LMO(A, B)$), необходимо и достаточно, чтобы в представлении (1.54) $\Phi \in BMOA$ ($LMOA$).

< В силу предположения $A(z), B(z) \in L_s(\overline{D})$, интеграл в представлении (1.54) для любого $w(z)$ принадлежит классу $C_\alpha(\overline{D})$, $\alpha = \frac{s-2}{s}$ (см. [5, с. 54]). Вместе с тем произведение функции на Γ класса BMO (LMO) на гёльдерову функцию принадлежит BMO (LMO) (см. [7, с. 268] и лемму 1.9.2), а $w \in H_2(A, B)$ эквивалентно $\Phi \in H_2$ (см. теорему 2.1.1), откуда непосредственно следует утверждение теоремы 4.1.1. >

Лемма 4.1.1. Если $w(z) \in BMO(A, B)$ ($LMO(A, B)$), то $w(z) \in H_p(A, B)$ для любого $p > 0$, и $w(z) \in L_m(\overline{D})$ для любого $m > 0$.

◁ Поскольку $\Phi \in BMOA$ принадлежит H_p , $p > 0$ (см. [7, с. 231]), то по теореме 2.1.1 $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 0$, и по теореме 2.1.5 $w(z) \in L_m(\overline{D})$ для любого $m > 0$. ▷

В силу леммы 4.1.1, если $w(z) \in BMO(A, B)$ ($LMO(A, B)$), то $w(z)$ обладает всеми свойствами, приведенными в п. 2.1, которые формулировать здесь отдельно не имеет смысла.

Теорема 4.1.2. Если $w(z) \in H_p(A, B)$, $p \geq 1$, или $w(z) \in BMO(A, B)$ — решение уравнения (1.53), $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t-z} dt$, то

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta) \Phi(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{\Phi(\zeta)} d\bar{\zeta} \equiv \mathcal{K} \Phi(z). \quad (4.2)$$

◁ Рассуждения достаточно провести в случае $w(z) \in H_p(A, B)$, поскольку если этот вариант теоремы доказан, то утверждение для $BMO(A, B)$ будет следовать из леммы 4.1.1. Для $H_p(A, B)$, $p \geq 1$, рассуждения дословно повторяют соответствующее построение из книги [5, с. 194], только вместо теоремы Коши следует использовать аналогичную теорему Риссов для H_1 (см. теорему 1.7.7). ▷

Замечание 4.1.1. При этом $\Phi(z) \in H_p$ (см. теорему 1.4.3) или, соответственно, $\Phi(z) \in BMOA$ (теорема 4.2.1). Обращение этой теоремы, аналогичное приведенному в лемме 1.6.5 для непрерывных в $\overline{D}$ $\Phi(z)$, получим ниже.

Отметим, что для функций класса $BMO(A, B)$ справедливы *формулы Грина* (поскольку они имеют место для функций из $H_p(A, B)$, $p \geq 1$, см. (2.10), (2.11)).

4.1.2. Введение нормы. Величина $\|\varphi\|_* \equiv \|\varphi\|_{*,1}$ из (1.9.1) равна нулю для констант, так что $\|\bullet\|_*$ есть норма в факторпространстве $BMO_0 \stackrel{\text{def}}{=} BMO/\mathbb{R}$ (или $BMO/\mathbb{C}$), превращающая его в действительное банахово пространство (см. [7, с. 224, 245]). Исходя из этих соображений, будем конструировать норму в пространствах $BMO(A, B)$ и $LMO(A, B)$.

Теорема 4.1.3. Множество $BMO(A, B)$ с нормой

$$\|w\|_{BMO} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |w(t)| |dt| + \|w\|_* \quad (4.3)$$

является действительным банаховым пространством.

Множество $LMO(A, B)$ с нормой

$$\|w\|_{LMO} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |w(t)| |dt| + \|w\|_l \quad (4.4)$$

является действительным банаховым пространством.

◁ То, что (4.3) — норма на $BMO(A, B)$, а (4.4) — норма на $LMO(A, B)$ — очевидно, причем пространства BMO и LMO функций на Γ с нормами (4.3) и (4.4) соответственно полны (см. теорему 1.9.1).

Аналогично (2.38) рассмотрим функцию $w(z) = \mathcal{K}w(z)$, являющуюся внутри D равномерным пределом последовательности $\{w_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, и где $w(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(t)$ в смысле нормы (4.3) или (4.4) на Γ .

Так как $w(t) \in BMO(LMO) \subset L_2(\Gamma)$, то $w(z) = \mathcal{K}w(z) \in H_2(A, B)$, и в соответствии с рассуждениями доказательства теоремы 2.2.3 $w(t)$ — некасательные предельные значения функции $w(z)$ на Γ . Итак, $\|w(z) - w_n(z)\|_{BMO} \rightarrow 0$ (соответственно, $\|w(z) - w_n(z)\|_{LMO} \rightarrow 0$). ▷

4.1.3. Оценки обобщенного интеграла типа Коши.

Лемма 4.1.2. Если $f(t) \in BMO$ на Γ , то для любого $p \geq 1$

$$\|f(t)\|_{L_p(\Gamma)} \leq \text{const} \|f(t)\|_{BMO}, \quad (4.5)$$

где константа от f не зависит.

◁ Воспользуемся представлением из теоремы 1.9.2:

$$f = \varphi + H\psi + \alpha,$$

где $\varphi, \psi \in L_{\infty}(\Gamma)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\|\varphi\|_{L_{\infty}(\Gamma)} \leq C\|f\|_*$, $\|\psi\|_{L_{\infty}(\Gamma)} \leq C\|f\|_*$. Из этого представления и из неравенств, приведенных в той же теореме, имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p(\Gamma)} &\leq \|\varphi\|_{L_p(\Gamma)} + \text{const} \|\psi\|_{L_p(\Gamma)} + [2\pi]^{\frac{1}{p}} |\alpha| \leq \\ &\leq \|\varphi\|_{L_{\infty}(\Gamma)} + \text{const} \|\psi\|_{L_{\infty}(\Gamma)} + [2\pi]^{\frac{1}{p}} |\alpha| \leq \\ &\leq [2\pi]^{\frac{1}{p}} |\alpha| + \text{const} \|f\|_*. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{L_1(\Gamma)} &= (2\pi)|\alpha| \leq \|f\|_{L_1(\Gamma)} + \|\varphi\|_{L_1(\Gamma)} + \|H\psi\|_{L_1(\Gamma)} \leq \\ &\leq \|f\|_{L_1(\Gamma)} + \|\varphi\|_{L_{\infty}(\Gamma)} + \text{const} \|\psi\|_{L_{\infty}(\Gamma)} \leq \|f\|_{L_1(\Gamma)} + \text{const} \|f\|_*. \end{aligned}$$

Сопоставляя последнюю оценку и (4.6), получим (4.5). ▷

Очевидно

Следствие 4.1.1. Если $f(t) \in LMO$ на Γ , то для любого $p \geq 1$

$$\|f(t)\|_{L_p(\Gamma)} \leq \text{const} \|f(t)\|_{LMO}, \quad (4.7)$$

где константа от f не зависит.

Теорема 4.1.4. Пусть $\varphi(t) \in BMO$ (LMO). Тогда

$$w(z) = \mathcal{K}\varphi(z) \in BMO(A, B) \quad (LMO(A, B))$$

и

$$\|w(z)\|_{BMO} \leq C_3 \|\varphi(t)\|_{BMO} \quad (\leq C_3 \|\varphi(t)\|_{LMO}), \quad (4.8)$$

где константа C_3 от φ не зависит.

◁ Проведем подробные рассуждения для $\varphi(t) \in BMO$. Случай $\varphi(t) \in LMO$ рассматривается аналогично. По теореме 2.1.9 $w(z) \in H_p(A, B)$ для любого $p > 1$. По обобщенным формулам Сохоцкого — Племелья (2.17) для некасательных предельных значений на Γ $w(t) \equiv [\mathcal{K}\varphi(t)]^+$ обобщенного интеграла типа Коши $\mathcal{K}\varphi(z)$ имеем

$$w(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau - \Omega_2(t, \tau) \overline{\varphi(\tau)} d\bar{\tau} \equiv \frac{1}{2}\varphi(t) + \mathcal{K}\varphi(t).$$

Далее будем оценивать слагаемые в правой части этого равенства:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}\varphi(z)\|_{BMO} &= \frac{1}{2\pi} \|w(t)\|_{L_1(\Gamma)} + \|w(t)\|_* \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L_1(\Gamma)} + \|\mathcal{K}\varphi(t)\|_{L_1(\Gamma)} \right\} + \frac{1}{2} \|\varphi\|_* + \|\mathcal{K}\varphi(t)\|_* = \\ &= \frac{1}{2} \|\varphi\|_{BMO} + \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{K}\varphi(t)\|_{L_1(\Gamma)} + \|\mathcal{K}\varphi(t)\|_*. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Во-первых, в силу ограниченности сингулярного интеграла в $L_p(\Gamma)$, $p > 1$ (см. [13, с. 139]), теоремы Харди — Литтлвуда — Соболева об интегралах со слабой особенностью (см. [63, с. 141]) и (1.59) имеем $\|\mathcal{K}\varphi(t)\|_{L_p(\Gamma)} \leq \|\varphi(t)\|_{L_p(\Gamma)}$. Отсюда и из (4.5)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}\varphi(t)\|_{L_1(\Gamma)} &\leq \|\mathcal{K}\varphi(t)\|_{L_2(\Gamma)} \leq \\ &\leq \text{const} \|\varphi(t)\|_{L_2(\Gamma)} \leq \text{const} \|\varphi(t)\|_{BMO}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Используя (1.59), получим

$$\|\mathcal{K}\varphi(t)\|_* \leq \text{const} \left\{ \left\| \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \right\|_* + \left\| \int_{\Gamma} \Omega_0(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau \right\|_* \right\}, \quad (4.11)$$

где

$$\Omega_0(t, \tau) = O(|\tau - t|^{-\frac{2}{s}}). \quad (4.12)$$

Для первого слагаемого в правой части (4.11) имеем (см. [7, с. 236])

$$\left\| \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \right\|_* \leq \text{const} \|\varphi(t)\|_*. \quad (4.13)$$

Далее, для интеграла $\mathcal{K}_0\varphi(t) = \int_{\Gamma} \Omega_0(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau$ имеем [7, с. 224]

$$\|\mathcal{K}_0\varphi(t)\|_* \leq \|\mathcal{K}_0\varphi(t)\|_{L_{\infty}(\Gamma)}. \quad (4.14)$$

В силу (4.12) при $p > \frac{s}{s-2}$ имеет место оценка [63, с. 318]

$$\|\mathcal{K}_0\varphi(t)\|_{L_{\infty}(\Gamma)} \leq \text{const} \|\varphi(t)\|_{L_p(\Gamma)}. \quad (4.15)$$

Из (4.14) (4.15) и (4.5) получаем

$$\|\mathcal{K}_0\varphi(t)\|_* \leq \text{const} \|\varphi(t)\|_{BMO}. \quad (4.16)$$

Из (4.9), (4.10), (4.11), (4.13) и (4.16) следует (4.8). $\triangleright$

4.2. Представления второго рода

Приведем обобщение представления (1.55) на классы $BMO(A, B)$ и $LMO(A, B)$.

Теорема 4.2.1. Если $w(z) \in BMO(A, B)$ ($LMO(A, B)$), то имеет место соотношение (1.55), где $\Phi(z) \in BMOA$ ($LMOA$).

Если $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная функция класса $BMOA$ ($LMOA$), то соотношением (1.55) однозначно определяется решение системы (1.53) $w(z)$ класса $BMO(A, B)$ ($LMO(A, B)$), и формула (1.55) устанавливает (вещественный) линейный изоморфизм банаховых пространств $BMO(A, B)$ ($LMO(A, B)$) и $BMOA$ ($LMOA$).

$\triangleleft$ По лемме 4.1.1 и теореме 2.2.4 представление (1.55) имеет место и $\Phi(z) \in H_p$ для любого $p > 1$. Поскольку по теореме 2.1.5

$w(z) \in L_p(\overline{D})$ для любого $p > 1$, то в силу неравенства Гёльдера $A(z)w(z) + B(z)\overline{w(z)} \in L_q(\overline{D})$ для любого q такого, что $2 < q < s$. Отсюда, интеграл в (1.55) принадлежит классу $C_\beta(\overline{D})$ при $0 < \beta < \frac{s-2}{s}$ (см. теорему 1.4.3), и получаем $\Phi(z) \in BMOA$ ($LMOA$).

Обратно, если $\Phi(z) \in BMOA$ ($LMOA$), то $\Phi(z) \in H_p$ для любого $p > 1$, и рассматриваемое уравнение имеет единственное решение $w(z) \in H_p(A, B)$ (см. теорему 1.4.3). Поскольку по теореме 2.1.5 $w(z) \in L_p(\overline{D})$ для любого $p > 1$, то так же, как и выше, $T(Aw + B\overline{w})(z) \in C_\beta(\overline{D})$, $0 < \beta < \frac{s-2}{s}$, откуда получаем $w(z) \in BMO(A, B)$ ($LMO(A, B)$).

Из ограниченности сингулярного интеграла типа Коши в BMO и LMO (см. теорему 1.9.3 и замечание 1.9.1) получаем

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{BMO} &\leq \text{const} \|w\|_{BMO}, \\ \|\Phi\|_{LMO} &\leq \text{const} \|w\|_{LMO}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где константы от w не зависят, а из теоремы 4.1.2 — противоположные оценки

$$\begin{aligned} \|w\|_{BMO} &\leq \text{const} \|\Phi\|_{BMO}, \\ \|w\|_{LMO} &\leq \text{const} \|\Phi\|_{LMO}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где константы не зависят от Φ . Утверждение об изоморфизме следует из (4.17) и (4.18). $\triangleright$

Очевидно

Следствие 4.2.1. Если $w(z) \in BMO(A, B)$ ($LMO(A, B)$), то

$$\begin{aligned} \|T(Aw + B\overline{w})(t)\|_{BMO} &\leq \text{const} \|w\|_{BMO}, \quad t \in \Gamma, \\ \|T(Aw + B\overline{w})(t)\|_{LMO} &\leq \text{const} \|w\|_{LMO}, \quad t \in \Gamma. \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $T(Aw + B\overline{w})(t)$ — предельные значения при $z \rightarrow t \in \Gamma$ по некасательным путям выражения $T(Aw + B\overline{w})(z)$, а константа от w не зависит.

Также очевидным следствием теоремы 4.2.1 является аналогичное утверждение для соотношения (2.50).

Теорема 4.2.2. Если $w(z) \in BMO(A, B)$ ($LMO(A, B)$), то имеет место соотношение

$$w(z) + T_n(Aw + B\overline{w})(z) = \Phi(z), \quad (4.20)$$

и функция $\Phi(z) \in BMOA$ ($LMOA$).

Если $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная функция класса $BMOA$ ($LMOA$), то соотношением (4.20) однозначно определяется решение $w(z)$ системы (1.53) класса $BMO(A, B)$ ($LMO(A, B)$), и формула (4.20) устанавливает (вещественный) линейный изоморфизм банаховых пространств $BMO(A, B)$ ($LMO(A, B)$) и $BMOA$ ($LMOA$).

Теорема 4.2.3. Если $w(z) \in BMO(A, B)$ ($LMO(A, B)$), то имеет место соотношение

$$w(z) + T_{\kappa, n}(Aw + B\overline{w}) = \Phi(z), \quad (4.21)$$

где $\Phi(z) \in BMOA$ ($LMOA$), и почти всюду на Γ

$$\operatorname{Re} \{t^{-\kappa} w(t)\} = \operatorname{Re} \{t^{-\kappa} \Phi(t)\}, \quad t \in \Gamma. \quad (4.22)$$

Если $\Phi(z) \in BMOA$ ($LMOA$), то соотношением (4.21) однозначно определяется функция $w(z) \in BMO(A, B)$ ($LMO(A, B)$), удовлетворяющая на Γ условию (4.22), и формула (4.21) устанавливает (вещественный) линейный изоморфизм банаховых пространств $BMO(A, B)$ ($LMO(A, B)$) и $BMOA$ ($LMOA$).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2.1. В главе 2 доказано, что теоремы 4.2.1–4.2.3 справедливы, если $LMO(A, B)$ и $LMOA$ заменить на $H_\infty(A, B)$ и H_∞ соответственно (см. теоремы 2.2.4–2.2.6).

В связи с этим в утверждениях теорем 4.2.1–4.2.3 пространства $LMO(A, B)$ и $LMOA$ можно заменить на $LMO(A, B) \cap H_\infty(A, B)$ и $LMOA \cap H_\infty$ соответственно.

◁ **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2.3.** В силу теоремы 2.2.6 и леммы 4.1.1 представление (4.21) имеет место, причем $\Phi(z) \in H_p$ для любого $p > 1$. Поскольку при этом $\operatorname{Re} \{t^{-\kappa} \Phi(t)\} \in BMO$ (LMO), $\Phi(z) \in BMOA$ ($LMOA$) (см. теорему 1.10.10). Поясним, что в этом случае в формуле (1.178) $\gamma \equiv 0$ и $S(c(s)) \in LMOA$ при $c(s) \in LMO$ (см. замечание 1.9.1). При этом из (1.9) и (4.19) получаем

$$\|\Phi\|_{BMO} \leq \operatorname{const} \|w\|_{BMO} \quad (\|\Phi\|_{LMO} \leq \operatorname{const} \|w\|_{LMO}), \quad (4.23)$$

где константы от w не зависят.

Пусть теперь задана произвольная голоморфная функция $\Phi(z) \in BMOA$ ($LMOA$). По теореме 2.2.6 уравнение (4.21) имеет единственное решение $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 1$, для которого выполнено (4.22).

Аналогично доказательству теоремы 4.2.1 из теоремы 1.4.6 получаем $T_{\kappa, n}(Aw + B\overline{w}) \in C_\nu(\overline{D})$ при некотором $\nu > 0$, откуда $w(z) \in BMO(A, B)$ ($LMO(A, B)$).

Утверждение об изоморфизме теперь получаем из (4.23) и теоремы Банаха. ▷

4.3. Двойственность $\operatorname{Re} H_1(A, B)$ и BMO

Теорема 4.3.1. *Пространство, сопряженное к $\operatorname{Re} H_1(A, B)$, — это BMO . Если F — вещественная 2π -периодическая локально интегрируемая функция, то следующие условия на F эквивалентны:*

1) предел

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} w(re^{i\theta}) F(\theta) d\theta \equiv L \operatorname{Re} w \quad (4.24)$$

существует для любой функции $w \in H_1(A, B)$, и L — линейный непрерывный функционал на $\operatorname{Re} H_1(A, B)$;

2) $F \in BMO$.

В случае, когда $F \in BMO$, норма функционала L , определенного в (4.24), эквивалентна норме $\|F\|_{BMO}$.

◁ Рассмотрим частный случай представления (4.21) при $n = 1$, $z_1 = 0$, $\varkappa = 0$:

$$w(z) - \frac{1}{\pi} \iint_D \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z \overline{f(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right] d\xi d\eta = \Phi(z), \quad (4.25)$$

где $f = Aw + B\overline{w} \in L_q(\overline{D})$, $1 < q < 2$ (см. доказательство теоремы 4.2.1).

Отметим, что в (4.25)

$$w(0) = \Phi(0), \quad \operatorname{Re} w(t) = \operatorname{Re} \Phi(t), \quad t \in \Gamma. \quad (4.26)$$

Преобразуем теперь выражение (4.24):

$$\begin{aligned} L \operatorname{Re} w &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} w(re^{i\theta}) F(\theta) d\theta = \\ &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{w(re^{i\theta}) - w(0)\} F(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} w(0) F(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Для дальнейших преобразований нам понадобится следующая

Лемма 4.3.1. *Если $w(z) \in H_1(A, B)$, $F(\theta) \in L_1(\Gamma)$, то*

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{T_{0,1}(Aw + B\overline{w})(re^{i\theta})\} F(\theta) d\theta = 0. \quad (4.28)$$

◁ Рассмотрим произвольную числовую последовательность $r_n \rightarrow 1 - 0$, $n \rightarrow \infty$. Очевидно, достаточно доказать (4.28) для такой последовательности. Будем пока считать $F(\theta) \in C(\Gamma)$. Из (4.25) имеем

$$\int_0^{2\pi} |T_{0,1}f(re^{i\theta})| d\theta \leq \text{const}, \quad (4.29)$$

где константа от r не зависит. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу (4.29) и непрерывности $F(\theta)$ найдется такое $\delta > 0$, что на любом множестве $e \subset [0, 2\pi]$ с мерой меньше δ

$$\left| \int_e \operatorname{Re} \{T_{0,1}f(r_n e^{i\theta})\} F(\theta) d\theta \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.30)$$

для любого n .

По теореме Егорова [53, с. 97] существует множество $E \subset [0, 2\pi]$ такое, что $\operatorname{mes} E \geq 2\pi - \delta$, и на E $\operatorname{Re} \{T_{0,1}f(r_n e^{i\theta})\} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, равномерно. Итак, выберем по $\varepsilon > 0$ такое E , чтобы $\operatorname{mes} E \geq 2\pi - \delta$, и такое N , чтобы для любого $n > N$

$$\left| \int_E \operatorname{Re} \{T_{0,1}f(r_n e^{i\theta})\} F(\theta) d\theta \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.31)$$

Из (4.30) и (4.31) получаем (4.28) для $F(\theta) \in C(\Gamma)$.

Рассмотрим теперь усреднение $F_\mu \in C^\infty(\Gamma)$ функции F [54, с. 39]. При $\mu \rightarrow +0$ $\|F - F_\mu\|_{L_1} \rightarrow 0$. В силу доказанного для $F \in C(\Gamma)$ имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{T_{0,1}f(r_n e^{i\theta})\} F(\theta) d\theta = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{T_{0,1}f(r_n e^{i\theta})\} \{F(\theta) - F_\mu(\theta)\} d\theta. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $T_{0,1}f(r_n e^{i\theta}) \in C(\Gamma)$ при любом r_n (см. [5, с. 54]), аналогично предыдущему по $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что на любом множестве e с $\operatorname{mes} e < \delta$ для любого n

будем иметь

$$\left| \int_e \operatorname{Re} \{T_{0,1}f(r_n e^{i\theta})\} \{F(\theta) - F_{\mu_n}(\theta)\} d\theta \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.33)$$

при подходящем $\mu_n > 0$.

Так же, по теореме Егорова найдется множество $E \subset [0, 2\pi]$, $\operatorname{mes} E \geq 2\pi - \delta$, на котором $T_{0,1}f(r_n e^{i\theta}) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, равномерно, откуда существует N такое, что для любого $n > N$

$$\left| \int_E \operatorname{Re} \{T_{0,1}f(r_n e^{i\theta})\} \{F(\theta) - F_{\mu_n}(\theta)\} d\theta \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.34)$$

Из (4.32), (4.33) и (4.34) получаем утверждение леммы. $\triangleright$

Продолжим преобразования, начатые в (4.27). С учетом (4.25), (4.26) и (4.28) будем иметь

$$\begin{aligned} L \operatorname{Re} w &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{ \Phi(re^{i\theta}) - \Phi(0) \} F(\theta) d\theta + \\ &+ \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} w(0) F(\theta) d\theta \equiv L^0 \operatorname{Re} \{ \Phi - \Phi(0) \} + L^1 \operatorname{Re} w. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Предел в правой части (4.35) существует для любого $\Phi \in H_1$ тогда и только тогда, когда $F \in \text{ВМО}$ (см. [43, с. 298]), и при этом L^0 — непрерывный линейный функционал на $\operatorname{Re} H_1^0$ (следах на Γ функций из H_1^0). Норма этого функционала эквивалентна $\|F\|_*$ [43, с. 298].

Так как в силу представления (4.25) $\operatorname{Re} H_1^0 \equiv \operatorname{Re} H_1^0(A, B)$ (эти множества совпадают), а нормы на этих множествах в силу теоремы 2.2.6 эквивалентны, то утверждение теоремы 4.3.1 непосредственно следует из (4.35). $\triangleright$

4.4. Историко-библиографические замечания

Параграф 4.1 основан на статье [28], параграф 4.2 — на статьях [31] и [32], параграф 4.3 — на статье [31].

Отметим, что в силу теорем 2.2.6 и 1.9.2, утверждение теоремы 4.3.1 вполне ожидаемо.

ГЛАВА 5

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА

5.1. Общая формулировка

Краевая задача Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функций состоит в нахождении в области G решений $w(z)$ системы (1.53):

$$\partial_{\bar{z}}w + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0,$$

удовлетворяющих на границе $\Gamma = \partial G$ краевому условию

$$\operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(t)} w(t) \} = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (5.1)$$

где $\lambda(t)$ и $g(t)$ — известные функции, называемые соответственно *коэффициентом* и *свободным членом краевого условия*. Понятно, чтобы задача имела смысл и перспективы решения, должны существовать в каком-либо смысле предельные значения $w(t)$ и на границу Γ , коэффициент и свободный член краевого условия необходимо наложить дополнительные требования. Эти требования могут определяться тем классом обобщенных аналитических функций, в котором разыскиваются решения задачи, но в то же время и наоборот, если свойства $\lambda(t)$ и $g(t)$ нам предписаны заранее, то класс обобщенных аналитических функций, в котором разыскиваются решения, может определяться этими свойствами.

Сходные в своей постановке задачи нахождения решений в классах Харди $H_p(A, B)$ (при $G = D$, где D — единичный круг) и Смирнова $E_p(A, B)$ рассмотрим отдельно, поскольку решение задачи, рассматриваемой нами в классах Харди $H_p(A, B)$, значительно более наглядно.

Для изучения рассматриваемой задачи в классах обобщенных аналитических функций, гёльдеровых в замкнутом единичном круге $\bar{D}$, и при $\lambda(t) = t^{\varkappa}$, где $\varkappa$ — целое число (такое краевое условие

мы, следуя И. Н. Векуа, будем называть *каноническим*) И. Н. Векуа был предложен метод сведения к соответствующей задаче для голоморфных функций (1.97). При этом использовались представления второго рода (1.56). Далее будем следовать этой схеме, обобщив представление (1.56) на произвольную ограниченную односвязную область G с достаточно общей границей Γ . Не ограничивая общности, можно предполагать, что $0 \in G$.

5.2. Задача Римана — Гильберта в классах Харди $H_p(A, B)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2.1. Функцию $w(z) \in H_p(A, B)$, $p > 1$, будем называть *решением краевой задачи Римана — Гильберта* для уравнения (1.53), если ее некасательные предельные значения на Γ $w^+(t) \equiv w(t)$ почти всюду на Γ удовлетворяют краевому условию (5.1), где $\lambda = \lambda(t)$ — ограниченная, измеримая по Лебегу на Γ комплексная функция, $g(t) \in L_p(\Gamma)$.

Так же, как и в п. 1.10.1, будем считать, что $0 < k_1 \leq |\lambda| \leq k_2$, где k_1 и k_2 — некоторые постоянные, и, разделив (5.1) на $|\lambda(t)|$, перейдем к эквивалентному краевому условию, в котором $|\lambda(t)| \equiv 1$:

$$\operatorname{Re} \{ e^{-i\omega(t)} w(t) \} = g(t), \quad \omega(t) = \arg \lambda(t) \quad (5.2)$$

(чтобы не загромождать обозначения, правую часть обозначаем так же, как и в (5.1)).

Так же, как и в п. 1.10.1, предполагаем, что

$$\omega(t(s)) \equiv \omega(s) = \omega_0(s) + \omega_2(s), \quad (5.3)$$

где $\omega_0(s)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$, $\omega_2(s)$ — измеримая на $[0, 2\pi]$ функция, удовлетворяющая условию

$$|\omega_2(s)| \leq \nu\pi, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2p}, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \quad (5.4)$$

Так же, как и в п. 1.10.1, индексом краевого условия (5.2) (а также (5.1)) будем называть число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}(\omega_0(2\pi) - \omega_0(0)), \quad (5.5)$$

которое, по-прежнему следуя [13, с. 215], будем предполагать целым.

5.2.1. Задача Римана — Гильберта при каноническом краевом условии. Рассмотрим краевую задачу (1.53), (5.1) в частном случае $\lambda(t) = t^\varkappa$:

$$\operatorname{Re} \{t^{-\varkappa} w(t)\} = g(t). \quad (5.6)$$

По теореме 2.2.6 соотношением (2.51) устанавливается линейное в вещественном смысле взаимнооднозначное соответствие между решениями краевой задачи Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функций (1.53), (5.6) класса $H_p(A, B)$, $1 < p < \infty$, и решениями краевой задачи Римана — Гильберта для голоморфных функций класса H_p

$$\operatorname{Re} \{t^{-\varkappa} \Phi(t)\} = g(t). \quad (5.7)$$

Учитывая теорему 1.10.1, получаем следующее утверждение.

Теорема 5.2.1. Если $\varkappa \geq 0$, то однородная задача (1.53), (5.6) (при $g(t) \equiv 0$) имеет точно $2\varkappa + 1$ линейно независимых в вещественном смысле решений класса $H_p(A, B)$, $p > 1$, а неоднородная задача разрешима в $H_p(A, B)$ при любой правой части краевого условия $g(t) \in L_p(\Gamma)$.

Перейдем к случаю $\varkappa < 0$. Рассмотрим краевую задачу, сопряженную однородной (при $g \equiv 0$) задаче (1.53), (5.6) (см. [5, с. 301]):

$$\partial_{\bar{z}} w' - Aw' - \overline{B} \overline{w}' = 0, \quad (5.8)$$

$$\operatorname{Re} \{t^\varkappa t'(s) w'(t)\} = 0, \quad (5.9)$$

где s — длина дуги на Γ , $t'(s) \equiv \frac{dt}{ds}$.

Опираясь на построения, проделанные выше для $\varkappa \geq 0$, дословно повторяя соответствующие рассуждения из [5, с. 298–301], получаем следующее утверждение.

Теорема 5.2.2. При $\varkappa < 0$ для существования (единственного) решения задачи (1.53), (5.6) класса $H_p(A, B)$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий на $g(t) \not\equiv 0$:

$$\int_{\Gamma} t^\varkappa w'_j(t) g(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, -2\varkappa - 1, \quad (5.10)$$

где $w'_j(z) \in W_s^1(\overline{D}) \subset C_\alpha(\overline{D})$, $\alpha = \frac{s-2}{s}$, — полный набор линейно независимых в вещественном смысле решений однородной сопряженной задачи (5.8), (5.9).

При $\varkappa < 0$ и $g \equiv 0$ однородная задача (1.53), (5.6) имеет только нулевое решение.

5.2.2. Случай неканонического краевого условия. Умножим краевое условие (5.2) на регуляризующий множитель коэффициента $\lambda(t) = e^{i\theta(t)}$ (см. лемму 1.10.1):

$$\operatorname{Re} \{ t^{-\varkappa} e^{-i\gamma(t)} w(t) \} = e^{\omega_1(t)} g(t),$$

здесь $\gamma(z) = \omega(z) + i\omega_1(z) = S(\theta - \varkappa \arg t)(z)$, S — оператор Шварца. Обозначим: $e^{\omega_1(t)} g(t) = g^*(t)$,

$$e^{i\gamma(z)} w(z) = w^*(z). \quad (5.11)$$

Функция $w^* = w^*(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar{z}} w^* + A(z) w^* + B^*(z) \bar{w}^* = 0, \quad (5.12)$$

где

$$B^*(z) = B(z) e^{-2i \operatorname{Re} \gamma(z)} \in L_s(\overline{D}), \quad (5.13)$$

и краевому условию

$$\operatorname{Re} \{ t^{-\varkappa} w^*(t) \} = g^*(t). \quad (5.14)$$

Поскольку $e^{\pm i\gamma(z)} \in H_{p'+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $p' = \frac{p-1}{p}$ (см. лемму 1.10.1), то $g^*(t) \in L_q(\Gamma)$ при некотором $q > 1$, а $w^*(z) \in H_q(A, B^*)$ при условии, что $w(z) \in H_p(A, B)$.

Для задачи (5.12), (5.14) с каноническим краевым условием справедливы теоремы 5.2.1 и 5.2.2. Пусть $w^*(z) \in H_q(A, B^*)$ — решение этой краевой задачи при $\varkappa \geq 0$. Аналогично [5, с. 296] представим $w^*(z)$ в виде

$$w^*(z) = \Phi^*(z) w_0(z), \quad (5.15)$$

где $\Phi^*(z)$ голоморфна в D ,

$$w_0(z) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \iint_D \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{z \overline{f(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta} z} \right] d\xi d\eta \right\} \in C_\alpha(\overline{D}), \quad \alpha = \frac{s-2}{s},$$

$$f(z) = \begin{cases} A(z) + B^*(z) \frac{\bar{w}^*}{w^*}, & w^*(z) \neq 0, \\ 0, & w^*(z) = 0. \end{cases} \quad (5.16)$$

Очевидно, $w^*(z) \in H_q(A, B^*)$ тогда и только тогда, когда $\Phi^*(z) \in H_q$. Также очевидно, что $\operatorname{Im} w_0(t) = 0$, $t \in \Gamma$.

Подставив (5.15) в (5.14), получим, что голоморфная функция $\Phi^*(z) \in H_q$ есть решение краевой задачи

$$\operatorname{Re} \{t^{-\varkappa} \Phi^*(t)\} = g^*(t) w_0^{-1}(t) \in L_q(\Gamma). \quad (5.17)$$

Отсюда (см. теорему 1.10.1)

$$\Phi^*(z) = z^{\varkappa} [S(g^* w_0^{-1}) + Q(z)], \quad (5.18)$$

где S — оператор Шварца, $Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{\varkappa} (c_k z^k - \bar{c}_k z^{-k})$, c_k — комплексные постоянные, β_0 — вещественная постоянная.

Умножим (5.15) на $e^{i\gamma(z)}$, где $e^{i\gamma(z)}$ — та же голоморфная в D функция, что и в (5.11), и обозначим:

$$w(z) = w^*(z) e^{i\gamma(z)}, \quad \Phi(z) = \Phi^*(z) e^{i\gamma(z)}. \quad (5.19)$$

При этом (5.15) перепишется в виде

$$w(z) = \Phi(z) w_0(z). \quad (5.20)$$

Вместе с тем в представлении для $w_0(z)$ с учетом (5.13) и (5.16) будем иметь

$$f(z) = \begin{cases} A(z) + B(z) \frac{\bar{w}}{w}, & w(z) \neq 0, \\ 0, & w(z) = 0, \end{cases}$$

откуда получаем, что $w(z)$ в (5.20) есть решение уравнения (1.53). Покажем, что $w(z) \in H_p(A, B)$ и что $w(z)$ удовлетворяет краевому условию (5.2). Для этого достаточно показать, что $\Phi(z)$ в (5.20) принадлежит классу H_p и удовлетворяет краевому условию

$$\operatorname{Re} \{e^{-i\theta(t)} \Phi(t)\} = g(t) w_0^{-1}(t), \quad t \in \Gamma. \quad (5.21)$$

Подставим выражение для $\Phi^*(z)$ из (5.19) в (5.18). Отсюда, в силу (1.124), получим, что $\Phi(z) \in H_p$ и удовлетворяет (5.21).

В случае $\varkappa < 0$ сделаем ту же замену (5.11) и так же придем к задаче (5.12), (5.14). Условие ее разрешимости:

$$\int_{\Gamma} t^{\varkappa} w_j'^*(t) g^*(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, -2\varkappa - 1, \quad (5.22)$$

где $w_j'^*(z)$ — полная система линейно независимых в вещественном смысле решений задачи

$$\partial_{\bar{z}} w'^* - A(z)w'^* - \overline{B^*(z)}\overline{w'}^* = 0,$$

$$\operatorname{Re} \{t^{\varkappa} t'(s) w'^*(t)\} = 0.$$

Обратная замена (5.19) так же приведет к решению $w(z) \in H_p(A, B)$ задачи (1.53), (5.2). Условие разрешимости (5.22) после замены $w'^*(z) = w'(z)e^{i\gamma(z)}$ перейдет в условие

$$\int_{\Gamma} e^{i\theta(t)} w'_j(t) g(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, -2\varkappa - 1, \quad (5.23)$$

где $w'_j(z) \in H_{p'}(A, B)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, — полная система линейно независимых в вещественном смысле решений задачи, сопряженной однородной задаче (1.53), (5.2):

$$\partial_{\bar{z}} w' - A(z)w' - \overline{B(z)}\overline{w'} = 0,$$

$$\operatorname{Re} \{e^{i\theta(t)} t'(s) w'(t)\} = 0. \quad (5.24)$$

(Сопряженная задача ставится как задача нахождения решений краевой задачи (5.24) из $H_{p'}(A, B)$.)

Итак, формулы (5.11) и (5.19) устанавливают линейное в вещественном смысле взаимно-однозначное соответствие между решениями класса $H_p(A, B)$ краевой задачи (1.53), (5.2) и решениями класса $H_q(A, B^*)$ краевой задачи с каноническим краевым условием (5.12), (5.14). Отсюда и из теорем 5.2.1, 5.2.2 получаем следующее утверждение.

Теорема 5.2.3. При $\varkappa \geq 0$ однородная краевая задача (1.53), (5.2) имеет $(2\varkappa + 1)$ линейно независимых в вещественном смысле решений класса $H_p(A, B)$, $p > 1$. Неоднородная задача всегда имеет решение класса $H_p(A, B)$.

При $\varkappa < 0$ для существования (единственного) решения краевой задачи (1.53), (5.2) класса $H_p(A, B)$ необходимо и достаточно выполнение условий (5.23). Однородная задача (1.53), (5.2) при $\varkappa < 0$ имеет только нулевое решение.

5.3. Задача Римана — Гильберта в классах Смирнова $E_p(A, B)$

Рассмотрим в комплексной плоскости E ограниченную односвязную область G со спрямляемой границей Γ . В дальнейшем в этом параграфе считаем Γ либо кривой Ляпунова либо кривой Радона без точек заострения.

В этом параграфе рассматривается *задача Римана — Гильберта (Гильберта)* в следующей постановке: найти в G решение $w = w(z)$ уравнения (1.53) $w(z) \in E_p(A, B)$, $p > 1$, предельные значения которого на Γ по некасательным направлениям почти всюду на Γ удовлетворяют краевому условию (5.1):

$$\operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(t)} w(t) \} = g(t),$$

где $t = t(s)$, $s \in [0, S]$, — аффикс точки, принадлежащей кривой Γ , $\lambda = \lambda(t)$ — комплекснозначная измеримая функция, определенная на Γ , удовлетворяющая условию $0 < k_0 \leq |\lambda(t)| \leq k_1 < \infty$, k_0, k_1 — вещественные постоянные, $g(t) = g(t(s)) \equiv g(s) \in L_p(\Gamma) \equiv L_p[0, S]$ — определенная на Γ вещественная функция. Разделив (5.1) на $|\lambda(t)|$, придем к эквивалентному краевому условию, в котором $|\lambda(t)| \equiv 1$:

$$\operatorname{Re} \{ e^{-i\omega(t)} w(t) \} = g(t), \quad (5.25)$$

где $\omega(t) = \arg \lambda(t)$. В дальнейшем везде считаем $|\lambda(t)| \equiv 1$.

Везде далее для функции f , определенной на Γ , будем использовать обозначения $f(t) \equiv f(t(s)) = f(s)$. Если $w(z) \in E_p(A, B)$, то под $w(t) = w^+(t)$, $t \in \Gamma$, будем понимать предельные значения на Γ по некасательным путям при $z \rightarrow t \in \Gamma$, $z \in G$, а под $w^-(t)$ — предельные значения на Γ по некасательным путям при $z \rightarrow t \in \Gamma$, $z \in E \setminus \overline{G}$.

Как и выше, следуя [5, с. 179], уравнением, *сопряженным* уравнению (1.53), будем называть комплексное уравнение

$$\partial_z w^* - A(z)w^*(z) - \overline{B(z)w^*(z)} = 0, \quad z \in G, \quad (5.26)$$

и, обобщая [5, с. 301], однородной задачей, *сопряженной* задаче (5.1), будем называть задачу отыскания в G решения уравнения (5.26) $w^*(z) \in E_{p'}(-A, -\overline{B})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, предельные значения которого на Γ по некасательным направлениям почти всюду на Γ удовлетворяют краевому условию

$$\operatorname{Re} \{ \lambda(t) t'(s) w^*(t) \} = 0. \quad (5.27)$$

Следуя [13, с. 190], как и в п. 1.10.1, предположим, что при выборе хотя бы одной точки начала отсчета $s = 0$ длины дуги s на Γ функция $\omega(s)$ удовлетворяет условию

$$\omega(s) = \tilde{\omega}_0(s) + \tilde{\omega}_1(s) + \omega_2(s), \quad (5.28)$$

где $\tilde{\omega}_0(s)$ — непрерывная функция в каждой точке сегмента $[0, S]$ (в крайних точках имеется в виду односторонняя непрерывность), $\tilde{\omega}_1(s)$ — функция ограниченной вариации на сегменте $[0, S]$, $\omega_2(s)$ — измеримая на $[0, S]$ функция, удовлетворяющая условию

$$|\omega_2(s)| \leq \nu\pi, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2p}, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \quad (5.29)$$

Не ограничивая общности, можем считать (см. [13, с. 190]), что $\omega(0) = \omega(S)$ и $\tilde{\omega}_1(s)$ непрерывна справа в точке $s = 0$. После этого (5.28) можно переписать в виде (см. [13, с. 190])

$$\omega(s) = \omega_0(s) + \omega_1(s) + \omega_2(s), \quad (5.30)$$

где $\omega_2(s)$ — прежняя, $\omega_1(s)$ — функция скачков $\tilde{\omega}_1(s)$, s_k — не более чем счетное множество точек разрыва $\tilde{\omega}_1(s)$:

$$\omega_1(0) = 0, \quad \omega_1(s) = \sum_{0 < s_k < s} h_k + [\tilde{\omega}_1(s) - \tilde{\omega}_1(s - 0)],$$

$$0 < s \leq S, \quad h_k = \tilde{\omega}_1(s_k + 0) - \tilde{\omega}_1(s_k - 0),$$

а непрерывная на $[0, S]$ функция $\omega_0(s)$ равна сумме $\tilde{\omega}_0(s) + [\tilde{\omega}_1(s) - \omega_1(s)]$.

Не более чем счетное множество точек скачков функции $\omega(s)$ обозначим через $\Xi = \{s_k\}$.

Если Γ — кривая Радона, т. е. функция $\theta(s)$ имеет ограниченную вариацию, то для $\theta(s)$ имеет место разложение, аналогичное (5.30) (при $\omega_2(s) \equiv 0$):

$$\theta(s) = \theta_0(s) + \theta_1(s), \quad (5.31)$$

где функция $\theta_0(s)$ непрерывна на $[0, S]$, а $\theta_1(s)$ — функция скачков (см. [13, с. 11–13]). Скачки функции $\theta(s)$ обозначим через f_n , а не более чем счетное множество точек скачков функции $\theta(s)$ — через $\Theta = \{s_n\}$.

Если Γ — кривая Ляпунова, то в (5.31) будем иметь

$$\theta_1(s) \equiv 0, \quad \theta(s) = \theta_0(s) \in C_\alpha.$$

Очевидно, что начало отсчета $s = 0$ длины дуги s можно считать не попадающим в $\Xi \cup \Theta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3.1. При исследовании краевой задачи (5.1) (или (5.25)) будем говорить, что выполнено условие **D**, если

- 1) когда Γ — кривая Ляпунова, и в (5.30) либо $\omega_1(s) \equiv 0$, либо $\omega_2(s) \equiv 0$;
- 2) когда Γ — кривая Радона без точек заострения, и в (5.30) $\omega_2(s) \equiv 0$.

5.3.1. Вспомогательные построения. Рассматриваемая задача для уравнения (1.53) сводится к соответствующей задаче для голоморфных функций, которая, в свою очередь, приводится к задаче в единичном круге (см. п. 1.10.1). Индекс задачи определяется через индекс последней задачи в единичном круге. Чтобы сформулировать определение индекса задачи, воспроизведем частично построения из п. 1.10.1.

Построим в единичном круге $D : |\zeta| < 1$ комплексной ζ -плоскости функцию

$$\Psi(\zeta) = \Phi(\varphi(\zeta))[\varphi'(\zeta)]^{\frac{1}{p}}, \quad (5.32)$$

где $\varphi = \varphi(\zeta)$ — однолистное конформное отображение единичного круга D на область G , а $\Phi(z)$ — голоморфная в G функция. Известно (лемма 1.8.1), что $\Phi(z) \in E_p$ в G тогда и только тогда, когда $\Psi(\zeta) \in H_p$ (H_p — класс Харди).

Поскольку при $|\zeta| < 1$ $\varphi'(\zeta) \neq 0$, а кривая Γ есть кривая класса $\mathcal{C}$, то при $|\zeta| < 1$ можно определить однозначную гармоническую функцию $\arg \varphi'(\zeta)$ всюду на окружности $C = \{\zeta : \zeta = e^{i\sigma}\}$, имеющую некасательные предельные значения, причем в каждой точке гладкости кривой Γ имеет место соотношение (теорема 1.8.2)

$$\arg \varphi'(e^{i\sigma}) = \theta(s(\sigma)) - \sigma - \frac{\pi}{2}. \quad (5.33)$$

В силу (5.32) краевая задача (5.25) для голоморфной функции $\Phi(z)$ будет эквивалентна краевой задаче

$$\operatorname{Re} \{e^{-i\nu(\sigma)} \Psi(\zeta)\} = g(t(\zeta)) |\varphi'(e^{i\sigma})|^{\frac{1}{p}}, \quad \zeta = e^{i\sigma}, \quad (5.34)$$

где, с учетом (5.33),

$$\nu(\sigma) = \omega(s(\sigma)) + \frac{1}{p} \left(\theta(s(\sigma)) - \sigma - \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.35)$$

и правая часть (5.34) принадлежит классу $L_p(C)$.

Индекс краевого условия. Если в (5.30) $\omega_1(s) \equiv 0$, Γ — кривая Ляпунова, и имеет место (5.29), то индексом краевого условия (5.25) (а также (5.1)) будем называть число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}(\omega_0(S) - \omega_0(0)), \quad (5.36)$$

которое, следуя [13, с. 215], будем предполагать целым. Будем использовать обозначение $\text{ind}_\Gamma \lambda(t) = \varkappa$, где $\lambda(t)$ — коэффициент краевого условия (5.1).

Пусть теперь в (5.30) $\omega_2(s) \equiv 0$, и Γ — кривая Радона без точек заострения. Так как функция $s(\sigma)$ и обратная к ней абсолютно непрерывны (см. [13, с. 87]), функция $\nu(\sigma)$ имеет ограниченную вариацию и для нее имеет место разложение, аналогичное (5.30), (5.31):

$$\nu(\sigma) = \nu_0(\sigma) + \nu_1(\sigma), \quad (5.37)$$

где функция скачков $\nu_1(\sigma)$ имеет вид:

$$\nu_1(\sigma) = \omega_1(s(\sigma)) + \frac{1}{p} \theta_1(s(\sigma)). \quad (5.38)$$

Очевидно, что не более чем счетное множество точек скачков функции $\nu(\sigma)$ есть образ множества $\Xi \cup \Theta$ при отображении $\sigma(s) : [0, S] \rightarrow [0, 2\pi]$. Занумеруем как-либо это множество и обозначим его через $\{\sigma_k\}$. Скачки функции $\nu(\sigma)$ в точках $\{\sigma_k\}$ очевидно равны

$$n_k = h_k + \frac{1}{p} f_k, \quad (5.39)$$

где h_k и f_k — скачки функций $\omega(s)$ и $\theta(s)$ в прообразе точки σ_k на $[0, S]$, причем в точке непрерывности одной из этих функций ее скачок считаем нулевым.

Обозначим через n_k^+ и n_k^- положительные скачки и модули отрицательных скачков из (5.39) соответственно, а точки этих скачков — через σ_k^+ и σ_k^- соответственно. Упорядочим их так, чтобы последовательности $\{n_k^+\}$ и $\{n_k^-\}$ были убывающими. Сопряженные показатели p и p' ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) будем считать такими, что

$$\frac{n_k^-}{2\pi} \neq \frac{1}{2p'}, \quad \frac{n_k^+}{2\pi} \neq \frac{1}{2p},$$

и, следуя [13, с. 209], обозначим через $\varkappa_1^{(p)}$ такое число, что

$$\frac{n_k^-}{2\pi} > \frac{1}{2p}, \quad k = 1, 2, \dots, \varkappa_1^{(p)}; \quad \frac{n_k^-}{2\pi} < \frac{1}{2p}, \quad k > \varkappa_1^{(p)}; \quad (5.40)$$

а через $\varkappa_2^{(p)}$ — такое, что

$$\frac{n_k^+}{2\pi} > \frac{1}{2p}, \quad k = 1, 2, \dots, \varkappa_2^{(p)}; \quad \frac{n_k^+}{2\pi} < \frac{1}{2p}, \quad k > \varkappa_2^{(p)}. \quad (5.41)$$

Далее, обозначим: $n_0 = n_0^{(1)} - n_0^{(0)}$, где $n_0^{(0)} = \nu_0(2\pi) - \nu_0(0)$, $n_0^{(1)} = \nu_1(0+0) - \nu_1(2\pi-0)$, и, следуя [13, с. 206], определим целое число $\varkappa_0$, исходя из условий

$$2n_0 = 2\pi \varkappa_0 + n_0^+, \quad 0 \leq n_0^+ < 2\pi. \quad (5.42)$$

Индексом краевого условия (5.25) в этом случае будем называть число

$$\text{ind}_\Gamma \lambda(t) = \varkappa = \varkappa_1^{(p)} - \varkappa_2^{(p)} - \varkappa_0 \quad (5.43)$$

при условии, что решение краевой задачи ищется в классе $E_p(A, B)$ (т. е. индекс в этом случае зависит от класса, которому принадлежат решения).

Если в (5.30) $\omega_2(s) \equiv 0$ и Γ — кривая Ляпунова, то определение индекса аналогично с тем упрощением, что в (5.38) $\theta_1(s(\sigma)) \equiv 0$ и в (5.39) $f_k = 0$ для любого k , т. е. множество Θ пусто.

Везде далее при предположении, что $\omega_1(s) \equiv 0$ считаем, что Γ — кривая Ляпунова, а при предположении, что $\omega_2(s) \equiv 0$ считаем, что Γ — либо кривая Радона без точек заострения, либо кривая Ляпунова.

Индекс сопряженного краевого условия. Выразим индекс краевого условия (5.27), который будем помечать звездочкой (как и все величины, относящиеся к сопряженному краевому условию), через индекс краевого условия (5.25) ($\varkappa$ или $\varkappa^{(p)}$).

Если Γ — кривая Ляпунова и $\omega_1(s) \equiv 0$, то очевидно, что

$$\varkappa^* = -\varkappa - 1. \quad (5.44)$$

Пусть теперь $\omega_2(s) \equiv 0$, и Γ — кривая Ляпунова либо кривая Радона без точек заострения.

Аналогично (5.34) преобразуем краевое условие (5.27) к виду

$$\operatorname{Re} \{ e^{-i\nu^*(\sigma)} \Psi^*(\zeta) \} = 0, \quad \zeta = e^{i\sigma}, \quad (5.45)$$

где, с учетом (5.33) и того, что решение сопряженной задачи ищется в классе $E_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

$$\nu^*(\sigma) = -\omega(s(\sigma)) + \frac{1}{p'} \left(\theta(s(\sigma)) - \sigma - \frac{\pi}{2} \right) - \theta(s(\sigma)).$$

Легко видеть, что

$$\nu^*(\sigma) = - \left[\omega(s(\sigma)) + \frac{1}{p} (\theta(s(\sigma)) - \sigma) + \sigma \right] - \frac{\pi}{2p'}. \quad (5.46)$$

С учетом (5.46), (5.40) и (5.41) получаем, что $\mathcal{K}_1^* = \mathcal{K}_2^{(p)}$, $\mathcal{K}_2^* = \mathcal{K}_1^{(p)}$.

Если в (5.42) $n_0^+ = 0$, то из (5.46) также очевидно соотношение $-\mathcal{K}_0^* = \mathcal{K}_0 - 2$, откуда

$$\mathcal{K}^* = -\mathcal{K} - 2. \quad (5.47)$$

В общем случае (5.47) следует из совпадения количества условий разрешимости неоднородной задачи (5.34), равное числу решений однородной задачи (5.45) $(\mathcal{K}^* + 1)$, с $-\mathcal{K}^{(p)} - 1$ (при $\mathcal{K}^* \geq -1$ см. теорему 1.10.2). Если же $\mathcal{K}^* < -1$, то индексы $\mathcal{K}^*$ и $\mathcal{K}^{(p)}$ меняются местами. Поскольку при $n_0^+ \neq 0$ формула (5.47) не имеет места, то можно сделать вывод, что при наших предположениях всегда $n_0^+ = 0$.

5.3.2. Формулировка основных результатов.

Теорема 5.3.1. Если в (5.30) $\omega_1(s) \equiv 0$, и Γ — кривая Ляпунова, то при $\mathcal{K} \geq 0$, где $\mathcal{K}$ определено в (5.36), однородная задача (1.53), (5.25) (при $g(t) \equiv 0$) имеет точно $2\mathcal{K} + 1$ линейно независимых в вещественном смысле решений класса $E_p(A, B)$, $p > 1$, а неоднородная задача разрешима в $E_p(A, B)$ при любой правой части краевого условия $g(t) \in L_p(\Gamma)$.

Если $\mathcal{K} < 0$, то однородная задача (1.53), (5.25) не имеет в $E_p(A, B)$ ненулевого решения, а неоднородная задача разрешима в $E_p(A, B)$ единственным образом тогда и только тогда, когда выполнены $-2\mathcal{K} - 1$ (вещественных) условий на свободный член $g(t)$

краевого условия (5.25):

$$\int_{\Gamma} g(s) e^{i\omega(s)} w_k^*(t) t'(s) ds = 0, \quad (5.48)$$

где $w_k^*(t) \in E_{p'+\varepsilon}(-A, -\overline{B})$, $E_{p+\varepsilon}(-A, -\overline{B})$, $k = 1, \dots, -2\kappa - 1$, $\varepsilon > 0$ мало, — полная система линейно независимых в вещественном смысле решений сопряженной к (1.53), (5.25) краевой задачи (5.26), (5.27), имеющей индекс $\kappa^* = -\kappa - 1 \geq 0$.

Теорема 5.3.2. Если в (5.30) $\omega_2(s) \equiv 0$, а Γ — кривая Ляпунова или кривая Радона без точек заострения, то при $\kappa^{(p)} \geq 0$, где $\kappa^{(p)}$ определено в (5.43), однородная задача (1.53), (5.25) (при $g(t) \equiv 0$) имеет точно $\kappa^{(p)} + 1$ линейно независимых в вещественном смысле решений класса $E_p(A, B)$, $p > 1$, а неоднородная задача разрешима в $E_p(A, B)$ при любой правой части краевого условия $g(t) \in L_p(\Gamma)$.

Если $\kappa^{(p)} < 0$, то однородная задача (1.53), (5.25) не имеет ненулевых решений класса $E_p(A, B)$, $p > 1$, а неоднородная разрешима единственным образом тогда и только тогда, когда выполнены $-\kappa^{(p)} - 1$ (вещественных) условий на свободный член $g(t)$ краевого условия (5.25):

$$\int_{\Gamma} e^{i\omega(s)} w_k^*(t(s)) t'(s) g(s) ds = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\kappa^{(p)} - 1, \quad (5.49)$$

где $\{w_k^*(z)\}$ — полная система линейно независимых (в вещественном смысле) решений класса $E_{p'}(-A, -\overline{B})$ задачи (5.26), (5.27), сопряженной (1.53), (5.25).

Отметим, что при $\kappa^{(p)} = -1$ $k = 0$, что означает однозначную безусловную разрешимость неоднородной задачи.

5.3.3. Специальные представления второго рода для функций класса $E_p(A, B)$. В этом пункте строятся обобщения представлений второго рода (1.56), ориентированные на решение рассматриваемой краевой задачи Римана — Гильберта (1.53), (5.25) в классах $E_p(A, B)$, $p > 1$.

Лемма 5.3.1. Пусть выполнено условие **D**, и либо индекс κ краевой задачи (5.1) неотрицателен, либо индекс $\kappa^{(p)} \geq -1$. Существует

функция $M(t, z)$ такая, что

$$\operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(s)} M(t, z(s)) \} = \operatorname{Re} \left\{ \overline{\lambda(s)} \frac{1}{t - z(s)} \right\}, \quad z(s) \in \Gamma, \quad (5.50)$$

где t — произвольная фиксированная точка из G , обладающая следующими свойствами:

- 1) $M(t, z) \in E_p$, $p > 1$, при всяком фиксированном $t \in G$;
- 2) для любого q , $1 < q < 2$, $p < \frac{q}{2-q}$, $f(t) \in L_q(\overline{G})$

$$T_M f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_G f(t) M(t, z) dx dy \in E_\gamma, \quad (5.51)$$

где $1 < \gamma < \frac{q}{2-q}$, $\gamma \leq p$, причем имеет место оценка

$$\|T_M f\|_{E_\gamma} \leq \operatorname{const} \|f\|_{L_q(\overline{G})}, \quad (5.52)$$

где константа от f не зависит;

- 3) оператор $T_M f : L_q(\overline{G}) \rightarrow E_\gamma$ вполне непрерывен.

< Рассмотрим в G краевую задачу Римана — Гильберта (5.50) для голоморфной функции $M(t, z)$.

Правую часть (5.50) обозначим: $F(t, z(s)) \equiv F(t, s) \in L_\infty(\Gamma)$. Согласно теоремам 1.10.1, 1.10.2 и 1.10.3, поскольку выполнено условие **D**, и либо индекс задачи $\varkappa$ неотрицателен, либо индекс $\stackrel{(p)}{\varkappa} \geq -1$, задача (5.50) безусловно разрешима в классе E_p , и ее частное решение можно взять в виде

$$\begin{aligned} M(t, z) &= \frac{1}{2} \{ \Psi(\zeta(z)) + \Psi_*(\zeta(z)) \} [\zeta'_z(z)]^{\frac{1}{p}}, \\ \Psi(\zeta) &= \frac{Z(\zeta)}{2\pi i} \int_C \frac{F_0(t, \tau)}{Z^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \zeta}, \quad \Psi_*(\zeta) = \overline{\Psi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}, \\ \Psi_*(\zeta) &= \frac{\zeta^{\kappa+1} Z(\zeta)}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{F_0(t, \tau)}}{\overline{Z^+(\tau)}} \frac{d\bar{\tau}}{1 - \bar{\tau}\zeta}, \end{aligned} \quad (5.53)$$

где κ равно либо $2\varkappa$, либо $\stackrel{(p)}{\varkappa}$, $Z(\zeta)$ — вполне определенная функция класса $H_{p+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, в D и во внешности D , причем

$$Z^{-1}(\zeta) \in H_{p+\varepsilon}, \quad Z(\zeta), Z^{-1}(\zeta) \in H_{p'+\varepsilon}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

$$Z^+(t) = -e^{2i\nu(\sigma)} Z^-(t), \quad t = e^{i\sigma} \in C,$$

$Z^\pm(t)$ — предельные значения на C функции $Z(\zeta)$ по некасательным путям соответственно изнутри и снаружи круга D , $\zeta = \zeta(z)$ — конформное отображение G на D , обратное отображению $\varphi = \varphi(\zeta)$,

$$F_0(t, \tau) = 2F(t, \varphi(\tau)) [\varphi'_\zeta(\tau)]^{\frac{1}{p}} e^{i\omega(\varphi(\tau))},$$

функции ω и ν те же, что и в (5.35).

Утверждение 1) доказано.

Поскольку $E_p \subset E_\gamma$, $p \geq \gamma > 1$, и вложение непрерывно (см. теорему 1.8.5), то очевидно, достаточно доказать оставшиеся утверждения леммы при $\gamma = p$.

Рассмотрим выражение

$$F_1(z) = 2 \iint_G F(t, z) f(t) dx dy, \quad t = x + iy, \quad z \in \Gamma. \quad (5.54)$$

Учитывая (5.50) и теорему 1.4.7, получаем

$$\|F_1\|_{L_p(\Gamma)} \leq \text{const} \left\| \iint_G |F(t, z)| |f(t)| dx dy \right\|_{L_p(\Gamma)} \leq \text{const} \|f\|_{L_q(\overline{G})},$$

где константа зависит только от p и q и не зависит от f . Таким образом, отображение $F_1 : L_q(\overline{G}) \rightarrow L_p(\Gamma)$, осуществляемое по формуле (5.54), непрерывно.

Будем обозначать через $s + \Delta s$ дуговую абсциссу точки $z + \Delta z \in \Gamma$ (здесь $z = z(s)$). Тогда из (5.50), (1.30) и (1.25) получаем

$$\|F_1(s + \Delta s) - F_1(s)\|_{L_p(\Gamma)} \leq \text{const} \|f\|_{L_q(\overline{G})} |\Delta s|^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

где константа зависит только от p и q и не зависит от f . Отсюда следует, что отображение $F_1 : L_q(\overline{G}) \rightarrow L_p(\Gamma)$ вполне непрерывно.

Далее, очевидным образом будем иметь, что отображение $F_2 : L_q(\overline{G}) \rightarrow L_p(C)$ по формуле

$$F_2(\tau) = F_1(z(\tau)) [\varphi'_\zeta(\tau)]^{\frac{1}{p}} e^{i\omega(\varphi(\tau))} \in L_p(C)$$

вполне непрерывно и можно при вычислении $T_M f(z)$ использовать теорему Фубини (см. [41, с. 318]).

Таким образом,

$$\begin{aligned} T_M f(z) &= -\frac{1}{\pi} [\zeta'_z(z)]^{\frac{1}{p}} \{ \Psi^f(\zeta(z)) + \Psi_*^f(\zeta(z)) \}, \\ \Psi^f(\zeta) &= \frac{Z(\zeta)}{4\pi i} \int_C \frac{F_2(\tau)}{Z^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \zeta}, \\ \Psi_*^f(\zeta) &= \frac{\zeta^{\kappa+1} Z(\zeta)}{4\pi i} \int_C \frac{\overline{F_2(\tau)}}{\overline{Z^+(\tau)}} \frac{d\bar{\tau}}{1 - \bar{\tau}\zeta}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Так как правые части формул (5.55) непрерывно отображают $F_2 \in L_p(C) \rightarrow H_p$ (см. теорему 1.8.8, а также [13, с. 218]), то отображения $\Psi, \Psi_* : f \in L_q(\overline{G}) \rightarrow H_p$, определенные в (5.53), вполне непрерывны, откуда получаем (5.52) и утверждение 3) леммы 5.3.1. $\triangleright$

Лемма 5.3.2. Пусть выполнено условие **D**, и либо индекс κ краевой задачи (5.1) неотрицателен, либо индекс $\kappa^{(p)} \geq -1$. Существует функция $\widehat{M}(t, z)$ такая, что

$$\operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(s)} \widehat{M}(t, z(s)) \} = -\operatorname{Im} \left\{ \overline{\lambda(s)} \frac{1}{t - z(s)} \right\}, \quad z(s) \in \Gamma,$$

где t — произвольная фиксированная точка из G , обладающая свойствами:

- 1) $\widehat{M}(t, z) \in E_p$, $p > 1$, при всяком фиксированном $t \in G$;
- 2) для любого q такого, что $1 < q < 2$, $p < \frac{q}{2-q}$, $f(t) \in L_q(\overline{G})$

$$T_{\widehat{M}} f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_G f(t) \widehat{M}(t, z) dx dy \in E_\gamma,$$

где $1 < \gamma < \frac{q}{2-q}$, $\gamma \leq p$, причем имеет место оценка

$$\|T_{\widehat{M}} f\|_{E_\gamma} \leq \operatorname{const} \|f\|_{L_q(\overline{G})},$$

где константа от f не зависит;

- 3) оператор $T_{\widehat{M}} f : L_q(\overline{G}) \rightarrow E_\gamma$ вполне непрерывен.

$\triangleleft$ Доказательство аналогично доказательству леммы 5.3.1. $\triangleright$

В предположениях леммы 5.3.1 введем в рассмотрение оператор

$$Pf = Tf - T_M(\operatorname{Re} f) - T_{\widehat{M}}(\operatorname{Im} f). \quad (5.56)$$

Лемма 5.3.3. 1) Для любого q такого, что $1 < q < 2$, $p < \frac{q}{2-q}$, $f(t) \in L_q(\overline{G})$, $Pf(z) \in L_\gamma(\Gamma)$, где $1 < \gamma < \frac{q}{2-q}$, $\gamma \leq p$, причем имеет место оценка

$$\|Pf\|_{L_\gamma(\Gamma)} \leq \text{const} \|f\|_{L_q(\overline{G})},$$

где константа от f не зависит.

Отображение $P : L_q(\overline{G}) \rightarrow L_\gamma(\Gamma)$ вполне непрерывно.

2) Оператор P вполне непрерывен в $L_q(\overline{G})$, $1 < q < 2$.

3) Для почти всех $z \in \Gamma$ и для любого q такого, что $1 < q < 2$, $p < \frac{q}{2-q}$, $f(t) \in L_q(\overline{G})$, выполнено соотношение

$$\text{Re} \{ \overline{\lambda(z)} Pf(z) \} = 0.$$

◁ Свойство 1) непосредственно следует из теорем 1.4.7, 1.4.9, лемм 5.3.1, 5.3.2 и следствия 1.4.3.

Поскольку отображения $T : L_q(\overline{G}) \rightarrow L_q(\overline{G})$, $T_M, T_{\widehat{M}} : L_q(\overline{G}) \rightarrow E_p$ вполне непрерывны (см. теорему 1.4.4, леммы 5.3.1, 5.3.2), а $1 < q < 2 < 2p$, и поэтому E_p непрерывно вкладывается в $L_q(\overline{G})$ (лемма 3.1.3), то отсюда получаем свойство 2).

Свойство 3) есть непосредственное следствие (5.56), лемм 5.3.1, 5.3.2 и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3.1. Если G — единичный круг, $\lambda(t) = t^\varkappa$, $\varkappa \geq 0$ — целое, то оператор P совпадает с оператором $T_\varkappa$ (см. (1.7)), построенным И. Н. Векуа в [5, с. 293].

В предположениях леммы 5.3.1 рассмотрим теперь оператор

$$P_\lambda w = P(Aw + B\overline{w}).$$

Лемма 5.3.4. Если $w \in L_m(\overline{G})$, $1 < m < 2p$, $A(z), B(z) \in L_s(\overline{G})$, $s > 2$, то при подходящем m для q такого, что $\frac{1}{m} + \frac{1}{s} = \frac{1}{q}$, $1 < q < 2$, выполнено $p < \frac{q}{2-q}$, $Aw + B\overline{w} \in L_q(\overline{G})$, и имеют место следующие свойства:

1) оператор P_λ вполне непрерывен в $L_m(\overline{G})$;

2) $P_\lambda w(z) \in L_\gamma(\Gamma)$ при любом γ таком, что $1 < \gamma < \frac{q}{2-q}$, $\gamma \leq p$, причем имеет место оценка

$$\|P_\lambda w\|_{L_\gamma(\Gamma)} \leq \text{const} \|w\|_{L_m(\overline{G})},$$

где константа от w не зависит, и отображение $P_\lambda : L_m(\overline{G}) \rightarrow L_\gamma(\Gamma)$ вполне непрерывно;

3) для почти всех $z \in \Gamma$

$$\operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(z)} P_\lambda w(z) \} = 0.$$

◁ Очевидно, за счет выбора m можно считать $1 < q < 2$. Если за счет выбора m можно получить q сколь угодно близким к 2, то неравенство $p < \frac{q}{2-q}$ можно обеспечить при любом $p > 1$.

Пусть $1 < q(m) < q_0 < 2$ при любом m , где $q_0 = \sup_{1 < m < 2p} q(m) = \frac{2ps}{2p+s}$. Тогда для монотонно возрастающей по m функции $\frac{q(m)}{2-q(m)}$ ее супремум по m , $1 < m < 2p$, равен $\frac{ps}{2p+s-ps}$, а вместе с тем

$$p - \frac{ps}{2p+s-ps} = p^2 \frac{2-s}{2p+s-ps} < 0.$$

Таким образом, и в этом случае неравенство $p < \frac{q}{2-q}$ можно обеспечить при любом $p > 1$.

Если это обеспечено, то $Aw + B\overline{w} \in L_q(\overline{G})$ в силу неравенства Гёльдера, и остальные утверждения леммы следуют из леммы 5.3.3 и неравенства Гёльдера. ▷

Изучим поведение нормы оператора $P_\lambda : L_m(\overline{G}) \rightarrow L_m(\overline{G})$, в котором $A(z), B(z)$ — коэффициенты уравнения (1.53), при гомотетиях

$$\tilde{z} = \varepsilon z, \quad \varepsilon > 0, \quad (5.57)$$

области G .

Лемма 5.3.5. *Норма оператора*

$$T_0 w = T(Aw + B\overline{w}) : L_m(\overline{G}) \rightarrow L_m(\overline{G}),$$

где m определяется леммой 5.3.4, при гомотетии (5.57) имеет асимптотику $O(\varepsilon^\delta)$, где $\delta = \frac{s-2}{2s}(m-1) > 0$.

◁ При гомотетии (5.57) коэффициенты уравнения (1.53) преобразуются по формулам

$$\tilde{A}(\tilde{z}) = \frac{1}{\varepsilon} A(z), \quad \tilde{B}(\tilde{z}) = \frac{1}{\varepsilon} B(z), \quad (5.58)$$

(далее объекты, зависящие от переменной $\tilde{z}$, будем помечать волной). Очевидно, для изучения асимптотики нормы оператора T_0 без ограничения общности можно считать $B(z) \equiv 0$.

Для оператора $T_0 w = T(Aw)$ имеем следующую оценку [5, с.64]:

$$\|T_0 w\|_{L_\gamma(\bar{G})} \leq \frac{1}{\pi^\gamma} [M(q'\alpha, G)]^{\frac{1}{q'}} M(\gamma\alpha, G) \|Aw\|_{L_q(\bar{G})}, \quad (5.59)$$

где $\alpha = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{q} + \frac{1}{2} > 0$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{s} = \frac{1}{q}$, $1 < q < 2$, $1 < \gamma < \frac{2q}{2-q}$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$,

$$M(\lambda, G) = \sup_{z \in E} \iint_G |\zeta - z|^{-2+\lambda} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (5.60)$$

Отметим, что из неравенства Гёльдера имеем

$$\|Aw\|_{L_q(\bar{G})} \leq \|A\|_{L_s(\bar{G})} \|w\|_{L_m(\bar{G})},$$

откуда получаем соответствующую оценку правой части (5.59) через $\|w\|_{L_m(\bar{G})}$.

Сравним множитель перед $\|w\|_{L_m(\bar{G})}$ в правой части (5.59) до и после преобразования (5.57).

С учетом (5.60) будем иметь

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}\|_{L_s(\bar{G})} &= \varepsilon^{\frac{2-s}{s}} \|A\|_{L_s(\bar{G})}, \quad M(\lambda, \tilde{G}) = \varepsilon^\lambda M(\lambda, G), \\ [M(q'\alpha, \tilde{G})]^{\frac{1}{q'}} &= \varepsilon^\alpha [M(q'\alpha, G)]^{\frac{1}{q'}}, \\ M(\gamma\alpha, \tilde{G}) &= \varepsilon^{\gamma\alpha} M(\gamma\alpha, G). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Если обозначим множитель перед $\|w\|_{L_m}$ в правой части (5.59) после преобразования (5.57) через $\tilde{N}$, то из (5.61) получим $\tilde{N} = \varepsilon^\delta N$, где $\delta = \alpha(1 + \gamma) + \frac{2-s}{s}$. Если положим $\gamma = m$, что в силу леммы 5.3.4 возможно, то окончательно будем иметь $\delta = \frac{s-2}{2s}(m-1) > 0$. $\triangleright$

Теперь уточним значение константы в неравенстве (3.38).

Лемма 5.3.6. Если $w(z) \in E_p(A, B)$, $p > 1$, то $w(z) \in L_m(\bar{G})$ для любого m такого, что $1 < m < 2p$, причем вложение $E_p(A, B) \subset L_m(\bar{G})$ непрерывно, т. е. имеет место неравенство

$$\|w\|_{L_m(\bar{G})} \leq \text{const} \left[M\left(\frac{m}{m+\mu}; \Gamma\right) \right]^{\frac{1}{p'}} \left[M\left(\frac{2\mu}{m+\mu}; G\right) \right]^{\frac{1}{m}} \|w\|_{E_p}, \quad (5.62)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $0 < \mu < 1$,

$$M(\lambda; \Gamma) = \sup_{z \in E} \int_\Gamma |z - \zeta|^{-\lambda} ds, \quad (5.63)$$

$M(\lambda; G)$ определяется формулой (5.60), константа зависит от области G и коэффициентов $A(z)$, $B(z)$, а от w не зависит и не изменяется при гомотетиях (5.57).

◁ Неравенство (5.62) вытекает из леммы 1.8.2, основного представления обобщенных аналитических функций класса $E_p(A, B)$ (1.54) и формул (5.58), поскольку в (1.54) $\exp\{-T(A + B(\bar{w}/w))\} \in C_\beta(\bar{G})$, $\beta = \frac{s-2}{s}$ (теорема 1.4.3), и не изменяется при гомотетии (5.57) (в том смысле, что значения этой величины совпадают в соответствующих точках $\tilde{z}$ и z). ▷

Лемма 5.3.7. Оператор $T_M(Aw + B\bar{w}) : L_m(\bar{G}) \rightarrow L_m(\bar{G})$, определенный с помощью (5.51), где m определено леммой 5.3.4, A , B — коэффициенты уравнения (1.53), вполне непрерывен и при гомотетиях (5.57) его норма имеет асимптотику $O(\varepsilon^\delta)$, где $\delta > 0$.

Аналогичное утверждение имеет место для оператора $T_{\tilde{M}}(Aw + B\bar{w})$.

◁ Очевидно, достаточно провести доказательство для $T_M(Aw)$.

Вполне непрерывность обоснована в доказательстве леммы 5.3.3. Установим асимптотику нормы оператора $T_M(Aw)$.

Из (5.55) будем иметь (см. [13, с. 218])

$$\begin{aligned} \|T_M(Aw)(z)\|_{L_p(\Gamma)} &\leq \frac{2}{\pi} \|\Psi^{Aw}(\zeta)\|_{L_p(C)} \leq \\ &\leq \text{const} \|F_2(\zeta)\|_{L_p(C)} \leq \text{const} \|F_1(z)\|_{L_p(\Gamma)}, \end{aligned} \quad (5.64)$$

где константы при гомотетии (5.57) от ε не зависят.

Оценим $\|F_1(z)\|_{L_p(\Gamma)}$. Из (5.51), (5.54), [5, с. 68] и неравенства Гёльдера будем иметь

$$\begin{aligned} \|F_1(z)\|_{L_p(\Gamma)} &\leq 2\pi \|T(Aw)\|_{L_p(\Gamma)} \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi^{p-1}} [M(q'\alpha; G)]^{\frac{1}{q'}} [M(1-p\alpha; \Gamma)]^{\frac{1}{p}} \|A\|_{L_s(\bar{G})} \|w\|_{L_m(\bar{G})}, \end{aligned} \quad (5.65)$$

где $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$, $2\alpha = \frac{1}{p} - \frac{2}{q} + 1$, $M(\lambda; G)$ определено формулой (5.60), $M(\lambda; \Gamma)$ определено формулой (5.63). Если обозначим в правой части (5.65) множитель при $\|w\|_{L_m(\bar{G})}$ через N_1 , а после преобразования (5.57) его же через $\tilde{N}_1$, то в силу (5.58), (5.61) и $\tilde{M}(\lambda; \tilde{\Gamma}) = \varepsilon^{1-\lambda} M(\lambda; \Gamma)$ будем иметь $\tilde{N}_1 = \varepsilon^{\delta_1} N_1$, где

$$\delta_1 = -\frac{1}{m} + \frac{1}{s} - p \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2p}.$$

Далее, подставив (5.64), (5.65) в (5.62), получим неравенство

$$\|T_M(Aw)\|_{L_m(\overline{G})} \leq N\|w\|_{L_m(\overline{G})},$$

где множитель N при гомотетии (5.57) умножается на ε^δ ,

$$\delta = \delta(\mu) = \delta_1 + \frac{\mu}{m + \mu} \frac{p + m}{mp}.$$

Положим $m = (2 - \mu)p$, где $\mu > 0$ мало. Тогда, с учетом того, что $\frac{1}{m} + \frac{1}{s} = \frac{1}{q}$,

$$\begin{aligned} \delta(\mu) &= \frac{1}{s} - p \left(\frac{1}{(2 - \mu)p} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \right) + \\ &+ \mu \left(\frac{1}{(2 - \mu)p + \mu} \frac{p + m}{pm} - \frac{1}{2p(2 - \mu)} \right). \end{aligned}$$

Поскольку при $\mu = 0$ $\delta(0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{s}\right)(p - 1) > 0$, то при малых $\mu > 0$ $\delta(\mu) > 0$. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3.2. При использовании леммы 5.3.4, считая s достаточно близким к 2, при любых (больших) значениях m можно обеспечить неравенство $q < 2$.

Поскольку условие $p < \frac{q}{2-q}$ в лемме 5.3.4 эквивалентно условию $\frac{1}{m} < \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} - \frac{1}{s}$, то при m , близком к $2p$ (и, возможно, большом), оно выполнено при подходящем s .

Очевидным следствием лемм 5.3.5 и 5.3.7 является следующее утверждение.

Лемма 5.3.8. После гомотетии (5.57) с достаточно малым $\varepsilon > 0$ оператор $P_\lambda : L_m(\overline{G}) \rightarrow L_m(\overline{G})$ при некотором m , $1 < m < 2p$, становится оператором сжатия.

Теорема 5.3.3. Пусть выполнено условие **D**, и либо индекс $\varkappa$ краевой задачи (5.1) неотрицателен, либо индекс $\binom{p}{\varkappa} \geq -1$. Если $w(z) \in E_p(A, B)$, $p > 1$, то имеет место соотношение

$$w(z) + P_\lambda w(z) = \Phi(z), \quad (5.66)$$

где $\Phi(z) \in E_p$, и почти всюду на Γ

$$\operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(t)} w(t) \} = \operatorname{Re} \{ \overline{\lambda(t)} \Phi(t) \}, \quad t \in \Gamma. \quad (5.67)$$

Если $\Phi(z) \in E_p$, то соотношением (5.66) однозначно определяется функция $w(z) \in E_p(A, B)$, удовлетворяющая почти всюду на Γ условию (5.67) и формула (5.66) устанавливает (вещественный) линейный изоморфизм банаховых пространств $E_p(A, B)$ и E_p , причем оператор $P_\lambda : E_p(A, B) \rightarrow L_p(\Gamma)$ вполне непрерывен.

◁ Если $w(z) \in E_p(A, B)$, $p > 1$, то имеет место соотношение (см. теорему 3.2.1):

$$w(z) + T(Aw + B\bar{w})(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t - z} dt \in E_p. \quad (5.68)$$

Вычитая из обеих частей (5.68) голоморфную функцию

$$\Phi^*(z) = T_M\{\operatorname{Re}(Aw + B\bar{w})\}(z) + T_{\widehat{M}}\{\operatorname{Im}(Aw + B\bar{w})\}(z),$$

которая в силу лемм 5.3.1 и 5.3.2 принадлежит классу E_p , и обозначив

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t - z} dt - \Phi^*(z) \in E_p,$$

получим (5.66). Формула (5.67) следует из свойства 3 леммы 5.3.4.

Пусть теперь $\Phi(z) \in E_p$, и будем считать, что оператор $P_\lambda : L_m(\overline{G}) \rightarrow L_m(\overline{G})$ — оператор сжатия при некотором m , $1 < m < 2p$ (в силу леммы 5.3.8 это не ограничивает общности рассуждений).

В этом случае уравнение (5.66) однозначно разрешимо в $L_m(\overline{G})$ при любой правой части из того же пространства. Поскольку в силу леммы 1.8.2 $\Phi(z) \in L_m(\overline{G})$, то получаем единственное решение $w(z) \in L_m(\overline{G})$, которое, очевидно, будет в G решением дифференциального уравнения (1.53). В силу теоремы 1.4.7, лемм 5.3.1 и 5.3.2 имеем

$$\int_{\Gamma_r} |P_\lambda w(t)|^p ds < \operatorname{const} < \infty, \quad 0 < r < 1,$$

где константа от r не зависит, поэтому $w(z) \in E_p(A, B)$. Выполнение (5.67) следует из леммы 5.3.4.

Таким образом, оператор $I + P_\lambda : E_p(A, B) \rightarrow E_p$, где I — тождественный оператор, биективен и (в силу лемм 5.3.4 и 5.3.6) непрерывен, а следовательно, по теореме Банаха, осуществляет (вещественный) изоморфизм $E_p(A, B)$ и E_p , причем оператор $P_\lambda : E_p(A, B) \rightarrow L_p(\Gamma)$ в силу лемм 5.3.4 и 5.3.6 вполне непрерывен. ▷

5.3.4. Доказательство основных результатов. При $\varkappa \geq 0$ либо $\overset{(p)}{\varkappa} \geq -1$ утверждения теорем 5.3.1 и 5.3.2 непосредственно следуют из соответствующих результатов для голоморфных функций — теорем 1.10.1–1.10.3 и теоремы 5.3.3. Действительно, в этом случае оператор $I + P_\lambda$ осуществляет (вещественный) изоморфизм пространства решений класса E_p краевой задачи (1.98) для голоморфных функций и пространства решений класса $E_p(A, B)$ краевой задачи (1.53), (5.25).

Рассмотрим случай отрицательного индекса и докажем необходимость условий (5.48) и (5.49).

Пусть $w^*(z) \in E_{p'}(-A, -\overline{B})$ — произвольное решение однородной сопряженной задачи (5.26), (5.27), а $w(z) \in E_p(A, B)$ — решение задачи (1.53), (5.25). Отметим, что имеет место следующее равенство (см. (3.15)):

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma} w(t) w^*(t) dt = 0.$$

Отсюда будем иметь

$$0 = \operatorname{Im} \int_{\Gamma} e^{-i\omega(s)} w(t) e^{i\omega(s)} w^*(t) t'(s) ds = \int_{\Gamma} g(s) e^{i\omega(s)} w^*(t(s)) t'(s) ds.$$

Отсюда, в силу уже доказанного для $\varkappa \geq 0$ и $\overset{(p)}{\varkappa} \geq -1$ и соотношений (5.44), (5.47) получаем необходимость условий (5.48) и (5.49).

Далее, пусть $w(z) \in E_p(A, B)$ — решение однородной задачи (1.53), (5.25) при $\varkappa < 0$ либо $\overset{(p)}{\varkappa} < 0$. Тогда функция $\Phi(z) \in E_p$ в представлении $w(z)$ по формуле (1.54) есть решение однородной задачи

$$\operatorname{Re} \{ \overline{\lambda_1(t)} \Phi(t) \} = 0, \quad t \in \Gamma, \quad (5.69)$$

где

$$\overline{\lambda_1(t)} = e^{-i\omega(t)} \exp \{ -T(A + B\overline{w}/w) \}, \quad (5.70)$$

и индексы задач (5.25) и (5.69) совпадают. Отсюда, в силу теорем 1.10.1–1.10.3 $\Phi(z) \equiv 0$, и утверждения теорем 5.3.1 и 5.3.2 относительно однородной задачи с отрицательным индексом доказаны.

Перейдем к анализу неоднородной задачи при $\varkappa < 0$ либо $\overset{(p)}{\varkappa} < 0$ четном. Сделаем замену искомой функции: $w_0(z) = z^n w(z)$, где

$n = -\varkappa$ либо $n = -\frac{(p)}{2}$. Тогда функция $w_0(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar{z}} w_0 + A(z)w_0 + B_0(z)\overline{w_0} = 0, \quad (5.71)$$

где $B_0(z) = B(z)\frac{z^n}{\bar{z}^n}$, и краевому условию

$$\operatorname{Re} \{ \overline{\lambda_0(t)} w_0(t) \} = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (5.72)$$

где $\lambda_0(t) = e^{i\omega(t)}(\bar{z})^{-n}$.

С учетом того, что область G содержит точку $z = 0$, имеем $\operatorname{ind}_{\Gamma} \lambda_0 = 0$.

В силу уже доказанных частей теорем 5.3.1 и 5.3.2 задача (5.71), (5.72) имеет решение $w_0(z) \in E_p(A, B_0)$ (и даже множество решений, зависящее от одного вещественного параметра). Пусть $w_0(z) = \Phi_0(z)e^{\chi(z)}$ — представление вида (1.54),

$$\chi(z) = \exp\{-T(A + B_0\overline{w_0}/w_0)\} = \exp\{-T(A + B\overline{w}/w)\},$$

где $w(z) = w_0(z)z^{-n}$. Очевидно, для того чтобы так определенная функция $w(z)$ была (единственным) решением задачи (1.53), (5.25) класса $E_p(A, B)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi_0(z)$ имела вид $\Phi_0(z) = z^n \Phi(z)$, где $\Phi(z) \in E_p$ есть решение краевой задачи

$$\operatorname{Re} \{ \overline{\lambda_2(t)} \Phi(t) \} = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (5.73)$$

и где $\lambda_2(t) = e^{i\omega(t)}e^{\overline{\chi(t)}}$.

Так как $\operatorname{ind}_{\Gamma} \lambda_2(t) = \operatorname{ind}_{\Gamma} \lambda(t) < 0$, то для существования (единственного) решения $\Phi(z) \in E_p$ задачи (5.73) необходимо и достаточно, чтобы функция $g(t)$ удовлетворяла $2n - 1$ независимым вещественным условиям (теоремы 1.10.1, 1.10.2, 1.10.3):

$$\int_{\Gamma} g(s) e^{i\omega(s) - \chi(t(s))} \Phi_k^*(t(s)) t'(s) ds = 0, \quad k = 1, \dots, 2n - 1, \quad (5.74)$$

где $\{\Phi_k^*(z)\}$ — полная система линейно независимых в вещественном смысле решений краевой задачи, сопряженной задаче (5.73).

Отсюда очевидна достаточность условий (5.48) и (5.49) в рассматриваемом случае.

Если же $\frac{(p)}{\varkappa} < -1$ нечетное, то полагаем $n = -\frac{(p)+1}{2}$ и повторяем все вышеприведенные рассуждения с теми лишь отличиями, что в (5.72) $\operatorname{ind}_{\Gamma} \lambda_0(t) = -1$, и в (5.74) количество условий будет равно $-\frac{(p)}{\varkappa} - 1$.

5.4. Задача Римана — Гильберта в классах $BMO(A, B)$

Постановка задачи (в единичном круге D) повторяет приведенную в начале этой главы постановку, уточняются только функциональные классы, которым принадлежат коэффициент и свободный член краевого условия, а также рассматриваемые классы решений уравнения (1.53). Поскольку рассматриваемая задача так же, как и выше, с помощью представления второго рода (2.50) будет сводиться к соответствующей задаче для голоморфных функций, то предположения о коэффициенте и свободном члене краевого условия будут те же, что и в п. 1.10.3. А именно, предполагаем, что $g(t(s)) \equiv g(s) \in BMO$,

$$0 < k_1 \leq |\lambda(t)| \leq k_2 < \infty, \quad \arg \lambda(t) = \omega(t) = \omega_0(t) + \omega_2(t),$$

где k_1, k_2 — некоторые постоянные, $\omega_0(t)$ и $\omega_2(t)$ вещественны, $\omega_0(t(s)) \equiv \omega_0(s)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$, а $\omega_2(t(s)) \equiv \omega_2(s)$ — ограниченная, измеримая на $[0, 2\pi]$ функция, причем

$$\sup |\omega_2(s)| < \frac{\pi}{4}.$$

Так же, как и в п. 1.10.3, *индексом задачи* будем называть число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}(\omega_0(2\pi) - \omega_0(0)),$$

которое будем предполагать целым.

Так же, как и (1.92), $\tilde{f}$ будет обозначать преобразование Гильберта функции f :

$$\tilde{f}(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma.$$

Естественно, конечно, предполагать, что $\lambda(t)$ принадлежит пространству мультипликаторов пространства BMO .

Теорема 5.4.1. Пусть в краевом условии (5.1) $\lambda(t) \in L_\infty(\Gamma) \cap LMO$, $g(t) \in BMO$ и $\tilde{\omega}(t) \in L_\infty(\Gamma)$ ³.

³При $\varphi \in L_\infty(\Gamma)$ всегда считаем, что $|\varphi| \leq \text{const} < \infty$.

При $\varkappa = \text{ind}_\Gamma [\lambda(t)] \geq 0$ однородная краевая задача (1.53), (5.1) (т. е. при $g(t) \equiv 0$) имеет точно $2\varkappa + 1$ линейно независимых в вещественном смысле решений, принадлежащих классу $LMO(A, B) \cap L_\infty(\overline{D})$. Неоднородная (при $g(t) \not\equiv 0$) задача (1.53), (5.1) всегда имеет решение класса $BMO(A, B)$, линейно содержащее $2\varkappa + 1$ произвольных вещественных постоянных.

При $\varkappa < 0$ однородная задача (1.53), (5.1) имеет только нулевое решение. Для существования (единственного) решения класса $BMO(A, B)$ неоднородной задачи (1.53), (5.1) необходимо и достаточно выполнение следующих условий на функцию $g(t)$:

$$\int_{\Gamma} \frac{w'_j(t) g(t)}{\overline{\lambda(t)}} dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, -2\varkappa - 1, \quad (5.75)$$

где $w'_j(z) \in BMO(-A, -\overline{B})$ — полный набор линейно независимых в вещественном смысле решений однородной сопряженной задачи (5.26), (5.27).

Что может произойти в случае отказа от условия $\tilde{\omega}(t) \in L_\infty(\Gamma)$ описано в п. 1.10.4.

Прежде чем доказывать теорему 5.4.1, определим в настоящей ситуации регуляризующий множитель краевого условия.

5.4.1. Регуляризующий множитель. В силу леммы 1.9.2 $\frac{1}{|\lambda(t)|} \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, а поскольку $LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ — мультипликатор пространства BMO , то $\frac{g(t)}{|\lambda(t)|} \in BMO$, и без ограничения общности можно считать, что $|\lambda(t)| \equiv 1$, т. е. что $\lambda(t) = e^{i\omega(t)}$, и в силу следствий 1.9.2 и 1.9.3 $\omega(t), e^{i\omega(t)} \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$.

Обозначим: $\gamma(z) = \omega(z) + i\tilde{\omega}(z) = S(\omega(\tau) - \varkappa \arg \tau)(z)$, S — оператор Шварца, $\omega(z) = \text{Re } \gamma(z)$, $t \in \Gamma$. Тогда функция $e^{i\gamma(z)} \in H_\infty$, а следовательно, имеет почти всюду на Γ некасательные предельные значения $e^{i\gamma(t)} \in L_\infty(\Gamma)$ (см. [7, с. 64]). Следуя [8, с. 275], будем называть функцию $e^{\tilde{\omega}(t)}$ *регуляризующим множителем краевого условия* (5.1) (в предположениях теоремы 5.4.1).

Лемма 5.4.1. В предположениях теоремы 5.4.1 $e^{\tilde{\omega}(t)}, e^{i\gamma(t)} \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$, а следовательно, $e^{i\gamma(z)} \in LMOA \cap H_\infty(\overline{D})$.

◁ Поскольку сингулярный оператор в LMO ограничен [68, 76], то $e^{\tilde{\omega}(t)} \in LMO \cap L_\infty(\Gamma)$. ▷

5.4.2. Доказательство теоремы 5.4.1.

Случай канонического краевого условия. Рассмотрим краевую задачу (1.53), (5.1) в частном случае $\lambda(t) = t^\varkappa$:

$$\operatorname{Re} \{t^{-\varkappa} w(t)\} = g(t). \quad (5.76)$$

Следуя [5, с. 246], краевое условие (5.76) будем называть *каноническим*.

Рассмотрим сначала случай $\varkappa \geq 0$. Формулой (4.21) устанавливается (вещественный) линейный изоморфизм между решениями краевой задачи (1.53), (5.76) и решениями краевой задачи для голоморфных функций

$$\operatorname{Re} \{t^{-\varkappa} \Phi(t)\} = g(t). \quad (5.77)$$

Учитывая результаты теорем 1.10.8 и 1.10.10, для краевой задачи (5.77) получаем соответствующее утверждение теоремы 5.4.1.

Случай $\varkappa < 0$ исследуется сведением к случаю нулевого индекса посредством замены $w_0(z) = z^{-\varkappa} w(z)$ дословным повторением соответствующих рассуждений из [5, с. 298–301].

Случай неканонического краевого условия. Умножим краевое условие (5.1) на регуляризующий множитель коэффициента $\lambda(t) = e^{i\omega(t)}$:

$$\operatorname{Re} \{t^{-\varkappa} e^{-i\gamma(t)} w(t)\} = e^{\tilde{\omega}(t)} g(t).$$

Обозначим: $e^{\tilde{\omega}(t)} g(t) = g^*(t) \in BMO$ (в силу леммы 5.4.1),

$$e^{i\gamma(z)} w(z) = w^*(z). \quad (5.78)$$

Функция $w^* = w^*(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar{z}} w^* + A(z) w^* + B^*(z) \bar{w}^* = 0, \quad (5.79)$$

где

$$B^*(z) = B(z) e^{-2i \operatorname{Re} \gamma(z)} \in L_s(\overline{D}), \quad (5.80)$$

и краевому условию

$$\operatorname{Re} \{t^{-\varkappa} w^*(t)\} = g^*(t). \quad (5.81)$$

Поскольку $LMO \cap L_\infty(\Gamma)$ есть мультипликатор BMO , то $w^*(z) \in BMO(A, B^*)$ при условии, что $w(z) \in BMO(A, B)$ (и наоборот).

Задача (5.79), (5.81) с каноническим краевым условием нами уже исследована. Пусть $w^*(z) \in BMO(A, B^*)$ — решение этой краевой задачи при $\varkappa \geq 0$. Аналогично [5, с. 296] представим $w^*(z)$ в виде

$$w^*(z) = \Phi^*(z) w_0(z), \quad (5.82)$$

где $\Phi^*(z)$ голоморфна в D ,

$$w_0(z) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \iint_D \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{z \overline{f(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta} z} \right] d\xi d\eta \right\} \in C_\alpha(\overline{D}), \quad \alpha = \frac{s-2}{s},$$

$$f(z) = \begin{cases} A(z) + B^*(z) \frac{\overline{w^*}}{w^*}, & w^*(z) \neq 0, \\ 0, & w^*(z) = 0. \end{cases} \quad (5.83)$$

Очевидно, что $w^*(z) \in BMO(A, B^*)$ тогда и только тогда, когда $\Phi^*(z) \in BMOA$. Также очевидно, что $\operatorname{Im} w_0(t) = 0$, $t \in \Gamma$.

Подставив (5.82) в (5.81), получим, что голоморфная функция $\Phi^*(z) \in BMOA$ есть решение краевой задачи

$$\operatorname{Re} \{ t^{-\varkappa} \Phi^*(t) \} = g^*(t) w_0^{-1}(t) \in BMO. \quad (5.84)$$

Отсюда (см. (1.178)),

$$\Phi^*(z) = z^\varkappa [S(g^* w_0^{-1}) + Q(z)], \quad (5.85)$$

где S — оператор Шварца, $Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{\varkappa} (c_k z^k - \bar{c}_k z^{-k})$, c_k — комплексные постоянные, β_0 — вещественная постоянная.

Умножим (5.82) на $e^{i\gamma(z)}$, где $e^{i\gamma(z)}$ — та же голоморфная в D функция, что и в (5.78), и обозначим:

$$w(z) = w^*(z) e^{i\gamma(z)}, \quad \Phi(z) = \Phi^*(z) e^{i\gamma(z)}. \quad (5.86)$$

При этом (5.82) переписывается в виде

$$w(z) = \Phi(z) w_0(z). \quad (5.87)$$

Вместе с тем в представлении для $w_0(z)$ с учетом (5.80) и (5.83) будем иметь

$$f(z) = \begin{cases} A(z) + B(z) \frac{\overline{w}}{w}, & w(z) \neq 0, \\ 0, & w(z) = 0, \end{cases}$$

откуда получаем, что $w(z)$ в (5.87) есть решение уравнения (1.53).

Поскольку по лемме 5.4.1 $e^{i\gamma(z)} \in LMOA \cap L_\infty$, то из (5.86) будем иметь $w(z) \in BMO(A, B)$, $\Phi(z) \in BMOA$.

Покажем, что $w(z)$ удовлетворяет краевому условию (5.1). Для этого достаточно показать, что $\Phi(z)$ в (5.87) удовлетворяет краевому условию

$$\operatorname{Re} \{ e^{-i\omega(t)} \Phi(t) \} = g(t) w_0^{-1}(t), \quad t \in \Gamma. \quad (5.88)$$

Подставим выражение для $\Phi^*(z)$ из (5.86) в (5.85). Отсюда получим, что $\Phi(z)$ удовлетворяет (5.88).

В случае $\varkappa < 0$ проделаем ту же замену (5.78) и так же придем к задаче (5.79), (5.81). Условие ее разрешимости:

$$\int_{\Gamma} t^{\varkappa} w_j'^*(t) g^*(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, -2\varkappa - 1, \quad (5.89)$$

где $w_j'^*(z)$ — полная система линейно независимых в вещественном смысле решений задачи

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} w'^* - A(z) w'^* - \overline{B^*(z)} \overline{w'}^* &= 0, \\ \operatorname{Re} \{ t^{\varkappa} t'(s) w'^*(t) \} &= 0. \end{aligned}$$

Обратная замена (5.86) так же приведет к решению $w(z) \in BMO(A, B)$ задачи (1.53), (5.1), только в рассуждениях ссылку на (1.178) надо заменить ссылкой на (1.179). Условие разрешимости (5.89) после замены $w'^*(z) = w'(z) e^{i\gamma(z)}$ перейдет в условие

$$\int_{\Gamma} e^{i\omega(t)} w_j'(t) g(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, -2\varkappa - 1, \quad (5.90)$$

где $w_j'(z) \in LMO(-A, -\overline{B})$ — полная система линейно независимых в вещественном смысле решений задачи, сопряженной однородной задаче (1.53), (5.1):

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} w' - A(z) w' - \overline{B(z)} \overline{w'} &= 0, \\ \operatorname{Re} \{ e^{i\omega(t)} t'(s) w'(t) \} &= 0. \end{aligned}$$

Итак, формулы (5.78) и (5.86) устанавливают линейное в вещественном смысле взаимнооднозначное соответствие между решениями класса $BMO(A, B)$ краевой задачи (1.53), (5.1) в предположении $|\lambda(t)| \equiv 1$ и решениями класса $BMO(A, B^*)$ краевой задачи с каноническим краевым условием (5.79), (5.81). Отсюда получаем утверждение теоремы 5.4.1.

5.5. Историко-библиографические замечания

Параграф 5.2 основан на статье [26]. Изложение решения краевой задачи Римана — Гильберта для классов Харди вынесено в отдельный параграф, поскольку здесь можно вычленить особенно наглядный случай, поддающийся исследованию по схеме Ф. Д. Гахова с использованием регуляризирующего множителя краевого условия, приводящего это условие к каноническому виду.

Параграф 5.3 основан на статьях [35–37, 74]. В обоих этих параграфах предположения о коэффициенте краевого условия и границе Γ области G следуют книге И. И. Данилюка, где при таких предположениях удалось конструктивным образом обобщить понятие индекса краевого условия. Построения И. И. Данилюка вбирают в себя предположения о коэффициенте краевого условия, выделенные в пионерской работе И. Б. Симоненко [60] (см. также [13, с. 189–191]).

Свойство оператора P_λ становится оператором сжатия при подходящей гомотетии, что позволяет доказать представление второго рода (5.66), впервые доказано в работах [37, 74].

Параграф 5.4 основан на статьях [28, 35]. Что может происходить при нарушении в формулировке теоремы 5.4.1 условий $\lambda(t) \in LMO$ или $\tilde{\omega}(t) \in L_\infty(\Gamma)$, проанализировано в п. 1.10.4 и п. 1.10.5.

ГЛАВА 6

КЛАССЫ ХАРДИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ

6.1. Определение. Базовые свойства

Пусть $q(z)$ — заданная в $\overline{D} = D \cup \Gamma$, $D = \{z : |z| < 1\} \equiv D_z$, измеримая комплексная функция. Всюду далее предполагаем, что $|q(z)| \leq q_0 = \text{const} < 1$, $z \in \overline{D}$.

Рассмотрим в $\overline{D}$ эллиптическую систему Бельтрами в комплексной записи (1.192)

$$\partial_{\bar{z}} w - q(z) \partial_z w = 0,$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$, $\partial_z = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ — производные в смысле Соболева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.1. Будем говорить, что решение системы (1.192) принадлежит классу $H_p(q)$, $p > 0$, если оно для некоторой положительной постоянной $M_p(w) < +\infty$ удовлетворяет условию

$$\mu(\rho, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |w(\rho e^{i\sigma})|^p d\sigma \leq M_p(w),$$
$$0 \leq \rho < 1, \quad \rho e^{i\sigma} = z \in D.$$

Множество ограниченных в $\overline{D}$ решений системы (1.192) будем обозначать через $H_\infty(q)$.

При $q(z) \equiv 0$ имеем классический класс Харди H_p (см. параграф 1.7).

Классы Харди решений уравнения Бельтрами первоначально исследованы в [15, 16] в случае гёльдерова коэффициента уравнения. Некоторые свойства решений класса Харди системы Бельтрами с постоянным матричным коэффициентом установлены в [62].

Классы Харди решений сопряженной системы Бельтрами изучались в статье [67] посредством сведения вопроса к известным на

тот момент [24] свойствам классов Харди обобщенных аналитических функций. Поскольку авторы статьи [67] не были знакомы с работой [24], нужные им частные случаи результатов из [24] они получили самостоятельно.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1.1. Для голоморфной функции класса H_p величина $\mu(\rho, w)$ не убывает по ρ . Для функций класса $H_p(q)$ это свойство не сохраняется (так же, как и для обобщенных аналитических функций, см. пример 2.1.1).

ПРИМЕР 6.1.1. Положим

$$q(z) = \frac{z^2}{|z|^4 - 0,5|z|^2 + 1}, \quad w(z) = z \exp \frac{2,5}{1 + |z|^2}.$$

Уравнение (1.192) удовлетворяется, и $\mu(\rho, w)$ не монотонна по ρ .

Всякое решение в D комплексного уравнения (1.192) представимо в виде (см. [5, с. 104])

$$w(z) = \Phi(W(z)), \quad (6.1)$$

где $W = W(z)$ — основной гомеоморфизм уравнения (1.192) (см. определение 1.12.1), Φ — вполне определенная функция, голоморфная в D_W . Представление (6.1) будем называть *представлением первого рода* для решений уравнения Бельтрами.

При изучении классов Харди $H_p(q)$ решений уравнения Бельтрами важную роль играет следующий критерий.

Теорема 6.1.1. Пусть $q(z) \in C_\alpha^k(\overline{D})$, $k = 0, 1, \dots$, $0 < \alpha < 1$. Для того чтобы решение уравнения (1.192) принадлежало классу $H_p(q)$, $0 < p \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы в представлении (6.1) $\Phi \in H_p$.

Как показывает нижеследующий пример, при $p < \infty$ такой критерий не имеет места в общем случае ограниченного измеримого коэффициента $q(z)$ (и даже в случае непрерывного $q(z)$).

ПРИМЕР 6.1.2. Рассмотрим последовательность гомеоморфизмов:

- 1) конформный $w = i \frac{1+z}{1-z}$ единичного круга $|z| \leq 1$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w \geq 0$, $w(0) = i$, $w(1) = \infty$;
- 2) квазиконформный $w^* = \frac{w}{|w|^\beta}$, $0 < \beta < 1$, верхней полуплоскости $\operatorname{Im} w \geq 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w^* \geq 0$ с комплексной характеристикой $\frac{\partial_{\bar{w}} w^*}{\partial_w w^*} = \frac{\beta}{\beta-2} e^{2i \arg w}$, $w^*(i) = i$, $w^*(\infty) = \infty$;

3) конформный $\zeta = \frac{w^* - i}{w^* + i}$ верхней полуплоскости $\operatorname{Im} w^* \geq 0$ на единичный круг $|\zeta| \leq 1$, $\zeta(i) = 0$, $\zeta(\infty) = 1$.

Суперпозиция

$$\zeta = \zeta(z) = \zeta(w^*(w(z))) = \frac{\frac{1+z}{1-z} - \left| \frac{1+z}{1-z} \right|^\beta}{\frac{1+z}{1-z} + \left| \frac{1+z}{1-z} \right|^\beta}, \quad \zeta(0) = 0, \quad \zeta(1) = 1,$$

есть гомеоморфизм единичного круга $|z| \leq 1$ на единичный круг $|\zeta| \leq 1$, являющийся решением уравнения (1.192) с коэффициентом

$$q(z) = \frac{\partial_{\bar{w}} w^*}{\partial_w w^*} \frac{\overline{\partial_z w}}{\partial_z w} = \frac{\beta}{2 - \beta} e^{2i[\arg w(z) + 2\arg(1-z)]}, \quad |q(z)| = \frac{\beta}{2 - \beta} < 1.$$

Если взять голоморфную при $|\zeta| < 1$ функцию $\Phi(\zeta) = (1 - \zeta)^{-1/p}$, $p > 0$, то $\Phi(\zeta) \in H_s$ для всякого s такого, что $0 < s < p$, но $\Phi(\zeta) \notin H_p$.

В то же время суперпозиция $\Phi(\zeta(z))$ допускает оценку

$$|\Phi(\zeta(z))| \leq \frac{\operatorname{const}}{(1 - r)^{\frac{1-\beta}{p}}}, \quad z = re^{i\varphi},$$

где const от z не зависит. Таким образом, $\Phi(\zeta(z)) \in H_s(q)$ для всякого s такого, что $p \leq s < \frac{p}{1-\beta}$. В частности, если $p < 1$, то при β близком к единице s может быть сколь угодно велико.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1.2. Если в примере 6.1.2 положим

$$w^* = \ln^2(e^5 + 1) \frac{w}{\ln^2(e^5 + |w|^2)}, \quad \Phi(\zeta) = \frac{1}{1 - \zeta},$$

то, положив $q(1) = 0$, будем иметь $q(z) \in C(\overline{D})$ и $|q(z)| \leq \operatorname{const} < 1$, причем $\Phi(\zeta) \notin H_1$, а $\Phi(\zeta(z)) \in H_1(q)$.

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1.1. Случай $p = \infty$ тривиален. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{2\pi} |w(\rho e^{i\sigma})|^p d\sigma, \quad 0 < p < \infty. \quad (6.2)$$

Обозначим через Γ_ρ образ окружности $|z| = \rho$ при основном гомеоморфизме $W = W(z)$. Так как в силу теоремы 1.12.2 $W(z) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_z)$, то кривая $\Gamma_\rho \in C_\alpha^{k+1} \subset D_W$ (ляпуновская) и спрямляема. Поскольку $|dW| = |W_z dz + W_{\bar{z}} d\bar{z}|$ и $c|dz| \leq |dW| \leq C|dz|$, где c и C —

некоторые константы, не зависящие от ρ , то интеграл (6.2) и интеграл $\int_{\Gamma_\rho} |\Phi(W)|^p |dW|$ при $\rho \rightarrow 1 - 0$ ограничены одновременно.

Таким образом, $w \in H_p(q)$ тогда и только тогда, когда Φ принадлежит классу Смирнова E_p в D_W (см. [9, с. 483]). Поскольку в D_W $E_p \equiv H_p$ (см. там же), то получаем утверждение теоремы 5.2.3. $\triangleright$

В связи с примером 6.1.2 и замечанием 6.1.2 везде далее предполагается выполнение следующих условий регулярности на коэффициент $q(z)$:

$$q(z) \in C_\alpha^k(\overline{D}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (6.3)$$

Теорема 6.1.2. Если $w(z) \in H_p(q)$, $p > 0$, то $w(z) \in L_m(\overline{D})$ для всякого m такого, что $0 < m < 2p$.

$\triangleleft$ Доказательство теоремы непосредственно следует из представления (6.1), теоремы 6.1.1 и соответствующего свойства для функций класса H_p (см. лемму 1.8.3). $\triangleright$

Теорема 6.1.3. Функция $w(z) \in H_p(q)$, $p > 0$, для почти всех точек t окружности Γ имеет предельные значения по некасательным путям $w_+(t) \in L_p(\Gamma)$. Если же $w_+(t) \in L_s(\Gamma)$, $s > p$, то $w(z) \in H_s(q)$.

$\triangleleft$ Доказательство теоремы непосредственно следует из представления (6.1), теоремы 6.1.1 и соответствующего свойства для функций класса H_p (см. теоремы 1.7.2, 1.7.6). $\triangleright$

Теорема 6.1.4. Если функция $w(z) \in H_p(q)$, $0 < p \leq \infty$, на множестве $e \subset \Gamma$ положительной меры имеет нулевые некасательные предельные значения, то $w(z) \equiv 0$.

$\triangleleft$ Доказательство теоремы непосредственно следует из представления (6.1), теоремы 6.1.1 и соответствующего свойства для функций класса H_p (см. теорему 1.7.8). $\triangleright$

Теорема 6.1.5. Если функция $w(z) \in H_p(q)$, $p > 0$, то

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |w(e^{i\theta})|^p d\theta, \quad (6.4)$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta}) - w(e^{i\theta})|^p d\theta = 0, \quad (6.5)$$

где $w(e^{i\theta}) \equiv w_+(e^{i\theta})$ — предельные значения по некасательным путям на Γ функции $w(z)$, $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$.

◁ Для начала докажем формулу (6.5). Воспользовавшись представлением (6.1), в обозначениях доказательства теоремы 6.1.1 получим

$$\begin{aligned} r \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta}) - w(e^{i\theta})|^p d\theta &= \int_{\Gamma_r} |\Phi(W_r) - \Phi(\widetilde{W}_r)|^p |dz| = \\ &= \int_{\Gamma_r} |\Phi(W_r) - \Phi(\widetilde{W}_r)|^p |z_W dW_r + z_{\overline{W}} d\overline{W}_r| \leqslant \\ &\leqslant C \int_{\Gamma_r} |\Phi(W_r) - \Phi(\widetilde{W}_r)|^p |dW_r|, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где C — константа, не зависящая от r , $W_r = W(re^{i\theta})$, $\widetilde{W}_r(z) = W_r(z/r)$.

Обозначим через $W_r(\zeta) = \varphi_r(\zeta)$ голоморфную функцию, однолистно отображающую единичный круг $|\zeta| < 1$ на область, ограниченную контуром Γ_r , удовлетворяющую нормировке $\varphi_r(0) = 0$, $\varphi_r(1) > 0$.

Функция $\varphi_r(\zeta) \in C_{\alpha}^{k+1}(\overline{D}_{\zeta})$, где $\overline{D}_{\zeta} = \{\zeta : |\zeta| \leqslant 1\}$ (теорема 1.3.1), причем при $r \rightarrow 1$ $\varphi_r(\zeta)$ сходится к тождественному отображению $W \equiv \zeta = \lim_{r \rightarrow 1} \varphi_r(\zeta)$ в норме $C_{\alpha}^{k+1}(\overline{D}_{\zeta})$ [12].

Обозначим:

$$\Psi_r(\zeta) = \Phi(W_r(\zeta)) [\varphi'_r(\zeta)]^{\frac{1}{p}}, \quad \widetilde{\Psi}_r(\zeta) = \Phi(\widetilde{W}_r(\zeta)) [\varphi'_r(\zeta)]^{\frac{1}{p}},$$

тогда

$$\int_{\Gamma_r} |\Phi(W_r) - \Phi(\widetilde{W}_r)|^p |dW_r| = \int_0^{2\pi} |\Psi_r(\zeta) - \widetilde{\Psi}_r(\zeta)|^p d\sigma. \quad (6.7)$$

Поскольку в силу теоремы 6.1.1 $\Phi \in H_p$, а $\varphi'_r(\zeta) \in C_{\alpha}^k(\overline{D}_{\zeta})$, то будем иметь

$$\int_0^{2\pi} |\Psi_r(\zeta)|^p d\sigma, \quad \int_0^{2\pi} |\widetilde{\Psi}_r(\zeta)|^p d\sigma \leqslant C_1, \quad \zeta = e^{i\sigma}, \quad (6.8)$$

где константа C_1 от r не зависит, и

$$\lim_{r \rightarrow 1} |\Psi_r(\zeta) - \widetilde{\Psi}_r(\zeta)| = 0 \quad (6.9)$$

почти всюду на окружности $|\zeta| = 1$.

В силу теоремы Фату (см. [53, с. 133–134]), формул (6.8) и (6.9) имеем

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |\Psi_r(\zeta) - \tilde{\Psi}_r(\zeta)|^p d\sigma = 0. \quad (6.10)$$

Сопоставляя (6.6), (6.7) и (6.10), получим (6.5).

Докажем теперь (6.4). Рассмотрим сначала случай $p \geq 1$.

Из неравенства Минковского (1.3) имеем

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} &\leq \left\{ \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta}) - w(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} + \\ &+ \left\{ \int_0^{2\pi} |w(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

откуда, в силу (6.5),

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} |w(e^{i\theta})|^p d\theta. \quad (6.11)$$

Вместе с тем из теоремы 6.1.3 и теоремы Фату [53, с. 133–134]

$$\int_0^{2\pi} |w(e^{i\theta})|^p d\theta \leq \underline{\lim}_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})|^p d\theta. \quad (6.12)$$

Сопоставляя (6.11) и (6.12), получим (6.5) при $p \geq 1$.

В случае $0 < p < 1$, воспользовавшись неравенством (1.1), получим

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{2\pi} \{ |w(re^{i\theta})|^p - |w(e^{i\theta})|^p \} d\theta \right| \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left| |w(re^{i\theta})|^p - |w(e^{i\theta})|^p \right| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta}) - w(e^{i\theta})|^p d\theta. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (6.5), следует (6.4) при $0 < p < 1$. $\triangleright$

Теорема 6.1.6. Если $w(z) \in H_p(q)$, $p \geq 1$, то имеет место соотношение (формула Грина)

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} w(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dx dy, \quad z = x + iy, \quad (6.13)$$

где $w(z) \equiv w_+(z)$, $z \in \Gamma$, — предельные значения на Γ по некасательным путям, $D_n = \{z : |z| < 1 - \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$.

◁ Рассмотрим последовательность окружностей $\Gamma_n = \{z : |z| = r_n = 1 - \frac{1}{n}\}$. Поскольку $w \in C_{\alpha}^{k+1}(\overline{D}_n)$ (см. [5, с. 152]), то имеет место соотношение (см. [5, с. 71])

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma_n} w(z) dz = \iint_{D_n} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dx dy. \quad (6.14)$$

Далее,

$$\int_{\Gamma_n} w(z) dz = ir_n \int_0^{2\pi} w(r_n e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta, \quad z = re^{i\theta}.$$

Отсюда и из (6.5) имеем

$$\int_{\Gamma_n} w(z) dz \rightarrow \int_{\Gamma} w(z) dz, \quad n \rightarrow \infty.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в (6.14), получим, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dx dy$, и что справедлива формула (6.13). ▷

Замечание 6.1.3. Правую часть формулы (6.13) нельзя заменить на $\iint_D \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dx dy$, поскольку, как показывает нижеследующий пример 6.1.3, вообще говоря, $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \notin L_1(\overline{D})$ даже в простейшем случае постоянного коэффициента $q(z)$. В то же время предел в правой части (6.13) существует!

Пример 6.1.3. Положим в (1.192) $q(z) = \frac{1}{2}$, и пусть $\zeta = \zeta(z)$ — решение уравнения (1.192), гомеоморфно отображающее единичный круг на себя. Тогда $\zeta(z) \in C^{\infty}(\overline{D})$ (см. теорему 1.12.2).

Пусть, далее, $\Phi(\zeta) \in H_{\infty}$ — ограниченная в единичном круге $\overline{D}_{\zeta} = \{\zeta : |\zeta| \leq 1\}$ голоморфная функция такая, что $\int_0^1 \Phi'(re^{i\theta}) dr = \infty$, $\zeta = re^{i\theta}$, для почти всех θ (о существовании таких функций см. [79]). Очевидно, $\Phi'(\zeta) \notin L_1(\overline{D}_{\zeta})$.

Суперпозиция $w(z) = \Phi(\zeta(z)) \in H_\infty(q)$, а поскольку $\zeta(z) \in C^\infty(\overline{D})$ и $\partial_z \zeta \neq 0$ (см. [5, с. 104]), то $\partial_z w(z), \partial_{\bar{z}} w \notin L_1(\overline{D}_z)$.

6.2. Представления второго рода

Следуя [5, с. 167], *представлениями второго рода* называются представления, основанные на формуле Помпейю 1.51:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Представления такого сорта для гладких (в определенном смысле) вплоть до края решений общих эллиптических систем первого порядка в единичном круге были получены в [18]. Для решений же из классов Харди без дополнительных условий на коэффициент $q(z)$ в (1.192), как показывает пример 6.1.3, такого сорта представления невозможны даже в простейшем случае уравнения Бельтрами с постоянным коэффициентом.

Ниже сформулированы достаточные условия на коэффициент $q(z)$ (теоремы 6.2.2–6.2.3), позволяющие получить для решений из классов $H_p(q)$, $p > 1$, уравнения (1.192) представления второго рода. При доказательстве теорем 6.2.2–6.2.3 существенную роль играет представление первого рода (6.1) для решений $w(z)$ уравнения Бельтрами, и важно выполнение критерия, сформулированного в теореме 6.1.1. Как показывает пример 6.1.2, такой критерий не имеет места в общем случае, чем также обусловлены требования (6.3) на коэффициент $q(z)$ в формулировках теорем 6.2.2–6.2.3. Для формулировки этих теорем нам еще потребуется следующее простое утверждение.

Теорема 6.2.1. *Множество $H_p(q)$, $p \geq 1$, при условии $q(z) \in C_\alpha^k(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, является (комплексным) банаховым пространством с нормой*

$$\|w\|_{H_p(q)} = \left[\int_{\Gamma} |w(t)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}}, \quad |dt| = ds, \quad (6.15)$$

где $w(t) \in L_p(\Gamma)$ — некасательные предельные значения $w(z)$ на Γ .

◁ Существование $w(t) \in L_p(\Gamma)$ обосновано в теореме 6.1.3. Что (6.15) — норма — очевидно. Докажем полноту.

Любое решение $w(z)$ уравнения (1.192) представимо в следующем виде (см. [5, с. 104]):

$$w(z) = \Phi(\zeta(z)), \quad (6.16)$$

где $\Phi(\zeta)$ — вполне определенная голоморфная в круге D_ζ функция, $\zeta = \zeta(z)$ — построенный в теореме 1.12.1 гомеоморфизм круга D_z на D_ζ , причем согласно теореме 1.12.2 $\zeta(z) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D_z})$, $z(\zeta) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D_\zeta})$ и

$$|\partial_z \zeta(z)| \geq \text{const} > 0, \quad |\partial_\zeta z(\zeta)| \geq \text{const} > 0. \quad (6.17)$$

Для принадлежности $w(z) \in H_p(q)$ необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(\zeta) \in H_p$ (теорема 6.1.1). Отсюда, из (6.16) и (6.17) получаем

$$c\|\Phi\|_{H_p} \leq \|w\|_{H_p(q)} \leq C\|\Phi\|_{H_p},$$

где константы $c > 0$ и $C > c > 0$ от w и Φ не зависят.

Теперь полнота $H_p(q)$ следует из полноты H_p . $\triangleright$

6.2.1. Формулировка главных результатов.

Теорема 6.2.2. Если в (1.192) $q(z) \in C_\alpha^k(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, $|q(z)| \leq \text{const}(1 - |\zeta(z)|)^{2\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, где $\zeta = \zeta(z)$ — основной гомеоморфизм уравнения (1.192), и решение этого уравнения $w(z) \in H_p(q)$, $p > 1$, то имеет место соотношение

$$w(z) - T_*[q(z)\partial_z w] = \Phi(z) \in H_p, \quad (6.18)$$

где

$$T_*\varphi(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \left[\frac{\varphi(t)}{t-z} - \frac{z\overline{\varphi(t)}}{z\bar{t}-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi(t)}{t} - \frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar{t}} \right) \right] dx dy, \quad t = x+iy,$$

$$\text{Re } w(z)|_{|z|=1} = \text{Re } \Phi(z)|_{|z|=1} \quad \text{почти всюду}, \quad (6.19)$$

$$\text{Im } w(0) = \text{Im } \Phi(0),$$

и функция $\Phi(z)$ однозначно определена функцией $w(z)$.

Обратно, если задана голоморфная функция $\Phi(z) \in H_p$, $p > 1$, то соотношением (6.18) однозначно определяется решение уравнения (1.192) $w(z) \in H_p(q)$, удовлетворяющее условиям (6.19), причем отображение $w \rightarrow w + T_*(q\partial_z w) \equiv (I + P_*)w$ осуществляет линейный изоморфизм банаховых пространств $H_p(q)$ и H_p .

Теорема 6.2.3. Если в (1.192) $q(z) \in C_\alpha^k(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, $|q(z)| \leq \text{const}(1 - |\zeta(z)|)^{2\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, где $\zeta = \zeta(z)$ — основной гомеоморфизм уравнения (1.192), и решение этого уравнения $w(z) \in H_p(q)$, $p > 1$, то имеет место соотношение

$$w(z) - T[q(z)\partial_z w] = \Phi(z) \in H_p, \quad (6.20)$$

где

$$T\varphi(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\varphi(t)}{t-z} dx dy, \quad t = x + iy,$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{w(t)}{t-z} dt, \quad (6.21)$$

$w(t)$ — некасательные предельные значения на Γ функции $w(z)$.

Обратно, если задана голоморфная функция $\Phi(z) \in H_p$, $p > 1$, то соотношением (6.20) однозначно определяется решение уравнения (1.192) $w(z) \in H_p(q)$, удовлетворяющее (2.16), причем отображение $w \rightarrow w - T(q\partial_z w) \equiv (I + P_1)w$ осуществляет линейный изоморфизм банаховых пространств $H_p(q)$ и H_p .

Доказательства теорем 6.2.2–6.2.3 существенно опираются на следующее неравенство, содержащее производную голоморфной функции класса Харди в двойном интеграле (неравенства, содержащие такую производную в одномерном интеграле, известны в немалом количестве, см. [7, с. 95–96]).

Теорема 6.2.4. Если голоморфная функция $\Phi(z) \in H_p$, $p > 1$, то ее производная $\Phi'(z)$ удовлетворяет неравенству

$$\|(1 - |z|)^{2\varepsilon} \Phi'(z)\|_{L_m(\overline{D})} \leq C(\varepsilon, D) \|\Phi(z)\|_{H_p}, \quad (6.22)$$

где $0 < \varepsilon < 1$, $m = 1 + \varepsilon$,

$$C(\varepsilon, D) = \sup_{t \in E} \left[\iint_D \frac{dx dy}{|t - z|^\mu} \right]^{\frac{1}{m}}, \quad z = x + iy, \quad \mu = 2(1 - \varepsilon^2).$$

Как известно, $C(\varepsilon, D)$ — конечная величина (см. [5, с. 54]).

Следствие 6.2.1. Если $\tilde{z} = \lambda z$, $\lambda > 0$, $\tilde{D} = \{\tilde{z} : |\tilde{z}| < \lambda\}$, $\tilde{\Phi}(\tilde{z}) = \Phi(\frac{\tilde{z}}{\lambda})$, то при $0 < \varepsilon < 1$ имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \left\| \left(1 - \left|\frac{\tilde{z}}{\lambda}\right|\right)^{2\varepsilon} \tilde{\Phi}'(\tilde{z}) \right\|_{L_m(\overline{\tilde{D}})} \leq \\ & \leq \lambda^{\frac{p-1}{p} - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{2\varepsilon^2}{1+\varepsilon}} C(\varepsilon, D) \|\tilde{\Phi}(\tilde{z})\|_{L_p(\tilde{\Gamma})}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

где $\tilde{\Gamma} = \partial\tilde{D}$.

Следствие 6.2.2. Если в (1.192) $q(z) \in C_\alpha^k(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, $|q(z)| \leq \text{const}(1 - |\zeta(z)|)^{2\varepsilon}$, где $\zeta = \zeta(z)$ — основной гомеоморфизм уравнения (1.192), и решение этого уравнения $w(z) \in H_p(q)$, $p > 1$, то $q(z)\partial_z w, \partial_{\bar{z}} w \in L_m(\overline{D})$, $m = 1 + \varepsilon$ при $0 < \varepsilon < 1$, и имеет место оценка

$$\|q(z)\partial_z w\|_{L_m(\overline{D})} = \|\partial_{\bar{z}} w\|_{L_m(\overline{D})} \leq \text{const} \|w\|_{H_p(q)}, \quad (6.24)$$

где константа от w не зависит.

6.2.2. Вспомогательные построения. Прежде чем переходить к доказательству основных результатов этого параграфа, приведем следующее вспомогательное утверждение, обобщающее классическую теорему В. И. Смирнова [13, с. 83], которое может представлять некоторый самостоятельный интерес.

Лемма 6.2.1. Если $w(z) \in H_s(q)$, $s > 1$, в уравнении (1.192) $q(z) \in C_\alpha^k(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, и $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{w(t)}{t-z} dt \in H_p$, $p > s$, то $w(z) \in H_p(q)$.

Перед тем как доказать лемму 6.2.1, сделаем несколько замечаний о преобразовании Гильберта.

Используя (6.16) и формулу Гильберта для голоморфных функций (1.92) (см. [13, с. 140–141]), можно записать *обобщенную формулу Гильберта*, выражающую мнимую часть $v(z)$ граничных значений функции $w(z) = u(z) + iv(z) \in H_p(q)$, $p > 1$, через вещественную часть $u(z)$ ее граничных значений:

$$v(z) = \mathcal{H}^q u(z) \equiv -\frac{1}{\pi} \int_\Gamma \frac{u(t(\tau))}{\tau - \zeta(z)} d\tau + v_0 + iu_0, \quad z \in \Gamma, \quad (6.25)$$

где $\zeta = \zeta(z)$, $\tau = \tau(t)$ — построенный в теореме 1.12.1 гомеоморфизм единичного круга (а также его сужение на границу круга), $t = t(\tau)$ — обратное отображение, v_0, u_0 — вещественные постоянные.

Отметим одно очевидное следствие формулы Гильберта.

Лемма 6.2.2. *Если $f(t) \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$, — произвольная вещественнозначная функция, то интеграл в смысле главного значения*

$$\int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt = \psi(z) + iC,$$

где $\psi(z)$ — вещественнозначная функция переменной $z \in \Gamma$ класса $L_p(\Gamma)$, C — некоторая вещественная постоянная.

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.2.1. Переходя к пределу при $z \rightarrow \Gamma$ и используя формулы Сохоцкого (1.88), будем иметь

$$w(z) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t-z} dt = 2\Phi(z) \in L_p(\Gamma). \quad (6.26)$$

Используя обозначения формулы (6.25) и учитывая лемму 6.2.2, из (6.26) получим

$$u(z) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{H}^q u(t)}{t-z} dt = f(z) = 2 \operatorname{Re} \Phi(z) + w_0 \in L_p(\Gamma), \quad (6.27)$$

где w_0 — некоторая комплексная постоянная.

Рассмотрим подробнее участвующий в (6.27) повторный сингулярный интеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{d\nu}{\nu-z} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta(\tau))}{\tau-\zeta(\nu)} d\tau. \quad (6.28)$$

Поскольку в силу теоремы 1.12.2 $t = t(\tau)$, и обратное отображение $\tau = \zeta(\mu) \in C_{\alpha}^{k+1}(\Gamma)$, то во внутреннем интеграле можно сделать замену переменной интегрирования по формуле $\tau = \zeta(\mu)$ [11, с. 22]:

$$\int_{\Gamma} \frac{u(\zeta(\tau))}{\tau-\zeta(\nu)} d\tau = \int_{\Gamma} \frac{u(\mu)\zeta'(\mu)}{\zeta(\mu)-\zeta(\nu)} d\mu.$$

Введем обозначение:

$$k(\mu, \nu) = \frac{\zeta'(\mu)}{\zeta(\mu)-\zeta(\nu)} - \frac{1}{\mu-\nu}.$$

Поскольку $\zeta'(\mu) \in C_\alpha^k(\Gamma)$, то имеет место оценка (см. [11, с. 21]):

$$|k(\mu, \nu)| \leq \frac{c}{|\mu - \nu|^\lambda}, \quad (6.29)$$

где $c > 0$, $0 < \lambda < 1$ — некоторые константы.

С учетом введенных обозначений будем иметь

$$\int_\Gamma \frac{u(\zeta(\tau))}{\tau - \zeta(\nu)} d\tau = \int_\Gamma \frac{u(\mu)}{\mu - \nu} d\mu + \int_\Gamma k(\mu, \nu) u(\mu) d\mu. \quad (6.30)$$

Подставив это равенство в (6.28), получим

$$\int_\Gamma \frac{d\nu}{\nu - z} \int_\Gamma \frac{u(\mu)}{\mu - \nu} d\mu + \int_\Gamma \frac{d\nu}{\nu - z} \int_\Gamma k(\mu, \nu) u(\mu) d\mu. \quad (6.31)$$

Поскольку квадрат оператора

$$S_\Gamma = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\bullet}{\nu - z} d\nu : L_s(\Gamma) \rightarrow L_s(\Gamma), \quad s > 1,$$

есть тождественный оператор [11, с. 16, 23–24], то первое слагаемое в (6.31) равно $-\pi^2 u(z)$. Второе слагаемое в (6.31) в силу (6.29) и ограниченности сингулярного интеграла в $L_q(\Gamma)$, $q > 1$, есть оператор P_Γ , действующий из $L_s(\Gamma)$ в $L_q(\Gamma)$, где $\frac{1}{q} = \frac{1}{s} - (1 - \lambda)$ [63, с. 141].

Итак, соотношение (6.27) принимает вид

$$2u(z) - \frac{1}{\pi^2} P_\Gamma u(z) = f(z) + \text{const} \in L_p(\Gamma). \quad (6.32)$$

Ясно, что увеличивая (если надо) λ ($\lambda < 1$) и, возможно, несколько уменьшив s , можно добиться того, что q в соотношении $\frac{1}{q} = \frac{1}{s} - n(1 - \lambda)$, где n — некоторое натуральное число, будет сколь угодно велико ($q \geq p$). Формула $\frac{1}{q} = \frac{1}{s} - n(1 - \lambda)$ связывает показатели суммируемости в области определения $L_s(\Gamma)$ и области значений $L_q(\Gamma)$ для n -й итерации P_Γ^n оператора P_Γ , откуда получим $u(z) \in L_p(\Gamma)$.

Из (6.25) и (6.30) получим $v(z) \in L_p(\Gamma)$, откуда $w(z) \in H_p(q)$ (теорема 6.1.3). $\triangleright$

6.2.3. Доказательства главных результатов.

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.2.4. Представим $\Phi(z)$ по формуле Коши — Лебега (см. теорему 1.7.5)

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi(t)}{t-z} dt, \quad z \in D, \quad (6.33)$$

где $\Phi(t) \in L_p(\Gamma)$ — некасательные предельные значения $\Phi(z)$ на Γ . Из (6.33) получим

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi(t)}{(t-z)^2} dt, \quad z \in D. \quad (6.34)$$

Будем пока считать, что $1 < p \leq \frac{\varepsilon}{2}$, β — некоторое действительное число, такое, что $0 < \beta < 2$.

Применяя неравенство Гёльдера с показателями m , $r = \frac{p}{\alpha}$ и $\lambda = \frac{p}{p-1}$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda} = 1$, $\alpha = 1 - \frac{p}{m} \geq \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$, из (6.34) получим

$$\begin{aligned} (2\pi)^m \iint_D |(1-|z|)^{2\varepsilon} \Phi'(z)|^m dx dy &\leq \\ &\leq \iint_D \left(\int_{\Gamma} |\Phi(t)| |t-z|^{-2+2\varepsilon} ds \right)^m dx dy \leq \\ &\leq \iint_D \left[\int_{\Gamma} |\Phi(t)|^{\alpha} |t-z|^{2\varepsilon-\beta} |\Phi(t)|^{1-\alpha} |t-z|^{-2+\beta} ds \right]^m dx dy \leq \quad (6.35) \\ &\leq \|\Phi\|_{L_p(\Gamma)}^{\alpha m} \iint_D \left[\int_{\Gamma} |t-z|^{(2\varepsilon-\beta)\lambda} ds \right]^{\frac{m}{\lambda}} \times \\ &\times \left[\int_{\Gamma} |\Phi(t)|^p |t-z|^{(\beta-2)m} ds \right] dx dy, \quad z = x + iy, \quad |dt| = ds. \end{aligned}$$

Полагая в (6.35) $\beta = 2\varepsilon$, получим (6.22) при $1 < p \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Теперь, очевидно, можно снять это ограничение. ▷

Из проделанных рассуждений следствие 6.2.1 очевидно.

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 6.2.2. Поскольку функция $w(z)$ представима в виде суперпозиции $w(z) = \Phi(\zeta(z))$, где $\Phi(\zeta) \in H_p$

в круге $D_\zeta = \{\zeta : |\zeta| \leq 1\}$, то требуемое утверждение непосредственно следует из теорем 1.12.2 и 6.2.4. $\triangleright$

Из теоремы 1.4.7 непосредственно следует

Лемма 6.2.3. *Обозначим: $\Gamma_r = \{z : |z| = r \leq 1\}$. Если $f \in L_m(\overline{D})$, $1 < m \leq 2$, то $T_* f \in L_\gamma(\Gamma_r)$, $0 < r \leq 1$, где γ — такое произвольное число, что $1 < \gamma < \frac{m}{2-m}$, а также имеет место оценка*

$$\|T_* f\|_{L_\gamma(\Gamma_r)} \leq M_{m,\gamma} \|f\|_{L_m(\overline{D})}, \quad (6.36)$$

где константа $M_{m,\gamma}$ от f и r не зависит.

$\triangleleft$ **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.2.2.** Поскольку в силу следствия 6.2.2 $q(z)\partial_z w \in L_m(\overline{D})$, $m = 1 + \varepsilon$, то из (1.192) имеем

$$\partial_{\bar{z}} [w - T_*(q\partial_z w)] = 0,$$

(см. [5, с. 50, 294]) и выполнено соотношение (6.18), где $\Phi(z)$ — голоморфная в D функция. Покажем, что $\Phi(z) \in H_p$.

В силу леммы 6.2.3 и $w \in H_p(q)$ имеем $\Phi \in H_s$ при некотором $s > 1$, $s \leq p$. Таким образом, $\Phi(z)$ имеет некасательные предельные значения почти всюду на Γ ; $\Phi(t) \in L_s(\Gamma)$ (теорема 1.7.2).

Очевидно, $\operatorname{Re} \{T_* [q\partial_z w](t)\} = 0$ для почти всех $t \in \Gamma$ (см. лемму 2.2.3), поэтому функция $\Phi \in H_s$ является решением краевой задачи Римана — Гильберта для голоморфных функций (в данном частном случае задачи Шварца):

$$\operatorname{Re} \{\Phi(t)\} = \operatorname{Re} \{w(t)\} \in L_p(\Gamma).$$

Отсюда и из (6.19) имеем $\Phi \in H_p$ и однозначную определенность функции $\Phi(z)$ (см. лемму 1.10.2).

Пусть теперь задана голоморфная функция $\Phi \in H_p$. Обозначим через $\zeta = \zeta(z) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_z)$ основной гомеоморфизм уравнения (1.192) круга $\overline{D}_z$ на единичный круг $\overline{D}_\zeta$, а через $z = z(\zeta) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_\zeta)$ — обратное отображение.

Рассмотрим задачу Шварца для голоморфной в D_ζ функции $\tilde{\Phi}(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{\Phi}(\zeta)|_{|\zeta|=1} &= \operatorname{Re} \Phi(z(\zeta))|_{|\zeta|=1} \in L_p(\Gamma_\zeta), \\ \operatorname{Im} \tilde{\Phi}(0) &= \operatorname{Im} \Phi(0). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Задача (6.37) имеет единственное решение $\tilde{\Phi}(\zeta) \in H_p$ (лемма 1.10.2).

Очевидно, что функция $w(z) = \tilde{\Phi}(\zeta(z))$ есть решение уравнения (1.192), удовлетворяющее соотношению (6.18) с данной функцией $\Phi(z) \in H_p$, и отображение $(I + P_*) : H_p(q) \rightarrow H_p$ биективно.

Поскольку выполнены соотношения (6.19), то если последовательность решений уравнения (1.192) $\{w_n\}_{n=1}^\infty \subset H_p(q)$ сходится к решению $w(z) \in H_p(q)$ по норме пространства $H_p(q)$, то в силу непрерывности сингулярного интеграла в (1.120) в пространстве $L_p(\Gamma)$, $p > 1$ (см. лемму 1.10.4), последовательность соответствующих по формуле (6.18) голоморфных функций $\{\Phi_n(z)\}_{n=1}^\infty \subset H_p$ сходится по норме пространства H_p к функции $\Phi(z) \in H_p$, соответствующей по формуле (6.18) решению $w(z)$ и отображение $(I + P_*) : H_p(q) \rightarrow H_p$ непрерывно. Непрерывность обратного отображения следует из теоремы Банаха. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.2.3. Аналогично доказательству теоремы 6.2.2, поскольку в силу следствия 6.2.2 $q(z)\partial_z w \in L_m(\overline{D})$, $m = 1 + \varepsilon$, то из (1.192) имеем (см. [5, с. 50])

$$\partial_{\bar{z}}[w - T(q\partial_z w)] = 0$$

и имеет место соотношение (6.20), где $\Phi(z)$ — голоморфная в D функция. Покажем, что $\Phi(z) \in H_p$, и справедливо соотношение (6.21).

В силу леммы 6.2.3 и $w \in H_p(q)$ имеем $\Phi \in H_s$ при некотором $s > 1$, $s \leq p$. Таким образом, $\Phi(z)$ имеет некасательные предельные значения почти всюду на Γ : $\Phi(t) \in L_s(\Gamma)$ (теорема 1.7.2) и представима интегралом Коши — Лебега (теорема 1.7.5):

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi(t)}{t - z} dt. \quad (6.38)$$

С учетом леммы 2.2.1 положим в равенстве (6.20) $z \in \Gamma$ и применим к обеим частям равенства оператор

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bullet}{z - \zeta} d\zeta, \quad \zeta \in D.$$

Поскольку $w(t) \in L_p(\Gamma)$ (теорема 6.1.3), а

$$\int_{\Gamma} \frac{T(q(z)\partial_z w)}{z - \zeta} dz = 0$$

при $\zeta \in D$ (см. [5, с. 69]), получим

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(z)}{z - \zeta} dz. \quad (6.39)$$

Из (6.38) и (6.39), применяя формулы Сохоцкого (1.88), будем иметь

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}w(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(z)}{z - t} dz \in L_p(\Gamma). \quad (6.40)$$

Таким образом, по теореме В. И. Смирнова 1.7.6 $\Phi(z) \in H_p$. Первая часть теоремы 6.2.3 доказана.

Для доказательства второй части достаточно показать, что уравнение (6.20) при любой функции $\Phi(z) \in H_p$, $p > 1$, однозначно разрешимо в $H_p(q)$, и что оператор $(I + P_1) : H_p(q) \rightarrow H_p$ непрерывен, т. е. что имеет место оценка

$$\|(I + P_1)w\|_{H_p} \leq \text{const} \|w\|_{H_p(q)}. \quad (6.41)$$

Непрерывность обратного оператора тогда будет следовать из теоремы Банаха.

Оценка (6.41) следует из (6.21) и непрерывности сингулярного интеграла в $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$ (см. теорему 1.8.8).

Покажем сначала, что при произвольной голоморфной функции $\Phi(z) \in H_p$ уравнение (6.20) имеет единственное решение $w \in H_p(q)$ при $p > 1$ и достаточно близком к единице.

Отметим, что если Φ — полином, то, дифференцируя (6.20) по z , для нахождения $\varphi(z) = \partial_z w(z)$ получим двумерное сингулярное интегральное уравнение

$$\varphi(z) - \Pi(q(z)\varphi) = \Phi'(z), \quad \Pi f(z) = \partial_z T f(z). \quad (6.42)$$

Аналогично доказательству теоремы 1.12.1 из (6.42) получим единственное решение $\partial_z w(z) = \varphi(z) \in L_q(\overline{D})$ при некотором $q > 2$. Далее, из (6.20) получим единственное решение уравнения (1.192) $w(z) \in W_q^1(\overline{D}) \subset C_{\frac{q-2}{q}}(\overline{D})$, удовлетворяющее (6.20), (6.21).

Заметим, что отсюда следует, что однородное уравнение (6.20) (при $\Phi(z) \equiv 0$) имеет только нулевое решение.

Таким образом, уравнение (6.20) разрешимо в $H_p(q)$ для $\Phi(z)$, принадлежащего плотному в H_p подмножеству («плотно разрешимо»).

Для окончания доказательства в случае $p > 1$ и достаточно близком к единице теперь достаточно показать, что это уравнение «корректно разрешимо», т. е. для любого его решения $w(z) \in H_p(q)$ имеет место оценка

$$\|w\|_{H_p(q)} \leq \text{const} \|(I + P_1)w\|_{H_p}, \quad (6.43)$$

где константа от w не зависит (см., например, [42, с. 10–11]).

Корректную разрешимость (оценку (6.43)) установим не для уравнения (6.20), а для эквивалентного уравнения, полученного после преобразования гомотетии

$$\tilde{z} = \lambda z, \quad \lambda > 0. \quad (6.44)$$

Все объекты, относящиеся к преобразованной переменной $\tilde{z}$ далее будем помечать волной.

Уравнение (6.20) (как и (1.192)) после преобразования (5.57) сохранит свою структуру:

$$\tilde{w} - \tilde{T}(\tilde{q}(\tilde{z})\partial_{\tilde{z}}\tilde{w}) = \tilde{\Phi}(\tilde{z}), \quad (6.45)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\tilde{z}) &= w\left(\frac{\tilde{z}}{\lambda}\right), \quad \tilde{q}(\tilde{z}) = q\left(\frac{\tilde{z}}{\lambda}\right), \quad \tilde{\Phi}(\tilde{z}) = \Phi\left(\frac{\tilde{z}}{\lambda}\right), \\ \tilde{T}\varphi(\tilde{z}) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\tilde{D}} \frac{\varphi(\tilde{t})}{\tilde{t} - \tilde{z}} d\tilde{x} d\tilde{y}, \quad \tilde{t} = \tilde{x} + i\tilde{y}, \quad \tilde{D} = \{\tilde{z} : |\tilde{z}| < \lambda\}, \\ \tilde{\Phi}(\tilde{z}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{\tilde{w}(\tilde{t})}{\tilde{t} - \tilde{z}} d\tilde{t}, \quad \tilde{\Gamma} = \partial\tilde{D}. \end{aligned}$$

Для T имеет место неравенство (1.12). Проследим за поведением констант при преобразовании (6.44) в неравенствах (6.24) и (1.12) для T .

Обозначим: $\tilde{\zeta}(\tilde{z}) = \lambda \zeta\left(\frac{\tilde{z}}{\lambda}\right)$. Если $w(z) \in H_p(q)$, то $\tilde{w}(\tilde{z}) = \tilde{\Psi}(\tilde{\zeta}(\tilde{z}))$, где $\tilde{\Psi}(\tilde{\zeta}) = \Psi(\lambda\zeta)$, $\Psi(\zeta) \in H_p$.

Поскольку $\partial_{\tilde{z}}\tilde{w} = \tilde{\Psi}'(\tilde{\zeta}(\tilde{z}))\tilde{\zeta}_{\tilde{z}}(\tilde{z})$, $\tilde{\zeta}_{\tilde{z}}(\tilde{z}) = \zeta_z\left(\frac{\tilde{z}}{\lambda}\right)$, $\tilde{\zeta}_{\tilde{z}}(\tilde{z}) = \zeta_{\tilde{z}}\left(\frac{\tilde{z}}{\lambda}\right)$, $|\tilde{q}(\tilde{z})| \leq \text{const} \left(1 - \left|\frac{\tilde{\zeta}(\tilde{z})}{\lambda}\right|\right)^{2\varepsilon}$, а $\zeta(z) \in C_{\alpha}^{k+1}(\overline{D})$, то с учетом (6.23) получаем

$$\|\tilde{q}(\tilde{z})\partial_{\tilde{z}}\tilde{w}\|_{L_m(\overline{\tilde{D}})} \leq \lambda^{\left(\frac{p-1}{p} + \frac{2\varepsilon(\varepsilon-1)}{1+\varepsilon}\right)} \text{const} \|\tilde{w}\|_{L_p(\tilde{\Gamma})}, \quad (6.46)$$

где $m = 1 + \varepsilon$, и const от λ не зависит.

Для оператора T имеем оценку (см. [5, с. 68])

$$\|Tf\|_{L_\gamma(\Gamma)} \leq \pi^{-\gamma} [M(q\mu; D)]^{\frac{1}{q}} [M(1 - \gamma\mu; \Gamma)]^{\frac{1}{\gamma}} \|f\|_{L_m(\overline{D})}, \quad (6.47)$$

где $1 < m < 2$, $1 < \gamma < \frac{m}{2-m}$, $2\mu = \frac{1}{\gamma} - \frac{2}{m} + 1$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{q} = 1$,

$$M(\beta; \Gamma) = \sup_{z \in E} \int_{\Gamma} |z - \zeta|^{-\beta} |d\zeta|,$$

$$M(\beta; D) = \sup_{z \in E} \iint_D |z - \zeta|^{-2+\beta} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Отметим, что

$$\widetilde{M}(\beta; \widetilde{\Gamma}) = \lambda^{1-\beta} M(\beta; \Gamma), \quad \widetilde{M}(\beta; \widetilde{D}) = \lambda^\beta M(\beta; D),$$

поэтому из (6.47) будем иметь

$$\|\widetilde{T}\widetilde{f}\|_{L_\gamma(\widetilde{\Gamma})} \leq \text{const } \lambda^{2\mu} \|\widetilde{f}\|_{L_m(\widetilde{D})}, \quad (6.48)$$

где const от λ не зависит.

Полагая в (6.48) $\gamma = p$, $1 < p < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{m}{2-m}$, $\widetilde{f} = \widetilde{q}(\widetilde{z})\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{w}$, и учитывая (6.46), получим

$$\|\widetilde{T}(\widetilde{q}(\widetilde{z})\partial_{\widetilde{z}}\widetilde{w})\|_{L_p(\widetilde{\Gamma})} \leq \text{const } \lambda^{\frac{2\varepsilon^2}{1+\varepsilon}} \|\widetilde{w}\|_{L_p(\widetilde{\Gamma})}, \quad (6.49)$$

где const от λ не зависит.

Таким образом, при достаточно малом $\lambda > 0$ будем иметь

$$\|(I + \widetilde{P}_1)\widetilde{w}\|_{L_p(\widetilde{\Gamma})} \geq C \|\widetilde{w}\|_{L_p(\widetilde{\Gamma})}, \quad (6.50)$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от $\widetilde{w}$.

Итак, если обозначить через $\widetilde{H}_p$, $\widetilde{H}_p(q)$ образы банаховых пространств H_p и $H_p(q)$ при гомететии (6.44) с соответствующими нормами, совпадающими с $L_p(\widetilde{\Gamma})$, то из (6.50) следует корректная плотная разрешимость уравнения (6.45) на банаховом пространстве $\widetilde{H}_p$ в банаховом пространстве $\widetilde{H}_p(q)$, а следовательно, $(I + \widetilde{P}_1) : \widetilde{H}_p(q) \rightarrow \widetilde{H}_p$ — линейный изоморфизм $\widetilde{H}_p(q)$ и $\widetilde{H}_p$, откуда следует утверждение теоремы при $1 < p < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, т. е. при любом $p > 1$ и близком к единице.

Пусть теперь в (6.20) $\Phi \in H_p$, где $p > 1$ произвольно. Поскольку $H_p \subset H_s$, $1 < s < p$, то по доказанному уравнение (6.20) имеет единственное решение $w(z) \in H_s(q)$, где $s > 1$ и достаточно близко к единице. По уже доказанному при этом голоморфная функция $\Phi \in H_p$ будет связана с полученной функцией $w(z) \in H_s(q)$ формулой (6.21), откуда, по лемме 6.2.1, $w(z) \in H_p(q)$.

Итак, уравнение (6.20) при любом $\Phi \in H_p$ имеет единственное решение $w(z) \in H_p(q)$, и теорема 6.2.3 доказана полностью. $\triangleright$

Задача Римана — Гильберта в классах Харди для уравнения (1.192) ставится так же, как и в параграфе 5.1. В предположениях теоремы 1.12.2 с помощью представления (6.1) она тривиальным образом сводится к эквивалентной задаче Римана — Гильберта в классах Харди для голоморфных функций и для задачи Римана — Гильберта в классах Харди для уравнения (1.192) имеет место теорема, дословно повторяющая теорему 1.10.1, только в формулировке под $\zeta = \zeta(z)$ следует понимать основной гомеоморфизм уравнения (1.192), а классы E_p следует заменить на $H_p(q)$.

6.3. Историко-библиографические замечания

Глава 6 основана на статье [39].

Отметим, что при доказательстве теоремы 6.2.3 в неравенстве (6.48) так же, как и при доказательстве теоремы 5.3.3, использовано свойство уменьшения нормы оператора T при гомотетии (6.44).

ГЛАВА 7

НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ

1. Весьма интересным и актуальным является вопрос расширения классов границ области G и коэффициентов краевого условия задачи Римана — Гильберта в той постановке, которая рассматривается в данной книге. Здесь ничего нет даже в голоморфном случае.

2. Разработать теорию классов $H_p(A, B)$, $E_p(A, B)$ и $BMO(A, B)$ в случае сингулярных коэффициентов уравнения (1.53), т. е. когда $A(z)$, $B(z)$ допускают точечные особенности не ниже первого порядка. Отправным материалом здесь, помимо содержания данной книги, могут послужить работы [10, 65, 81].

3. При наличии теории, упомянутой в предыдущем пункте, в рамках этой теории исследовать задачу Римана — Гильберта для уравнения (1.53) с сингулярными коэффициентами.

4. Исследовать классы BMO_f обобщенных аналитических функций с более обширным, чем в данной книге, набором функций f . Рассмотреть при этом задачу Римана — Гильберта в этих классах.

5. Существует ли контрпример, аналогичный примеру 6.1.2, для классов BMO решений уравнения Бельтрами? Как ввести такие классы — очевидно и для них справедливы аналоги всех основных результатов главы 6.

6. Развить теорию классов Смирнова для решений уравнения Бельтрами. В случае негладкой границы эта задача не сводится конформным либо квазиконформным отображением к соответствующим классам Харди, так что нетривиальна.

7. Весьма плодотворна теория решений уравнения Бельтрами с точечным вырождением эллиптичности [69]. Развить теорию классов Харди, Смирнова и BMO для решений уравнения Бельтрами в случае точечного вырождения эллиптичности.

8. Изучение аналогов классов Харди, Смирнова и BMO для общих эллиптических систем (1.191) даже при «хороших» коэффициентах — задача весьма не простая, поскольку, вообще говоря, не су-

ществует представления решений типа (6.1) с «хорошим» гомеоморфизмом $W = W(z)$ [4]. В случае же просто измеримых коэффициентов $q_1(z)$, $q_2(z)$, как показывает пример 6.1.2, ситуация неясная даже в случае уравнения Бельтрами. Так что в этом направлении поле деятельности преобширнейшее.

9. Отыскание марковского процесса, который мог бы в теории обобщенных аналитических функций сыграть роль винеровского процесса в вероятностном подходе к классам Харди и BMO голоморфных функций [77], позволило бы развить содержательный вероятностный подход к классам $H_p(A, B)$ и $BMO(A, B)$.

10. Для уравнения Бельтрами такой процесс найден [20], так что задача развить вероятностный подход к классам Харди и BMO решений уравнения Бельтрами вполне «решаемая».

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Д. Теория кривых на основе приближения кривых ломаными // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 2, вып. 3 (19).—С. 182–184.
2. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям.—М.: Мир, 1969.—134 с.
3. Белинский П. П. Общие свойства квазиконформных отображений.—Новосибирск: Наука, 1974.—99 с.
4. Боярский Б. В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб.—1957.—Т. 43, № 4.—С. 451–503.
5. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—628 с.
6. Виноградов В. С. О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения // Докл. АН СССР.—1978.—Т. 241, № 2.—С. 272–274.
7. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции.—М: Мир, 1984.—469 с.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.—640 с.
9. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.—М.: Наука, 1966.—630 с.
10. Гончаров А. Л., Климентов С. Б., Усманов З. Д. Аналог теоремы Лиувилля для одного класса систем типа Коши — Римана с сингулярными коэффициентами // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 4.—С. 7–16.
11. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.—Кишинев: Штиинца, 1973.—426 с.
12. Данилов В. А. Оценки искажения квазиконформного отображения в пространстве типа C_α^m // Сиб. мат. журн.—1973.—Т. 14, № 3.—С. 525–535.
13. Данилюк И. И. Нерегулярные граничные задачи на плоскости.—М.: Наука, 1975.—295 с.
14. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1.—М.: Мир, 1965.—615 с.
15. Каляниченко С. И., Климентов С. Б. Классы Харди решений уравнения Бельтрами // Тр. участников Междунар. шк.-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова.—Ростов н/Д.: Изд-во ЦВВР, 2006.—С. 127–128.
16. Каляниченко С. И., Климентов С. Б. Классы Харди решений уравнения Бельтрами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки.—2008.—№ 1.—С. 7–10.
17. Климентов С. Б. О структуре множества всех изометрических преобразований диффеоморфной кругу поверхности положительной кривизны // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 262, № 1.—С. 19–21.
18. Климентов С. Б. Об одном способе построения решений краевых задач теории изгибаний поверхностей положительной кривизны // Укр. геометрический. сб.—1986.—Вып. 29.—С. 56–82. Engl. transl.: On a method of constructing the solutions of boundary-value problems of the theory of bendings of surfaces of positive curvature // J. Math. Sci.—1990.—Vol. 51, № 2.—P. 2230–2248.

19. Климентов С. Б. О показателе суммируемости производных решения эллиптической системы первого порядка: тезисы докладов всесоюзной конф. по геометрии и анализу.—Новосибирск, 1989.—С. 43.
20. Климентов С. Б. Квазиконформные мартингалы // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки.—1997.—№ 2.—С. 21–23.
21. Климентов С. Б. Вероятностное представление решения краевой задачи Римана — Гильберта для голоморфных функций // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки.—2000.—№ 4.—С. 7–8.
22. Климентов С. Б. Вероятностное представление решения краевой задачи Римана — Гильберта для уравнения Бельтрами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки.—2000.—№ 4.—С. 9–12.
23. Климентов С. Б. Вероятностное представление решений однородных линейных эллиптических систем первого порядка // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки.—2001.—№ 3.—С. 100–102.
24. Климентов С. Б. Классы Харди обобщенных аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки.—2003.—№ 3.—С. 6–10.
25. Климентов С. Б. Стохастическая краевая задача Римана — Гильберта в конформных мартингальных классах H_p и BMO // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки.—2004.—№ 3.—С. 6–12.
26. Климентов С. Б. Краевая задача Римана — Гильберта в классах Харди обобщенных аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки.—2004.—№ 4.—С. 3–5.
27. Климентов С. Б. Классы Смирнова обобщенных аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки.—2005.—№ 1.—С. 13–17.
28. Климентов С. Б. Классы BMO обобщенных аналитических функций // Владикавк. мат. журн.—2006.—Т. 8, вып. 1.—С. 27–39.
29. Климентов С. Б. Теорема двойственности для классов Харди обобщенных аналитических функций // Комплексный анализ. Теория операторов. Мат. моделирование.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2006.—С. 63–73.
30. Климентов С. Б. Теорема двойственности Фейффермана для обобщенных аналитических функций // Тр. участников Междунар. шк.-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова.—Ростов н/Д.—2006.—С. 129–130.
31. Климентов С. Б. Представления второго рода для классов Харди и BMO обобщенных аналитических функций // Исслед. по современному анализу и мат. моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2008.—С. 38–54.
32. Климентов С. Б. Представления второго рода для классов LMO обобщенных аналитических функций // Исслед. по диф. уравнениям и мат. моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2009.—С. 61–68.
33. Климентов С. Б. Краевые задачи Римана и Гильберта в классе BMO для аналитических функций // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, вып. 4.—С. 28–38.
34. Климентов С. Б. Задача Гильберта для голоморфных функций в классах Смирнова // Исслед. по мат. анализу, диф. уравнениям и их прил.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2010.—С. 252–263.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 4.)
35. Климентов С. Б. Краевая задача Римана — Гильберта в классе BMO для обобщенных аналитических функций // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, вып. 1.—С. 13–20.

36. Климентов С. Б. Задача Гильберта для голоморфных функций в классах Смирнова в области с радоновской границей // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки.—2011.—№ 3.—С. 14–18.
37. Климентов С. Б. Специальное представление второго рода для обобщенных аналитических функций класса Смирнова // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки.—2012.—№ 2.—С. 12–18.
38. Климентов С. Б. Задача Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функций в классах Смирнова // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, вып. 3.—С. 63–73.
39. Климентов С. Б. Представления «второго рода» для классов Харди решений уравнения Бельтрами // Сиб. мат. журн.—2014.—Т. 55, № 2.—С. 324–340.
40. Климентов С. Б. Аналог теоремы Келлога для обобщенного уравнения Бельтрами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки.—2013.—№ 6.
41. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1976.—544 с.
42. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве.—М.: Наука, 1971.—104 с.
43. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p .—М.: Мир, 1984.—364 с.
44. Мазья В. Г., Шапошникова Т. О. Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций.—Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1986.—404 с.
45. Манджavidзе Г. Ф. Применение теории обобщенных аналитических функций к изучению граничных задач со смещением // Дифференциальные и интегральные уравнения, краевые задачи.—Тбилиси: Изд-во Тбилисского гос. ун-та, 1979.—С. 165–186.
46. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.—Новосибирск: Наука, 1977.—424 с.
47. Мусаев К. М. Некоторые классы обобщенных аналитических функций // Изв. Акад. наук Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук.—1971.—№ 2.—С. 40–46.
48. Мусаев К. М. О некоторых экстремальных свойствах обобщенных аналитических функций // Докл. АН СССР.—1972.—Т. 203, № 2.—С. 289–292.
49. Мусаев К. М. Теоремы типа Ф. Рисса в теории обобщенных аналитических функций // Специальные вопросы теории функций.—Баку: Изд-во ЕЛМ, 1980.—С. 137–144.
50. Мусаев К. М. Об ограниченности сингулярного интеграла Коши в классе обобщенных аналитических функций // Изв. Акад. наук Азерб. ССР. Математика. Физика. Техника.—1986.—Т. 7, № 6.—С. 3–8.
51. Мусаев К. М., Гасанова Т. Х. Об аннуляторах некоторых классов обобщенных аналитических функций // Тр. ИММ АН Азербайджана.—1998.—Т. 7 (16).—С. 162–168.
52. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1968.—511 с.
53. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной.—М.: Наука, 1974.—480 с.
54. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.—М.: Наука, 1969.—480 с.
55. Пекарский А. А. Наилучшие рациональные приближения в комплексной области // Тр. Мат. ин-та АН СССР.—1989.—Т. 190.—С. 222–233.

56. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными.—М.: Физматгиз, 1961.—400 с.
57. Решетняк Ю. Г. Метод ортогональных проекций в теории кривых // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия.—1957.—№ 3.—С. 22–26.
58. Решетняк Ю. Г. Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны // Сиб. мат. журн.—1960.—Т. 1, № 3.—С. 88–116.
59. Симоненко И. Б. Краевая задача Римана с непрерывным коэффициентом // Докл. АН СССР.—1959.—Т. 124, № 2.—С. 278–281.
60. Симоненко И. Б. Краевая задача Римана для n пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах L_p с весами // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1964.—Т. 28, № 2.—С. 277–306.
61. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.—М.: Наука, 1988.—333 с.
62. Солдатов А. П. Пространство Харди решений эллиптических систем первого порядка // Докл. РАН.—2007.—Т. 416, № 1.—С. 26–30.
63. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.—М.: Мир, 1973.—342 с.
64. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии.—М.: Мир, 1970.—412 с.
65. Усманов З. Д. Обобщенные системы Коши — Римана с сингулярной точкой.—Душанбе: ТаджикНИИИТИ, 1993.—245 с.
66. Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства.—М.: ГИИЛ, 1948.—456 с.
67. Baratchart L., Leblond J., Rigat S., Russ E. Hardy spaces of the conjugate Beltrami equation // J. Funct. Anal.—2010.—Vol. 259, № 2.—P. 384–427.
68. Bramanti M., Brandolini L. Estimates of BMO type for singular integrals on spaces of homogeneous type and applications to hypoelliptic pdes // Rev. Mat. Iberoamericana.—2005.—Vol. 21, № 2.—P. 511–556.
69. Iwaniec T., Martin G. J. The Beltrami Equation // Mem. Amer. Math. Soc.—2008.—Vol. 191.—P. 1–92.
70. Janson S. On functions with conditions on the mean oscillation // Ark. Math.—1976.—Vol. 54, № 2.—P. 189–196.
71. Keldysh M. V., Lavrentiev M. A. Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables // Ann. Sci. École Norm. Sup.—1937.—Bd. 54.—S. 1–38.
72. Khuskivadze G., Kokilashvili V., Paatashvili V. Boundary value problems for analytic and harmonic functions in domains with nonsmooth boundaries. Applications to conformal mappings // Mem. Differential Equations Math. Phys.—1998.—Vol. 14.—P. 1–195.
73. Klimentov S. B. Probabilistic Representation of Solutions of the First Order Elliptic Systems // International Conference Stochastic Analysis and Related Topics.—Petersburg, 2001.—P. 41.
74. Klimentov S. B. Riemann–Hilbert boundary value problem for generalized analytic functions in Smirnov classes // Global and Stochastic Analysis. Mind Reader Publ.—2011.—Vol. 1, № 2.—P. 217–240.
75. Musaev K. M., Gasanova T. Kh. The boundary value problem in the class of generalized analytic functions — jump problem // Transactions of AS Azerbaijan.—1999.—Vol. 5, № 19.—P. 109–112.

-
76. *Peetre J.* On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant // *Ann. Mat. Pura Appl.*—1966.—Vol. 72, № 4.—P. 295–304.
 77. *Petersen K. E.* Brownian motion, Hardy spaces and bounded mean oscillation.—Cambridge–London–N. Y.—Melbourne: Cambridge Univ. Press, 1977.—102 p.—(London Math. Society Lecture Note Series; Vol. 28).
 78. *Radon J.* Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential // *Sitzungsberichte Acad. Wiss. Wien.*—1919.—№ 128.—S. 1123–1167. Русский перевод: *Радон И.* О краевых задачах для логарифмического потенциала // *Успехи мат. наук.*—Т. 1, вып. 3–4.—С. 96–124.
 79. *Rudin W.* The radial variation of analytic functions // *Duke Math. J.*—1955.—Vol. 22, № 2.—P. 235–242.
 80. *Stegenga D. A.* Bounded Toeplitz operators on H^1 and applications of the duality between H^1 and the functions of bounded mean oscillation // *American J. of Math.*—1976.—Vol. 98, № 3.—P. 573–589.
 81. *Usmanov Z. D.* Generalized Cauchy–Riemann systems with a singular point.—Harlow: Addison Wesley Longman Ltd., 1997.—222 p.—(Pitman Monographs and Survey in Pure and Applied Math.; Vol. 85).
 82. *Warschawski S.* Über das Randverhalten der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung // *Math. Zeitschr.*—1932.—Bd. 35, № 3–4.—S. 321–456.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Бляшке

- функция, 33
- произведение, 33

Двойственность

- H_1 и BMO , 43, 136
- H_p и H_q , 35, 108

Задача Римана — Гильберта

- для голоморфных функций, 45
- индекс, 48, 57
- регуляризующий множитель, 49
- для обобщенных аналитических функций, 139
- — в классах Харди, 140
- — в классах Смирнова, 145
- — в классах BMO , 163

Квазиконформное отображение, 75

Классы

- Харди
- — голоморфных функций, 32
- — обобщенных аналитических функций, 87
- — решений уравнения Бельтрами, 169
- Смирнова
- — голоморфных функций, 35

- — обобщенных аналитических функций, 115

— BMO , 40

- — голоморфных функций, 40

- — обобщенных аналитических функций, 129

— LMO , 41

- — обобщенных аналитических функций, 130

— VMO , 44

Кривая

- регулярная, 12
- Ляпунова, 13
- Радона, 13

Обобщенные

- аналитические функции, 7, 29
- ядра Коши, 31

Обобщенный интеграл типа Коши, 93, 121, 132

Оператор

- типа T , 16
- Берлинга, 24

Представление

- первого рода, 30
- второго рода, 30, 95, 126, 133, 151, 176

Точка

- заострения, 13
- угловая, 13

Уравнение Бельтрами, 74

- обобщенное, 75
- сопряженное, 75
- основной гомеоморфизм, 76

Формулы

- Грина, 28, 91, 119, 175
- Помпейю, 29
- Сохоцкого — Племяля, 38
- — обобщенные, 93, 121

Научное издание

Серия

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

Выпуск 7

Климентов Сергей Борисович

**ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

Ответственный редактор

В. Т. Фоменко

Редакторы серии:

Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев

Утверждено к печати Ученым советом

Южного математического института

Владикавказского научного центра

Российской академии наук

Компьютерная верстка *И. С. Гаприндашвили*

Зав. редакцией *В. В. Кибизова*

Подписано в печать 28.10.2014.
Формат бумаги $60 \times 84^{1/16}$. Усл. п. л. 11,63.
Тираж 200 экз. Заказ № 124

Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

ISBN 978-5-904695-26-2



9 785904 695262