

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

И Т О Г И Н А У К И • Ю Г Р О С С И И

С Е Р И Я
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

В ы п у с к 8

В. Б. Левенштам, Г. Л. Хатламаджиян

УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ — СТОКСА
С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

Владикавказ
2014

ББК 22.161.6
УДК 517.955.8
Л-35

Ответственный редактор д. т. н. В. Г. Ильичев

Рецензенты: д. ф.-м. н. А. Э. ПАСЕНЧУК,
д. ф.-м. н. В. Г. ЦИБУЛИН

Редакторы серии: д. ф.-м. н. Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК,
д. ф.-м. н. А. Г. КУСРАЕВ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00402-а.

Левенштам В. Б., Хатламаджиян Г. Л.

Уравнения Навье — Стокса с высокочастотными слагаемыми / отв. ред. В. Г. Ильичев.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014.—260 с.—(Итоги науки. Юг России. Математическая монография. Вып. 8).

Монография посвящена асимптотическому анализу обобщенной задачи о движении жидкости и обобщенной задачи о тепловой конвекции жидкости в высокочастотных силовых полях. Построены предельные (усредненные) задачи, сконструированы полные асимптотические разложения решений, а также проведено обоснование усреднения и асимптотик.

Для студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников, интересующихся асимптотическими методами в теории дифференциальных уравнений и их обоснованием.

Levenshtam V. B., Khatlamajiyani G. L.

Navier–Stokes Equations with Hight-Frequency Addends / ed. V. G. Il'ichev.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—260 p.

The book is devoted to asymptotic analysis of generalized liquid motion problem and generalized liquid thermal convection problem in high-frequency fields of force. Limited (averaged) problems and solutions' complete asymptotic decomposition are constructed as well as averaging and asymptotics justification is carried out.

The volume is intended for students, graduate students, post graduates and researchers interested in asymptotic methods in differential equations theory and their justification.

ISBN 978-5-904695-27-9

© Южный математический институт
ВНЦ РАН и РСО-А, 2014
© В. Б. Левенштам, 2014
© Г. Л. Хатламаджиян, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие авторов.....	5
Глава 1. История метода усреднения	11
1.1. Зарождение метода усреднения	11
1.2. Классическая теория метода усреднения	20
1.3. Развитие классической теории	26
Глава 2. Уравнения Навье — Стокса с быстро осциллирующей массовой силой.....	49
2.1. Вспомогательные сведения	51
2.2. Начально-краевая задача	61
2.3. Задача о периодических решениях	73
Глава 3. Обобщенные уравнения Навье — Стокса с быстро осциллирующей массовой силой.....	89
3.1. Начально-краевая задача	90
3.2. Задача о периодических по времени решениях	114
Глава 4. Абстрактные эволюционные высокочастотные задачи. Приложения.....	123
4.1. Абстрактные параболические уравнения	123
4.2. Параболические уравнения	164
4.3. Обобщенные уравнения Навье — Стокса	180
Глава 5. Задача конвекции. Усреднение и асимптотика	191
5.1. Обоснование метода усреднения	192
5.2. Асимптотический анализ	210

Глава 6. Обобщенная задача конвекции в высокочастотном силовом поле	223
6.1. Обоснование метода усреднения	223
6.2. Асимптотический анализ	229
Литература	247
Именной указатель	256
Предметный указатель	257

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

В данной монографии математическая теория метода усреднения развивается для задачи о течении жидкости без теплового воздействия и задачи о тепловой конвекции жидкости в высокочастотных силовых полях, а также для широких классов математических обобщений этих задач.

Метод усреднения, который связывают обычно с именами Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, является важным методом асимптотического интегрирования эволюционных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими (высокочастотными) членами¹. Он зародился во второй половине XVIII века в работах Л. Эйлера [142], А. Клеро [148], Ж. Лагранжа [154] и С. Лапласа [155] по небесной механике, когда эти исследователи с помощью закона всемирного тяготения изучали траектории планет и их спутников.

Литература по методу усреднения весьма многочисленна. Укажем, прежде всего, известные монографии Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [40, 41], Н. Н. Боголюбова [3], Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [6], В. М. Волосова и Б. И. Моргунова [17], Ю. А. Митропольского [89], Я. Сандерса и Ф. Ферхюльста [157],

¹Следует пояснить, что задачи, рассматриваемые в книгах и статьях по теории метода усреднения, часто представлены в виде дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной по времени, с правой частью, пропорциональной малому параметру ε . К таким уравнениям относятся, прежде всего, так называемые уравнения в стандартной форме — основной объект классической теории метода усреднения, построенной в монографии Н. Н. Боголюбова [3]. При этом указанные уравнения исследуются на отрезке времени t , длина которого равна $L\varepsilon^{-1}$, $L = \text{const} > 0$, так что эта длина неограниченно растет при стремлении ε к нулю. Если в таком уравнении перейти к новому времени $\tau = \varepsilon t$ и ввести большой параметр (частоту) $\omega = \varepsilon^{-1}$, то получим другую форму записи задачи — уравнение с высокочастотными членами. Многие авторы, к которым относимся и мы, предпочитают вторую форму записи, так как в этом случае длина отрезка, который пробегает новое время τ есть постоянная величина L .

В. Ф. Журавлёва и Д. М. Климова [26], И. Б. Симоненко [116], а также обзор А. М. Самойленко [112]. Первые три монографии являются «пионерскими» по теории метода усреднения. В остальных источниках представлено развитие классической теории, а также имеются важные библиографические сведения. В [6, 17, 89] содержится обширная библиография до 1971 г. Список литературы в книге [157] также весьма обширен и особенно богат ссылками на зарубежные публикации до 1985 г. Библиография двух следующих монографий не столь обширна, ограничена 90-ми годами, но тоже очень полезна. Упомянутый обзор весьма содержательный и ограничен 1994 г.

Укажем еще три более поздних публикации: обзор В. И. Юдовича [146], а также монографии В. Б. Левенштама [64] и В. Б. Левенштама, М. Р. Ишмеева [67]. В них метод усреднения развивается для эволюционных дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), содержащих быстро осциллирующие слабые, пропорциональные определенным положительным степеням большой частоты осцилляций².

Как отмечалось выше, в настоящей монографии теория метода усреднения (т. е. обоснование этого метода, включая вопросы устойчивости по Ляпунову решений, а также построение и обоснование полных асимптотик решений) развивается для уравнений Навье — Стокса с быстро осциллирующими во времени массовыми силами³ и для систем дифференциальных уравнений в частных производных с оператором Навье — Стокса в главной части (обобщенные уравнения Навье — Стокса), младшие слагаемые которых быстро осцил-

² Актуальность развития асимптотической теории для такого рода задач связана с тем, что математические модели целого ряда физических явлений, в которых обнаружены важные эффекты высокочастотных вибраций, описываются дифференциальными уравнениями с такой спецификой. Наиболее известны такие явления:

1) верхнее положение физического маятника при высокочастотных вибрациях его основания может стать устойчивым (Н. Н. Боголюбов [3], П. Л. Капица [32]);
2) высокочастотные сжатия-растяжения балки могут стабилизировать ее прямолинейную форму (В. Н. Челомей [140]);
3) с помощью вертикальных высокочастотных вибраций сосуда с нагреваемой в нем жидкостью можно подавить конвекцию при сколь угодно большом градиенте температуры (И. Б. Симоненко, С. М. Зеньковская [29]).

³ Уравнения такого типа используются, как известно, для описания течения вязкой жидкости под действием высокочастотных (вибрационных, электромагнитных и т. д.) сил.

лируют во времени. При этом к специфике рассматриваемых задач относится то обстоятельство, что среди быстро осциллирующих слагаемых (сил) имеются пропорциональные положительным степеням частоты (большие слагаемые). В монографии рассматриваются также задачи конвекции жидкости в высокочастотных силовых полях и соответствующие их обобщения (обобщенные задачи конвекции).

Под задачей конвекции в данной монографии подразумевается известная математическая модель Обербека — Буссинеска тепловой конвекции вязкой жидкости (см., например, [44]). Она представлена системой, состоящей из уравнений Навье — Стокса для скорости v жидкости (в совокупности с условием неразрывности — $\operatorname{div} v = 0$) и давления p , а также из уравнения теплопроводности для температуры T жидкости. При этом v и T известным образом [44] связаны младшими членами этих уравнений. Обобщенные уравнения Навье — Стокса и обобщенную задачу конвекции мы получаем, предполагая, что массовая сила в уравнениях Навье — Стокса и функция плотности источников в уравнении теплопроводности могут зависеть от v и T . При этом рассматриваемые обобщенные задачи являются чисто математическими, т. е. в рассматриваемой общности могут не иметь физического смысла.

Обоснование метода усреднения для обобщенных уравнений Навье — Стокса с быстро осциллирующими младшими членами, среди которых нет «больших», впервые осуществлено И. Б. Симоненко [113, 114] (см. также его монографию [116]). В той же важной работе [114] метод усреднения был обоснован для задачи о тепловой конвекции вязкой несжимаемой жидкости, которая заполняет сосуд, совершающий высокочастотные вертикальные колебания (формальное применение метода усреднения в такой задаче изложено в [29]). Рассматриваемая при этом математическая модель, как отмечалось, состоит из уравнения теплопроводности и уравнений Навье — Стокса. Последние содержат быстро осциллирующие во времени слагаемые, пропорциональные большой частоте вибраций⁴, которые не зависят от неизвестной скорости (течения жидкости), но линейно зависят от температуры, а в уравнении теплопроводности нет больших

⁴Так как задача записана в подвижной системе координат, связанной с вибрирующим сосудом, причем частота вибраций $\omega \gg 1$, а амплитуда $a\omega^{-1}$, $a > 0$.

слагаемых. В работах [113, 114] исследовалась задача на конечном временном отрезке (начально-краевая задача) и задача о периодических по времени решениях на всей числовой оси.

В работах В. Б. Левенштама [49, 51, 52] метод усреднения обоснован для периодических по времени решениях задачи о тепловой конвекции в случае вибраций более общего, нежели в [114], вида. Полные асимптотические разложения указанных решений построены и обоснованы в [50, 53, 54]. Вопросам развития теории метода усреднения для обобщенных уравнений Навье — Стокса с большими высокочастными младшими слагаемыми в случае начально-краевой задачи и задачи о периодических по времени решениях посвящены работы [56, 66, 156].

В работах Н. В. Ивлевой, В. Б. Левенштама [30, 152] теория метода усреднения развита для существенно более общего, нежели в [49–54, 115], класса задач — обобщенных задач конвекции.

В работах Г. Л. Хатламаджияна [135–137] метод усреднения обоснован для некоторого класса абстрактных параболических уравнений с быстро осциллирующими младшими членами. В качестве приложений указанного абстрактного результата автором выделен класс обобщенных уравнений Навье — Стокса, для которых дополнительно (помимо обоснования метода усреднения) построена и обоснована полная асимптотика периодических по времени решений. Эти результаты и отмеченная выше группа результатов [56, 66, 156] взаимно развивают и дополняют друг друга.

В данной монографии излагаются некоторые результаты указанных работ В. Б. Левенштама, Г. Л. Хатламаджияна, а также Н. С. Ивлевой, В. Б. Левенштама. Она состоит из шести глав.

Глава 1 посвящена истории возникновения и становления метода усреднения от основателей небесной механики до наших дней.

В главе 2 проведено с обоснованием асимптотическое интегрирование первой начально-краевой задачи и задачи о периодических по времени решениях уравнений Навье — Стокса, массовая сила в которых представлена осциллирующими с высокой частотой ω слагаемыми, пропорциональными ω . Указанные большие слагаемые при этом не зависят от скорости течения.

В главе 3 метод усреднения обоснован для обобщенных уравнений Навье — Стокса, содержащих осциллирующие с высокой частотой ω слагаемые, которые пропорциональны $\sqrt{\omega}$ и линейно зависят от неизвестной (скорости течения). Правая часть при этом является полиномом произвольной степени относительно этой неизвестной. В разделе 3.1 рассматривается начально-краевая задача, а в разделе 3.2 — задача о периодических по времени решениях.

В главе 4 обоснован метод усреднения для задачи о периодических решениях абстрактного параболического уравнения, частным случаем которого являются уравнения Навье — Стокса (раздел 4.1). Младшие слагаемые абстрактного уравнения быстро осциллируют во времени, и среди них имеются члены, пропорциональные частоте осцилляций. Последние не зависят от неизвестной вектор-функции. Также в главе 4 описаны и обоснованы процедуры построения полной асимптотики для задачи о периодических по времени решениях параболического уравнения (раздел 4.2), а также обобщенных уравнений Навье — Стокса (раздел 4.3). Как и в главе 2, правые части этих уравнений содержат высокочастотные слагаемые, среди которых имеются пропорциональные частоте. Однако, в отличие от главы 2, слагаемые правой части с не зависящей от частоты амплитудой могут быть полиномами произвольной степени относительно скорости. Представленное здесь обоснование метода усреднения является следствием отмеченного выше предварительно доказанного абстрактного результата.

В главе 5 рассматривается задача о тепловой конвекции вязкой несжимаемой жидкости в высокочастотном силовом поле. Исследуются периодические по времени конвективные режимы. Обоснован метод усреднения и построены полные асимптотические разложения указанных режимов.

В главе 6 обоснован метод усреднения для задачи о периодических по времени решениях системы дифференциальных уравнений в частных производных, обобщающей задачу главы 5 о тепловой конвекции (обобщенная задача конвекции). Правая часть системы содержит полиномиально зависящие от неизвестных (обобщенных скорости и температуры) младшие слагаемые, а также гармоническое по времени слагаемое, пропорциональное высокой частоте вибрации.

Для этой задачи построена и обоснована полная асимптотика решения.

Мы здесь не останавливаемся более подробно на содержании каждой из глав, так как последние снабжены собственными введениями.

В. Б. Левенштам, Г. Л. Хатламаджиян

ГЛАВА 1

ИСТОРИЯ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ

Метод усреднения зародился в трудах основоположников небесной механики и продолжает развиваться вплоть до настоящего времени. В данной главе мы коснемся ряда работ по методу усреднения, начиная со времени создания небесной механики и по настоящее время. Рассматриваемые работы касаются как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и дифференциальных уравнений в частных производных.

Следует сказать, что при описании указанных работ нам не удалось избежать субъективизма: подробнее других будут представлены результаты, наиболее близкие к нашим личным интересам, и, в частности, результаты первого автора монографии и его учеников.

1.1. Зарождение метода усреднения

Зачатки метода усреднения появились в работах создателей небесной механики. Его идеи применял Л. Эйлер [142], изучая движения Луны, а также А. Клеро [148], который ссылаясь на Эйлера в своих работах по исследованию возмущений земной орбиты. Также идеи метода усреднения применяли Ж. Лагранж [154] и К. Гаусс [150] при исследовании эволюции планетных орбит под влиянием взаимного притяжения планет. Авторы монографии [157] отмечают, что у Клеро было несколько красивых идей при решении частных задач теории возмущений, а Лагранж смог их значительно обобщить и изложить в более понятном для широкой аудитории виде. В исследованиях С. Лапласа о системе Солнце — Юпитер — Сатурн содержатся уже четко выраженные элементы метода усреднения и процедур построения старших приближений возмущенного движения. Следует отметить, что важным стимулом разработки метода усреднения являлось то обстоятельство, что возможности существовавших до этого методов возмущений Лагранжа и Лапласа

в их традиционной трактовке оказались недостаточными, поскольку при их использовании в разложениях решений возникают секулярные члены, т. е. слагаемые вида $t^\alpha \sin \beta t$, $t^\alpha \cos \beta t$.

Как нам представляется, в русскоязычной литературе мало представлен Клеро. Поэтому из упоминавшихся авторов второй половины XVIII в. (Эйлер, Клеро, Лагранж, Лаплас) мы остановимся, правда очень кратко, лишь на нем (п. 1.1.1). При этом будем следовать [148, 157]. В п. 1.1.2 мы опишем схему усреднения Гаусса, следуя [89].

Значительно позже, в 20-х гг. XX в., метод усреднения перестроил голландский инженер Б. Ван-дер-Поль¹ (ему посвящен п. 1.1.3), использовавший его на интуитивном уровне строгости для приближенного решения задач теории колебаний с одной степенью свободы.

Важно отметить, что ни сам Ван-дер-Поль [8, 160], ни его ближайшие последователи не обосновали этот метод (по-видимому, и не пытались это сделать). Первые работы по математическому обоснованию метода усреднения выполнены П. Фату [149], а также немного позже Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси [73] для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями и периодическими по времени правыми частями.

1.1.1. Идеи Клеро. Хотя работы Клеро не имеют непосредственного отношения к методу усреднения, некоторые его методы весьма близки к тем, что применяются в теории усреднения.

Остановимся на содержании работы [148]. Она состоит из шести пунктов, которые, в свою очередь, подразделяются на нумеруемые римскими цифрами параграфы. Для нас наиболее интересен п. 1, который называется «Фундаментальные принципы определения возмущений, которым подвергаются планеты». Примеры, которые Клеро приводит в следующих пунктах, показывают, что в работе под планетами он понимает не только собственно планеты, но также Солнце и спутники планет.

¹По мнению авторов монографии [157], Ван-дер-Поль, вполне вероятно, сознавал, что использует методы классической теории возмущений, идущие от Лагранжа и Лапласа. В монографии отмечается, что Ван-дер-Поль окончил университет Утрехта в 1916 г. и там же защитил диссертацию четыре года спустя. В те времена, и даже много лет спустя, небесная механика входила в математические и физические курсы нидерландских университетов и часто включала элементы теории возмущений.

В § I Клеро рассматривает невозмущенную задачу двух тел. Согласно первому закону Кеплера в формулировке Ньютона, под действием силы тяготения одно небесное тело может двигаться по отношению к другому по окружности, эллипсу, параболе или гиперболе. Так как речь идет о движении планет и спутников, Клеро ограничивается рассмотрением случая эллиптической орбиты.

Таким образом, невозмущенное уравнение движения одной планеты вокруг другой представляет собой уравнение эллипса, которое Клеро записывает в полярных координатах в виде

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{c \cos v}{p},$$

где

r — текущее расстояние между планетами,

v — угол отклонения точки орбиты от апоцентра по часовой стрелке,

p — фокальный параметр,

c — фокальное расстояние.

Также в § I вводятся проекции φ и π возмущающей силы на оси, направленные соответственно вдоль и перпендикулярно радиус-вектору.

В § II Клеро выписывает возмущенное уравнение орбиты в виде

$$\frac{p}{r} = 1 - c \cos v + \sin v \int \Omega \cos v dv - \cos v \int \Omega \sin v dv,$$

где $\Omega = \Omega(r, v, \varphi, \pi)$ — известная функция, имеющая тот же порядок малости, что φ и π . Кроме того, Ω — четная функция по переменной v .

В § III Клеро отмечает необходимость поиска решения в приближенном виде, а в § IV рассматривает ситуацию, когда Ω представляет собой сумму слагаемых, пропорциональных косинусам множителей v^2 :

$$\Omega = \sum_{j=1}^n A_j \cos q_j v, \quad q_j \neq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

²Сам Клеро вместо записи со знаками суммирования использовал запись с многоточием, так что, например, зависимость Ω от v в первоисточнике записывается в виде $\Omega = A \cos qv + B \cos nv + \dots$. Так как в работе ничего не говорится о сходимости и даже нет слова «ряд», то мы здесь интерпретируем эту запись как конечную сумму, а не ряд.

где n — некоторое натуральное число. В этом случае он переписывает выражение

$$\sin v \int \Omega \cos v \, dv - \cos v \int \Omega \sin v \, dv \quad (1.1)$$

в виде

$$\sum_{j=1}^n \frac{A_j}{q_j^2 - 1} \cos v - \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{q_j^2 - 1} \cos q_j v. \quad (1.2)$$

Здесь же Клеро отмечает, что, когда разложение Ω содержит слагаемое, пропорциональное $\cos v$, скажем $M \cos v$, выражение (1.2) использовать нельзя, ввиду обращения в нуль знаменателя в последней формуле. В этом случае в разложении выражения (1.1) будет присутствовать вековой член $\frac{1}{2} M v \sin v$, вклад которого остается небольшим лишь при малых v , т. е. малом числе оборотов. Такая ситуация представляет собой проблему, для решения которой в §§ V–VI Клеро осуществляет переход от фиксированного апоцентра к движущемуся.

Параграфы VII–IX носят технический характер и посвящены выражению возмущающих сил φ , π через полярный угол v .

Методы, которые использует здесь Клеро, нельзя назвать усреднением. Однако среди описанных выше приемов просматриваются элементы метода усреднения. В частности, это касается техники интегрирования с фиксированием медленно меняющихся переменных. Кроме того, процедура устранения вековых членов используется в методе многих масштабов [104], который близок к методу усреднения.

В следующих пунктах Клеро использует полученные в п. 1 теоретические результаты для решения практических задач. В п. 2 он находит величину смещения местоположения Солнца, вызванного притяжением Луны. В данной задаче Клеро ради удобства использует геоцентрические координаты, несмотря на то, что гелиоцентрическая система мира к тому времени стала общепринятой среди астрономов. Необходимость использования геоцентрических координат связана с тем, что орбита Луны в гелиоцентрических координатах нельзя рассматривать как эллипс. Использование геоцентрических координат не ставит под сомнение полученные результаты, так как в системе отсчета, связанной с Землей, Солнце действительно вращается вокруг Земли.

П. 3 посвящен нахождению величины смещения местоположения Солнца, вызванного притяжением Юпитера. В п. 4 Клеро, ссылаясь на результаты Эйлера и Даламбера, описывает метод разложения функций в тригонометрический ряд Фурье по косинусам, как мы называем это сейчас. О доказательстве сходимости ряда речь не идет: пока не рассматриваются конкретные примеры, на исходную функцию даже не накладываются требования четности и периодичности. Особое внимание уделяется разложению в ряд функции вида $(a + b \cos t)^q$, где a, b, q — некоторые вещественные числа.

Клеро использует этот метод в п. 5, описывая смещение местоположения Солнца, вызванное притяжением Венеры. В этой задаче требуется более тонкий, по сравнению с п. 2 и п. 3, анализ, так как расстояния от Венеры и Земли до Солнца являются сопоставимыми, их соотношение нельзя принять за малый параметр. В п. 2 было мало расстояние от Земли до Луны по сравнению с расстоянием от Земли до Солнца. В п. 3 Клеро пользовался тем, что большая полуось орбиты (а значит, по третьему закону Кеплера, и период обращения вокруг Солнца) Земли значительно меньше большой полуоси орбиты Юпитера. Также в п. 5 Клеро приходится накладывать дополнительное, по сравнению с п. 2 и п. 3, ограничение — нулевой эксцентриситет земной орбиты.

В п. 3 и п. 5 используются уже гелиоцентрические координаты. В § III п. 6 Клеро вычисляет суммарное смещение местоположения Солнца, вызванного притяжением Луны, Юпитера и Венеры.

§§ I–II п. 6 посвящены вычислению массы Луны и Венеры при помощи формул, полученных в п. 1. При вычислении массы Луны он пользуется результатами наблюдений аббата Н. де Лакайля (см., например, изданные несколько позже таблицы [153]).

1.1.2. Схема усреднения Гаусса. Схема усреднения, разработанная Гауссом [150], применялась им к ограниченной плоской задаче трех тел, т. е. к плоской задаче о движении малого тела под действием притяжения его двумя массивными телами. К такому типу относится, например, задача о движении малой планеты под действием ньютоновского притяжения Солнца и Юпитера, когда все три тела интерпретируются как материальные точки плоскости с массами $m_{\text{П}} = 0$, $m_{\text{С}}$ и $m_{\text{Ю}}$ соответственно. Задача о нахождении неизвестных гелиоцентрических радиуса-вектора r и долготы l малой планеты после соответствующего перехода от (r, l) к так называемой системе кеплеровых оскулирующих элементов (a, p, M, ω) опи-

сывается нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2\sqrt{a}}{k\sqrt{m_C}} \frac{\partial w_{\text{Ю}}}{\partial M}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{2\sqrt{p}}{k\sqrt{m_C}} \frac{\partial w_{\text{Ю}}}{\partial \omega}, \\ \frac{dM}{dt} &= \frac{k\sqrt{m_C}}{a^{3/2}} - \frac{2\sqrt{a}}{k\sqrt{m_C}} \frac{\partial w_{\text{Ю}}}{\partial \omega}, \\ \frac{\partial \omega}{dt} &= -\frac{2\sqrt{p}}{k\sqrt{m_C}} \frac{\partial w_{\text{Ю}}}{\partial p}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Здесь $k = \text{const}$ — корень квадратный из постоянной тяготения, а $w_{\text{Ю}}$ — возмущающая функция (зависящая от r и расстояния $r_{\text{Ю}}$ между телом и Юпитером). Эта функция в переменных a, p, M, ω может быть представлена двойным рядом Фурье

$$w_{\text{Ю}} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{qr}(a, p) \cos(qM + r\bar{\omega}),\tag{1.4}$$

где $c_{qr}(a, p)$ — известные функции переменных a, p , $\bar{\omega} = \omega - l_{\text{Ю}}$, $l_{\text{Ю}} = n_{\text{Ю}}t$, $n_{\text{Ю}}$ — угловая скорость вращения Юпитера вокруг Солнца.

Схема усреднения Гаусса состоит в замене функции $w_{\text{Ю}}$ в системе (1.3) ее интегральным средним значением

$$\langle w_{\text{Ю}} \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} w_{\text{Ю}} dM dl_{\text{Ю}}.\tag{1.5}$$

При этом в формуле (1.4) величины a, p и ω считаются постоянными (параметрами), а величины M и $l_{\text{Ю}}$ — независимыми друг от друга переменными. Из (1.4), (1.5) находим

$$\langle w_{\text{Ю}} \rangle = c_{00}(a, p)$$

и, таким образом, от системы (1.3) переходим к усредненной по Гаус-

су системе

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= 0, \\
 \frac{dp}{dt} &= 0, \\
 \frac{dM}{dt} &= \frac{k\sqrt{m_C}}{a^{3/2}} - \frac{2\sqrt{a}}{k\sqrt{m_C}} \frac{\partial c_{00}(a, p)}{\partial a}, \\
 \frac{\partial \omega}{dt} &= -\frac{2\sqrt{p}}{k\sqrt{m_C}} \frac{\partial c_{00}(a, p)}{\partial p}.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Снабдим исходную систему (1.3) начальными условиями

$$\begin{aligned}
 a(t_0) &= a_0, \\
 p(t_0) &= p_0, \\
 M(t_0) &= M_0, \\
 \omega(t_0) &= \omega_0,
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $t = t_0$ — начальный момент времени. В этом случае сложная задача Коши (1.3), (1.7) заменяется простой, усредненной по Гауссу задачей (1.6), (1.7). Последняя, очевидно, имеет единственное, определенное на всей временной оси $t \in \mathbb{R}$, решение

$$\begin{aligned}
 a &= a_0, \\
 p &= p_0, \\
 M &= M_0 + \left[\frac{k\sqrt{m_C}}{a_0^{3/2}} - \frac{2\sqrt{a_0}}{k\sqrt{m_C}} \frac{\partial c_{00}(a_0, p_0)}{\partial a} \right] (t - t_0), \\
 \omega &= \omega_0 - \frac{2\sqrt{a_0}}{k\sqrt{m_C}} \frac{\partial c_{00}(a_0, p_0)}{\partial p} (t - t_0).
 \end{aligned}$$

Отметим, что схема усреднения Гаусса не является частным случаем схемы усреднения Н. Н. Боголюбова [3], теорию которого мы развиваем в данной книге для уравнений Навье — Стокса. Дело здесь в следующем. Система (1.3), в которой масса Солнца m_C — большой параметр, содержит две медленные переменные (a и p) и две быстрые ($m_{\text{Ю}}$ и $\bar{\omega}$). Действительно, положив в (1.3) $m_C^{-1} = \varepsilon^2 \ll 1$, видим, что $\frac{da}{dt}$ и $\frac{dp}{dt}$, в отличие от $\frac{dm_{\text{Ю}}}{dt}$ и $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$, пропорциональны ε . Интегрирование в (1.5) проводится по быстрым переменным ($l_{\text{Ю}}$ в (1.5) можно заменить на $\bar{\omega}$). В теории же Н. Н. Боголюбова [3] рассматриваются

нормальные системы вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, t). \quad (1.8)$$

Перепишав (1.8), для сравнения с (1.3), в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon f(x, M), \\ \frac{dM}{dt} &= 1, \end{aligned}$$

замечаем, что в последней системе только одна быстрая переменная, по которой в [3] и проводится усреднение.

Схема Гаусса относится, выражаясь современным языком, к усреднению многочастотных систем (см., например, [89]), в то время как классическая схема Боголюбова [3] — к усреднению одночастотных систем.

1.1.3. Схема усреднения Ван-дер-Поля. В работах Ван-дер-Поля [8, 160] рассматриваются в основном уравнения второго порядка с малым параметром ε вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad \omega > 0, \quad (1.9)$$

причем обычно полагается

$$f(x, \dot{x}) = (1 - x^2)\dot{x}.$$

Отметим, что при $\varepsilon = 0$ общее решение уравнения (1.9) имеет вид

$$x = a \cos(\omega t + \varphi),$$

где a и φ — произвольные постоянные.

Метод усреднения Ван-дер-Поля идейно близок к хорошо известному теперь методу вариации произвольных постоянных, который Лагранж применял в задачах небесной механики. Недаром Ван-дер-Поль называл свой прием методом «медленно меняющихся» коэффициентов. Опишем этот метод.

Ван-дер-Поль, исходя из того, что общее решение уравнения (1.9) при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$x = a \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.10)$$

где a и φ — произвольные постоянные, решение системы (1.9) представляет в виде

$$x = u \sin \omega t + v \cos \omega t. \quad (1.11)$$

Здесь неизвестные $u(t)$ и $v(t)$ при $\varepsilon = 0$ постоянны, а при малых t — медленно меняющиеся функции времени t . Ван-дер-Поль, производя замену (1.11) в уравнении (1.9), отбрасывает члены, содержащие $\ddot{u}$ и $\ddot{v}$, а также члены, содержащие произведения $\varepsilon \dot{u}$ и $\varepsilon \dot{v}$, считая (интуитивно, но справедливо) все эти члены достаточно малыми. Приравнявая в полученном равенстве коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, он получает автономную систему двух уравнений первого порядка относительно (u, v) . Эта система существенно проще исходного уравнения (1.9). Решив ее (например, численно), мы по формуле (1.11) получим решение уравнения (1.9). В этом и состоит метод усреднения Ван-дер-Поля: именно так, как он обычно представлен в современной литературе.

От уравнения второго порядка (1.9) перейдем к эквивалентной ему системе двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega^2 x + \varepsilon f(x, y). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ его общее решение согласно (1.10) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \varphi), \\ y = \frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin(\omega t + \varphi), \quad a, \varphi = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Следуя методу вариации произвольных постоянных Лагранжа, будем считать, что при $\varepsilon \neq 0$ форма решения системы (1.12) сохраняется, т. е. имеет вид (1.13), но уже при a и φ , зависящих от времени t . Произведя в системе (1.12) замену переменных (1.13), получим систему

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} \cos(\omega t + \varphi) - a \frac{d\varphi}{dt} \sin(\omega t + \varphi) &= 0, \\ -\omega \frac{da}{dt} \sin(\omega t + \varphi) - a \frac{d\varphi}{dt} \omega \cos(\omega t + \varphi) &= \\ &= \varepsilon f(a \cos(\omega t + \varphi), -a\omega \sin(\omega t + \varphi)). \end{aligned}$$

Отсюда по формулам Крамера находим

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos(\omega t + \varphi), -a\omega \sin(\omega t + \varphi)) \sin(\omega t + \varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega a} f(a \cos(\omega t + \varphi), -a\omega \sin(\omega t + \varphi)) \cos(\omega t + \varphi).\end{aligned}\quad (1.14)$$

Из этой системы, эквивалентной системе (1.12), а значит и исходному уравнению (1.9), видим, что новые переменные a , φ являются медленными. В то же время в систему входит одна быстрая переменная $w = \omega t + \varphi$:

$$\frac{dw}{dt} = \omega. \quad (1.15)$$

Уравнением (1.15) можно дополнить систему (1.14). После этого, учитывая, что правые части (1.14) 2π -периодичны по w , и следуя схеме Гаусса, построить по системе (1.14) усредненную систему

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \varepsilon A(a), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon B(a),\end{aligned}\quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned}A(a) &= -\frac{1}{2\pi\omega^2} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ B(a) &= -\frac{1}{2\pi a\omega^2} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, a\omega \sin \psi) \cos \psi \, d\psi.\end{aligned}$$

Решив систему (1.16), с помощью формулы (1.13) восстанавливаем приближенное решение уравнения (1.9). Можно убедиться, что это приближение совпадает с тем, о котором говорилось в начале пункта.

1.2. Классическая теория метода усреднения

1.2.1. Нелинейная механика Крылова — Боголюбова.

К началу 30-х гг. уровень развития метода усреднения характеризуется следующим образом. Существуют различные схемы усреднения, применявшиеся в астрономии к консервативным системам. Имеется метод Ван-дер-Поля, который позволяет строить только главный

член асимптотики решения и обоснован лишь для уравнений очень частного вида. В это время, правда, в теории дифференциальных уравнений уже созданы мощные математические методы А. Пуанкаре и А. Ляпунова, но они относятся лишь к периодическим решениям.

В 1932 г. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов сообщили в Парижскую академию наук о своих первых результатах, с которых началось создание ими новой отрасли дифференциальных уравнений, названной самими ее создателями «нелинейной механикой». Важными объектами в этой области являются так называемые квазилинейные колебательные системы, описываемые уравнениями вида

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right), \quad (1.17)$$

$$f(x, u, t) = \sum_{n=0}^N e^{in\nu t} f_n(x, u),$$

$f_n(x, u)$ — полиномы от x, u , а ε — малый параметр. Исследуется вопрос о построении первого приближения (главного члена асимптотики) и полной асимптотики решений уравнения (1.17). При этом отмечается, что обычное (прямое) разложение решения по степеням приводит к появлению в приближениях секулярных членов; в монографии же разработаны алгоритмы построения приближений без секулярных членов и равномерно удовлетворяющих уравнению (1.17) с точностью до любой заданной степени ε . В [41] рассмотрены как нерезонансный случай (когда свободная частота $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ не равна и не близка величинам $\frac{p}{q}\nu$, где p и q — взаимно простые числа), так и случай резонанса (когда $\omega^2 = \left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 + \varepsilon\Delta$). В нерезонансном случае приближения строятся в виде

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi, \nu t) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi, \nu t) + \dots, \quad (1.18)$$

где функции u_i являются 2π -периодическими относительно ψ и νt , и выполняются соотношения вида

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \quad (1.19)$$

Таким образом, задача построения в этом случае сводится к нахождению таких функций $u_i(a, \psi, \nu t)$, $A(a)$, $B(a)$, $i = 1, 2, \dots$, чтобы выражение (1.18), в котором a и ψ формально удовлетворяют равенствам (1.19), являлось формальным решением уравнения (1.17). В резонансном случае приближения строятся аналогично, но при этом полагается, что функции A_i , B_i в (1.19) дополнительно зависят от функции $v = \psi - \frac{2}{q}\nu t$. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов показали, что в обоих случаях неизвестные u_i , A_i , B_i можно эффективно определить, а значит, построить искомые приближения. Описанный алгоритм применялся авторами при решении разнообразных задач. В монографии [41] было завершено его создание, и он применялся так же к уравнениям вида (1.17) с почти периодической правой частью $f(x, u, t)$ относительно t .

1.2.2. Обоснование метода усреднения. В 1945 г. была опубликована фундаментальная монография Н. Н. Боголюбова [3], в которой создана строгая систематическая математическая теория метода усреднения. Центральное место в ней отведено обоснованию метода усреднения, что заключается в строгом математическом доказательстве определенных соответствий между решениями исходных (вырожденных) и усредненных задач. В монографии [3] основные теоремы, относящиеся к методу усреднения, установлены для уравнений в так называемой стандартной форме, т. е. для систем уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, t), \quad \varepsilon \ll 1. \quad (1.20)$$

К таким уравнениям, как отмечено в [3], во многих случаях приводятся квазилинейные уравнения колебательных процессов. Так, еще в монографии [41] отмечается, что уравнения, для которых при $\varepsilon = 0$ известно общее решение, часто могут быть приведены к виду (1.20) методом вариации производных постоянных. Подробно этот способ продемонстрирован в [41] на примере квазилинейного уравнения вида

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right),$$

которое при $\varepsilon = 0$ имеет общее решение

$$\begin{aligned} x &= x_0 \sin(\omega_0 t + x_2), \\ \frac{dx}{dt} &= x_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t + x_2), \end{aligned}$$

где $x_1, x_2 = \text{const}$. Рассматривая две последние формулы как замену переменных, рассматриваемое квазилинейное уравнение легко преобразовать в систему

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{\varepsilon}{\omega_0} f[x_1 \sin(\omega_0 t + x_2), x_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t + x_2), t] \cos(\omega_0 t + x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{\varepsilon \omega}{x_1} f[x_1 \sin(\omega_0 t + x_2), x_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t + x_2), t] \sin(\omega_0 t + x_2),\end{aligned}$$

которая имеет вид (1.20). В [3, гл. I, § 1] рассмотрены и некоторые другие примеры сведения возмущенных задач к виду (1.20). Основным требованием в [3] к правой части системы (1.20) является существование у $f(x, t)$ среднего $F(x)$ по t :

$$F(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N f(x, t) dt \equiv \langle f(x, t) \rangle. \quad (1.21)$$

Отметим, что класс вектор-функций $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, обладающих средним (1.21), довольно широк. Он, например, содержит почти периодические функции [70]. В монографии Боголюбова [3] рассмотрены различные задачи для системы (1.20): задача с начальным условием (задача Коши)

$$x(0) = x^0 \quad (1.22)$$

на участке $t \in [0, T/\varepsilon]$, $T = \text{const} > 0$; задачи о периодических, почти периодических и общих ограниченных на всей временной оси $t \in \mathbb{R}$ решениях.

Каждой из указанных задач для уравнения (1.20) ставится в соответствие аналогичная задача для автономного усредненного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon F(y). \quad (1.23)$$

В частности, возмущенной задаче Коши (1.20), (1.22) соответствует задача Коши для уравнения (1.23) с тем же начальным условием

$$y(0) = x_0. \quad (1.24)$$

Наиболее подробно остановимся на задаче Коши, причем будем записывать ее в несколько ином виде. Последнее обстоятельство связано

с тем, что изучение задачи Коши на участке $t \in [0, T/\varepsilon]$, меняющемся вместе с параметром ε , неудобно. Поэтому, следуя ряду авторов, сделаем в (1.20), (1.22) замену переменных $\tau = \varepsilon t$ и введем в рассмотрение большой параметр $\omega = \varepsilon^{-1}$. Тогда задача (1.20), (1.22) преобразуется в задачу

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \omega t), \quad t \in [0, T], \quad (1.25)$$

$$x(0) = x_0, \quad \omega \gg 1. \quad (1.26)$$

Усредненная задача (1.23), (1.24) примет при этом вид

$$\frac{dy}{dt} = F(y), \quad t \in [0, T], \quad (1.27)$$

$$y(0) = x_0. \quad (1.28)$$

Здесь новую независимую переменную τ мы ниже обозначаем через t . Далее будем считать, что наряду с равенством (1.21) справедливо равенство

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} d\tau \equiv \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle. \quad (1.29)$$

Теорема 1.1. Пусть при некотором положительном числе b справедливы следующие условия:

- 1) вектор-функция $f(x, t)$ и ее производная $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ определены и непрерывны на множестве $|x| \leq b, t \in [0, T]$;
- 2) предельные равенства (1.21) и (1.29) выполняются равномерно относительно $|x| \leq b$;
- 3) задача (1.27), (1.28) имеет решение $y(t)$ со значениями в интервале $(-b, b)$.

Тогда существует такое число $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ задача (1.25), (1.27) имеет единственное решение $x_\omega(t)$, причем

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \max_{t \in [0, T]} |x_\omega(t) - y(t)| = 0.$$

В следующей теореме Н. Н. Боголюбова [3] рассматриваются решения системы (1.20) на всей временной оси в предположении, что соответствующая усредненная система (1.23) имеет стационарное невырожденное решение x^0 . Доказано, что при определенных условиях и достаточно малых ε (достаточно больших ω в случаях (1.25)) система (1.20) имеет в окрестности x^0 относительно единственное ограниченное на оси $t \in \mathbb{R}$ решение $x_\varepsilon(t)$ ($x_\omega(t)$), это решение асимптотически близко к x^0 и является почти периодическим, если $f(x, t)$ является почти периодическим по t равномерно относительно x . Кроме того, в указанной теореме получены условия устойчивости $x_\varepsilon(t)$ ($x_\omega(t)$), выраженные в естественных терминах матрицы Якоби $F(x^0)$.

В третьей фундаментальной теореме Н. Н. Боголюбова [3] устанавливается соответствие между периодическим решением усредненной системы (1.20) и интегральным многообразием исходной системы (1.23). При этом в ходе доказательства автор изложил свою теорию интегральных многообразий.

Четвертая теорема Н. Н. Боголюбова [41], которая, как отмечает автор, является аналогом второй и третьей теорем, относится к тому случаю, когда уравнение (1.20) представлено в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\Theta}{dt} &= \varepsilon \Phi(t, \Theta, a), \\ \frac{da}{dt} &= \varepsilon A(t, \Theta, a).\end{aligned}\tag{1.30}$$

При этом предполагается, что $\Phi(t, \Theta, a)$ и $A(t, \Theta, a)$ являются 2π -периодическими по компонентам Θ , а соответствующее усредненное по времени t уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d\Theta}{dt} &= \varepsilon \Phi(a), \\ \frac{da}{dt} &= \varepsilon A(a),\end{aligned}$$

причем $A(a^0) = 0$ при некотором векторе a^0 . При этих и некоторых дополнительных ограничениях в теореме IV Н. Н. Боголюбов [41] доказал существование интегрального многообразия системы (1.30), обладающего рядом важных свойств (условная устойчивость и др.).

1.3. Развитие классической теории

1.3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Научные школы Ю. А. Митропольского и В. М. Волосова. В работе Н. Н. Боголюбова, Д. Н. Зубарева [5] алгоритм типа Крылова — Боголюбова (см. п. 1.2.1) разработан для систем с быстро вращающейся фазой

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= X(x, \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \lambda\omega(x) + \Psi(x, \psi),\end{aligned}$$

где вектор-функция $X(x, \psi)$ и скалярная функция $\Psi(x, \psi)$ 2π -периодичны относительно фазы ψ , λ — большой параметр.

Монография И. Н. Рапопорта [106], в которой рассматриваются системы, сводящиеся к так называемому L -диагональному виду, является первой монографией по развитию асимптотических методов Крылова — Боголюбова. Огромное значение имеет научная деятельность Ю. А. Митропольского в созданной им школе (см., например, [74–98, 107–111, 138, 139] и др.) по развитию и обоснованию асимптотических методов нелинейной механики для целого ряда задач, описываемых дифференциальными уравнениями — обыкновенными и с частными производными. Отметим, что уже в первых своих работах Ю. А. Митропольский получил глубокие результаты по разработке асимптотического метода для колебательных систем с медленно меняющимися параметрами вида

$$\frac{d}{dt} \left[m(\tau) \frac{dx}{dt} \right] + c(\tau)x = \varepsilon F \left(x, \frac{dx}{dt}, \tau, \Theta \right),$$

где $\tau = \varepsilon t$ — медленное время, $\frac{d\Theta}{dt} = \nu(\tau) > 0$ — медленно меняющаяся частота внешней периодической силы, $m(\tau)$ и $c(\tau)$ — положительные функции, F — функция того же вида, что и f в (1.17). Полученные результаты позволили ему изучить различные нестационарные процессы и, в частности, медленное прохождение через резонанс в нелинейных системах. Данные результаты подытожены в монографии [79]. Дальнейшее развитие этих идей и математическое обоснование разработанных алгоритмов представлены в монографии [85]. Ю. А. Митропольский со своими учениками получил целый ряд других важных результатов, обобщающих и развивающих метод усреднения, с которыми можно ознакомиться воспользовавшись списком

литературы в конце данной монографии. Они относятся к уравнениям с негладкими правыми частями, с импульсным воздействием, уравнениям с запаздывающим аргументом, к гиперболическим системам и многим-многим другим задачам.

Очень важная роль в развитии теории метода усреднения принадлежит В. М. Волосову [10], который обосновал метод усреднения для систем с быстрыми и медленными переменными

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = Y_0(x, y, t) + \varepsilon Y_1(x, y, t), \quad (1.31)$$

существенно обобщающими уравнения в стандартной форме и системы с быстро вращающейся фазой. Он предложил новую идею построения предельной усредненной системы. Эта идея состоит в усреднении уравнений медленных переменных вдоль решений вырожденной системы

$$\frac{dy}{dt} = Y_0(x, y, t), \quad x = \text{const}.$$

В. М. Волосов для системы (1.31) с начальными условиями обосновал свой метод усреднения и разработал с обоснованием алгоритм построения высших приближений. В. М. Волосовым и его учениками [10–19, 99–103] помимо систем с быстрыми и медленными переменными с точки зрения развития теории метода усреднения изучались уравнения с отклоняющимся аргументом, системы, описывающие колебательные и вращательные движения, системы, близкие к гамильтоновым, квазилинейные системы и др. Заговорив о высших приближениях, трудно не вернуться назад, к монографии Н. Н. Боголюбова [3], в которой впервые был предложен алгоритм построения высших приближений для уравнений в стандартной форме (1.20) с правой частью

$$f(x, t) = \sum_{\nu=-N}^N e^{i\nu t} f_\nu(x),$$

где $f_\nu(x)$ — полиномы.

Высшие приближения задаются в [3] выражением

$$x = \xi + \varepsilon F_1(\xi, t) + \varepsilon^2 F_2(\xi, t) + \dots + \varepsilon^m F_m(\xi, t), \quad (1.32)$$

где $F_k(\xi, t) = \sum_{\mu \neq 0} e^{i\mu t} F_{k\mu}(\xi)$, а ξ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon P_1(\xi, t) + \dots + \varepsilon^m P_m(\xi). \quad (1.33)$$

Неизвестные $F_1, \dots, F_m, P_1, \dots, P_m$ определяются так, чтобы при замене переменных (1.32) уравнение (1.20) совпало с уравнением (1.33) с точностью до величины порядка ε^{m+1} . Алгоритм Н. Н. Боголюбова позднее был обоснован рядом авторов (см., например, [27]). Существенный вклад в развитие теории метода усреднения внес И. И. Гихман [20–22], предложивший при обосновании этого метода трактовать его как некоторую форму непрерывной зависимости от параметра, а также развил теорию для стохастических дифференциальных уравнений. М. А. Красносельский и его соавторы [28, 38] предположили свои важные трактовки метода усреднения с позиций функционального анализа. Целый ряд работ, в которых метод усреднения применяется в вопросах устойчивости по Ляпунову решений дифференциальных уравнений, принадлежит М. М. Хапаеву [126–129]. Ряд работ, где метод усреднения применяется к уравнениям со случайными членами, принадлежит Р. З. Хасьминскому [130–134].

1.3.2. Параболические уравнения. В статье С. Д. Эйдельмана [141] метод усреднения обоснован для почти линейных параболических систем уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \left[\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + F(t, x, u) \right],$$

а в работе Р. З. Хасьминского [130] — для линейных параболических уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + F(t, x, u) \right], \quad \varepsilon \ll 1.$$

В работе И. Б. Симоненко [113] осуществлено обоснование метода усреднения для абстрактных параболических уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x, \omega t), \quad \omega \gg 1, \quad (1.34)$$

в случае задачи Коши, а когда вектор-функция $f(x, \tau)$ является l -периодической по τ , то и для задачи об $l\omega^{-1}$ -периодических решениях. Здесь A — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор в банаховом пространстве, порождающий аналитическую полугруппу,

а $f(x, \tau)$ — подчиненная в определенном смысле оператору A нелинейность, обладающая средним

$$F(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N f(x, \tau) d\tau.$$

Сформулируем результаты важной работы [113] в авторской редакции. Пусть A — оператор, порождающий в банаховом пространстве B аналитическую полугруппу $Q(t)$; $-A$ — позитивный оператор, обладающий непрерывным обратным оператором. Обозначим через B^β ($\beta \geq 0$) банахово пространство, являющееся областью определения оператора $(-A)^\beta$.

Пусть $a \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$ и f — непрерывное отображение пространства $B^a \times [0, +\infty]$ в пространство B^ε , удовлетворяющее следующим условиям:

1) Дифференциал Фреше по первой переменной существует и осуществляет непрерывное отображение Df пространства $B^a \times [0, +\infty]$ в пространство $\text{Hom}(B^a, B^\varepsilon)$ (так мы обозначим пространство линейных ограниченных операторов, действующих из пространства B^a в пространство B^ε с топологией равномерной сходимости).

Для каждого ограниченного в B^a множества K отображение Df равномерно непрерывно и ограничено на множестве $K \times [0, +\infty]$.

2) Множество, где $\text{Hom}(B^a, B^\varepsilon)$ -сходится интеграл³

$$(D_N f)(x) = \frac{1}{N} \int_0^N Df(x, t) dt, \quad N \rightarrow +\infty,$$

всюду плотно в B^a .

3) Существует такой элемент $x \in B^a$, что B^ε -сходится интеграл

$$F_N x = \frac{1}{N} \int_0^N f(x, t) dt, \quad N \rightarrow +\infty,$$

и существует постоянная M такая, что $\|f(x, t)\|_{B^\varepsilon} \leq M$ для всех $t \geq 0$.

³Здесь и далее фраза « B -сходится» означает сходимость по норме банахова пространства B .

Рассмотрим две задачи Коши:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x, \omega t), \quad x|_{t=0} = x, \quad \omega > 0; \quad (1.35)$$

$$\frac{dy}{dt} = Ay + F(y), \quad y|_{t=0} = x, \quad \omega > 0. \quad (1.36)$$

Теорема 1.2. Если задача (1.36) разрешима, то существует такое число ω_0 , что при $\omega > \omega_0$ разрешима и задача (1.35). При этом

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|x - y\|_{C_{[0, t_0]}(B^\beta)} = 0.$$

Теорема 1.3. Пусть y — стационарное решение уравнения (1.36), и отображение f есть T -периодическое отображение по второй переменной ($f(x, t + T) = f(x, t)$). Обозначим через Λ спектр оператора $A + (DF)(y)$, $r(\Lambda) = \max_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Re} \lambda$. Предположим, что спектр Λ не содержит нуля. Тогда

1) для любого $\varepsilon > 0$ стационарному решению $\overset{0}{y}$ при больших частотах ω соответствует единственное $\omega^{-1}T$ -периодическое решение уравнения (1.35), удовлетворяющее неравенству

$$\|\overset{0}{y} - \overset{0}{x}\|_{C_{[0, t_0]}(B^\beta)} < \varepsilon;$$

2) если весь спектр Λ расположен строго в левой полуплоскости, то указанное $\omega^{-1}T$ -периодическое решение уравнения (1.35) асимптотически устойчиво при больших значениях ω . Это означает, что для каждого $\sigma \in (0, -r(\Lambda))$ существуют такие числа $\omega_0 > \omega_\varepsilon$, $c, \varepsilon_1 > 0$, что при $\varepsilon > \varepsilon_1$ для любых начальных данных x_0 из окрестности $\|\overset{0}{y} - x_0\|_{B^\beta} \leq \varepsilon_1$ решение x задачи (1.35) существует на бесконечном промежутке времени и имеет место оценка

$$\rho(t) = \|\overset{0}{x}(t) - x(t)\|_{B^\beta} \leq ce^{-\sigma t} \rho(0);$$

3) если спектр Λ имеет строго в правой полуплоскости хотя бы одну точку, то соответствующее $\omega^{-1}T$ -периодическое решение уравнения (1.35) неустойчиво при больших ω . Это означает, что для каждого $\sigma \in (0, r(\Lambda))$ существуют числа $\varepsilon_1 > 0$, $\omega_0 > \omega_\varepsilon$, последовательность $t_n > 0$ и последовательность начальных данных x_0^n , B^β -сходящаяся к начальным данным $\overset{0}{x}$, для

которых задача (1.35) разрешима при $\omega > \omega_0$ на промежутке $[0, t_n]$ и выполняются неравенства

$$\rho_n(t_n) \geq \varepsilon_1, \quad t_n \leq \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\varepsilon_1}{\rho_n(0)}, \quad \rho_n(t) = \|x_n(t) - \overset{0}{x}(t)\|_{B^\beta}.$$

Здесь x_n — решение задачи (1.35) с начальными данными x_0^n .

В статье И. Б. Симоненко [114] метод усреднения обоснован для параболических задач, обобщающих уравнения Навье — Стокса и задачи конвекции при высокочастотных вибрациях сосуда с жидкостью. В дальнейшем результаты по конвекции дополнены в работах В. Б. Левенштама [49, 156]. В статье В. Б. Левенштама [45] метод усреднения обоснован для уравнений типа (1.17) в случае задачи о почти периодических и общих ограниченных решениях на всей временной оси в окрестности стационарного решения усредненной задачи

$$\frac{dy}{dt} = Ay + F(y).$$

В работе В. Б. Левенштама [57] разработан с обоснованием базирующийся на методе пограничного слоя и методе многомасштабных разложений алгоритм построения полных асимптотик решений параболических начально-краевых задач второго порядка с быстро осциллирующими по времени членами. Приведем этот результат в подробном изложении.

Пусть m и s — натуральные числа, $T > 0$, Ω — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ с C^∞ -гладкой границей $\partial\Omega$. В цилиндре $Q = \overline{\Omega} \times [0, T]$ с боковой поверхностью $\Gamma = \partial\Omega \times (0, T]$ рассмотрим в обычной классической постановке задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{k,j=1}^n a_{kj}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{|l| \leq s} f_l \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) e^{il\omega t}, \\ u|_{\Gamma} &= 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \end{aligned} \quad (1.37)$$

с параметром $\omega \gg 1$. Относительно входящих в (1.37) функций сделаем следующие предположения.

1. Вещественные функции a_{ij} бесконечно дифференцируемы при $x \in \overline{\Omega}$, и для задачи (1.37) выполнено условие параболичности, т. е. при всех $x \in \overline{\Omega}$ и ненулевых векторах $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathbb{R}^m$ спра-

ведливо неравенство

$$\sum_{k,j=1}^m a_{kj} \sigma_k \sigma_j > 0.$$

2. Пусть D — ограниченная область комплексного пространства C^{m+1} , а N_0 — некоторое целое неотрицательное число, конкретнее о котором будет сказано в формулировке теоремы. Предположим, что $f_l(x, t, e)$, где $e = (e_0, e_1, \dots, e_m) \in C^{m+1}$, $|l| \leq s$, — непрерывные комплекснозначные функции, которые определены на множестве $Q \times D$ и удовлетворяют условиям:

а) каждая функция $f_l(x, t, e)$ бесконечно дифференцируема по переменным $(x, t, e) \in Q \times D$;

б) при $0 < |l| \leq s$ справедливы равенства

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} D^\alpha f_l(x, t, e) \Big|_{(x,t) \in \partial\Omega \times \{0\}} = 0, \quad |\alpha| + j \leq N_0, \quad (1.38)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ — мультииндекс длины $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$.

Наряду с задачей (1.37) рассмотрим в Q усредненную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \sum_{k,j=1}^m a_{kj}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_j} + f_0\left(x, t, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_m}\right), \\ v|_\Gamma &= 0, \quad v(x, 0) = \varphi(x). \end{aligned} \quad (1.39)$$

3. Предположим, что задача (1.39) имеет решение $v(x, t) = u_0(x, t)$ такое, что при $(x, t) \in Q$ вектор $(u_0(x, t), \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x_m}) \in D$, и функция u_0 бесконечно дифференцируема в Q по переменным (x, t) .

При сформулированных условиях для больших ω существует решение $u_\omega(x, t)$ задачи (1.37), и для достаточно малых $\alpha_0 \in (0, 1)$ справедливо соотношение

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\|u_\omega - u_0\|_{C^{\alpha_0, \alpha_0/2}(Q)} + \sum_{k=1}^m \left\| \frac{\partial}{\partial x_k} (u_\omega - u_0) \right\|_{C^{\alpha_0, \alpha_0/2}(Q)} \right] = 0.$$

Таким образом, функция u_0 является главным членом асимптотики решения u_ω по норме $C^{\alpha_0, \alpha_0/2}$. Нашей целью является построение

старших приближений в сильных нормах при помощи метода пограничного слоя. Для этого предварительно в замыкании $\overline{\Omega}_\eta$ пограничной подобласти Ω_η (области Ω) толщины η введем криволинейную систему координат следующим образом. Определим отображение $\partial\Omega \times [0, \eta] \rightarrow \overline{\Omega}_\eta$ по закону $(\varphi, r) \rightarrow \varphi + n_\varphi r$, где φ — точка на $\partial\Omega$, имеющая местную координату φ , а n_φ — вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке φ . Число η выбирается столь малым, что указанное отображение обратимо.

Асимптотические приближения решения u_ω задачи (1.37) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t, \omega) = & \sum_{j=0}^n \omega^{-j/2} u_j(x, t) + \\ & + \omega^{-1} \sum_{j=0}^n \omega^{-j/2} [v_j(x, t, \omega t) + w_j(\varphi, \rho, t) + z_j(\varphi, \rho, t, \omega t)], \end{aligned}$$

где $\rho = r\omega^{1/2}$, u_j и v_j — регулярные, а w_j и z_j — погранслоиные функции. При этом $v_j(x, t, \omega t)$ и $z_j(\varphi, \rho, t, \omega t)$ — 2π -периодические по τ с нулевым средним

$$\langle v_j \rangle(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_j(x, t, \tau) d\tau = 0, \quad \langle z_j \rangle = 0,$$

а погранслоиные функции w_j и z_j , рассматриваемые как функции переменных (x, t) , в области $\Omega \setminus \Omega_0$, где координаты (φ, r) не определены, полагаются нулями.

Теорема 1.4. Существует такое число $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ для $l > 0$ и любого натурального n найдется такое число N_0 , что при выполнении предположений (1.38) с этим значением N_0 эффективно строится приближение $\tilde{u}$, для которого справедлива оценка

$$\|u_\omega - \tilde{u}\|_{C^{l, l/2}(Q)} \leq C_{n, l} \omega^{-(n+1-\max(l-2, 0))/2}.$$

Под эффективностью здесь понимается тот факт, что при известном решении u_0 усредненной задачи построение $\tilde{u}$ сводится к решению конечного (зависящего от n) числа однозначно разрешимых линейных однородных параболических начально-краевых задач для

уравнений $Pu = \varphi(x, t)$ в Q с единым параболическим дифференциальным выражением P .

В работе В. Б. Левенштама [58] аналогичные [57] результаты получены для параболических уравнений произвольного порядка $2k$. В работах В. В. Жикова [24, 25] метод усреднения обоснован для уравнения вида (1.17) с быстро осциллирующей главной частью $A = A(\omega t)$ в случае задачи об ограниченных решениях в окрестности стационарного решения усредненного уравнения. Однако при этом на нелинейность $f(x, \tau)$ уравнения накладывались жесткие ограничения. В. Б. Левенштаму в статьях [47, 55] во всем пространстве $x \in \mathbb{R}$ с быстро осциллирующей по времени главной частью удалось избавиться от таких жестких ограничений как в задаче об ограниченных решениях на всей временной оси, так и в случае задачи Коши. Исследования В. В. Жикова [24, 25], относящиеся к линейной задаче, очень важны, поэтому подробно изложим основную часть [25] в авторской редакции.

Обозначения:

J — числовая ось;

B — основное сепарабельное банахово пространство;

$C = C(B)$ — банахово пространство непрерывных функций $J \rightarrow B$ с нормой $\sup$;

$\dot{C} = \dot{C}(B)$ — подпространство из C , состоящее из элементов $u(t)$, для которых $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| = 0$;

$M^p = M^p(B)$, $J^p(a, b, B)$ — банаховы пространства измеримых функций с нормами

$$\sup_{t \in J} \left(\int_0^1 \|u(t+s)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \left(\int_a^b \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Нашим основным объектом является линейный оператор $L = \frac{d}{dt} + A(t)$, где $A(t)$ ($t \in J$) есть, вообще говоря, неограниченный оператор. Предполагается выполненным следующее *условие разрешимости вправо*. Для любого $u(t_0) \in B$ уравнение $Lu = 0$ имеет единственное решение $u(t)$ ($t \geq t_0$), причем разрешающий оператор $U(t, t_0)$ ($t \geq t_0$) непрерывен как оператор $B \rightarrow B$ и сильно непрерывен по обоим аргументам $t \geq t_0$.

В частности, если $A(t) \equiv A$, то условие разрешимости означает, что A порождает сильно непрерывную группу $U(t)$ ($t \geq t_0$).

Кроме условия разрешимости, предполагаются выполненными оценки

$$\|U(t, t_0)\| \leq l_0 e^{c_0(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \quad (1.40)$$

Для непрерывного уравнения $Lu = f$, где $f \in M^1(B)$ решение $u(t)$ ($t \geq t_0$) определяется по обычной формуле

$$u(t) = U(t, t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^t U(t, s)f(s) ds.$$

В том случае, если функция $u(t)$ ($t \in J$) удовлетворяет этому равенству для любых $t \geq t_0 \in J$, то мы говорим о решении на всей оси и пишем $Lu = f$ ($t \in J$). Из (1.40) непосредственно получаем

$$\|u(t)\| \leq c_0 \left[\|u(t_0)\| + \int_{t_0}^{t_0+1} \|f(s)\| ds \right], \quad t_0 \leq t \leq t_0 + 1. \quad (1.41)$$

Определим теперь L как неограниченный оператор в $C = C(B)$. Для этого достаточно задать область определения равенством

$$D = D_G = \{u \in C, f \in C, Lu = f \text{ } (t \in J)\}.$$

Аналогично определяем L как неограниченный оператор в пространствах $M^p(B)$, $J^p(-\infty, +\infty, B)$. Из оценки (1.41) следует, что во всех случаях имеется вложение $D \subset C$. Замкнутость этих операторов вполне очевидна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор L называется *регулярным*, если для всякого $f \in C$ уравнения $Lu = f$ однозначно разрешимы в C . Из теоремы Банаха получаем существование ограниченного обратного $L^{-1} : C \rightarrow C$ и оценку

$$\|u\|_C \leq k \|Lu\|_C. \quad (1.42)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оператор L называется *корректным*, если справедлива оценка (1.42), и *усиленно корректным*, если справедлива оценка $\|u\|_C \leq k \|Lu\|_{M^2(B)}$, $u \in C$, $Lu \in M^2(B)$.

Отметим, что из усиленной корректности следует корректность (ввиду очевидного вложения $C \subset M^2$). Обратное утверждение не

удается ни доказать (например, в конечномерном случае), ни опровергнуть. Отметим еще, что регулярный оператор всегда усиленно корректен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Оператор L называется *слабо регулярным*, если пара (C, C) допустима, т. е. для любого $f \in C$ уравнение $Lu = f$ имеет хотя бы одно решение $u \in C$.

Из теоремы Банаха об открытом отображении получаем, что для любого $f \in C$ имеется решение u с оценкой

$$\|u\|_C \leq k \|f\|_C, \quad (1.43)$$

где постоянная k не зависит от $f \in C$.

Пусть $B = H$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\dots, \dots)$; рефлексивное пространство E с сопряженным E^* называется вложимым, если имеется непрерывное плотное вложение $E \subset H \subset E^*$, причем билинейная форма $x(y)$ ($x \in E^*$, $y \in E$) совпадает со скалярным произведением, если $x, y \in H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Линейный оператор $A : E \rightarrow E^*$ называется *коэрцитивным* (или *сильно эллиптическим*), если имеет место неравенство $\operatorname{Re}(Ax, x) \geq c_1 \|x\|_E^2 - c_2 \|x\|^2$.

Очевидно, что сопряженный оператор $A^* : E \rightarrow E^*$ также сильно эллиптивен. Оператор A можно считать также неограниченным оператором в H , если задать область определения равенством $D = \{x \in H, Ax \in H\}$. Это всегда подразумевается, когда мы говорим о спектре оператора A . Оператор $\frac{d}{dt} + A(t)$ называется параболическим (строго говоря, сильно параболическим), если $A(t)$ есть непрерывная ограниченная функция в $\operatorname{Hom}(E, E^*)$ и неравенство коэрцитивности выполнено равномерно по $t \in J$.

Для параболического оператора выполнено условие разрешимости вправо, если в качестве основного пространства взять H . При рассмотрении неоднородного уравнения $Lu = f$ свободный член f можно брать не только из $C = C(H)$, но и из $M^2(E^*)$. Возможность этого следует, например, из обычных априорных оценок

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(t_0)\|^2 + c_1^* \left(\int_{t_0}^t \|u\|^2 ds + \int_{t_0}^t \|f\|_{E^*}^2 ds \right), \quad t \geq t_0, \quad (1.44)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+1} (\|u\|_E^2 + \|u'\|_{E^*}^2) dt \leq c_1^* \left(\|u(t_0)\|^2 + \int_{t_0}^{t_0+1} \|f\|_{E^*} dt \right), \quad (1.45)$$

которые получаются после скалярного умножения уравнения $Lu = f$ на u и интегрирования. Подчеркнем, что константа c_1^* зависит лишь от констант коэрцитивности и величины $\sup_{t \in J} \|A(t)\|_{\text{Hom}(E, E^*)}$. Отсюда следует, что оценки (1.44), (1.45) сохраняются, если в оператор A ввести параметр ω .

Пусть имеется переменное разложение $B = N_1(t_0) + N_2(t_0)$ пространства B в прямую сумму подпространств, $P_1(t_0)$, $P_2(t_0)$ — соответствующие проекторы, $u(t)$ ($t \geq t_0$) — решение однородного уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Оператор L обладает *экспоненциальной дихотомией* (э. д.) на J , если:

$$d_1) U(t, t_0)N_i(t_0) \subset N_i(t) \quad (t \geq t_0, i = 1, 2),$$

$$d_2) \gamma(N_1(t_0), N_2(t_0)) \geq \alpha \geq 0 \quad (t_0 \in J),$$

$$d_3) \|u(t)\| \leq l_1 \|u(t_0)\| e^{-c_1(t-t_0)} \quad (t \geq t_0, u(t_0) \in N_1(t_0)),$$

$d_4)$ для всякого начального значения $u(t_0) \in N_2(t_0)$ существует и единственно такое продолжение на всю ось, для которого

$$\|u(t)\| \leq l_1 \|u(t_0)\| e^{c_1(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Лемма 1.1. Э. д. на J эквивалентна регулярности.

Рассмотрим семейство операторов L_α , для которых неравенство (1.43) выполняется равномерно по α .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Скажем, что операторы L_α *равномерно регулярны*, если обратные операторы $L_\alpha^{-1} : C \rightarrow C$ равномерно ограничены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Скажем, что операторы L_α обладают равномерной э. д. на J , если константы из условий $d_2)$ – $d_4)$ ограничены сверху и отделены от нуля.

Предыдущие рассуждения доказывают, что равномерная регулярность эквивалентна равномерной э. д. на J .

Будем считать, что пространство E^* обладает следующим аппроксимативным свойством: существует последовательность линейных операторов $P_m : E^* \rightarrow E^*$ таких, что $P_m y \xrightarrow{E^*} y$ ($y \in E^*$). Положим $S = \text{Hom}(E, E^*)$.

Введем следующие функциональные пространства:

$X = M^2(E^*)$; X_{comp} — подпространство X , состоящее из таких элементов $f(t)$, для которых семейство $\{f(t+s)\}$ ($t \in J$) компактно

в $Z^z(0, 1, E^*)$. Отметим, что в пространстве X_{comp} плотны элементы из $C(E)$;

$V = M^2(E) \cap C(H)$ (норма есть сумма норм); Y — банахово пространство элементов $u \in V$, для которых $u' \in X$ и норма дается равенством $\|u\|_Y = \|u\|_X + \|u\|_V$.

В перечисленных пространствах норма инвариантна относительно сдвига. Это позволяет внутренним образом выделить подпространства $\overset{\circ}{X}$, $\overset{\circ}{V}$, $\overset{\circ}{Y}$, состоящие из почти периодических элементов. Например, элемент $f \in X$ почти периодичен, если семейство $\{f(t+s)\}$ компактно в X .

В терминах перечисленных пространств оценки (1.44), (1.45) имеют вид

$$\|u\|_V^2 \leq \|u\|_Y^2 \leq c_1^* \{ \|u\|_C^2 + \|f\|_X^2 \}.$$

Отметим, что для параболического оператора L двойственный оператор $-\frac{d}{dt} + A^*(t)$ совершенно идентичен исходному (разрешимость имеет место влево), а формула Грина проверяется непосредственно. Роль «основного» пространства играет пространство H .

Следствие 1.1. Пусть вложение $E \subset H$ вполне непрерывно, и функция $A(t)$ устойчива по Пуассону в S (например, почти периодична в S). Тогда оператор L регулярен, если только он корректен или слабо регулярен.

Переходим к основной теореме. Будем предполагать, что вложение $E \subset H$ вполне непрерывно и $A(t)$ есть компактная функция в S с равномерными средними $\bar{A}$.

Теорема 1.5. Пусть усредненный оператор $\bar{L}$ регулярен, т. е. спектр $\bar{A}$ не пересекается с мнимой осью. Тогда операторы L_ω ($\omega \geq \omega_0$) равномерно регуляры. Более того, имеют место утверждения:

1) оператор L_ω осуществляет гомоморфизм $Y \rightarrow X$, причем обратные операторы равномерно ограничены; в частности,

$$\|u\|_V \leq k \|L_\omega u\|_X;$$

2) если $f \in X_{comp}$ и $\bar{f}$ — равномерное среднее в E^* , то

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|L_\omega^{-1}(f(\omega t)) - \bar{A}^{-1}\bar{f}\|_V = 0.$$

Приведем теперь основные результаты работы [55] для случая задачи Коши.

1. Пусть k и m — натуральные числа. В этом пункте рассмотрим задачу Коши для линейного параболического уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|\alpha| \leq 2k} a_\alpha(x, t, \omega t) D^\alpha u + f(x, t, \omega t), \quad (1.46)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (1.47)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ — произвольная точка в вещественном пространстве $\mathbb{R}^m$, время t принадлежит $[0, T]$, $T = \text{const} > 0$, ω — большой асимптотический параметр. Функции $a_\alpha(x, t, \tau)$ и $f(x, t, \tau)$ в уравнении (1.46) определены, непрерывны по совокупности переменных и равномерно ограничены при $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, T]$, $\tau \in [0, \infty]$. Пусть, кроме того, для некоторого $\gamma \in (0, 1]$ эти функции удовлетворяют по переменным x, t условию Гёльдера с показателем γ и константой, не зависящей от аргументов x, t, τ . Предположим, что выполнено условие равномерной параболичности для уравнения (1.46), т. е. для всех вещественных векторов $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$

$$(-1)^{k+1} \text{Re} \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x, t, \tau) \sigma^\alpha \geq \delta |\sigma|^{2k},$$

где $\sigma^\alpha = \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_m^{\alpha_m}$, $|\sigma| = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_m^2}$ и постоянная параболичности $\delta > 0$ не зависит от x, t, τ, σ . Пусть функции a_α и f таковы, что существуют их средние A_α и F , определяемые соотношением

$$P(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \int_0^N p(x, t, \tau) d\tau,$$

где $p = a_\alpha, f$, причем сходимость к пределу равномерна относительно $(x, t) \in \mathbb{R}^m \times [0, T]$.

Рассмотрим усредненную задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{|\alpha| \leq 2k} A_\alpha(x, t) D^\alpha v + F(x, t), \quad (1.48)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x). \quad (1.49)$$

Пусть r — произвольное положительное число, $[r]$ — целая часть r . Через $C^r = C^r(\mathbb{R}^m)$ обозначим пространство $[r]$ раз непрерывно дифференцируемых в $\mathbb{R}^m$ функций, удовлетворяющих при

целых r условию

$$\|u\|_{C^r} = \sum_{|\alpha| \leq r} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |D^\alpha u(x)| < \infty,$$

а при нецелых r условию

$$\|u\|_{C^r} = \|u\|_{C^{[r]}} + \sum_{|\alpha|=[r]} \sup_{x' \neq x''} |D^\alpha u(x'') - D^\alpha u(x')| |x'' - x'|^{[r]-r} < \infty.$$

Через $C^\delta([T_1, T_2], C^r)$, где $r > 0$, $\delta \in [0, 1)$, обозначим банахово пространство непрерывных в $\mathbb{R}^{m+1}$ функций $u(x, t)$, имеющих непрерывные производные по x до порядка $[r]$ включительно и удовлетворяющих

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^\delta([T_1, T_2], C^r)} &= \|u\|_{C^0([T_1, T_2], C^r)} + \\ &+ \sup_{(x, t'') \neq (x, t')} \sum_{|\alpha|=[r]} |D^\alpha u(x, t'') - D^\alpha u(x, t')| |t'' - t'|^{-\delta} < \infty. \end{aligned}$$

Теорема 1.6. Пусть $\varphi \in C^{\gamma_0}$, $\gamma_0 \in (0, 1]$. Тогда при любом $\delta_0 \in (0, \min(\gamma, \gamma_0))$ для решений u_ω, v задач (1.46), (1.47) и (1.48), (1.49), соответственно, справедливо соотношение

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|u_\omega - v\|_{C^{\delta_0/2k}([0, T], C^{\delta_0})} = 0.$$

2. Рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x, \delta^{2k-1}u, t, \omega t) D^\alpha u + f(x, \delta^{2k-1}u, t, \omega t), \quad (1.50)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad t \in [0, T], \quad T = \text{const} > 0. \quad (1.51)$$

Здесь через $\delta^{2k-1}u$ для краткости мы обозначим вектор-функцию $(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{2k-1}u}{\partial x_n^{2k-1}})$, составленную из всевозможных частных производных функций u по $x_1, x_2, \dots, x_m$ до порядка $2k-1$ включительно. Обозначим через $p = \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{(m+i-1)!}{i!(m-1)!}$ количество таких производных. Пусть M — произвольное ограниченное множество в комплексном пространстве $\mathbb{C}^p$. Будем предполагать, что функции $a_\alpha(x, e, t, \tau)$, $f(x, e, t, \tau)$ в уравнении (1.50) и их производные

$\frac{\partial a_\alpha}{\partial e_i}(x, e, t, \tau)$, $\frac{\partial f}{\partial e_i}(x, e, t, \tau)$ по компонентам вектора $e \in C^p$ определены, непрерывны по совокупности переменных и равномерно ограничены при $x \in \mathbb{R}^m$, $e \in M$, $t \in [0, T]$, $\tau \in [0, \infty)$. Пусть, кроме того, для некоторого $\gamma \in (0, 1]$ функции $a_\alpha(x, e, t, \tau)$, $f(x, e, t, \tau)$, $\frac{\partial}{\partial e_i} a_\alpha(x, e, t, \tau)$ и $\frac{\partial}{\partial e_i} f(x, e, t, \tau)$ удовлетворяют по переменным x, t условию Гёльдера с показателем γ и константой $C = C(M)$, не зависящей от аргументов $x \in \mathbb{R}^m$, $e \in M$, $t \in [0, T]$, $\tau \in [0, \infty)$, а функции $\frac{\partial a_\alpha}{\partial e_i}(x, e, t, \tau)$ и $\frac{\partial f}{\partial e_i}(x, e, t, \tau)$ удовлетворяют еще равномерно относительно x, t, τ условию Липшица по e :

$$|p(x, e'', t, \tau) - p(x, e', t, \tau)| \leq L|e'' - e'|,$$

где $p = \frac{\partial a_\alpha}{\partial e_i}$ или $\frac{\partial f}{\partial e_i}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, T]$, $\tau \in [0, \infty)$, $e', e'' \in M$, $L = L(M)$ — постоянная.

Предположим, что выполнено условие равномерной параболичности для уравнения (1.50), т. е. для всех вещественных $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ справедлива оценка

$$(-1)^{k+1} \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x, e, t, \tau) \sigma^\alpha \geq \delta |\sigma|^{2k},$$

где постоянная $\delta = \delta(M)$ не зависит от $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, T]$, $\tau \in [0, \infty)$, $e \in M$. Пусть функции a_α и f таковы, что существуют их средние A_α и F , определяемые равенством

$$P(x, e, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \int_0^N p(x, e, t, \tau) d\tau,$$

где $p = a_\alpha, f$, причем сходимость к пределу равномерна относительно $(x, e, t) \in \mathbb{R}^m \times M \times [0, T]$.

Рассмотрим усредненную задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2m} A_\alpha(x, \delta^{2k-1} v, t, \omega t) D^\alpha v + F(x, \delta^{2k-1} v, t), \quad (1.52)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad t \in [0, T]. \quad (1.53)$$

Теорема 1.7. Существует такое число $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ задача (1.50), (1.51) однозначно разрешима на участке $t \in [0, T]$, причем для любого $\delta_0 \in (0, \min(\gamma, \gamma_0))$ выполняется соотношение

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|u_\omega - v\|_{C^{\frac{\delta_0}{2k}}([0, T], C^{2k+\delta_0})} = 0,$$

где u_ω и v — решения задач (1.50), (1.51) и (1.52), (1.53) соответственно.

1.3.3. Уравнения с большими высокочастотными слагаемыми. В 90-х гг. прошлого века теория метода усреднения активно распространяется на уравнения, содержащие быстро осциллирующие во времени слагаемые, пропорциональные определенным положительным степеням частоты.

Отметим, что к таким уравнениям относится уравнение колебаний физического маятника при малых высокочастотных вибрациях его точки подвеса, исследованное еще в классических работах Н. Н. Боголюбова [4] и П. Л. Капицы [32]. В статье В. Н. Челомея [140] показано, что высокочастотные сжатия-растяжения балки могут стабилизировать ее прямолинейную форму. В работе С. М. Зеньковской и И. Б. Симоненко [29] рассматривалась задача конвекции жидкости в контейнере, совершающем вертикальные колебания. Было установлено (без математического обоснования), что эти колебания стабилизируют состояние относительного покоя жидкости и даже могут предотвратить конвекцию при сколь угодно высоком градиенте температуры. Обоснование метода усреднения для задачи конвекции проведено в работах И. Б. Симоненко [114] и В. Б. Левенштама [49, 51] (см. главу 5 ниже).

Однако систематическое исследование уравнений с указанной спецификой начал В. И. Юдович в работах [144, 145] (см. также обзорную работу этого автора [146]), выполненных в основном без математического обоснования. В работах первого автора монографии и его учеников (см. [2, 31, 59–62, 68, 69] и др.) различные теоремы теории метода усреднения установлены для обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и параболических уравнений. При этом все эти уравнения содержат большие высокочастотные слагаемые с указанной выше спецификой. Сформулируем подробно результаты лишь первой работы [2].

В работе Д. А. Басистой, В. Б. Левенштама [2] рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть n — натуральное число, D — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $T = \text{const} > 0$ и $\Omega = \{(x, t, \tau) : x \in D, t \in [0, T], \tau \in [0, \infty)\}$. На множестве Ω рассмотрим задачу Коши для зависящей от большого параметра ω системы n нелинейных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, t, \omega t) + \sqrt{\omega} \varphi(x, t, \omega t), \\ x(0) &= x^0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Поскольку производная $\frac{dx}{dt}$ в (1.54) представлена суммой, одно из слагаемых которой пропорционально $\sqrt{\omega}$, $\omega \gg 1$, то мы называем ее системой с быстрыми переменными. Здесь $f(x, t, \tau)$ и $\varphi(x, t, \tau)$ — вектор-функции, которые определены на множестве Ω , принимают значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

1) компоненты $f_i(x, t, \tau)$ и $\varphi_i(x, t, \tau)$, $i = 1, 2, \dots, n$, этих вектор-функций непрерывны и дифференцируемы по компонентам вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^*$;

2) вектор-функции

$$f(x, t, \tau), \quad \varphi(x, t, \tau), \quad \chi(x, t, \tau) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau) \int_0^\tau \varphi(x, t, s) ds$$

и матричнозначные функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \tau)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t, \tau)$, где $\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$ — матрицы Якоби, равномерно ограничены на Ω ;

3) производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$, $1 \leq i, j \leq n$, непрерывны на множестве Ω и удовлетворяют условию Липшица по x , т. е. существует такая постоянная L , что при всех $x, y \in D$, $t \in [0, T]$ и $\tau \in [0, \infty)$ выполняются неравенства

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y, t, \tau) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, t, \tau) \right| \leq L|y - x|$$

и аналогичные неравенства для $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$;

4) функции $f_i(x, t, \tau)$ и $\chi_i(x, t, \tau)$, $1 \leq i \leq n$, равномерно на множестве Ω непрерывны по $t \in [0, T]$, т. е. существует такая функция

$\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, которая непрерывна в нуле и удовлетворяет условию $\gamma(0) = 0$, что при всех $x \in D$, $t_1, t_2 \in [0, T]$, $\tau \in [0, \infty)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |f_i(x, t_2, \tau) - f_i(x, t_1, \tau)| &< \gamma(|t_2 - t_1|), \\ |\chi_i(x, t_2, \tau) - \chi_i(x, t_1, \tau)| &< \gamma(|t_2 - t_1|); \end{aligned}$$

5) существует такая вектор-функция F , определенная на множестве $D \times [0, T]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, что равномерно относительно $(x, t) \in D \times [0, T]$ справедливы предельные соотношения

$$F_i(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N [f_i(x, t, \tau) + \chi_i(x, t, \tau)] d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

6) усредненная задача

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= F(y, t), \\ y(0) &= x^0, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

с тем же, что в (1.54), начальным условием $x^0 \in D$ имеет решение $y(t)$ со значениями в D ;

7) равномерно относительно $(x, t) \in D \times [0, T]$ существуют пределы

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{N}} \int_0^N \varphi_i(y, t, \tau) d\tau &= 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{N}} \int_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(y, t, \tau) d\tau = 0, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{N}} \int_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(y, t, \tau) d\tau &= 0, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

При выполнении указанных условий справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.8. Для любой постоянной $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $\omega_0 = \omega_0(\varepsilon) > 0$ такая, что при каждом $\omega > \omega_0$ существует единственное решение $x_\omega(t)$ возмущенной задачи (1.54), и при этом для всех $t \in [0, T]$ справедливо неравенство

$$|x_\omega(t) - \overset{\circ}{y}(t)| < \varepsilon.$$

Перейдем теперь к построению полного асимптотического разложения решения $x_\omega(t)$ задачи (1.54), предполагая дополнительно, что вектор-функции $f(x, t, \tau)$ и $\varphi(x, t, \tau)$ являются l -периодическими по τ и обладают непрерывными в Λ производными по x, t любого порядка. На основании метода двухмасштабных разложений будем его строить в виде

$$x_\omega(t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-k/2} [u_k(t) + v_k(t, \omega t)], \quad (1.55)$$

где вектор-функции $u_k(t)$ непрерывны по $t \in [0, T]$, а $v_k(t, \tau)$ — непрерывны по $(t, \tau) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$ и l -периодичны по τ с нулевым средним. Действуя формально, подставим ряд (1.55) вместо x в равенства (1.54) и разложим нелинейности f и φ в ряды Тейлора с центром $x = u_0(t)$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{du_0(t)}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-k/2} \left(\frac{du_k(t)}{dt} + \frac{\partial v_k(t, \omega t)}{\partial t} + \omega \frac{\partial v_k(t, \omega t)}{\partial \tau} \right) = \\ = f[u_0(t), t, \omega t] + \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} (u_0(t), t, \omega t) \times \\ \times \{ \omega^{-j/2} [u_j(t) + v_j(t, \omega t)] \}^k + \sqrt{\omega} \varphi[u_0(t), t, \omega t] + \\ + \sqrt{\omega} \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k} (u_0(t), t, \omega t) \{ \omega^{-j/2} [u_j(t) + v_j(t, \omega t)] \}^k, \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$u_0(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^{-k/2} [u_k(0) + v_k(0, 0)] = x^0, \quad (1.57)$$

где $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t, \tau)$ и $\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x, t, \tau)$ — производные Фреше k -го порядка вектор-функций $f(x, t, \tau)$ и $\varphi(x, t, \tau)$, соответственно, по векторной переменной x .

В (1.56) и (1.57) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ω . Равенство коэффициентов при наивысшей степени $\omega^{1/2}$ в левой и правой частях (1.56) имеет вид

$$\frac{\partial v_1(t, \tau)}{\partial \tau} = \varphi[u_0(\tau), t, \tau], \quad \tau = \omega t. \quad (1.58)$$

Рассматривая $u_0(t)$ и t в (1.58), в качестве параметров однозначно находим

$$v_1(t, \tau) = \int_0^\tau \varphi[u_0(t), t, s] ds - \left\langle \int_0^\tau \varphi[u_0(t), t, s] ds \right\rangle, \quad (1.59)$$

где $\langle \varphi(\tau) \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^1 \varphi(s) ds$. Равенства коэффициентов при степени ω^0 в (1.56) и (1.57) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dt} + \frac{\partial v_2}{\partial \tau} &= f(u_0, t, \tau) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u_0, t, \tau)[u_1(t) + v_1(t, \tau)], \\ u_0(0) &= x^0. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Очевидно, необходимым условием разрешимости полученной задачи является равенство средних по τ ее левой и правой частей, т. е. разрешимость задачи

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dt} &= \langle f(u_0, t, \tau) \rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u_0, t, \tau) \int_0^\tau \varphi(u_0, t, s) ds \right\rangle \equiv F(u_0, t), \\ u_0(0) &= x^0. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Задача (1.61) совпадает с усредненной задачей, которая по условию имеет решение $u_0(t) = \overset{\circ}{y}(t)$. Подставляя это значение $u_0(t)$ в (1.59), найдем $v_1(t, \tau)$.

Мы использовали уже равенство средних по τ (говорят: «медленных составляющих») левой и правой частей задачи (1.60); приравниваем теперь остатки, т. е. быстро осциллирующие с нулевым средним составляющие (иногда кратко говорят: «быстрые составляющие»). Для этого предварительно каждой вектор-функции $g(t, \tau)$, определенной и непрерывной на множестве $(t, \tau) \in [0, T] \times [0, \infty)$ и обладающей средним $\langle g(t, \tau) \rangle$ по τ , поставим в соответствие вектор-функцию $\{g(t, \tau)\}_\tau = g(t, \tau) - \langle g(t, \tau) \rangle$, которая обладает нулевым средним:

$$\langle \{g(t, \tau)\}_\tau \rangle = \langle g(t, \tau) - \langle g(t, \tau) \rangle \rangle = \langle g(t, \tau) \rangle - \langle \langle g(t, \tau) \rangle \rangle = 0.$$

Итак, применяя операцию $\{\dots\}$ к обеим частям задачи (1.60), придем к уравнению

$$\frac{\partial v_2}{\partial \tau} = \{f(u_0, t, \tau)\}_\tau + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u_0, t, \tau)u_1(t) + \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u_0, t, \tau)v_1(t, \tau) \right\}_\tau. \quad (1.62)$$

Его правая часть линейно зависит от неизвестной вектор-функции $u_1(t)$ и обладает нулевым средним по τ . Так что это уравнение имеет единственное l -периодическое по τ решение, которое имеет вид

$$v_2(t, \tau) = \lambda(t, \tau)u_1(t) + \mu_2(t, \tau), \quad (1.63)$$

где $\lambda(t, \tau) = \left\{ \int_0^\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x}[u_0(t), t, \tau] d\tau \right\}_\tau$, а вектор-функция $\mu_2(t, \tau)$ бесконечно дифференцируемая по t и l -периодическая по τ с нулевым средним.

Приравнивая коэффициенты при степени $\omega^{-1/2}$ в левой и правой частях равенств (1.56) и (1.57), заменяя v_2 его выражением (1.63) и применяя операцию усреднения по τ , получим задачу

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(u_0, t, \tau)v_1(t, \tau) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(u_0(t), t, \tau)v_1^2 \right\rangle + \\ &+ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u_0(t), t, \tau)\mu_2(t, \tau) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(u_0(t), t, \tau) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u_0(t), t, \tau)\lambda(t, \tau) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(u_0(t), t, \tau)v_1(t, \tau) \right\rangle u_1(t) \equiv \\ &\equiv \left[\frac{\partial F}{\partial x}(u_0(t), t) \right] u_1(t) + c_1(t), \end{aligned} \quad (1.64)$$

$$u_1(0) = -v_1(0, 0). \quad (1.65)$$

Линейная задача Коши (1.64)–(1.65) однозначно разрешима на участке $t \in [0, T]$ и ее решение $u_1(t)$ бесконечно дифференцируемо. Подставляя найденную вектор-функцию $u_1(t)$ в (1.63), однозначно найдем $v_2(t, \tau)$, которая также бесконечно дифференцируема по t . Аналогичным образом находим и другие коэффициенты ряда (1.65).

Введем обозначение

$$x_\omega^m = x_0(t) + \sum_{k=1}^m \omega^{-k/2} [u_k(t) + v_k(t, \omega t)], \quad m = 0, 1, \dots$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.9. Пусть данные задачи (1.54) удовлетворяют указанным выше требованиям. Тогда для любого натурального числа m найдутся такие положительные числа ω_m и c_m , что при $\omega > \omega_m$ эффективно строится приближение $\overset{m}{x}_\omega(t)$, удовлетворяющее при всех $t \in [0, T]$ оценке

$$|x_\omega(t) - \overset{m}{x}_\omega(t)| \leq c_m \omega^{-\frac{m+1}{2}}.$$

В работе В. Б. Левенштама [59] метод усреднения и алгоритм построения полной асимптотике решения обоснован для системы с быстрыми и медленными переменными в случае задачи Коши.

ГЛАВА 2

УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ — СТОКСА С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ МАССОВОЙ СИЛОЙ

В главе 1 цитировались результаты работы И. Б. Симоненко по обоснованию метода усреднения для абстрактных параболических уравнений вида (1.34), где речь шла о задаче с начальными данными (задача Коши) и задаче о периодических решениях. В той же главе отмечалось, что в качестве приложений указанных результатов метод усреднения был обоснован в [114] для обобщенных уравнений Навье — Стокса и для задачи о тепловой конвекции жидкости в быстро осциллирующем сосуде. Отметим, что обобщенные уравнения Навье — Стокса в [114] не содержат больших высокочастотных слагаемых (см. п. 1.3.3). Если же в рассмотренной в [114] задаче конвекции считать температуру T не зависящей от времени t , то мы получим обычные уравнения Навье — Стокса с массовой силой, содержащей высокочастотное слагаемое, пропорциональное частоте $\omega \gg 1$. Таким образом, в [114] метод усреднения обоснован для этих уравнений в случае задачи с начальным условием и задачи о периодических по времени решениях. В работе [115] того же автора был предложен и обоснован алгоритм построения асимптотик решений абстрактных параболических уравнений вида (1.34). Этот алгоритм, базирующийся на методе Ньютона — Канторовича в сочетании с идеями метода усреднения, состоит в построении последовательности линейных абстрактных параболических уравнений, решения которых доставляют высшие приближения исходной нелинейной задачи. Но, к сожалению, эти линейные задачи по-прежнему зависят от большого параметра ω , так что остается проблема асимптотического интегрирования последних. В случае уравнений Навье — Стокса такое интегрирование естественно осуществлялось с помощью метода пограничного слоя [9]. Такой подход построения асимптотик использовался в работах [50, 53] для задачи конвекции.

В настоящей главе для задачи о движении жидкости, описываемой системой Навье — Стокса, с быстро осциллирующей массовой силой (без теплового воздействия), которая описывается уравнениями Навье — Стокса, излагается с обоснованием более естественный и удобный, нежели в [50, 53], алгоритм построения асимптотик. Он состоит в непосредственном применении метода пограничного слоя [9] к исходной квазилинейной задаче и интегрировании возникающих при этом не зависящих от ω задач с помощью разделения решений на плавную и осциллирующую части. Этот способ позволяет представить решение непосредственно исходной задачи в виде асимптотического ряда, коэффициенты которого эффективно определяются, и дать точную оценку асимптотической близости решения и n -й частичной суммы ряда.

Отметим, что в работах [57, 58] аналогичная процедура использовалась для асимптотического интегрирования задачи о периодических по времени решениях и начально-краевой задачи для полулинейных параболических уравнений с быстро осциллирующими младшими членами и условиями Дирихле на границе пространственной области.

Опишем теперь распределение материала главы, отметив подробнее, нежели выше, структуру этого материала.

Глава состоит из трех разделов: 2.1, 2.2 и 2.3. Раздел 2.1 содержит вспомогательные сведения, используемые далее в монографии. В двух последующих разделах осуществлено асимптотическое интегрирование первой начально-краевой задачи и соответственно задачи о периодических по времени решениях уравнений Навье — Стокса с быстро осциллирующей массовой силой, пропорциональной частоте осцилляций $\omega \gg 1$, и граничными условиями Дирихле. К исходной полулинейной задаче применяется, как указано выше, метод пограничного слоя для построения полной асимптотики решения, а вспомогательные задачи, которые при этом возникают (для регулярных и погранслоевых коэффициентов разложения), интегрируются при помощи их разбиения на задачи для плавных и быстро осциллирующих по времени компонент решения (с нулевой главной частью). Это разбиение, присущее методу усреднения в случае задачи о периодических решениях, является естественным следствием условий разрешимости упомянутых выше вспомогательных задач. По этой причине в разделе 2.3 получены весьма полные результаты. Случай же начально-краевой задачи с точки зрения построения асимп-

тотики решений является намного более сложным. В разделе 2.2, где рассматриваются эти задачи, приходится накладывать жесткие ограничения на быстро осциллирующие по времени слагаемые (уравнений) с нулевым средним. Такие члены вместе со своими производными по x, t вплоть до порядка N_0 ($N_0 = \infty$, когда строится полная асимптотика) должны обращаться в нуль на множестве $\overline{\Omega} \times \{0\}$ (см. условие 3 п. 2.2.1). На первый взгляд может показаться, что такие ограничения основаны на том факте, что мы строим асимптотику в сколь угодно сильных гёльдеровых нормах, а для этого необходимо выполнение условий согласования сколько угодно высокого порядка для задачи, зависящей от большого параметра. Таким образом, мы приходим к необходимости ограничений, которые близки к нашим. Но, к сожалению, в разделе 2.2 значение N_0 возрастает не только, когда мы обращаемся к более сильной норме, но и когда возрастает количество членов асимптотики, которую нам необходимо построить.

Доказательство теоремы 2.2 содержится в работах [46, 65], результаты раздела 2.2 опубликованы в работе [156], а раздела 2.3 — в работе [56].

2.1. Вспомогательные сведения

Вначале приведем некоторые сведения из теории аналитических полугрупп [37, §§ 13–14].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Семейство линейных ограниченных операторов $Q(t)$, $t \geq 0$, действующих в комплексном банаховом пространстве X , называется *сильно непрерывной полугруппой операторов*, если выполняются три условия:

- 1) $Q(t+s) = Q(t)Q(s)$ для любых $t, s \geq 0$;
- 2) $Q(0) = I$ — единичному оператору;
- 3) для каждого $x \in X$ функция $Q(\cdot)x$ представляет собой непрерывное отображение луча $[0, +\infty)$ в B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Сильно непрерывная полугруппа Q называется *аналитической*, если она непрерывна по операторной норме на интервале $(0, +\infty)$ и продолжима с этого луча до аналитического отображения (за которым сохраним прежнее обозначение Q) некоторого сектора

$$\{z : |\arg z| < \alpha, 0 < |z| < +\infty\}, \quad \alpha > 0,$$

в $\text{Hom}(X, X)$ такого, что $Q(z)$ сильно стремится к единичному оператору при $z \rightarrow 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Для каждой сильно непрерывной полугруппы Q определяется *порождающий* эту полугруппу *оператор* A . Его область определения образуют элементы $x \in X$, для которых существует предел $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}[Q(t) - I]x$, который и полагается равным Ax . В этом случае мы вместо $Q(t)$ будем использовать обозначение e^{tA} . Область определения порождающего оператора является всюду плотным линейным многообразием, а порождающий оператор — замкнутым.

Приведем далее критерий того, что оператор порождает аналитическую полугруппу.

Теорема 2.1. Пусть A — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве X со всюду плотной в X областью определения $D(A)$. Для того чтобы оператор A порождал аналитическую полугруппу, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое положительно число c , что для всех λ из некоторой полуплоскости $\text{Re } \lambda \geq \sigma_0$ операторы $(\lambda I - A)$ были обратимы и выполнялась оценка

$$\|(\lambda I - A)\|_{\text{Hom}(X, X)} \leq \frac{c}{1 + |\lambda|}.$$

Оператор A , удовлетворяющий условиям критерия, порождает лишь одну аналитическую полугруппу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Если оператор A удовлетворяет условиям критерия с $\sigma_0 = 0$, то оператор $-A$ называют *сильно позитивным*.

Очевидно, что если оператор A порождает аналитическую полугруппу, то оператор $(-A + \lambda_0 I)$ сильно позитивен при некотором λ_0 .

Если A — сильно позитивный оператор, действующий в X , то для каждого вещественного δ определяется [37, формула (14.15)] линейный оператор A^δ — *дробная степень оператора* A . Определяемое таким образом семейство операторов обладает следующими свойствами:

- 1) если $\delta \leq 0$, то A^δ — ограниченный в X оператор с нулевым ядром; причем $A^0 = I$, $A^1 = A$, A^{-1} — обратный к A оператор;
- 2) для любых $\delta_1 \leq 0$, $\delta_2 \leq 0$ справедливо равенство

$$A^{\delta_1 + \delta_2} = A^{\delta_1} A^{\delta_2};$$

3) оператор A^δ в случае $\delta \geq 0$ является обратным к оператору $A^{-\delta}$, при этом область определения $D(A^\delta)$ оператора A^δ совпадает с областью значений оператора $A^{-\delta}$ и всюду плотно в X .

На каждом из линейных множеств $D(A^\delta)$, $\delta \geq 0$, можно ввести норму $\|\cdot\|_\delta$ с помощью формулы $\|x\|_\delta = \|A^\delta x\|_X$. Нормированное таким образом множество $D(A^\delta)$ является банаховым пространством, причем при $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2$ имеет место непрерывное вложение $D(A^{\delta_2}) \subset D(A^{\delta_1})$.

Также отметим следующие свойства сильно позитивного оператора $-A$, действующего в X :

1) для каждого $x \in X$ и $t > 0$ справедливо соотношение

$$e^{-tA}x \in \bigcap_{\delta \geq 0} D[(-A)^\delta];$$

2) для каждого натурального n выполняется равенство

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{tA}x = A^n e^{tA}x;$$

3) для каждого $\delta > 0$ существует такое $c(\delta) > 0$, что для всех $t > 0$ справедлива оценка

$$\|(-A)^\delta e^{-tA}\|_{\text{Hom}(B, B)} \leq \frac{c(\delta)}{t^\delta};$$

4) для каждого $x \in D((-A)^\delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$, имеет место равенство

$$(-A)^\delta e^{-tA}x = e^{-tA}(-A)^\delta x, \quad t \geq 0.$$

Через $C^\mu([a, b], B)$, где $0 < \mu \leq 1$, обозначим банахово пространство вектор-функций $u \in C([a, b], B)$, удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{C^\mu([a, b], B)} \equiv \|u\|_{C([a, b], B)} + \sup_{\substack{b \geq t_2 > t_1 \geq a, \\ t_2 - t_1 < 1}} \frac{\|u(t_2) - u(t_1)\|_B}{(t_2 - t_1)^\mu} < \infty.$$

Через $C(B) = C(\mathbb{R}, B)$ будем обозначать пространство непрерывных ограниченных вектор-функций $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow B$ с $\sup$ -нормой. Через $C^1(B) = C^1(\mathbb{R}, B)$ обозначим соответствующее пространство вектор-функций $\varphi \in C(\mathbb{R}, B)$, для которых $\frac{d\varphi}{dt} \in C(\mathbb{R}, B)$. Аналогичным образом определяется также пространство Гёльдера $C^\mu(B) = C^\mu(\mathbb{R}, B)$, $\mu \in (0, 1)$.

Приведем теперь некоторые результаты математической гидродинамики [42, 143], на которые будем опираться в дальнейшем.

Пусть M — множество непрерывно дифференцируемых в Ω соленоидальных (т. е. удовлетворяющих уравнению $\operatorname{div} v = 0$ в Ω) вектор-функций $v(x)$ с равной нулю на $\partial\Omega$ нормальной компонентой. Через S_q , $q > 1$, обозначим банахово пространство, являющееся замыканием множества M по норме $L_q \equiv L_q(\Omega)$:

$$\|v\|_{S_q} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^q dx \right)^{1/q} = \left(\int_{\Omega} \left[\sum_{1 \leq j \leq 3} |v_j(x)|^2 \right]^{q/2} dx \right)^{1/q}.$$

Через G_q обозначим банахово пространство, полученное замыканием множества градиентов гладких функций φ по норме

$$\|\nabla\varphi\|_{G_q} = \left[\int_{\Omega} |\nabla\varphi|^q dx \right]^{1/q} = \|\nabla\varphi\|_{L_q}.$$

Пространство L_q распадается в прямую сумму своих подпространств S_q и G_q : $L_q = S_q \oplus G_q$. Связанный с этим разложением проектор $\Pi : L_q \rightarrow S_q$ является ограниченным оператором, причем ортогональным в случае $q = 2$.

В пространстве S_q определен оператор Стокса $A_0 = -\nu\Pi\Delta$ с областью определения $D(A_0) = \overset{\circ}{S}_q^2$, являющейся замыканием по норме W_q^2 множества M . Оператор A_0 — замкнут, а $-A_0$ порождает в S_q аналитическую полугруппу e^{-tA_0} , $t \geq 0$. Более того, оператор A_0 сильно позитивен, а потому определены его дробные степени A_0^γ , $\gamma > 0$. Через $\overset{\circ}{S}_q^{2\gamma}$ будем обозначать банахово пространство, элементы которого принадлежат области определения оператора A_0^γ и снабжены нормой $\|u\|_{\overset{\circ}{S}_q^{2\gamma}} = \|A_0^\gamma u\|_{S_q}$.

Важную роль далее играет нижеследующая теорема 2.2. Она впервые была сформулирована в работе И. Б. Симноненко [114]. Ее подробное доказательство содержится в монографии [116] того же автора, которое в рассматриваемом здесь случае (граница области $\partial\Omega \in C^2$) неполное. Оно полное для $\partial\Omega \in C^5$, но переход к $\partial\Omega \in C^2$ представлен лишь схематично. Представленное здесь полное доказательство для $\partial\Omega \in C^2$ содержится в работе [46].

Доказательство теоремы следует схеме, указанной в [114], и базируется на результатах и методах работ [7, 114, 116].

Теорема 2.2 [48, 114]. Для любых чисел $\mu \in (0, 1]$ и $q > 3$ найдется число $\gamma = \gamma(q, \mu) \in (0, 1)$, при котором сужение проектора Π на пространство вектор-функций $C^\mu(\bar{\Omega})$ является ограниченным оператором из $C^\mu(\bar{\Omega})$ в $\mathring{S}_q^{2\gamma}$.

Непосредственному доказательству теоремы предположим определения моментной и аппроксимационной шкал, а также формулировку интерполяционной теоремы И. Б. Симоненко (см. [114, 116]).

Пусть B_0, B, B_1 — тройка банаховых пространств, причем имеют место непрерывные вложения $B_1 \subset B_0, B \subset B_0$, пусть $\gamma_0 > 0, \gamma_1 > 0, \gamma_0 + \gamma_1 = 1$.

Пространство B *аппроксимационно разделяет* пространства B_0 и B_1 в отношении $\gamma_0 : \gamma_1$, если для каждого $x \in B$ существует вектор-функция $x(\lambda), \lambda \in [1, \infty)$, удовлетворяющая условиям:

- а) $x(\lambda) \in B_1$;
- б) $\|x - x(\lambda)\|_{B_0} \leq c\lambda^{-\gamma_0} \|x\|_B$;
- в) $\|x(\lambda)\|_{B_1} \leq c\lambda^{\gamma_1} \|x\|_B$, где C — не зависящая от x постоянная.

Пространство B *моментно разделяет* B_0 и B_1 в отношении $\gamma_0 : \gamma_1$, если $B_1 \subset B_0$ и для каждого $x \in B_1$ выполняется оценка

$$\|x\|_B \leq c \|x\|_{B_0}^{\gamma_1} \|x\|_{B_1}^{\gamma_0}$$

с независимой от x постоянной c .

Теорема 2.3 [Интерполяционная теорема И. Б. Симоненко]. Пусть $B_0, B, B_1, B'_0, B', B'_1$ — банаховы пространства, причем B аппроксимационно разделяет B_0 и B_1 в отношении γ , B' моментно разделяет B'_0 и B'_1 в отношении γ' , причем $\gamma > \gamma'$. Пусть $A \in \text{Hom}(B_0, B'_0)$ и сужение $A|_{B_1} \in \text{Hom}(B_1, B'_1)$, тогда $A|_B \in \text{Hom}(B, B')$.

Обозначим через $\widehat{W}_q^1$, $q > 3$, подпространство пространства $W_q^1(\Omega)$ трехмерных вектор-функций, определенных на Ω , соленоидальных и имеющих на S равную нулю нормальную компоненту:

$$\widehat{W}_q^1 = \{u \in W_q^1(\Omega) : \text{div } u = 0, u_n|_S = 0\}.$$

Предложение 2.1. Пространство $\widehat{W}_q^1$ аппроксимационно разделяет пространства S_q и $\mathring{S}_q^2$.

◁ Отметим вначале, что имеют место вложения $\mathring{S}_q^2$ и $\widehat{W}_q^1 \subset S_q$. Первое из них очевидно, второе следует из [143, лемма 5.2]. Докажем

теперь, что для тройки пространств $S_q, \widehat{W}_q^1, \overset{\circ}{S}_q^2$ выполнены, сформулированные в определении аппроксимационного разделения, условия а)–в).

Пусть $u \in \widehat{W}_q^1$. Тогда в силу леммы 6.2 монографии [42] существует векторное поле v_0 на Ω такое, что

$$\operatorname{div} v_0 = 0, \quad \operatorname{rot} v_0 = u, \quad v_{0n}|_S = 0$$

и выполнена оценка

$$\|v_0\|_{W_q^2(\Omega)} \leq c \|u\|_{W_q^1(\Omega)}, \quad (2.1)$$

где c не зависит от u .

Возьмем теперь произвольный кусок S_1 поверхности S , ограниченный контуром l . По формуле Стокса

$$\int_l v_0 dl = \int_{S_1} \operatorname{rot}_n v_0 ds = \int_{S_1} u_n ds = 0,$$

где $\operatorname{rot}_n v_0$ — нормальная составляющая вектора $\operatorname{rot} v_0$. Отсюда следует, что на поверхности S существует функция $\varphi(s) \in C^1(S)$ (s — локальные координаты поверхности), такая что

$$\nabla_s \varphi = v_0.$$

Обозначим через $\rho(x)$ расстояние от точки $x \in \Omega$ до S , а через Ω_{h_0} , $h_0 > 0$, — погранслоем шириной h_0 : $\Omega_{h_0} = \{x \in \Omega : \rho(x) < h_0\}$. Число h_0 будем считать столь малым, что нормали к S в Ω_{h_0} не пересекаются. Пусть $\psi(\tau)$ — бесконечно дифференцируемая при $\tau \in [0, \infty)$ функция такая, что $0 \leq \psi(\tau) \leq 1$ и

$$\psi(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq 1/2, \\ 0, & \tau \geq 1. \end{cases}$$

В погранслоем Ω_{h_0} введем криволинейные координаты (s, ρ) , где $s(x) = (s_1, s_2)$ — точка поверхности S , лежащая с x на одной нормали, $\rho(x)$ — расстояние от x до S . Определим функцию

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi[s(x)]\psi[\rho(x)/h_0], & x \in \Omega_{h_0}, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_{h_0}. \end{cases}$$

Легко (например, с помощью теоремы о неявной вектор-функции) показать, что в нашем случае функции $s(x)$ и $\rho(x)$ непрерывно дифференцируемы, поэтому $\Phi \in C^1(\bar{\Omega})$.

Покажем теперь, что справедливы соотношения

$$\nabla\Phi(x_0) = \nabla\varphi[s(x_0)] = v_0[s(x_0)], \quad (2.2)$$

и

$$|\nabla\Phi(x) - \nabla\Phi(x_0)| \leq c|x - x_0| \|v_0\|_{C(\Omega)}, \quad (2.3)$$

где $x \in \Omega_{h_0}$, $x_0 = (s(x), 0) \in S$ и C — не зависящая от x и v_0 постоянная. Для доказательства этих соотношений, не умаляя общности, предположим, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ принадлежит S , ось Ox_3 направлена по внутренней нормали к S и точки x , x_0 находятся в малой окрестности O , причем $s_1(x) = x_1$, $s_2(x) = x_2$. Отсюда легко получается представление

$$\begin{aligned} \nabla\Phi(x) &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_1} \nabla s_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial s_2} \nabla s_2 \right) \psi[\rho(x)/h_0] + \varphi[s(x)] \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \nabla\rho(x) = \\ &= \nabla\varphi[s(x)] \psi[\rho(x)/h_0] + \varphi[s(x)] \frac{\partial\psi[\rho(x)]}{\partial\rho} e[s(x)]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь

$$e[s(x)] = \left(\frac{\partial f[s(x)]}{\partial s_1}, \frac{\partial f[s(x)]}{\partial s_2}, -1 \right) / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial s_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial s_2} \right)^2},$$

и мы, не умаляя общности, предполагаем, что поверхность S в малой окрестности O представлена уравнением $x_3 = f(x_1, x_2)$. Из (2.4) легко вытекают соотношения (2.2)–(2.3). Из (2.1), (2.3) и известной теоремы вложения С. Л. Соболева следует неравенство

$$|\nabla\Phi(x) - \nabla\Phi(x_0)| \leq c\rho(x) \|u\|_{W_q^1},$$

где $x \in \Omega_{h_0}$, $x_0 = (s(x), 0)$. Здесь и ниже c не зависит от x, u . Определим на Ω векторное поле

$$v(x) = v_0(x) - \nabla\Phi(x).$$

Проведем «срезку» и «сглаживание» этого векторного поля, следуя рассуждениям В. И. Юдовича в [143, лемма 5.2].

Пусть функция

$$\eta_h(x) = 1 - \psi[\rho(x)/h], \quad x \in \Omega.$$

Введем на Ω векторные поля

$$u_h = \eta_h u + \nabla \eta_h \times v, \quad u = \operatorname{rot} v, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} u_{h,\delta} &= \int_{\Omega} K_{\delta}(x-y) u_h(y) dy = \int_{R^3} K_{\delta}(x-y) u_h(y) dy = \\ &= \operatorname{rot} \int_{R^3} K_{\delta}(x-y) \eta_h(y) v(y) dy, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где K_{δ} — усредняющее по Соболеву ядро радиуса $\delta < h$. Здесь η_h , u и v (а значит и u_h) считаются продолженными с Ω на R^3 непрерывным образом. Для обоснования последнего равенства в (2.6) заметим, что для v при гладких v_0 и Φ оно очевидно, так как в этом случае согласно (2.5) $u_h = \operatorname{rot}(\eta_h v)$, для наших же $v \in C(\Omega)$ оно получается отсюда путем замыкания.

Обозначим для краткости u_{h,h^2} через u_h^0 . Легко видеть, что для u_h^0 выполняются условия а) и в) ($\lambda = h^{-1}$). Для обоснования соотношения б) воспользуемся неравенством

$$\|u - u_h^0\|_{L_q} \leq \|u - u_h\|_{L_q} + \|u_h - u_h^0\|_{L_q}.$$

В силу (2.1), (2.3) и теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место оценка

$$\|v(x)\| \leq c\rho(x)\|u\|_{W_q^1}, \quad x \in \Omega_{h_0}. \quad (2.7)$$

Используя представление (2.5), неравенство $\|\nabla \eta_h\| < c_1 h^{-1}$, где c_1 не зависит от h , и оценку (2.7), получим

$$\|u - u_h\|_{L_q} \leq \|1 - \eta_h\|_{L_q} \|u\|_C + \|\nabla \eta_h\|_{L_q(\Omega_h)} \|v\|_{L_q(\Omega_h)} \leq ch^{1/q} \|u\|_{W_q^1}. \quad (2.8)$$

Далее воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} u_h^0 - u_h &= \int_{\Omega} K_{h^2}(x-y) [\eta_h(y)u(y) - \eta_h(x)u(x)] dy + \\ &+ \int_{\Omega} K_{h^2}(x-y) \nabla \eta_h(y) v(y) dy - \nabla \eta_h v \equiv w_1 + w_2 + w_3. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Легко получаем оценки:

$$\|w_1\|_C \leq C(\|u\|_C h + \|u\|_{C^\gamma} h^{2\gamma}), \quad (2.10)$$

где $0 < \gamma < 1 - 3/q$,

$$\|w_2\|_{L_q} \leq \|\nabla \eta_h v\|_{L_q(\Omega_{2h})} \leq ch^{1/q} \|u\|_{W_q^1}, \quad (2.11)$$

$$\|w_3\|_{L_q} = \|w_3\|_{L_q(\Omega_h)} \leq ch^{1/q} \|u\|_{W_q^1}. \quad (2.12)$$

Из соотношений (2.8)–(2.12) и теоремы вложения С. Л. Соболева следует оценка

$$\|u - u_h^0\|_{L_q} \leq ch^\beta \|u\|_{W_q^1},$$

где $\beta = \min(1/q, 2\gamma)$, c — не зависящая от u постоянная.

Итак, свойство б), а с ним и предложение полностью доказаны. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Как известно [143], пространство $\mathring{S}_q^{2\delta_1}$ моментно разделяет S_q и $\mathring{S}_q^{2\delta_1}$, где $0 < \delta < \delta_1 \leq 1$, в отношении $\frac{\delta}{\delta_1} : (1 - \frac{\delta}{\delta_1})$. Рассмотрим две тройки пространств $S_q, \widehat{W}_q^1, \mathring{J}_q^2$ и $S_q, \mathring{S}_q^{2\delta}, \mathring{S}_q^2$. Из предложения 2.1, первого предложения настоящего доказательства и интерполяционной теоремы И. Б. Симоненко следует существование такого числа $\delta_2 \in (0, 1)$, что имеет место непрерывное вложение

$$\widehat{W}_q^1 \subset \mathring{S}_q^{2\delta_2}. \quad (2.13)$$

Обозначим через $\mathring{C}^2$ банахово пространство, полученное замыканием финитных в Ω трехмерных вектор-функций по норме C^2 . Как известно, при $u \in \mathring{C}^2$ справедливо представление

$$u = \Pi u + \nabla \varphi, \quad \Pi u \cdot n|_S = 0, \quad \operatorname{div} \Pi u = 0,$$

где φ — решение задачи Неймана

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} u, \quad \partial \varphi / \partial n|_S = 0.$$

Отсюда с помощью известных априорных оценок следует, что $\Pi \in \operatorname{Hom}(\mathring{C}^2, \mathring{S}_q^{2\delta_2})$. Поэтому в силу (2.13)

$$\Pi \in \operatorname{Hom}(\mathring{C}^2, \mathring{S}_q^{2\delta_2}). \quad (2.14)$$

Рассмотрим теперь еще две тройки пространств трехмерных вектор-функций: $L_q, C^\mu, \mathring{C}^2$ и $S_q, \mathring{S}_q^{2\delta}, \mathring{S}_q^{2\delta_2}$, где $0 < \delta < \delta_2$. Нетрудно показать, что C^μ аппроксимационно разделяет L_q и $\mathring{C}^2$. Как отмечалось выше, $\Pi \in \text{Hom}(L_q, S_q)$ [143]. Отсюда, из (2.14) и интерполяционной теоремы И. Б. Симоненко следует существование такого $\delta_0 = \delta_0(q, \mu)$, что $\Pi|_{C^\mu} \in \text{Hom}(C^\mu, \mathring{S}_q^{2\delta_0})$. Теорема доказана. $\triangleright$

В дальнейшем часто будут использоваться следующие оценки.

Предложение 2.2 [37, 116, 143]. *Для любых $q \geq r > 1$, $\beta = \frac{3}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}) < \frac{1}{2}$, $\mu \in (0, 1]$ и $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ найдется такая постоянная c , что при всех $u \in L_r$, $|\arg \lambda| \leq \varphi$ и $t, t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$ выполняются неравенства*

$$\|(\lambda I + A_0)^{-1} \Pi u\|_{W_q^k} \leq c(1 + |\lambda|)^{\beta-1+\frac{k}{2}} \|u\|_{L_r}, \quad k = 0, 1, \quad (2.15)$$

$$\left\| (\lambda I + A_0)^{-1} \Pi \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L_q} \leq c(1 + |\lambda|)^{\beta-\frac{1}{2}} \|u\|_{L_r}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (2.16)$$

$$\|e^{-tA_0} \Pi u\|_{W_q^k} \leq ct^{-\beta-\frac{k}{2}} \|u\|_{L_r}, \quad k = 0, 1, \quad (2.17)$$

$$\left\| e^{-tA_0} \Pi \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L_q} \leq ct^{-\beta-1/2} \|u\|_{L_r}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (2.18)$$

$$\|A_0^\alpha e^{-tA_0} \Pi u\|_{L_q} \leq ct^{-\beta-\alpha} \|u\|_{L_r}, \quad (2.19)$$

$$\|A_0^\alpha [e^{-t_2 A_0} - e^{-t_1 A_0}] \Pi u\|_{L_q} \leq c(t_2 - t_1)^\mu t_1^{-\beta-\alpha-\mu} \|u\|_{L_r}, \quad (2.20)$$

$$\|[e^{-t_2 A_0} - e^{-t_1 A_0}] \Pi u\|_{W_q^k} \leq c(t_2 - t_1)^\mu t_1^{-\beta-\mu-\frac{k}{2}} \|u\|_{L_r}, \quad k = \overline{0, 1}, \quad (2.21)$$

$$\left\| [e^{-t_2 A_0} - e^{-t_1 A_0}] \Pi \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_q} \leq c(t_2 - t_1)^\mu t_1^{-\beta-\mu-\frac{1}{2}} \|u\|_{L_r}. \quad (2.22)$$

Отметим, что фигурирующие в левых частях неравенств (2.16), (2.18), (2.22) линейные операторы, действующие на u , определены для гладких u и непрерывны согласно указанным неравенствам в соответствующих нормах, а потому допускают замыкания по непрерывности, за которыми сохраняем прежние обозначения. Здесь и в аналогичных ситуациях далее рассматриваются именно замыкания.

2.2. Начально-краевая задача

2.2.1. Постановка задачи. Формулировка основного результата. Пусть Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ в трехмерном евклидовом пространстве E^3 , $T = \text{const} > 0$. Рассмотрим в цилиндре $Q = \overline{\Omega} \times [0, T]$ с боковой границей $\Gamma = \partial\Omega \times [0, T]$ первую краевую задачу для уравнений Навье — Стокса в обычной классической постановке

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \nabla p + (v, \nabla)v = \\ & = a_0(x, t) + \sum_{0 < |k| \leq k_1} [\omega a_k(x, t) + b_k(x, t)] e^{ik\omega t}, \\ & \text{div } v = 0, \quad \int_{\Omega} p \, dx = 0, \quad v|_{\Gamma} = 0, \quad v(x, 0) = \varphi(x), \end{aligned} \quad (2.23)$$

в которой неизвестными являются трехмерная, вообще говоря, комплекснозначная вектор-функция скорости $v = (v_1, v_2, v_3)$ и функция давления p . Здесь, как обычно, $(v, \nabla) = \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial}{\partial x_k}$, $\text{div } v = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$. Мы рассматриваем задачу при больших значениях параметра ω и следующих условиях.

1. Граница $\partial\Omega$ и вектор-функции a_0 , a_k и b_k , $0 < |k| \leq m$, заданные в цилиндре Q и принимающие значения в комплексном трехмерном пространстве C^3 , бесконечно гладки; $\nu = \text{const} > 0$.

2. Первая краевая задача в цилиндре Q

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \nabla q + (u, \nabla)u = \\ & = a_0(x, t) + \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} (\Pi a_k, \nabla) \Pi a_{-k}(x, t), \\ & \text{div } u = 0, \quad \int_{\Omega} q \, dx = 0, \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \end{aligned} \quad (2.24)$$

которую мы будем называть усредненной (см. [9] и теорему 2.4), имеет бесконечно гладкое решение $u_0(x, t)$. Здесь Π — ортогональный проектор, о котором шла речь на с. 54.

3. Существует такое натуральное число N_0 , что для неотрицательных целых чисел j и мульти-индексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, которые удовлетворяют условию $j + |\alpha| \leq N_0$, справедливы следующие равенства:

$$\left. \frac{\partial^j}{\partial t^j} D^\alpha a_k(x, t) \right|_{(x,t) \in \Omega \times \{0\}} = 0, \quad \left. \frac{\partial^j}{\partial t^j} D^\alpha b_k(x, t) \right|_{(x,t) \in \Omega \times \{0\}} = 0,$$

где $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Напомним определение гёльдерова класса функций $C^{l,m}$, $l, m \geq 0$ [122, с. 222]. Этот класс содержит функции $u(x, t)$, заданные в цилиндре Q с граничными условиями. Они имеют непрерывные производные порядка меньше либо равно $[l]$ по переменной x и порядка меньше либо равно $[m]$ по переменной t и снабженные нормой

$$\begin{aligned} \|u\| &= \|u\|_{l,m} = \|u\|_{l,m}^Q = \sum_{|\alpha| \leq [l]} \sup_Q D^\alpha u + \sum_{k=0}^{[m]} \sum_Q \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right| + \\ &+ \delta_l \sum_{|\alpha| \leq [l]} \sup_{(x,t), (x',t') \in Q} |x' - x|^{[l]-l} |D^\alpha u(x', t) - D^\alpha u(x, t)| + \\ &+ \delta_m \sup_{(x,t), (x',t') \in Q} |t' - t|^{[m]-m} \left| \frac{\partial^{[m]}}{\partial t^{[m]}} u(x, t') - \frac{\partial^{[m]}}{\partial t^{[m]}} u(x, t) \right|, \end{aligned}$$

где $[a]$ есть целая часть числа a , $\delta_s = 0$ для целых s и $\delta_s = 1$ для нецелых s . Пространство трехмерных вектор-функций $v(x, t)$, компоненты которых принадлежат $C^{l,m}$ также будем обозначать через $C^{l,m}$. Также будем использовать обозначения $\|u\|_l \equiv \|u\|_{2l,l}$ и $\|u\|_l^Q \equiv \|u\|_{2l,l}^Q$.

Из результатов работы [114] вытекает, что при выполнении условий 1, 2, задача (2.23) для больших ω однозначно разрешима в цилиндре Q , и решения задач (2.23) и (2.24) асимптотически близки в некоторой гёльдеровой норме, когда $\omega \rightarrow \infty$. В следующей теореме речь идет об эффективном построении старших приближений в сколько угодно сильных гёльдеровых нормах.

Теорема 2.4. Существует такое число $\omega_0 > 0$, что, когда $\omega > \omega_0$, для каждого неотрицательного числа l и каждого целого неотрицательного n можно найти такое число N_0 , что, когда выполнены условия 1–3 (с таким N_0 в условии 3), можно эффективно построить приближение (v_ω^n, p_ω^n) решения (v_ω, p_ω) ; кроме того,

$$\|v_\omega - v_\omega^n\|_{2l+2} + \|\nabla p_\omega - \nabla p_\omega^n\|_{2l} \leq c_{1,n} \omega^{-\frac{n+1}{2}+1}$$

и

$$\|v_\omega - v_\omega^n\|_{2l+2} \leq d_{s,n} \omega^{-\frac{n+1}{2}},$$

где $s \in [0, 1]$, а $c_{1,n}$ и $d_{1,n}$ — константы, не зависящие от $\omega > \omega_0$. Под эффективностью мы понимаем тот факт, что построение приближения (v_ω^n, p_ω^n) сводится к решению конечного количества (зависящего от n) однозначно разрешимых линейных задач, которые не содержат большого параметра ω . Это задачи двух типов, а именно, первые начально-краевые задачи для линеаризованных уравнений Навье — Стокса в цилиндре Q и задачи Неймана для уравнения Пуассона в области Ω .

Если функции a_k, b_k и a_{-k}, b_{-k} , которые фигурируют в уравнении (2.23), соответственно, комплексно сопряжены (a_0 вещественнозначная), то решение (v_ω, p_ω) и приближения (v_ω^n, p_ω^n) вещественнозначны.

Алгоритм построения приближений (v_ω^n, p_ω^n) описан в следующем пункте. В сущности, мы не приводим доказательство оценок, представленных в теореме, так как они устанавливаются таким же образом, что и аналогичные оценки в разделе 2.3. Отметим лишь, что их вывод проводится в два этапа. На первом этапе они устанавливаются при помощи принципа сжатых отображений в слабых гёльдеровых нормах, а на втором этапе, на основании классических оценок, проводится их доказательство в сильных гёльдеровых нормах.

2.2.2. Алгоритм построения асимптотик. Мы построим приближения (v_ω^n, p_ω^n) , используя метод пограничного слоя [9]. В этой связи введем следующее обозначение.

Пусть $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ — криволинейные ортогональные координаты на поверхности $\partial\Omega$. Введем в некотором пограничном слое Ω_η области Ω новую систему координат следующим образом. Определим отображение $\partial\Omega \times [0, \eta] \rightarrow \Omega_\eta$ по правилу $(\varphi, r) \rightarrow \varphi + n_\varphi r$, где φ — точка $\partial\Omega$, а n_φ — единичный вектор внутренней нормали к по-

верхности $\partial\Omega$ в этой точке. Пусть η — настолько малое число, что указанное отображение обратимо.

Мы ищем приближения (v_ω^n, p_ω^n) решения (v_ω, p_ω) задачи (2.23) в виде

$$\begin{aligned}
 v_\omega^n &= \sum_{k=0}^n \omega^{-\frac{k}{2}} u_k(x, t) + \sum_{k=0}^{n+2} \omega^{-\frac{k}{2}} v_k(x, t, \tau) + \\
 &+ \sum_{k=0}^{n+2} \omega^{-\frac{k}{2}} w_k(x, t, \omega) + \sum_{k=0}^{n+2} \omega^{-\frac{k}{2}} z_k(x, t, \tau, \omega), \\
 p_\omega^n &= \sum_{k=0}^n \omega^{-\frac{k}{2}} p_k(x, t) + \sum_{k=0}^{n+2} \omega^{-\frac{k-2}{2}} s_k(x, t, \tau) + \\
 &+ \sum_{k=0}^n \omega^{-\frac{k}{2}} h_k(x, t, \omega) + \sum_{k=0}^{n+1} \omega^{-\frac{k-1}{2}} g_k(x, t, \tau, \omega).
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Здесь $\tau = \omega t$, через u_k , v_k , p_k и s_k обозначены регулярные, а через w_k , z_k , h_k и g_k — погранслоиные [9] (вектор-) функции; кроме того, (вектор-) функции, зависящие от τ , являются 2π -периодическими с нулевой средней $\langle \dots \rangle$ по переменной τ . Например, $\langle v_k(x, t, \tau) \rangle = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} v_k(x, t, \tau) d\tau = 0$. При построении погранслоиных (вектор-) функций ограничимся рассмотрением x из пограничного слоя $x = x(r, \varphi) \in \Omega_\eta$. В связи с этим перепишем погранслоиные коэффициенты в (2.25) в другом виде, а именно, заменим (x, ω) на (ω, ρ) , где $\rho = r\omega^{1/2}$, сохранив прежние обозначения независимых переменных. Например, $w_k(x, t, \omega)$ примет вид $w_k(\varphi, \rho, t)$. Напомним [9], что после построения этих коэффициентов для $x \in \Omega_\eta$ нам необходимо положить их равными нулю для $x \in \Omega \setminus \Omega_\eta$ и умножить результат на гладкую срезающую функцию $\chi(x)$ такую, что $\chi(x) = 1$ для $x \in \Omega_{\eta/3}$ и $\chi(x) = 0$ для $x \in \Omega \setminus \Omega_{2\eta/3}$.

В процессе построения приближений (2.25) важную роль играют представления дифференциальных выражений, входящих в уравнения (2.23), в криволинейных координатах (φ, ρ) . Такие представления даны в [56, формулы (7), (8)] на основе выведенных в [35, с. 390–391] представлений упомянутых дифференциальных выражений в системе криволинейных координат. Ввиду их важно-

сти, приведем здесь формулы (7), (8) из [56]:

$$\begin{aligned}
-\varepsilon^2 \nu \Delta v &= \sum_{k=0}^N \varepsilon^k L_k(\varphi, \rho) v + \varepsilon^{N+1} R_{1,N+1}(\varphi, \rho, \varepsilon) v, \\
\nabla p &= \sum_{k=-1}^N \varepsilon^k P_k(\varphi, \rho) p + \varepsilon^{N+1} R_{2,N+1}(\varphi, \rho, \varepsilon) p, \\
\operatorname{div} v &= \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} v^{(3)} + \sum_{k=0}^N \varepsilon^k (D_{k,1} v^{(1)} + D_{k,2} v^{(2)} + D_{k,3} v^{(3)}) + \\
&\quad + \varepsilon^{N+1} R_{3,N+1}(\varphi, \rho, \varepsilon) v, \\
(v, \nabla) a + (b, \nabla) v &= \sum_{k=0}^N \varepsilon^k S_k(\varphi, \rho) v + \varepsilon^{N+1} R_{4,N+1}(\varphi, \rho, \varepsilon) v.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Здесь L_k , P_k , D_k и S_k — линейные дифференциальные выражения по переменным (φ, ρ) с коэффициентами, представляющими собой полиномы по ρ , коэффициенты которых зависят от φ ; а $R_{k,N+1}$ — дифференциальные выражения того же вида с равномерно по $(\varphi, \rho, \varepsilon)$ ограниченными коэффициентами. Здесь и далее верхние индексы в скобках обозначают соответствующие компоненты векторов в криволинейной системе координат (φ, ρ) . Например, $v^{(1)}$ — это φ_1 -координата вектора v . Кроме того,

$$\begin{aligned}
(L_0(\varphi, \rho) v)^{(s)} &= -\nu \frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial \rho^2}, \quad s = 1, 2; \\
(L_0 v)^{(3)} &= 0 \quad (\text{если } \operatorname{div} v = 0), \\
(P_{-1}(\varphi, \rho) p)^{(s)} &= 0, \quad s = 1, 2; \\
(P_{-1}(\varphi, \rho) p)^{(3)} &= \frac{\partial p}{\partial \rho}, \\
D_{0,1} v^{(1)} &= \frac{1}{(H_1)_0} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \varphi_1} + \left(\frac{\partial H_2 / \partial \varphi_1}{H_1 H_2} \right)_0 v^{(1)}, \\
D_{0,2} v^{(2)} &= \frac{1}{(H_2)_0} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \varphi_2} + \left(\frac{\partial H_1 / \partial \varphi_2}{H_1 H_2} \right)_0 v^{(2)}, \\
D_{0,3} v^{(3)} &= \left(\frac{\partial (H_1 H_2) / \partial r}{H_1 H_2} \right)_0 v^{(3)}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Здесь для произвольной функции $a(\varphi, r)$, определенной в Ω_η , $(a)_0 =$

$a(\varphi, 0)$, а H_1 , H_2 и $H_3 = 1$ — коэффициенты Ламе:

$$H_i = \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial \varphi_i} \right)^2}, \quad i = 1, 2.$$

Подставим выражения (2.25) в (2.23) вместо v , p и, используя представления (2.26), (2.27), в полученных уравнениях приравняем к нулю коэффициенты при каждой степени $\varepsilon = \omega^{-1/2}$ отдельно для регулярных и погранслойных (вектор-) функций. Далее разобьем каждое из результирующих уравнений на два, используя операцию $\langle \dots \rangle$ выделения среднего значения по переменной τ . В результате мы получим задачи для коэффициентов разложения (2.25), которые следует рассмотреть в следующем порядке.

Первая пара задач вытекает из уравнения $\operatorname{div} v = 0$ и соответствующих представлений (2.26), (2.27):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_0^{(3)}}{\partial \rho} &= 0, \quad w_0^{(3)} \Big|_{\rho=\infty} = 0, \\ \frac{\partial z_0^{(3)}}{\partial \rho} &= 0, \quad z_0^{(3)} \Big|_{\rho=\infty} = 0, \end{aligned}$$

откуда мы получаем $w_0^{(3)} = 0$, $z_0^{(3)} = 0$. Для первых регулярных осциллирующих коэффициентов v_0 , s_0 , согласно (2.23), получаем задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial \tau} + \nabla s_0 &= \sum_{0 < |k| \leq m} a_k(x, t) e^{ik\tau}, \\ \operatorname{div} v_0 &= 0, \quad v_0^{(3)} \Big|_{\Gamma} = -z_0^{(3)} \Big|_{\Gamma}, \quad \int_{\partial\Omega} s_0 dx = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекают равенства

$$\begin{aligned} \Delta s_0 &= \sum_{0 < |k| \leq m} \operatorname{div} a_k(x, t) e^{ik\tau}, \\ \frac{\partial s_0}{\partial \tau} \Big|_{x \in \partial\Omega} &= \sum_{0 < |k| \leq m} a_k^{(3)}(x, t) \Big|_{x \in \partial\Omega} e^{ik\tau}, \quad (2.28) \\ v &= \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} [a_k(x, t) - \nabla s_{k,0}] e^{ik\tau} = \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} \Pi a_k e^{ik\tau}, \end{aligned}$$

где $s_{k,0}(x, t)$ являются решениями задач

$$\Delta s_{k,0} = \operatorname{div} a_k, \quad \int_{\Omega} s_{k,0} dx = 0, \quad \frac{\partial s_{k,0}}{\partial r} \Big|_{x \in \partial\Omega} = a_k^{(3)} \Big|_{x \in \partial\Omega}, \quad (2.29)$$

$0 < |k| \leq m$. Как известно [117, с. 306], задачи (2.29) однозначно разрешимы и их решения могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} s_{k,0}(x, t) = & - \int_{\Omega} H(x, y) \operatorname{div} a_k(y, t) dy - \\ & - \int_{\partial\Omega} H(x, y) a_k^{(3)}(y, t) dy, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Здесь $H(x, y)$ — обобщенная функция Грина, которая имеет вид $H(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + g(x, y)$, где функция $g(x, y)$ для каждого фиксированного $x \in \Omega$ имеет непрерывные вплоть до границы $\partial\Omega$ производные по y и непрерывные в Ω вторые производные; кроме того, справедливы следующие соотношения:

$$\Delta_y g(x, y) = \frac{1}{|\Omega|}, \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial n_y} \Big|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \Big|_{\partial\Omega}.$$

Как обычно, $|\Omega|$ обозначает здесь меру множества Ω , а n_y — внешнюю нормаль к $\partial\Omega$ в точке y . Далее для простоты в условии 3 п. 2.2.1 положим $N_0 = \infty$. Тогда для произвольного целого неотрицательного j и мульти-индекса α справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j}{\partial t^j} D^\alpha S_{k,0}(x, t) \Big|_{(x,t) \in \Omega \times \{0\}} &= 0, \\ \frac{\partial^j}{\partial t^j} D^\alpha v_0(x, t) \Big|_{(x,t) \in \Omega \times \{0\}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Достаточно доказать только равенства для $S_{k,0}$, так как после этого равенство для v_0 следуют из предположения 3 п. 2.2.1 относительно a_k . Для $S_{k,0}$ упомянутые равенства могут быть выведены из представления (2.30), где $x \in \Omega$, если мы предварительно докажем, что производные $\frac{\partial^j}{\partial t^j} D^\alpha S_{k,0}(x, t)$ существуют и непрерывны в каждой

точке $(x, t) \in \bar{\Omega} \times \{0\}$. Установим последний результат, основываясь на известных оценках шаудеровского типа для задачи Неймана:

$$\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad \int_{\Omega} u \, dx = 0, \quad (2.32)$$

где n — внешняя нормаль на $\partial\Omega$. Введем два банаховых пространства. Пространство B_1 состоит из функций $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0, 1)$, удовлетворяющих условию $\int_{\Omega} u(x) \, dx = 0$ и снабженных нормой $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$; пространство B_2 состоит из пар функций (f, φ) , где $f \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, $\varphi \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(s) \, ds = 0$$

и снабженных нормой

$$\|(f, \varphi)\|_{B_2} = \|f\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^{1+\alpha}(\partial\Omega)}.$$

Задача (2.32) определяет оператор $A : B_1 \rightarrow B_2$, для которого $Au = (f, \varphi)$. Он, что очевидно, ограничен и, как известно, биективен. Следовательно, по теореме Банаха вытекает априорная оценка решений задачи (2.32):

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C(\|f\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^{1+\alpha}(\partial\Omega)}), \quad (f, \varphi) \in B_2.$$

При помощи этой оценки легко убедиться, что решение $u(x, t)$ задачи (2.32) также имеет производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ и, кроме того, $\frac{\partial u}{\partial t} \in C([0, T], C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}))$, если в (2.32) функции f, φ вдобавок зависят от параметра $t \in [0, T]$ и существуют производные $\frac{\partial f}{\partial t} \in C([0, T], C^{\alpha}(\bar{\Omega}))$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in C([0, T], C^{\alpha}(\partial\Omega))$. Задача для функции $\frac{\partial u}{\partial t}$ теперь вытекает из (2.32) применением формального дифференцирования по переменной t . Таким образом, непрерывность функций $\frac{\partial}{\partial t} D^{\alpha} u(x, t)$, $|\alpha| \leq 2$, в цилиндре Q установлена. Непрерывность производных более высокого порядка по переменным t, x затем устанавливается аналогично при помощи априорных оценок шаудеровского типа для производных по переменной x решений задачи (2.32). Таким образом, равенства (2.31) установлены. Далее для краткости мы будем говорить по отношению к произвольно заданной в цилиндре Q функции, что она обладает свойством (A), если эта функция бесконечно

дифференцируема в Q и ее производные по t, x любого порядка обращаются в ноль, когда $t = 0$. Из соотношений

$$-\nu \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial \rho^2} = 0, \quad w_0^{(s)} \Big|_{\rho=0} = 0, \quad s = 1, 2,$$

находим $w_0^{(s)} = 0$. Функции $z_0^{(s)} = 0$, $s = 1, 2$, удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial z_0^{(s)}}{\partial \tau} - \nu \frac{\partial^2 z_0^{(s)}}{\partial \rho^2} = 0, \quad z_0^{(s)} \Big|_{\Gamma} = -v_0^{(s)} \Big|_{\Gamma}, \quad z_0^{(s)} \Big|_{\rho=\infty} = 0.$$

Учитывая структуру функций $v_0^{(s)}$, мы разделяем здесь переменную τ и в результате находим $z^{(s)}(\varphi, \rho, t, \tau)$, $s = 1, 2$. Кроме того, благодаря соотношениям (2.31) для функции v_0 и простому предположению, сформулированному ниже, справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial^{j_1+j_2+j_3+j_4} z_0^{(s)}(\varphi, \rho, 0, \tau)}{\partial \rho^{j_1} \partial \varphi_1^{j_2} \partial \varphi_2^{j_3} \partial t^{j_4}} = 0, \quad j_1, j_2, j_3, j_4 = 0, 1, \dots$$

Таким образом, продолжая функции $z_0^{(s)}$ на весь цилиндр Q при помощи описанного выше метода, мы получаем функции, удовлетворяющие свойству (A).

Предложение 2.3. Пусть функции $c_i(\varphi, t)$, $i = 1, 2$, непрерывны на множестве $(\varphi, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$ вместе со всеми производными по φ_1, φ_2, t любого порядка, кроме того

$$\frac{\partial^{j_1+j_2+j_3} c_i(\varphi, 0)}{\partial \varphi_1^{j_1} \partial \varphi_2^{j_2} \partial t^{j_3}} = 0, \quad j_1, j_2, j_3 = 0, 1, \dots$$

Пусть функции $\lambda(\varphi)$ и $b(\varphi)$ определены и бесконечно дифференцируемы на $\partial\Omega$, и $\operatorname{Re} \lambda(\varphi) < 0$, $\operatorname{Re} b(\varphi) \neq 0$. Тогда задача

$$ily + b(\varphi) \frac{\partial^2 y}{\partial \rho^2} = c_1(\varphi, t) \rho^k e^{\lambda(\varphi)\rho}, \quad y \Big|_{\rho=0} = c_1(\varphi, t), \quad y \Big|_{\rho=\infty} = 0$$

с ненулевым вещественным l и целым неотрицательным k однозначно разрешима на луче $\rho = 0$, и ее решение $y(\varphi, \rho, t)$ удовлетворяет равенствам

$$\frac{\partial^{j_1+j_2+j_3+j_4} y(\varphi, \rho, 0)}{\partial \varphi_1^{j_1} \partial \varphi_2^{j_2} \partial \rho^{j_3} \partial t^{j_4}} = 0, \quad j_1, j_2, j_3, j_4 = 0, 1, \dots$$

Из уравнения (2.23), согласно формулам (2.26), (2.27), получаем следующие задачи для определения главных погранслойных коэффициентов разложения (2.25) функции p_ω^n :

$$\frac{\partial h_0}{\partial \rho} = 0, \quad h_0|_{\rho=\infty} = 0, \quad \frac{\partial g_0}{\partial \rho} = -\frac{\partial z_0^{(3)}}{\partial \tau}, \quad g_0|_{\rho=\infty} = 0,$$

откуда находим $h_0 = g_0 = 0$.

На следующем шаге подобным же образом находим неизвестные коэффициенты $w_1^{(3)}, z_1^{(3)}, s_1, v_1, w_1^{(s)}, z_1^{(s)}, s = 1, 2$, и h_1, g_1 . На третьем шаге для пары (u_0, p_0) получаем нелинейную задачу (2.24), которая имеет решение u_0, p_0 по предположению. Затем определяем функции $w_2^{(3)}$ и $z_2^{(3)}$, v_2 и s_2 , $w_2^{(s)}$ и $z_2^{(s)}$, $s = 1, 2$, и h_3, g_3 . Легко видеть, что все упомянутые коэффициенты разложения (2.25), кроме, быть может, u_0, p_0 обладают свойством (A). Предположим теперь, что для некоторого $k \geq 3$ получены функции $u_{i-2}, p_{i-2}, w_i, z_i, v_i, s_i, h_i, g_i, i \leq k-1$, имеющие упомянутые свойства. Покажем, что, решив упомянутые в утверждении теоремы задачи, мы можем построить такие коэффициенты также и в случае $i = k$, и они будут обладать свойством (A). Начнем с пары u_{k-2}, p_{k-2} . Легко видеть, что она удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{k-2}}{\partial t} - \nu \Delta u_{k-2} - (u_0(x, t), \nabla) u_{k-2} - (u_{k-2}, \nabla) u_0(x, t) + \\ + \nabla p_{k-2} = \Psi_{k-2}(x, t), \\ \operatorname{div} u_{k-2} = 0, \quad \int_{\Omega} p_{k-2} dx = 0, \quad u_{k-2}|_{\Gamma} = -w_{k-2}|_{\Gamma}, \\ u_{k-2}(x, 0) = -v_{k-2}(x, 0, 0) \equiv 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где вектор-функция Ψ_{k-2} выражается через уже найденные (по предположению) функции, так что она уже известна. Таким образом, ввиду того, что $\int_{\partial\Omega} w_{k-2}^{(3)} d\varphi = 0$ (см. лемму 2.1 на с. 80), мы можем исключить неоднородность в граничном условии этой системы, если построим согласно [42, с. 38–39] одно из гладких решений

задачи $\operatorname{div} \overset{0}{w} = 0$, $\overset{0}{w}|_{\partial\Omega} = -w_{k-2}|_{\partial\Omega}$ и произведем замену переменных $y_{k-2} = u_{k-2} - \overset{0}{w}$ в задаче (2.33). Кроме того, $\overset{0}{w}$ обладает свойством (А). Проектируя полученные линеаризованные уравнения Навье — Стокса на подпространство S_q , $q > 3$, мы приходим к задаче с начальным условием на отрезке $t \in [0, T]$ для линейного абстрактного параболического уравнения вида

$$\frac{dy_{k-2}}{dt} - A_0 y_{k-2} - B(t)y_{k-2} = \varphi_{k-2}, \quad y_{k-2}(0) = 0. \quad (2.34)$$

Здесь $A_0 = -\nu \Pi \Delta$ — известный оператор Стокса (см. с. 54),

$$B(t)u = \Pi[(u_0, \nabla)u + (u, \nabla)u_0] \equiv \Pi(t)u, \\ \varphi_{k-2} = \Pi[\psi_{k-1} + \nu \Delta w + (u_0, \nabla)\overset{0}{w} + (\overset{0}{w}, \nabla)u_0].$$

Из результатов П. Е. Соболевского [118] и теоремы В. А. Солонникова [122, с. 269]¹ вытекает, что задача (2.34) однозначно разрешима, и ее решение $y_{k-2} \in C([0, T], C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}))$ для некоторого $\gamma \in (0, 1)$. В самом деле, согласно [118], вектор-функция $\tilde{y}_{k-2} \equiv [A_0 + B(0)]y_{k-2}$ равномерно относительно t принадлежит области определения некоторой дробной степени $\tilde{A}^\varepsilon$ оператора $\tilde{A} = A_0 + B(0) + \lambda_0 I$, где $\lambda_0 \geq 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Используя соответствующие теоремы вложения, мы приходим к соотношению $\tilde{y}_{k-2} \in C([0, T], C^\gamma(\overline{\Omega}))$, и, учитывая [122], мы приходим к требуемому свойству решения y_{k-2} . Можно доказать, что решение y_{k-2} обладает свойством (А). Для этого удобно переписать задачу (2.34) в виде системы Стокса

$$\frac{\partial y_{k-2}}{\partial t} - \nabla \Delta y_{k-2} + \nabla q_{k-2} = \chi_{k-2}(x, t), \\ \operatorname{div} y_{k-2} = 0, \quad \int_{\Omega} q_{k-2} dx = 0, \quad y_{k-2}|_{\Gamma} = 0, \quad y_{k-2}(x, 0) = 0, \quad (2.35)$$

где $\chi_{k-2}(x, t) = C(t)y_{k-2} + \varphi_{k-2}$, и применить теорему Солонникова [122, с. 268] к этой системе последовательно, получая каждый раз требуемый результат для производных функции y_{k-2} все более и более высокого порядка. Из того, что (вектор-) функции y_{k-2} и $\overset{0}{w}$

¹Необходимые важные результаты В. А. Солонникова [122] приведены в п. 2.3.5 ниже.

обладают свойством (А), следует, что пара u_{k-2}, p_{k-2} обладает тем же свойством.

Из соотношений (2.26), (2.27) относительно оператора div выводим задачи для неизвестных $w_k^{(3)}, z_k^{(3)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_k^{(3)}}{\partial \rho} &= W_k(\varphi, \rho, t), \quad w_k^{(3)} \Big|_{\rho=\infty} = 0, \\ \frac{\partial z_k^{(3)}}{\partial \rho} &= Z_k(\varphi, \rho, t), \quad z_k^{(3)} \Big|_{\rho=\infty} = 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где функции w_k и $z_k(\cdot, \tau)$ обладают свойством (А), $Z_k(\varphi, \rho, t, \tau)$ — тригонометрический полином по τ , а $W_k|_{\rho=\infty} = 0, Z_k|_{\rho=\infty} = 0$. Отсюда мы однозначно находим $w_k^{(3)}$ и $z_k^{(3)}$. Неизвестные v_k, s_k определяются из следующей системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial \tau} + \Delta s_k &= \Phi_k(x, t, \tau), \quad \operatorname{div} v_k = 0, \\ v_k^{(3)} \Big|_{\partial \Omega} &= -z_k^{(3)} \Big|_{\rho=0}, \quad \int_{\Omega} s_k dx = 0, \end{aligned}$$

где вектор-функция $\Phi_k(x, t, \tau)$ — тригонометрический полином относительно τ с нулевым средним и обладает свойством (А) при фиксированном τ , а $\int_{\partial \Omega} z_k^{(3)} ds = 0$. Отсюда мы однозначно определяем v_k и s_k , условившись дополнительно, что они обладают свойством (А).

Функции $w_k^{(s)}, z_k^{(s)}, s = 1, 2$, являются решениями однозначно разрешимой задачи вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_k^{(s)}}{\partial \rho^2} &= \Phi_{k,s}(\varphi, \rho, t), \quad w_k^{(s)} \Big|_{\rho=\infty} = 0, \\ \frac{\partial z_k^{(s)}}{\partial \tau} - \nu \frac{\partial^2 z_k^{(s)}}{\partial \rho^2} &= \Psi_{k,s}(\varphi, \rho, t, \tau), \quad z_k^{(s)} \Big|_{\rho=0} = -v_k^{(s)} \Big|_{\partial \Omega}, \quad z_k^{(s)} \Big|_{\rho=\infty} = 0. \end{aligned}$$

Здесь функции $\Phi_{k,s}$ и $\Psi_{k,s}$ обладают свойством (А), $\Psi_{k,s}$ — тригонометрический полином с нулевым средним по τ , и $\Phi_{k,s}|_{\rho=\infty} = \Psi_{k,s}|_{\rho=\infty} = 0$. Легко видеть, что $w_k^{(s)}, z_k^{(s)}$ обладают свойством (А).

Неизвестные h_k и g_k , согласно представлениям (2.26), (2.27), удовлетворяют соотношениям вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_k}{\partial \rho} &= X_k(\varphi, \rho, t), \quad h_k|_{\rho=\infty} = 0, \\ \frac{\partial g_k}{\partial \rho} &= Y_k(\varphi, \rho, t, \tau), \quad g_{k+1}|_{\rho=\infty} = 0,\end{aligned}$$

где функции X_k, Y_k удовлетворяют свойству (A), $Y_k(\varphi, \rho, t, \tau)$ — тригонометрический полином по τ , и $X_k|_{\rho=\infty} = Y_k|_{\rho=\infty} = 0$. Отсюда мы приходим к выводу, что h_k и g_{k+1} обладают свойством (A). Построение асимптотики решения (u_ω, p_ω) завершено.

2.3. Задача о периодических решениях

2.3.1. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область евклидова пространства E^3 с границей $\partial\Omega$. В цилиндре $Q = \Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о $2\pi\omega^{-1}$ -периодических по времени t решениях уравнений Навье — Стокса

$$\begin{aligned}\partial v / \partial t - \nu \Delta v + \nabla p + (v, \nabla)v &= \\ = a_0(x) + \sum_{0 < |k| \leq m} [\omega a_k(x) + b_k(x)] e^{ik\omega t}, & \quad (2.37) \\ \operatorname{div} v = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0,\end{aligned}$$

где ω — большой параметр. Вектор-функции a_k, b_k , заданные на Ω , со значениями в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$ и граница $\partial\Omega$ предполагаются бесконечно гладкими, $\nu = \text{const} > 0$. Неизвестными являются вектор-функция v (скорость жидкости) со значениями в $\mathbb{C}^3$ и функция p (давление) со значениями в $\mathbb{C}^1$. При этом если коэффициенты a_k и a_{-k} , а также b_k и b_{-k} комплексно сопряжены, т. е. правая часть (2.37) вещественнозначная, то и решение v, p подразумевается вещественнозначным. Решения в настоящей работе понимаются в классическом смысле.

Рассмотрим стационарные уравнения Навье — Стокса

$$\begin{aligned} -\nu\Delta u + \nabla q + (u, \nabla)u &= a_0 - \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2}(\Pi a_k, \nabla)\Pi a_{-k}, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} p \, dx = 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где Π — тот же проектор, что на с. 54. Система (2.38), как известно [42, гл. V], имеет (вообще говоря, не единственное) решение. Пусть существует невырожденное решение, т. е. такое решение (u_0, p_0) задачи (2.38), что система

$$\begin{aligned} -\nu\Delta u + (u_0, \nabla)u + (u, \nabla)u_0 + \nabla q &= 0, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} q \, dx = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

не имеет нетривиальных решений².

В описанных выше предположениях существует такое значение $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ система (2.37) имеет $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое по t решение (v_ω, p_ω) , удовлетворяющее условию

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\| v_\omega - \left(u_0 + \Pi \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} a_k e^{ik\omega t} \right) \right\|_{S_q} = 0, \quad q > 1, \quad (2.40)$$

причем такое решение (удовлетворяющее (2.40) и условию $\int_{\Omega} p_\omega \, dx = 0$) единственно. Этот вспомогательный результат следует из [51], однако в п. 2.3.6 он будет установлен независимо.

2.3.2. Вспомогательные построения. Для построения асимптотического разложения решения (v_ω, p_ω) сделаем в системе (2.37) замену $\omega t = \tau$, $\omega^{-1/2} = \varepsilon$. В результате придем к задаче о 2π -периодических по τ решениях системы

$$\begin{aligned} \partial v / \partial \tau - \varepsilon^2 \nu \Delta v + \varepsilon^2 \nabla p + \varepsilon^2 (v, \nabla)v &= \\ &= \varepsilon^2 a_0 + \sum_{0 < |k| \leq m} (a_k + \varepsilon^2 b_k) e^{ik\tau}, \\ \operatorname{div} v &= 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \end{aligned} \quad (2.41)$$

²Отметим, что если величины $\|a_0\|_{L_2(\Omega)}$ и $\|a_k\|_{W_2^1(\Omega)}$ достаточно малы или ν достаточно велико, то решение системы (2.38) единственно [42, гл. V, § 1] и оно невырожденное.

Асимптотическое разложение решения последней задачи будем строить с помощью метода пограничного слоя [9]. В связи с этим введем некоторые обозначения.

Пусть $q = (q_1, q_2)$ — криволинейные ортогональные координаты на поверхности $\partial\Omega$. Для любой точки $x \in \Omega$, лежащей в достаточно малой окрестности границы $\partial\Omega$, обозначим через $r(x)$ расстояние вдоль нормали от x до $\partial\Omega$, а через Ω_δ , $\delta > 0$, погранслоем толщины δ : $\Omega_\delta \equiv \{x \in \Omega : r(x) < \delta\}$. Пусть число δ столь мало, что нормали к $\partial\Omega$ не пересекаются в Ω_δ . Тогда в Ω_δ определены ортогональные криволинейные координаты $(q, r) \equiv (q(x), r(x))$, где $q(x)$ — точка границы Ω_δ , лежащая на одной нормали с x . Погранслоеными функциями будем называть конечные суммы гладких в цилиндре $(x, \tau) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ функций вида $\alpha(x, \varepsilon)e^{il\tau}$, где $l \in \mathbb{R}$, а функции $\alpha(x, \varepsilon)$ при любом фиксированном $\delta_0 \in (0, \delta)$ и достаточно малых ε могут быть существенно отличными от нуля лишь внутри погранслоя Ω_{δ_0} . Трехмерные вектор-функции, компоненты которых являются погранслоеными функциями, будем называть погранслоеными вектор-функциями.

Асимптотические приближения 2π -периодических по τ решений системы (2.41) будем искать в виде

$$\begin{aligned} v(x, \tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(x) + \sum_{k=0}^{n+2} \varepsilon^k v_k(x, \tau) + \\ &+ \sum_{k=0}^{n+2} \varepsilon^k w_k(q, \rho) + \sum_{k=0}^{n+2} \varepsilon^k z_k(q, \rho, \tau), \\ p(x, \tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^k p_k(x) + \sum_{k=0}^{n+2} \varepsilon^{k-2} s_k(x, \tau) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n+2} \varepsilon^{k-2} h_k(q, \rho) + \sum_{k=1}^{n+2} \varepsilon^{k-2} g_k(q, \rho, \tau), \quad \rho = \varepsilon^{-1}\tau. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Здесь через u_k , v_k , p_k и s_k обозначены регулярные [9], а через w_k , z_k , h_k и g_k — погранслоенные вектор-функции и функции соответственно, причем (вектор-) функции, зависящие от τ , имеют по τ нулевые средние. Погранслоенные (вектор-) функции в области $\Omega \setminus \Omega_\delta$, где координаты (q, ρ) не определены, равны нулю.

2.3.3. Формулировка основного результата. Положим

$$v^n(x, t, \omega) = \overset{n}{v}(x, \omega t, \omega^{-1/2}), \quad p^n(x, t, \omega) = \overset{n}{p}(x, \omega t, \omega^{-1/2}),$$

где $\overset{n}{v}$ и $\overset{n}{p}$ — те же, что и в (2.42). Справедлива

Теорема 2.5. Пусть выполнены условия п. 2.3.1 и (v_ω, p_ω) — указанное там $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое по t решение системы (2.37) при $\omega > \omega_0$, где ω_0 — достаточно большое число. Тогда для любого $l \geq 0$ $(v_\omega, p_\omega) \in C^{2l, l}(Q)$ и справедливы оценки

$$\|v_\omega - v^n\|_{2l+2} + \|\nabla p_\omega - \nabla p^n\|_{2l} \leq c_{l,n} \omega^{-(n+1)/2+l},$$

а при $l \in [0, 1]$

$$\|v_\omega - v^n\|_{2l} \leq d_{l,n} \omega^{-(n+1)/2}, \quad c_{l,n}, d_{l,n} = \text{const}.$$

Построение приближений (v^n, p^n) сводится к решению двух типов не зависящих от ω линейных задач с гладкими данными: первой краевой задачи для стационарной линеаризованной системы Навье — Стокса (см. (2.43) ниже) и задачи Неймана для уравнения Пуассона.

Доказательству теоремы посвящена остальная часть раздела.

2.3.4. Построение формальной асимптотики. Подставим выражения (2.42) в систему (2.41) и с учетом представлений (2.26), (2.27) сгруппируем и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях ε отдельно для регулярных и погранслоиных (вектор-) функций. Каждое из полученных равенств разобьем затем на равенства для стационарных и осциллирующих с нулевым средним вектор-функций. В результате для коэффициентов разложений (2.42) получим уравнения, которые будем решать в следующей очередности. Вначале из равенств (они следуют из условия $\text{div } u = 0$ (2.41) и представлений (2.26), (2.27))

$$\partial w_0^{(3)} / \partial \rho = 0, \quad w_0^{(3)} \Big|_{\rho=\infty} = 0; \quad \partial z_0^{(3)} / \partial \rho = 0, \quad z_0^{(3)} \Big|_{\rho=\infty} = 0$$

находим $w_0^{(3)} = z_0^{(3)} = 0$, а затем из системы

$$\begin{aligned} \partial v_0 / \partial \tau + \nabla s_0 &= \sum_{0 < |k| \leq m} a_k e^{ik\tau}, \\ \text{div } v_0 &= 0, \quad v_0^{(3)} \Big|_{\partial\Omega} = -z_0^{(3)} \Big|_{\partial\Omega} \equiv 0 \end{aligned}$$

получим

$$v_0 = \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} \Pi a_k e^{ik\tau},$$

$$\nabla s_0 = \sum_{0 < |k| \leq m} (I - \Pi) a_k e^{ik\tau},$$

где I — тождественный оператор. Из определения проектора Π легко следует, что нахождение v_0 и s_0 сводится к решению задачи Неймана для уравнения Пуассона. Далее, из соотношений

$$-\nu \partial^2 w_0^{(s)} / \partial \rho^2 = 0, \quad w_0^{(s)} \Big|_{\rho=\infty} = 0, \quad s = 1, 2,$$

получаем, что $w_0^{(s)} = 0$, а из системы уравнений

$$\partial z_0^{(s)} / \partial \tau - \nu \partial^2 z_0^{(s)} / \partial \rho^2 = 0, \quad z_0^{(s)} \Big|_{\partial \Omega} = -v_0^{(s)} \Big|_{\partial \Omega}, \quad z_0^{(s)} \Big|_{\rho=\infty} = 0,$$

отделяя переменную τ , определяем $z_0^{(s)}$, $s = 1, 2$. После этого найдем $h_1 = g_1 = 0$ из соотношений

$$\partial h_1 / \partial \rho = 0, \quad h_1 \Big|_{\rho=\infty} = 0; \quad \partial g_1 / \partial \rho = -\partial z_0^{(3)} / \partial \tau, \quad g_1 \Big|_{\rho=\infty} = 0.$$

На следующем шаге аналогичным образом последовательно найдем $w_1^{(3)} = 0$, $z_1^{(3)}$, s_1 , v_1 , $w_1^{(s)}$, $z_1^{(s)}$, $s = 1, 2$, и h_2 , g_2 . На третьем шаге для пары коэффициентов (u_0, p_0) получаем нелинейную задачу (2.38), имеющую по условию (см. п. 2.3.1) невырожденное решение. Вслед за (u_0, p_0) определим функции $w_2^{(3)}$ и $z_2^{(3)}$. Для пары (v_2, s_2) получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial \tau} + \nabla s_2 &= \nu \Delta v_0 - (u_0, \nabla) v_0 - (v_0, \nabla) u_0 + \\ &+ \sum_{0 < |k|, |j| \leq m, k+j \neq 0} (kj)^{-1} (\Pi a_k, \nabla) \Pi a_j e^{i(k+j)\tau} + \\ &+ \sum_{0 < |k| \leq m} b_k e^{ik\tau} \equiv \Psi(x, \tau), \\ \operatorname{div} v_2 &= 0, \quad v_2^{(3)} \Big|_{\partial \Omega} = -z_2^{(3)} \Big|_{\partial \Omega}, \end{aligned}$$

которая сводится к задаче

$$\Delta s_2 = \operatorname{div} \Psi, \quad \partial s_2 / \partial n \Big|_{\partial \Omega} = (\Psi^{(3)}(x, \tau) - \partial v_2^{(3)} / \partial \tau) \Big|_{\partial \Omega},$$

где n — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$. Последняя с учетом структуры по τ правых частей распадается на несколько однотипных задач, которые после естественного отделения временной переменной τ однозначно (с точностью до аддитивных постоянных) разрешимы в силу леммы 2.1 (см. ниже). Затем найдем функции $w_2^{(s)}$, $s = 1, 2$, и h_3 .

Все построенные функции бесконечно гладкие. Установим этот факт лишь для (u_0, p_0) , поскольку для остальных функций он очевиден в силу их построения и классических шаудеровских оценок для уравнения Пуассона при краевых условиях Неймана. По условию $(u_0, p_0) \in C^2(\Omega)$, так как это — классическое решение. Переписывая (2.38) в виде системы Стокса с известной правой частью и многократно используя приведенную ниже теорему 2.6, устанавливаем бесконечную гладкость (u_0, p_0) .

Предположим теперь, что мы нашли бесконечно гладкие (вектор-) функции $u_{i-2}, p_{i-2}, v_i, s_i, w_i, z_{i-1}, h_{i+1}, g_i$, $2 \leq i \leq k-1$. Покажем, что тогда мы сможем их найти путем решения указанных в формулировке теоремы задач и для $i = k$, причем получим также бесконечно гладкие (вектор-) функции.

Неизвестные u_{k-2}, p_{k-2} удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} L(u_{k-2}, p_{k-2}) &\equiv -\nu \Delta u_{k-2} - (u_0, \nabla) u_{k-2} - \\ &- (u_{k-2}, \nabla) u_0 + \nabla p_{k-2} = \Psi_{k-2}(x), \\ \operatorname{div} u_{k-2} &= 0, \quad u_{k-2}|_{\partial\Omega} = -w_{k-2}|_{\partial\Omega} \end{aligned} \quad (2.43)$$

с известной вектор-функцией Ψ_{k-2} , причем $\int_{\partial\Omega} w_{k-2}^{(3)} ds = 0$. В этой системе можно снять неоднородность в граничном условии, построив, следуя [42, с. 38–39], одну из бесконечно гладких вектор-функций w , удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{div} w = 0, \quad w|_{\partial\Omega} = -w_{k-2}|_{\partial\Omega}.$$

В результате приходим к задаче вида (2.39)

$$L(u, p) = X(x), \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

с известной бесконечно гладкой функцией X , которая по условию однозначно разрешима.

Из равенств (см. (2.41), (2.26), (2.27))

$$\frac{\partial w_k^{(3)}}{\partial \rho} = - \sum_{i=0}^{k-1} (D_{i,1} w_{k-1-i}^{(1)} + D_{i,2} w_{k-1-i}^{(2)} + D_{i,3} w_{k-1-i}^{(3)}) \equiv W_k(q, \rho),$$

$$w_k^{(3)} \Big|_{\rho=\infty} = 0,$$

а также из аналогичных соотношений для $z_{k-1}^{(3)}$ однозначно найдем (учитывая погранслоиную структуру правых частей) функции $w_k^{(3)}$ и $z_k^{(3)}$.

Далее $z_{k-1}^{(s)}, w_k^{(s)}, s = 1, 2$, найдем из соотношений вида

$$\begin{aligned} \partial z_{k-1} / \partial \tau - \nu \partial^2 z_{k-1}^{(s)} / \partial \rho^2 &= \psi_{k,s}(q, \rho, \tau), \\ z_{k-1}^{(s)} \Big|_{\partial \Omega} &= -v_{k-1}^{(s)} \Big|_{\partial \Omega}, \quad z_{k-1}^{(s)} \Big|_{\rho=\infty} = 0, \\ \partial^2 w_k^{(s)} / \partial \rho^2 &= \varphi_{k,s}(q, \rho), \quad w_{k,s} \Big|_{\rho=\infty} = 0, \end{aligned}$$

где $\varphi_{k,s}$ и $\psi_{k,s}$ — погранслоинные функции, которые зависят от известных на этом этапе коэффициентов разложений (2.42). После этого найдем $z_k^{(3)}$. Неизвестные v_k и s_k определим путем решения системы

$$\begin{aligned} \partial v_k / \partial \tau + \nabla s_k &= \nu \Delta v_{k-2} - \sum_{i=0}^{k-2} \{ (u_i, \nabla) v_{k-2-i} + \\ &+ (v_i, \nabla) u_{k-2-i} + R_\tau [(v_i, \nabla) v_{k-2-i}] \} \equiv \Phi_k(x, \tau), \\ \operatorname{div} v_k &= 0, \quad v_k^{(3)} \Big|_{\partial \Omega} = -z_k^{(3)} \Big|_{\partial \Omega}, \quad \int_{\Omega} s_k dx = 0, \end{aligned}$$

где

$$R_\tau[a(x, \tau)] = a(x, \tau) - (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} a(x, \tau) d\tau.$$

Эта система эквивалентна следующей паре задач:

$$\begin{aligned} \Delta s_k &= \operatorname{div} \Phi_k, \quad \partial s_k / \partial n \Big|_{\partial \Omega} = (\Phi_k^{(3)} + \partial z_k^{(3)} / \partial \tau) \Big|_{\partial \Omega}, \quad \int_{\Omega} s_k dx = 0, \\ \partial v_k / \partial \tau &= \Phi_k - \nabla s_k, \end{aligned}$$

которые однозначно разрешимы в силу доказанной ниже леммы 2.1.

Функции h_{k+1} и g_k определим из уравнений

$$\begin{aligned}\partial h_{k+1}/\partial \rho &= X_{1,k}(q, \rho), & h_k|_{\rho=\infty} &= 0, \\ \partial g_k/\partial \rho &= X_{2,k}(q, \rho, \tau), & g_k|_{\rho=\infty} &= 0,\end{aligned}$$

с известными на этом этапе погранслойными функциями $X_{1,k}$ и $X_{2,k}$.

Итак, построение формальной асимптотики для решения (v_ω, p_ω) задачи (2.37) завершено. При этом все ее коэффициенты бесконечно гладкие, что устанавливается так же, как и выше для первых коэффициентов. В частности, бесконечная гладкость решения задачи (2.43) следует из приведенной ниже теоремы 2.6.

2.3.5. Некоторые вспомогательные результаты. Обоснование построенной асимптотики, т. е. установление бесконечной гладкости решения (v_ω, p_ω) задачи (2.37) и доказательство указанных в теореме 2.5 оценок, будет проведено в п. 2.3.6. Сформулируем некоторые вспомогательные результаты, на которые мы уже опирались или будем использовать в п. 2.3.6.

Лемма 2.1. Для любого целого неотрицательного k справедливы равенства

$$\int_{\partial\Omega} w_k^{(3)}(q, 0) dq = 0, \quad \int_{\partial\Omega} z_k^{(3)}(q, 0) dq = 0.$$

◁ Установим лишь первое соотношение, поскольку второе доказывается аналогично. Рассмотрим $w^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \varepsilon^i w_i$. По построению

$$\sup_{x \in \Omega} |\operatorname{div} w^{k+1}| \leq c \varepsilon^{k+1}, \quad c = \text{const}.$$

Отсюда и из теоремы Остроградского — Гаусса

$$\sum_{i=0}^{k+1} \varepsilon^i \int_{\partial\Omega} w_i^{(3)} dq + \int_{\Omega} \operatorname{div} w^{k+1} dx = 0$$

следует доказываемое равенство. Лемма 2.1 доказана. ▷

Сформулируем еще две классические теоремы В. А. Солонникова о разрешимости и априорных оценках решений стационарной и нестационарной системы Стокса.

Рассмотрим вначале первую краевую задачу для стационарной системы Стокса

$$\nu \Delta u = \nabla p + h(x), \quad \operatorname{div} u = \rho(x), \quad \int_{\partial\Omega} p dq = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi(q). \quad (2.44)$$

Пусть выполнено равенство

$$\int_{\partial\Omega} \varphi^{(3)} dq = - \int_{\Omega} \rho dx.$$

Тогда справедлива

Теорема 2.6 [122]. Если граница $\partial\Omega \in C^{l+2}$, где $l > 0$ — нецелое число, $\varphi \in C^{l+2}(\partial\Omega)$, $h \in C^l(\Omega)$, $\rho \in C^{l+1}(\Omega)$, то задача (2.44) имеет единственное решение (u, p) с $u \in C^{l+2}(\Omega)$, $p \in C^{l+1}(\Omega)$, и для него выполняется оценка

$$\|u\|_{l+2}^{\Omega} + \|\nabla p\|_l^{\Omega} \leq c(\|h\|_l^{\Omega} + \|\varphi\|_{l+2}^{\Omega} + \|\rho\|_{l+1}^{\Omega}), \quad c = \text{const}.$$

Здесь через $C^l(\Omega)$ и $C^l(\partial\Omega)$ обозначены обычные гёльдеровские пространства (вектор-) функций, определенные на Ω и $\partial\Omega$ соответственно, которые аналогичны пространству $C^{2l,l}$.

Рассмотрим еще первую начально-краевую задачу для нестационарной системы Стокса в цилиндре $Q_0 = \Omega \times [0, T]$, $T = \text{const} > 0$:

$$\partial v / \partial t - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad v|_{\partial\Omega} = a. \quad (2.45)$$

Справедлива

Теорема 2.7 [122]. Пусть $l > 0$, $2l$ нецелое, причем $a^{(3)}|_{\partial\Omega} = 0$, $\operatorname{div} v_0 = 0$ и данные задачи (2.45) удовлетворяют условиям согласования порядка $[l] + 1$. Тогда задача (2.45) имеет единственное решение (v, p) с $v \in C^{2l+l, l+1}(Q_0)$, $\nabla p \in C^{2l,l}(Q_0)$ и для него выполняется оценка

$$\|v\|_{2l+2}^{Q_0} + \|\nabla p\|_{2l}^{Q_0} \leq c(\|f\|_{2l}^{Q_0} + \|v_0\|_{2l+2}^{\Omega} + \|a\|_{2l+2}^{\partial\Omega} + [f]_{l+\varepsilon, t}^{Q_0}),$$

$$c = \text{const}.$$

Здесь $C^{2l,l}(Q_0)$, где $l \geq 0$, — пространство, аналогичное пространству $C^{2l,l}(Q)$; $0 < \varepsilon \ll 1$, а величина $[u]_{l, t}^Q$ задается последним слагаемым в определении нормы $\|u\|_{2l}$, п. 2.2.1.

Мы не выписываем здесь условия согласования (которые, как известно, должны выполняться на линии $\partial\Omega \times \{0\}$ и представляются собой необходимые условия соответствующей гладкости решения (v, p)), поскольку теорему 2.7 нам придется применять лишь в тех случаях, когда они с очевидностью выполнены.

2.3.6. Доказательство основного результата: обоснование асимптотик. Пусть

$$\widehat{v}^n = v^n + \omega^{-(n+1)/2} u_{n+1} + \omega^{-(n+2)/2} u_{n+2}.$$

Очевидно, что теорему 2.5 достаточно доказать при замене в ее формулировке v^n на $\widehat{v}^n$.

Пусть $z^n = v_\omega - \widehat{v}^n$, $q^n = p_\omega - p^n$. Тогда вектор-функция (z^n, q^n) является решением задачи вида

$$\begin{aligned} \partial z / \partial t - \nu \Delta z + \nabla p &= (z, \nabla) v_\omega + (\widehat{v}^n, \nabla) z + \omega^{-n/2} \varphi_\omega^n(x, t), \\ \operatorname{div} z &= -\omega^{-(n+2)/2} \psi_\omega^n(x, t), \quad z|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Здесь φ_ω^n — сумма регулярной и погранслошной вектор-функций, ψ_ω^n — погранслошная функция, причем для любого $s \geq 0$

$$\|\varphi_\omega^n\|_{2s} \leq c_s \omega^{-s}, \quad \|\psi_\omega^n\|_{2s} \leq c_s \omega^{-s}, \quad \int_{\Omega} \psi_\omega^n dx = 0, \quad c_s = \text{const}.$$

В задаче (2.46) сделаем замену переменных $z = y^n + w^n$, $p = r^n + q^n$, где (w^n, q^n) — решение системы

$$-\nu \Delta w + \nabla q = 0, \quad \operatorname{div} w = \omega^{-(n+2)/2} \psi_\omega^n, \quad w|_{\partial\Omega} = 0.$$

С помощью метода пограничного слоя и теоремы 2.6 устанавливаются бесконечная гладкость этого решения по $(x, t) \in Q$ и оценки

$$\|w\|_{2s} \leq d_s \omega^{-(n+3)/2+s}, \quad \|\nabla q\|_{2s} \leq d_s \omega^{-(n+1)/2+s}, \quad d_s = \text{const}. \quad (2.47)$$

Ясно, что вектор-функция (y^n, r^n) является $2\pi\omega^{-1}$ -периодическим

по t решением системы

$$\begin{aligned}
& \partial y / \partial t - \nu \Delta y + (y, \nabla) u_0 + (u_0, \nabla) y + \nabla r = \\
& = -(y, \nabla) y - (y, \nabla)(v_0 + z_0 + \omega^{-1/2} w_1) - \\
& - (v_0 + z_0 + \omega^{-1/2} w_1, \nabla) y - (y, \nabla)(\widehat{v}^n - v^0 - \omega^{-1/2} w_1 + w) - \\
& - (\widehat{v}^n - v^0 + \omega^{-1/2} w_1, \nabla) y - (w, \nabla) y - (w, \nabla)(\widehat{v}^n + w) - \\
& - (\widehat{v}^n, \nabla) w + \omega^{-(n+1)/2} \varphi_\omega^n \equiv \Phi(y, t, \omega), \\
& \operatorname{div} y = 0, \quad y|_{\partial\Omega} = 0.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Докажем существование и локальную единственность такого решения. Предварительно введем ряд обозначений.

Пусть $\overset{\circ}{S}_q^2$, $q > 1$, и A_0 — те же, что в разделе 2.1. Определим в S_q оператор A с областью определения $D(A) = D(A_0) = \overset{\circ}{S}_q^2$, действующий по правилу

$$Ay = -\nu \Pi \Delta y + \Pi[(y, \nabla) u_0 + (u_0, \nabla) y].$$

Спектры $\sigma(A_0)$ и $\sigma(A)$ операторов A_0 и A дискретные [143, с. 66–67]. Обозначим через t_* такое положительное число, что $e^{\lambda t_*} \neq 1$ при $\lambda \in \sigma(A)$. Легко убедиться, что $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое по t решение y^n системы (2.48) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t e^{-(t-\tau)A} \Pi \Phi[y(\tau), \tau, \omega] d\tau + \\
&+ [I - e^{-t_\omega A}]^{-1} \int_0^{t_\omega} e^{-(t_\omega+t-\tau)A} \Pi \Phi[y(\tau), \tau, \omega] d\tau \equiv (N_\omega y)(t), \\
t_\omega &\equiv 2\pi\omega^{-1}[(2\pi)^{-1}\omega t_*].
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Приведем еще некоторые известные вспомогательные результаты.

Пусть $1 < r \leq p$, $\mu \in (0, 1)$ и $T_0 > 0$. Существуют такие положительные числа ω_0 и c_0 , что при всех $\omega > \omega_0$, $0 < t < t' \leq T_0$ и $u \in L_r(\Omega)$ справедливы неравенства

$$\|e^{-tA} \Pi u\|_{L_p(\Omega)} \leq c_0 t^{-\beta} \|u\|_{L_r(\Omega)},$$

$$\|e^{-tA}\Pi\partial u/\partial x_i\|_{L_p(\Omega)} \leq c_0 t^{-\beta-1/2}\|u\|_{L_p(\Omega)},$$

$$\|[e^{-t'A} - e^{-tA}]\Pi u\|_{L_p(\Omega)} \leq c_0(t' - t)^\mu t^{-\beta-\mu}\|u\|_{L_r(\Omega)},$$

$$\|[e^{-t'A} - e^{-tA}]\Pi\partial u/\partial x_i\|_{L_p(\Omega)} \leq c_0(t' - t)^\mu t^{-\beta-1/2-\mu}\|u\|_{L_r(\Omega)},$$

где $\beta = (3/2)(1/r - 1/p) < 1/2$.

Указанные оценки являются следствиями L_p -оценок резольвенты оператора Стокса [143, с. 100; 119] и интегрального представления полугруппы через резольвенту порождающего ее оператора [37, с. 269].

Теперь зафиксируем $p > 3$ и $\mu \in (0, 1/2 - 3/(2p))$. С помощью последних четырех неравенств и соображений, которые использовались при доказательстве п. 1 теоремы из [51], для оператора N_ω , введенного в (2.49), устанавливаются оценки

$$\|N_\omega(0)\|_{C_\mu(S_p)} \leq c_0 \omega^{-(n+1)/2}, \quad c_0 = \text{const}, \quad (2.50)$$

$$\|N_\omega(y_2) - N_\omega(y_1)\|_{C_\mu(S_p)} \leq (1/2)\|y_2 - y_1\|_{C_\mu(S_p)}, \quad (2.51)$$

где y_1, y_2 принадлежат шару

$$S_\omega \equiv \{y \in C_\mu(S_q) : \|y\|_{C_\mu(S_q)} \leq 2c_0 \omega^{-(n+1)/2}\}.$$

Отметим еще, что при выводе оценки (2.51) существенно используется равномерная относительно $(x, t) \in Q$, $\omega > \omega_0$ ограниченность величин $|\operatorname{div} z_0|$ и $|\operatorname{div} w_1|$, что вытекает из установленных выше равенств $z_0^{(3)} = 0$, $w_0 = 0$.

Из оценок (2.50), (2.51) следует, что оператор N_ω в шаре S_ω является сжатием. Отсюда, в частности, независимо от результата работы [51] следует существование $2\pi\omega^{-1}$ -периодического по t решения (v_ω, p_ω) системы (2.37), о котором было сказано в п. 2.3.1. Кроме того, получим оценку

$$\|y^n\|_{C_\mu(S_p)} \leq c_0 \omega^{-(n+1)/2}. \quad (2.52)$$

Перепишем теперь систему (2.48) в виде

$$\begin{aligned} \partial y / \partial t - \nu \Delta y + (y, \nabla) u_0 + (u_0, \nabla) y + \nabla r &= -(y, \nabla) y - \\ - (v_0 + z_0, \nabla) y - (\hat{v}^n - v^0 - w, \nabla) y + \psi_\omega^n &\equiv \Phi(y, t, \omega), \\ \operatorname{div} y &= 0, \quad y|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_\omega^n(x, t) = & -(y, \nabla)(\widehat{v}^n - u^0 + w) - \\ & - (w, \nabla)(\widehat{v}^n + w) + (\widehat{v}^n, \nabla)w + \omega^{-(n+1)/2} \varphi_\omega^n. \end{aligned} \quad (2.54)$$

В силу оценок (2.47), (2.52) и структуры приближений $\widehat{v}^n$ при $\omega > \omega_0$ справедливо неравенство

$$\|\psi_\omega^n\|_{C_0(S_q)} \leq c_1 \omega^{-n/2}, \quad (2.55)$$

где c_1 — не зависящая от ω постоянная.

Пусть λ_0 — столь большое число, что спектр оператора $A + \lambda_0 I$ лежит в правой полуплоскости и для некоторой постоянной c при всех λ с $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ выполняется оценка

$$\|[A + (\lambda_0 - \lambda)I]u\|_{S_q} \leq c(1 + |\lambda|)\|u\|_{S_q}, \quad q > 3.$$

Через B_0^δ и B^δ , $\delta \geq 0$, обозначим банаховы пространства, состоящие из вектор-функций, принадлежащих областям определения дробных степеней (см. раздел 2.1) A_0^δ и $(A + \lambda_0 I)^\delta$ соответственно, и снабженные естественными нормами.

Рассмотрим вновь оператор N_ω из (2.49), но теперь с учетом представления (2.53)–(2.55) вектор-функции Φ . Пусть $\delta \in (1/2, 1)$, $0 < \mu < 1 - \delta$, тогда существуют такие положительные числа c_1 и ω_1 , что при $\omega > \omega_1$ оператор N_ω является сжатием в шаре

$$\{y \in C_\mu(B_0^\delta) : \|y\|_{C_\mu(B_0^\delta)} \leq c_1 \omega^{-n/2}\}.$$

Доказательство последнего утверждения опирается на следующие результаты.

1. При $\varepsilon > 0$ имеют место непрерывные вложения $B_0^{\delta-\varepsilon} \subset B^\delta \subset B_0^{\delta+\varepsilon}$ [37, гл. IV, п. 14.5; 114].
2. Для любого $T_0 > 0$ справедливы оценки [37, с. 298; 113]

$$\begin{aligned} \|A^\delta e^{-tA} u\|_B & \leq c_\delta t^{-\delta} \|u\|_B, \quad u \in B \equiv S_q, \\ \|A^\delta [e^{-tA} - e^{-t'A}] u\|_B & \leq c_{\delta, \gamma, \eta} (t' - t)^\gamma t^{-\delta - \gamma + \eta} \|u\|_{B^\eta}, \quad u \in B^\eta, \end{aligned}$$

где $\gamma \in (0, 1)$, $\delta \geq 0$, $\gamma + \delta \geq \eta \geq 0$, $0 < t < t' \leq T_0$, c_δ и $c_{\delta, \gamma, \eta} = \text{const.}$

3. Пусть $l \in [0, 2]$, $\sigma \in [0, 1]$, $\sigma > l/2 + 3/(2q)$. Тогда имеет место непрерывное вложение [51]

$$B^\sigma \subset C^l(\overline{\Omega}), \quad (2.56)$$

где $C^l(\overline{\Omega})$ — обычное пространство Гёльдера вектор-функций, заданных на $\overline{\Omega}$.

Итак, справедлива дополнительная к (2.52) оценка

$$\|y^n\|_{C_\mu(B^\delta)} \leq c_1 \omega^{-n/2},$$

из которой в силу (2.56) следует для достаточно $\mu_0 > 0$ неравенство

$$\|y^n\|_{2\mu_0} + \|\nabla y^n\|_{2\mu_0} \leq c_1 \omega^{-n/2}. \quad (2.57)$$

Для того, чтобы оценить производные $\partial y^n / \partial t$ и $\partial(\nabla y^n) / \partial t$, введем вектор-функцию

$$y_h(x, t) = [y^n(x, t+h) - y^n(x, t)]h^{-1}, \quad h \in (0, 1),$$

и аналогичным образом функцию r_h . В силу (2.53) пара (y_h, r_h) является решением системы

$$\begin{aligned} & \partial y_h / \partial t - \nu \Delta y_h + (y_h, \nabla)u_0 + (u_0, \nabla)y_h + \nabla r_h = \\ & = -(y, \nabla)y_h - (y_h, \nabla)y(x, t+h) - (v_0 + z_0, \nabla)y_h - \\ & \quad - (\hat{v}^n - v^0 - w, \nabla)y_h + \chi_n(x, t, h, y, \omega), \end{aligned} \quad (2.58)$$

где вектор-функция χ_n , явный вид которой ради краткости не приводим, удовлетворяет равномерной относительно $h \in (0, 1)$ и $\omega > \omega_2 \gg 1$ оценке

$$\|\chi_n\|_0 \leq c \omega^{-(n-2)/2}, \quad c = \text{const}.$$

Таким же образом, как оценка (2.57) выведена из (2.53), из (2.58) выводится равномерная относительно $h \in (0, 1)$ и $\omega > \omega_2 \gg 1$ оценка

$$\|y_h\|_{2\mu_0} + \|\nabla y_h\|_{2\mu_0} \leq c_2 \omega^{-(n-2)/2}, \quad c_2 = \text{const}.$$

Отсюда, согласно теореме Арцела, следует неравенство

$$\|\partial y^n / \partial t\|_{2\mu_0} + \|\nabla \partial y^n / \partial t\|_{2\mu_0} \leq c_2 \omega^{-(n-2)/2}. \quad (2.59)$$

Оценим теперь производные вектор-функции y более высокого порядка. Для этого введем бесконечно дифференцируемую функцию $\chi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям $\chi(t) = 0$, $t \in [0, 1]$, $\chi(t) = 1$, $t \in [2, 2\pi]$, и положим $z^n = \chi y^n$, $q^n = \chi r^n$, где (y^n, r^n) —

решение системы (2.48). Тогда пара (z^n, q^n) является решением системы Стокса

$$\begin{aligned} \partial z / \partial t - \nu \Delta z + \nabla q &= \chi \Phi - \chi[(y, \nabla)u_0 + (u_0, \nabla)y] - (\partial \chi / \partial t)y, \\ \operatorname{div} z &= 0, \quad (x, t) \in Q_0 \equiv \Omega \times [0, 2\pi], \quad z|_{\partial\Omega} = 0, \quad z(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Отметим, что, оценив (z^n, q^n) в цилиндре Q_0 , получим такую же оценку для (y^n, r^n) в цилиндре Q , так как эти пары совпадают при $t \in [2, 2\pi]$ и вторая имеет малый по t период. Трижды применяя теорему 2.7 к задаче (2.60) с учетом оценок (2.57), (2.59), придем к неравенству

$$\|y^n\|_{4+2\mu_0} + \|\nabla r^n\|_{2+2\mu_0} \leq c\omega^{-(n-2-\varepsilon)/2}. \quad (2.61)$$

Отсюда, в частности, следует существование непрерывных производных $\partial^3 y^n / \partial x_i \partial x_j \partial t$ и $\partial(\nabla r^n) / \partial t$, что позволяет продифференцировать по t систему (2.48) и оценить, действуя по аналогии с выводом оценки (2.59), величины $\|\partial^2 y^n / \partial t^2\|_{2\mu_0}$ и $\|\nabla \partial^2 y^n / \partial t^2\|_{2\mu_0}$ при малом $\mu_0 > 0$. После этого, как и при выводе оценки (2.61), получим соответствующую оценку решения системы (2.60) с помощью теоремы 2.7.

Пусть теперь l — произвольное положительное число. Повторяя описанную процедуру соответствующее число раз, придем к неравенству

$$\|y^n\|_{2+2l} + \|\nabla r^n\|_{2l} \leq c\omega^{-(n-2l-\varepsilon)/2}, \quad c = \text{const}, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.62)$$

Покажем, что на самом деле имеют место оценки, указанные в формулировке теоремы 2.5. Первая из них следует из (2.47), (2.62) и следующей цепочки неравенств, в которой учтена структура приближений (v^n, p^n) :

$$\begin{aligned} &\|v_\omega - v^n\|_{2l+2} + \|\nabla p_\omega - \nabla p^n\|_{2l} \leq \|v_\omega - v^{n+2}\|_{2l+2} + \\ &+ \|\nabla p_\omega - \nabla p^{n+2}\|_{2l} + \|v^{n+2} - v^n\|_{2l+2} + \|\nabla p^{n+2} - \nabla p^n\|_{2l} \leq \\ &\leq \|y^{n+2} + w^{n+2}\|_{2l+2} + \|\nabla r^{n+2} + \nabla q^{n+2}\|_{2l+2} + c_0 \omega^{-(n+1)/2+l} \leq \\ &\leq c_1 \omega^{-(n+1)/2+l}, \quad c_0, c_1 = \text{const}. \end{aligned}$$

Вторая оценка устанавливается аналогично с учетом непрерывности вложения $C^{2l+2, l+1}(Q) \subset C^{2l, l}(Q)$. Теорема 2.5 доказана.

2.3.7. Замечание. Из доказательства теоремы 2.5 следует, что для пространства $C^{l_1, l_2}(Q)$ с произвольными неотрицательными числами l_1, l_2 , которое определяется аналогично пространству $C^{2l, l}(Q)$, справедливы оценки

$$\|v_\omega - v^n\|_{C^{l_1+2, l_2+1}(Q)} + \|\nabla p_\omega - \nabla p^n\|_{C^{l_1, l_2}(Q)} \leq C_{l_1, l_2, n} \omega^{-(n+1-l_1)/2+l_2},$$

а при $l_1 \in [0, 2), l_2 \in (0, 1)$ —

$$\|v_\omega - v^n\|_{C^{l_1, l_2}} \leq d_{l_1, l_2, n} \omega^{-(n+1)/2},$$

где $c_{l_1, l_2, n}, d_{l_1, l_2, n} = \text{const.}$

ГЛАВА 3

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ — СТОКСА С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ МАССОВОЙ СИЛОЙ

В работах [56, 114]¹ метод усреднения обоснован для задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в высокочастотных силовых полях. При этом рассматриваемые в [56, 114] уравнения Навье — Стокса для скорости v жидкости содержат осциллирующие во времени с частотой $\omega \gg 1$ слагаемые, которые пропорциональны ω и явно от v не зависят². Последнее обстоятельство, т. е. независимость больших слагаемых от неизвестной, существенно в исследованиях [56, 114].

В работах [60, 62] метод усреднения обоснован для задачи о периодических и о почти периодических по времени решениях параболических [60] и абстрактных параболических уравнений [62], содержащих осциллирующие с частотой $\omega \gg 1$ слагаемые, которые пропорциональны $\sqrt{\omega}$ и зависят от неизвестной.

В данной главе метод усреднения обоснован для системы уравнений в частных производных с оператором Навье — Стокса в главной части, содержащей осциллирующее с частотой $\omega \gg 1$ слагаемое, которое пропорционально $\sqrt{\omega}$ и зависит от неизвестной скорости течения. Рассмотрены начально-краевая задача (раздел 3.1) и задача о периодических по времени решениях (раздел 3.2). Отметим, что в случае задачи о периодических решениях установлены результаты

¹Результаты работы [56] приведены в разделе 2.3 данной монографии.

²В задаче о конвекции [114] большие слагаемые (напомним, что так мы называем слагаемые, пропорциональные положительным степеням параметра $\omega \gg 1$) зависят, помимо пространственных и временной переменных x, t , лишь от температуры T , которая удовлетворяет уравнению теплопроводности, не содержащему больших слагаемых. В задаче о течении жидкости [56] неизвестная T отсутствует, и поэтому большие слагаемые зависят лишь от x, t .

об их устойчивости и неустойчивости по Ляпунову. Правая часть системы относительно скорости имеет полиномиальный характер произвольной степени (массовая сила здесь может быть нелинейной), но ее большое слагаемое (пропорциональное $\sqrt{\omega}$) — первой степени. К сожалению, отказаться от последнего условия при рассматриваемых здесь незначительных условиях гладкости не удастся.

Поясним почему большое слагаемое в данной главе содержит коэффициент ω^α лишь при $\alpha = 1/2$. Дело в том, что рассмотрение показателей $\alpha < 1/2$ существенно проще и не представляет особого интереса, поскольку в этом случае усредненная (предельная) задача та же, что и при отсутствии слагаемого с таким коэффициентом. В случае же $\alpha > 1/2$, наоборот, задача представляется нам слишком сложной³ и осуществить даже формальное усреднение в такой ситуации пока не удастся.

Результаты главы опубликованы в работе [66].

3.1. Начально-краевая задача

3.1.1. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область евклидова пространства R^3 с C^2 — гладкой границей $\partial\Omega$, m — целое неотрицательное, n — натуральное, а ν и T — положительные числа. В цилиндре $Q = \overline{\Omega} \times [0, T]$ рассмотрим начально-краевую задачу вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \nabla P + (v, \nabla)v &= \sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(v, x, t, \omega t) + \\ &+ b(v, x, t, \omega t) + \sqrt{\omega} c(v, x, t, \omega t), \quad \operatorname{div} v = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$v|_{\partial\Omega \times (0, T]} = 0, \quad (3.2)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (3.3)$$

в которой неизвестными являются вектор-функция $v(x, t)$ и функция $P(x, t)$ со значениями в R^3 и R^1 соответственно⁴, ω — большой параметр.

³Напомним, что речь идет о задаче, большое слагаемое в которой зависит от неизвестной v .

⁴Векторы пространства R^3 будем считать вектор-столбцами.

Будем предполагать, что вектор-функции $a_j(v, x, t, \tau)$, $b(v, x, t, \tau)$ и $c(v, x, t, \tau)$ со значениями в R^3 имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} a_j &= \sum_{0 \leq k \leq m} a_{jk}, \quad b = \sum_{0 \leq k \leq m} b_k, \quad c = \sum_{0 \leq k \leq 1} c_k, \\ a_{jk}(v, x, t, \tau) &= \sum_{|r| \leq n} a_{jk}^{(r)}(v, x, t) e^{i\lambda_r \tau}, \\ b_k(v, x, t, \tau) &= \sum_{|r| \leq n} b_k^{(r)}(v, x, t) e^{i\lambda_r \tau}, \\ c_k(v, x, t, \tau) &= \sum_{0 < |r| \leq n} c_k^{(r)}(v, x, t) e^{i\lambda_r \tau}, \\ \lambda_r &\in R, \quad \lambda_{-r} = -\lambda_r, \end{aligned}$$

где $a_{jk}^{(r)}(v, x, t)$, $b_k^{(r)}(v, x, t)$ и $c_k^{(r)}(v, x, t)$ являются однородными формами степени k относительно компонент вектора v . Таким образом, $c(v, x, t, \tau) = c_0(x, t, \tau) + c_1(x, t, \tau)v$, где c_0 и c_1 — вектор и матрица, а компоненты $a_{jk}^{(r)}$ и $b_{k\ell}^{(r)}$ вектор-функций $a_{jk}^{(r)}$ и $b_k^{(r)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_{jk\ell}^{(r)}(v, x, t) &= \sum_{|s|=k} \bar{a}_{j\ell}^{(r)}(x, t) v_1^{s_1} v_2^{s_2} v_3^{s_3}, \\ b_{k\ell}^{(r)}(v, x, t) &= \sum_{|s|=k} \bar{b}_{\ell}^{(r)}(x, t) v_1^{s_1} v_2^{s_2} v_3^{s_3}, \end{aligned}$$

причем $c_0 = \bar{c}_0$, $c_1 = \bar{c}_1$, $\bar{a}_{j\ell}^{(r)} = \overline{a_{j\ell}^{(-r)}}$, $\bar{b}_{\ell}^{(r)} = \overline{b_{\ell}^{(-r)}}$. Здесь $s = (s_1, s_2, s_3)$, $s_j = 0, 1, \dots, k$, $|s| = s_1 + s_2 + s_3$, v_j ($j = 1, 2, 3$) — компоненты вектора v , а чертой обозначена операция комплексного сопряжения. Прежде чем ввести остальные ограничения на данные задачи (3.1)–(3.3), напомним определения двух банаховых пространств, которые будут часто использоваться в дальнейшем.

Будем рассматривать данные $\bar{a}_{j\ell}^{(r)}(\cdot, t)$, $\bar{b}_{\ell}^{(r)}(\cdot, t)$, $c_0^{(r)}(\cdot, t)$, $c_1^{(r)}(\cdot, t)$ и $v_0(\cdot, t)$ как вектор-функции от t со значениями в соответствующих банаховых пространствах и предполагать, что $\bar{a}_{j\ell}^{(r)}, \bar{b}_{\ell}^{(r)} \in C([0, T], L_{\infty}(\Omega))$, $c_0^{(r)}, c_1^{(r)}, \frac{\partial c_0^{(r)}}{\partial t}, \frac{\partial c_1^{(r)}}{\partial t} \in C([0, T], W_{\infty}^2(\Omega))$, $v_0 \in S_{p_0}$, $p_0 > \max(3(m-1), 3)$. Здесь $S_{p_0} \equiv S_{p_0}(\Omega)$ — известное в математической гидродинамике пространство соленоидальных векторов (см. [42, 143] и раздел 2.1 выше).

Заметим, что в первом уравнении (3.1) слагаемое $(v, \nabla)v = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v$ можно было бы отнести к следующему слагаемому (ввиду известного равенства $(v, \nabla)v = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j v)$, когда $\operatorname{div} v = 0$), но в этом случае была бы менее наглядной связь (3.1) с уравнением Навье — Стокса в наиболее привычном его виде, когда массовая сила не зависит от v (см., например, [42, 143]).

3.1.2. Определение решения и обобщенного решения задачи. Введем определения решения и обобщенного решения начально-краевой задачи (3.1)–(3.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Решением задачи (3.1)–(3.3) назовем определенную в цилиндре Q трехмерную вещественную вектор-функцию $v(x, t)$, для которой найдется определенная в том же цилиндре скалярная вещественная функция $P(x, t)$ такая, что при некотором $q > 1$ будут выполнены следующие условия:*

- 1) вектор-функции $\hat{v}(t) = v(\cdot, t)$ и $\hat{P}(t) = P(\cdot, t)$ являются непрерывными как отображения $\hat{v}: [0, T] \rightarrow S_q$, $\hat{v}: (0, T] \rightarrow \overset{\circ}{S}_q^2$, $\hat{P}: (0, T] \rightarrow W_q^1(\Omega)$, и равенство (3.3) выполнено в S_q ;
- 2) отображение $\hat{v}: (0, T) \rightarrow S_q$ непрерывно дифференцируемо, и первое равенство (3.1) справедливо при всех $t \in (0, T)$ в S_q ;
- 3) второе равенство (3.1) при $(x, t) \in \overline{\Omega} \times (0, T]$ и равенство (3.2) выполняются в обычном классическом смысле.

Прежде чем сформулировать определение обобщенного решения задачи (3.1)–(3.3) опишем известную процедуру (см., например, [37]) перехода от задачи (3.1)–(3.3) к соответствующему интегральному уравнению. Предположим на некоторое время, что $a_{jki}^s \in C([0, T], W_\infty^1)$, и пусть $v(x, t)$ — решение задачи (3.1)–(3.3), $q > 3$. Подействовав на уравнение (3.1) проектором Π (см. раздел 2.1 выше) и обозначив $v(t) = \Pi v(\cdot, t) = v(\cdot, t)$, $v(0) = v(\cdot, 0) = v_0$, перейдем от начально-краевой задачи (3.1)–(3.3) к задаче Коши в S_{p_0} для абстрактного параболического уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + A_0 v = \Pi \left[- (v, \nabla)v + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(v, \cdot, t, \omega t) + b(v, \cdot, t, \omega t) + \right. \\ \left. + \sqrt{\omega} c(v, \cdot, t, \omega t) \right] \equiv \Pi \psi_1(v, t) \equiv \psi(v(t), t, \omega t), \quad t \in (0, T], \quad v(0) = v_0. \end{aligned}$$

Из результатов [37, 143] теперь следует, что всякое решение $v(\cdot, t)$

задачи (3.1)–(3.3) удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-tA_0}v_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0}\psi[v(\tau), \tau, \omega\tau] d\tau \equiv \\ &\equiv e^{-tA_0}v_0 + I_0^t \equiv [N_\omega(v)](t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где I_0^t понимается как предел в S_{p_0} интеграла I_h^t при $h \rightarrow 0$.

Действительно, из определения решения задачи (3.1)–(3.3) вытекает, что при любом $h \in (0, T)$ справедливо соотношение $\psi[v(t), t, \omega t] \in C([h, T], S_q)$. Отсюда согласно [37, лемма 23.1] следует равенство

$$v(t) = e^{-(t-h)A_0}v(h) + I_h^t, \quad t > h. \quad (3.5)$$

Далее, в силу неравенства Гёльдера, существует постоянная $c > 0$, при которой для всех $k \leq m$ и $v \in C([0, T], S_{p_0})$ выполнены оценки

$$\|a_{jkl}^{(r)}(v(t), \cdot, t)\|_{C([0, T], S_{p_0/k})} \leq c\|v\|_{C([0, T], S_{p_0})}^k,$$

$$\|b_{kl}^{(r)}(v(t), \cdot, t)\|_{C([0, T], S_{p_0/k})} \leq c\|v\|_{C([0, T], S_{p_0})}^k.$$

Из этих оценок и оценок (2.17), (2.18) следует существование такой константы $c_1 > 0$, что при всех $t \in [0, T]$ и $h_1, h_2 \in (0, t)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{h_1}^{h_2} e^{-(t-\tau)A_0}\psi[v(\tau), \tau, \omega\tau] d\tau \right\|_{S_{p_0}} \leq \\ &\leq c_1 \int_{h_1}^{h_2} (t-\tau)^{-\frac{3}{2} - \frac{(m-1)}{p_0} - \frac{1}{2}} d\tau (\|v\|_{C([0, T], S_{p_0})}^m + 1) = \\ &= c_1 \left[(t-h_1)^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{(m-1)}{p_0}} - (t-h_2)^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{(m-1)}{p_0}} \right] (\|v\|_{C([0, T], S_{p_0})}^m + 1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Учитывая определение решения задачи (3.1)–(3.3), сильную непрерывность полугруппы e^{-tA} и неравенство (3.6), в (3.5) можно перейти к пределу при $h \rightarrow 0$ по норме S_{p_0} , так что равенство (3.4) обосновано.

В пространстве $C([0, T], S_{p_0})$ рассмотрим оператор N_ω , который определен на вектор-функциях $v(t) \in C([0, T], S_{p_0} \cap W_{p_0}^1)$ и действует по правилу, предписанному правой частью равенства (3.4). Тот факт, что образ N_ω лежит в пространстве $C([0, T], S_{p_0})$ вытекает из [37, лемма 23.1] и рассуждений данного раздела, использовавшихся при обосновании формулы (3.4). С помощью оценок (2.16), (2.17) и неравенства Гёльдера устанавливается (см. ниже), что оператор N_ω непрерывен не только относительно аргумента $v \in C([0, T], S_{p_0})$, но и относительно параметров $a_{jkl}^{(r)} \in C([0, T], L_\infty)$, в связи с чем будем рассматривать его на всем пространстве $C([0, T], S_{p_0})$ в условиях п. 3.1.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Обобщенным (об.) решением задачи (3.1)–(3.3) на участке $t \in [0, T]$ называется трехмерная вещественная вектор-функция $v(t) = v(\cdot, t) \in C([0, T], S_{p_0})$, удовлетворяющая равенству*

$$v - N_\omega(v) = 0.$$

3.1.3. Формулировка основного результата. Наряду с возмущенной задачей (3.1)–(3.3) в цилиндре $Q = \bar{\Omega} \times [0, T]$ рассмотрим следующую задачу, которую будем называть усредненной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \nabla Q + (u, \nabla)u &= \sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j^{(0)}(u, x, t) + \\ &+ b^{(0)}(u, x, t) + \sum_{0 < |r| \leq n} \frac{i}{\lambda_r} c_1^{(r)}(x, t) \Pi[c_0^{(-r)}(x, t) + c_1^{(-r)}(x, t)u], \quad (3.7) \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

$$u|_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0, \quad (3.8)$$

$$u(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (3.9)$$

где $a_j^{(r)} = \sum_{0 \leq k \leq m} a_{jk}^{(r)}$, $b^{(r)} = \sum_{0 \leq k \leq m} b_k^{(r)}$. Будем предполагать, что она имеет об. решение $u_0(x, t)$.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия п. 3.1.1 и п. 3.1.3. Тогда существует положительное число ω_0 , при котором справедливы следующие утверждения.

1. Возмущенная задача (3.1)–(3.3) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное об. решение $v_\omega(x, t)$, и при этом справедливо предельное равенство

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|v_\omega - u_0\|_{C([0, T], S_{p_0})} = 0.$$

2. Если дополнительно к предположениям п. 3.1.1 и п. 3.1.3 при некотором $\alpha \in (0, 1]$ выполнены условия $v_0 \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $a_{kl}^{s(r)} \in C([0, T], C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}))$, $b_{kj}^{s(r)}, c_0, c_1 \in C([0, T], C^\alpha(\bar{\Omega}))$, то вектор-функция $v_\omega(x, t)$ является решением задачи (3.1)–(3.3).

Доказательство теоремы изложено в пп. 3.1.4–3.1.6.

3.1.4. Переход к интегральному уравнению. Этот пункт посвящен преобразованию задачи (3.1)–(3.3), в результате которого мы избавимся от содержащегося в ней слагаемого с большой амплитудой. При этом участвующие в преобразовании вектор-функции будем считать достаточно гладкими для осуществления этого преобразования. Получив преобразованную задачу и перейдя к рассмотрению ее об. решений (т. е. решений соответствующих интегральных уравнений), мы вернемся к исходным предположениям гладкости, что отвечает замыканию интегральных операторов по непрерывности, оправданному оценками предложения 2.2.

В задаче (3.1)–(3.3) произведем замену переменных

$$v(x, t) = z(x, t) + u_0(x, t) + w_1(x, t) \equiv w(x, t) + w_1(x, t). \quad (3.10)$$

Здесь $z(x, 0) = 0$, а $w_1(x, t) = y_1(x, t, t) + y_2(x, t)$, где $y_1(x, t, s)$ — $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое по t решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} - \nu \Delta y + \nabla p &= \sqrt{\omega} c(w(x, s), x, s, \omega t), \\ \operatorname{div} y &= 0, \quad y|_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0 \end{aligned}$$

с параметрами $s \in [0, T]$ и $\omega > 0$, рассматриваемой в цилиндре Q , а $y_2(x, t)$ — решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} - \nu \Delta y + \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} y &= 0, \quad y|_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0, \quad y(x, 0) = -y_1(x, 0, 0) \end{aligned}$$

в том же цилиндре Q . Непосредственной проверкой убеждаемся, что решения указанных задач имеют вид

$$\begin{aligned} y_1(x, t, s) &= \sqrt{\omega} \sum_{0 < |r| \leq n} (i\lambda_r \omega I - A_0)^{-1} \times \\ &\times \Pi [c_0^{(r)}(x, s) + c_1^{(r)}(x, s)w(x, s)] e^{i\lambda_r \omega t}, \\ y_2(x, t) &= -\sqrt{\omega} e^{-tA_0} \sum_{0 < |r| \leq n} (i\lambda_r \omega I - A_0)^{-1} \times \\ &\times \Pi [c_0^{(r)}(x, 0) + c_1^{(r)}(x, 0)v_0(x)], \end{aligned}$$

где I — тождественный оператор. В силу (2.15) справедливы оценки

$$\|y_1(x, t, s)\|_{C([0, T], L_{p_0})} \leq c\omega^{-1/2} (\|w\|_{C([0, T], L_{p_0})} + 1), \quad (3.11)$$

$$\|y_2(x, t)\|_{C([0, T], L_{p_0})} \leq c\omega^{-1/2}, \quad c = \text{const}. \quad (3.12)$$

Выпишем представления вектор-функций a_j , b и c , которыми будем пользоваться в процессе замены переменных (3.10). Имеем

$$a_j(w + w_1, x, t, \tau) \equiv a_j(w, x, t, \tau) + R_{j1}(\omega, z),$$

$$b(w + w_1, x, t, \tau) \equiv b(w, x, t, \tau) + R_{02}(\omega, z),$$

$$a_j^{(0)}(w, x, t) \equiv a_j^{(0)}(u_0, x, t) + (D_u a_j^{(0)})(u_0, x, t)z + r_{j1}(z),$$

$$b^{(0)}(w, x, t) \equiv b^{(0)}(u_0, x, t) + (D_u b^{(0)})(u_0, x, t)z + r_{02}(z).$$

Здесь выражения остатков R_{j1} , R_{02} , r_{j1} и r_{02} очевидны. Далее,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\omega}c(w + w_1, x, t, \tau) &= \sqrt{\omega} [c(w, x, t, \tau) + c_1(x, t, \tau)y_1 + c_1(x, t, \tau)y_2] = \\
&= \sqrt{\omega}c(w, x, t, \tau) + c_1(x, t, \tau) \sum_{0 < |r| \leq n} (i\lambda_r)^{-1} \Pi [c_0^{(r)}(x, t) + \\
&+ c_1^{(r)}(x, t)w(x, t)] e^{i\lambda_r \tau} + c_1(x, t, \tau) \sum_{0 < |r| \leq n} [(i\lambda_r I - \omega^{-1}A_0)^{-1} - \\
&- (i\lambda_r)^{-1}] \Pi [c_0^{(r)}(x, t) + c_1^{(r)}(x, t)w(x, t)] e^{i\lambda_r \tau} - c_1(x, t, \tau) \times \\
&\times \sum_{0 < |r| \leq n} (i\lambda_r)^{-1} e^{-tA_0} \Pi [c_0^{(r)}(x, 0) + c_1^{(r)}(x, 0)v_0(x)] - c_1(x, t, \tau) \times \\
&\times \sum_{0 < |r| \leq n} [(i\lambda_r I - \omega^{-1}A_0)^{-1} - (i\lambda_r)^{-1}] e^{-tA_0} \Pi [c_0^{(r)}(x, 0) + c_1^{(r)}(x, 0) \times \\
&\times v_0(x)] \equiv \sqrt{\omega}c(w, x, t, \tau) + \sum_{0 < |r| \leq n} \frac{i}{\lambda_r} c_1^{(r)} \Pi [c_0^{(-r)}(x, t) + c_1^{(-r)}(x, t)w] + \\
&+ \sum_{0 < |r_1|, |r_2| \leq n} \frac{i}{\lambda_{r_2}} c_1^{(r_1)} e^{-tA_0} \Pi [c_0^{(r_2)}(x, 0) + c_1^{(r_2)}(x, 0)v_0(x)] e^{i\lambda_{r_1}} - \\
&- \sum_{\substack{0 < |r_1|, |r_2| \leq n, \\ r_1 + r_2 \neq 0}} \frac{i}{\lambda_{r_2}} c_1^{(r_1)} \Pi [c_0^{(r_2)}(x, t) + c_1^{(r_2)}(x, t)w] e^{i(\lambda_{r_1} + \lambda_{r_2})\tau} + R(\omega, z).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
R(\omega, z) &= c_1(x, t, \tau) \sum_{0 < |r| \leq n} [(i\lambda_r I - \omega^{-1}A_0)^{-1} - (i\lambda_r)^{-1}] \times \\
&\times \left(\Pi [c_0^{(r)}(x, t) + c_1^{(r)}(x, t)w(x, t)] - e^{-tA_0} \Pi [c_0^{(r)}(x, 0) + c_1^{(r)}(x, 0)v_0(x)] \right).
\end{aligned}$$

Задача (3.1)–(3.3) в результате замены переменных (3.10) примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} - \nu \Delta z - \nabla p &= L_1(t)z + F_1(z, x, t) + \\
&+ f_1(z, x, t, \omega t) + \varphi_{1\omega}(z, x, t),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\operatorname{div} z = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T),$$

$$z|_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0, \tag{3.14}$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{3.15}$$

Здесь $L_1(t)z$ и $F_1(z, x, t)$ — плавные (т. е. не зависящие от $\tau = \omega t$) слагаемые, первое из которых является линейным относительно z ; $f_1(z, x, t, \tau) — 2\pi$ -периодическое по τ с нулевым средним⁵ слагаемое; $\Lambda_\omega(x, t)$ и $\varphi_{1\omega}(z, x, t)$ — малые (в определенном смысле) при больших ω члены, E — единичная матрица 3-го порядка. Конкретные выражения указанных вектор-функций имеют следующий вид:

$$L_1(t)z = (u_0, \nabla)z + (z, \nabla)u_0 + \sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial}{\partial x_j} [(D_u a_j^{(0)})(u_0, x, t)z] + \\ + (D_u b^{(0)})(u_0, x, t)z + \sum_{0 < |r| \leq n} \frac{i}{\lambda_r} c_1^{(r)}(x, t) \Pi c_1^{(-r)}(x, t)z,$$

где $(D_u a)(u) = \left(\frac{\partial a_\ell(u)}{\partial u_s} \right)_{\ell, s=1}^3$, a_ℓ — компоненты вектора a , $a = a_j^{(0)}$, $b^{(0)}$;

$$F_1(z, x, t) = -(z, \nabla)z + \sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial}{\partial x_j} [a_j^{(0)}(w, x, t) - a_j^{(0)}(u_0, x, t) - \\ - (D_u a_j^{(0)})(u_0, x, t)z + b^{(0)}(w, x, t) - b^{(0)}(u_0, x, t) - (D_u b^{(0)})(u_0, x, t)z];$$

$$f_1(z, x, t, \tau) = \sum_{0 < |r| \leq n} \left[\sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j^{(r)}(w, x, t) + b^{(r)}(w, x, t) \right] e^{i\lambda_r \tau} + \\ + \sum_{\substack{0 < |r_1|, |r_2| \leq n, \\ \lambda_{r_1} + \lambda_{r_2} \neq 0}} (i\lambda_{r_2})^{-1} c_1^{(r_1)}(x) \Pi [c_0^{(r_2)}(x, t) + c_1^{(r_2)}(x, t)w] e^{i(\lambda_{r_1} + \lambda_{r_2})\tau} + \\ + \sum_{0 < |r| \leq n} (i\lambda_r)^{-1} c_1(x, t, \tau) e^{-tA_0} \Pi [c_0^{(r)}(x, 0) + c_1^{(r)}(x, 0)v_0(x)];$$

$$\varphi_{1\omega}(z, x, t) = -\sqrt{\omega} \sum_{0 < |r| \leq n} (i\lambda_r \omega I - A_0)^{-1} \Pi \left[c_1^{(r)}(x, t) \frac{\partial u_0}{\partial t} + \right. \\ \left. + \frac{\partial c_0^{(r)}(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial c_1^{(r)}(x, t)}{\partial t} w \right] e^{i\lambda_r \omega t} + (w, \nabla)w_1 + (w_1, \nabla)w + (w_1, \nabla)w_1 + \\ + \sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial}{\partial x_j} [R_{j1}(w, z) + r_{j1}(z)] + R_{20}(w, z) + r_{20}(z) + R(\omega, z);$$

⁵Т. е. $\langle f_1(z, x, t, \tau) \rangle_\tau \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(z, x, t, \tau) d\tau = 0$.

$$\Lambda_\omega(x, t) = \sqrt{\omega} \sum_{0 < |r| \leq n} (i\lambda_r \omega I - A_0)^{-1} \Pi c_1^{(r)}(x, t) e^{i\lambda_r \omega t}.$$

Сразу же отметим, что в силу последнего равенства и оценки (2.15) (в которой нужно положить $q = r > 1, k = 1$), существуют такие постоянные c, c_1 , что при всех $\omega > 1$ и $u \in C([0, T], S_p)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|\Lambda_\omega(\cdot, t)u\|_{C([0, T], S_p)} &\leq c\sqrt{\omega} \sum_{0 < |\lambda_r| \leq n} (1 + |\lambda_r|\omega)^{-1} \times \\ &\times \|\Pi c_1^{(r)} u e^{i\lambda_r \omega t}\|_{C([0, T], L_p)} \leq c_1 \omega^{-1/2} \|u\|_{C([0, T], L_p)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Поддействуем на первое уравнение (3.13) проектором Π и разрешим полученное равенство относительно $\partial z / \partial t$. Так мы придем к абстрактному параболическому уравнению в банаховом пространстве S_{p_0} , которое при гладких данных задачи (3.13)–(3.15) и гладких z ($a_{jkl}^{(r)} \in C([0, T], W_\infty^1)$, $z \in C([0, T], W_\infty^1 \cap S_{p_0})$) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0} L(\tau) z(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0} [F(z(\tau), \cdot, \tau) + f(z(\tau), \cdot, \tau, \omega\tau) + \\ &+ \varphi_\omega(z(\tau), \cdot, \tau)] d\tau \equiv Bz + N(z, \omega), \quad \omega \gg 1, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$L(\tau) = \Pi L_1(\tau), \quad F = \Pi F_1, \quad f = \Pi f_1,$$

$$\begin{aligned} \varphi_\omega(z, t) &= \{E - [E + \Lambda_\omega(\cdot, t)]^{-1}\} \Pi [\nu \Delta z + L_1(t)z + \\ &+ F_1(z, \cdot, t) + f_1(z, \cdot, t, \omega t)] + [E + \Lambda_\omega(\cdot, t)]^{-1} \Pi \varphi_{1\omega}(z, \cdot, t) \equiv \\ &\equiv \nu \{E - [E + \Lambda_\omega(\cdot, t)]^{-1}\} \Pi \Delta z + \psi_\omega(z, t). \end{aligned}$$

3.1.5. Доказательство вспомогательных утверждений.

В этом пункте содержится несколько лемм, которые позволяют исследовать уравнение (3.17).

Пусть $p \geq r > 1$. В цилиндре $(x, t) \in Q$ рассмотрим линейную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u - \nabla P &= a_0(x, t)u + \\ + \sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial}{\partial x_j} [a_j(x, t)u] + f_0(x, t) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_j(x, t)}{\partial x_j} &\equiv \Phi(u), \quad (3.18) \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \end{aligned}$$

где $a_k \in C([0, T], L_\infty(\Omega))$ — квадратные матрицы 3-го порядка, а $f_k \in C([0, T], L_r(\Omega))$, $k = 0, 1, 2, 3$, — векторы-столбцы того же порядка.

В полном соответствии с данным выше определением обобщенного решения нелинейной задачи (3.1)–(3.3), дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Об. решением задачи (3.18) назовем вектор-функцию $u(x, t)$ такую, что $v(t) \equiv u(\cdot, t) \in C([0, T], S_p(\Omega))$ и справедливо равенство

$$\begin{aligned} v(t) - B_0 v(t) &= \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0} \Pi \left\{ f_0(\cdot, \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(\cdot, \tau) \right\} d\tau \equiv F(t), \quad (3.19) \end{aligned}$$

где

$$B_0 v(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0} \Pi \left\{ a_0(\cdot, \tau)v(\tau) + \sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial}{\partial x_j} [a_j(\cdot, \tau)v(\tau)] \right\} d\tau.$$

Здесь оба последних интеграла понимаются как замыкания по непрерывности таких же интегралов, которые определены для гладких по x вектор-функций (f_k, a_k, v) и мыслятся как операторы с областью определения, содержащейся в пространстве $C([0, T], L_r) \times C([0, T], L_\infty) \times C([0, T], S_p)$ и со значениями в $C([0, T], L_p)$. Например, непрерывность интегралов

$$I(f_j) = \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0} \Pi \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(\cdot, \tau) d\tau, \quad j = 1, 2, 3,$$

вытекает, согласно (2.18), из следующей оценки, справедливой для гладких вектор-функций f_j, φ_j :

$$\begin{aligned} \|I(f_j) - I(\varphi_j)\|_{C([0, T], S_p)} &\leq c_1 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (t-\tau)^{-1/2-\beta} d\tau \right| \times \\ &\times \|f_j - \varphi_j\|_{C([0, T], L_r)} \leq c_2 \|f_j - \varphi_j\|_{C([0, T], L_r)}, \quad c_1, c_2 = \text{const}. \end{aligned}$$

Лемма 3.1. Оператор B_0 , действующий в пространстве $C([0, T], S_p)$, $p > 1$, является оператором Вольтерра.

Лемма 3.2. Задача (3.18) имеет единственное об. решение $u(x, t)$, и справедлива оценка

$$\|u(\cdot, t)\|_{C([0, T], S_p)} \leq c \sum_{0 \leq j \leq 3} \|f_j\|_{C([0, T], L_r)}, \quad (3.20)$$

где постоянная c не зависит от вектор-функций f_j .

Лемма 3.3. Пусть $0 < \mu < \frac{1}{2} - \beta$. Тогда об. решение $u(x, t)$ задачи (3.18) подчинено оценке

$$\|u(\cdot, t)\|_{C^\mu([0, T], S_p)} \leq c \sum_{0 \leq j \leq 3} \|f_j\|_{C([0, T], L_r)}, \quad (3.21)$$

где постоянная c не зависит от вектор-функций f_j , $j = 0, 1, 2, 3$.

Лемма 3.1 доказывается аналогично [116, лемма 3.9]. Лемма 3.2 легко следует из представления (3.13), леммы 3.1 и оценок (2.17), (2.18). Лемма 3.3 доказывается с помощью соотношений (3.20), (2.17), (2.18).

Совершенно аналогично лемме 3.3 доказывается следующее утверждение.

Следствие 3.1. Пусть $\gamma, \mu > 0$, $\gamma + \mu < \frac{1}{2} - \beta$. Тогда об. решение задачи (3.18) с заменой $\Phi(u)$ на $A_0^\gamma \Phi(u)$ подчинено оценке

$$\|u(\cdot, t)\|_{C^\mu([0, T], S_p)} \leq c \sum_{j=1}^3 \|f_j\|_{C([0, T], S_r)}, \quad c = \text{const} > 0.$$

Лемма 3.4. Для каждого $\mu \in (0, \frac{p_0 - 3(m-1)}{2p_0})$ найдется функция $d_0 : (0, 1] \times (\omega_1, \infty) \rightarrow R_+$ такая, что $\lim_{r \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty} d_0(r, \omega) = 0$ и при всех $\omega > 0$ и z_1, z_2 , удовлетворяющих условию $\|z_i\|_{C^\mu([0, T], S_{p_0})} < r \leq 1$, $i = 1, 2$, справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \left\| (I - B(t))^{-1} \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0} [F(z_1(\tau), \cdot, \tau) + \right. \\ & \left. + f(z_1(\tau), \cdot, \tau, \omega\tau)] d\tau \right\|_{C^\mu([0, T], S_{p_0})} \leq d_0(r, \omega), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & \left\| (I - B(t))^{-1} \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0} [F(z_2(\tau), \cdot, \tau) + f(z_2(\tau), \cdot, \tau, \omega\tau) - \right. \\ & \left. - F(z_1(\tau), \cdot, \tau) - f(z_1(\tau), \cdot, \tau, \omega\tau)] d\tau \right\|_{C^\mu([0, T], S_{p_0})} \leq \\ & \leq d_0(r, \omega) \|z_2 - z_1\|_{C^\mu([0, T], S_{p_0})}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Здесь B, F, f — те же, что в (3.17).

◁ В силу представления (3.17) оператора B и оценок (2.17), (2.18), справедливо соотношение

$$(I - B)^{-1} \in \text{Hom}(C^\mu([0, T], S_{p_0}), C^\mu([0, T], S_{p_0})). \quad (3.24)$$

Обозначим для краткости выражение, стоящее под знаком нормы в левой части равенства (3.22), через $S(z_1, \tau)$. В силу простого

мультипликативного неравенства (см. [116, лемма 3.16])

$$\begin{aligned} & \|u(\cdot, t)\|_{C^\mu([0, T], S_{p_0})} \leq \|u(\cdot, t)\|_{C([0, T], S_{p_0})} + \\ & + \left(2\|u(\cdot, t)\|_{C([0, T], S_{p_0})}\right)^{1-\frac{\mu}{\mu_1}} \|u(\cdot, t)\|_{C^{\mu_1}([0, T], S_{p_0})}^{\frac{\mu}{\mu_1}}, \quad 0 < \mu < \mu_1 \leq 1, \end{aligned}$$

для доказательства леммы 3.4 достаточно установить два следующих утверждения.

(У1). Лемма 3.4 справедлива при замене в левых частях неравенств (3.22) и (3.23) нормы $C^\mu([0, T], S_{p_0})$ на норму $C([0, T], S_{p_0})$.

(У2). Для $\mu < \mu_1 < \frac{p_0 - 3(m-1)}{p_0}$ найдется постоянная c_0 , при которой выполняются неравенства

$$\|S(z_1, t)\|_{C^{\mu_1}([0, T], S_{p_0})} \leq c_0, \quad (3.25)$$

$$\|S(z_2, t) - S(z_1, t)\|_{C^{\mu_1}([0, T], S_{p_0})} \leq c_0 \|z_2 - z_1\|_{C([0, T], S_{p_0})}. \quad (3.26)$$

Утверждение У2 (см. оценки (3.25), (3.26)) вытекает из леммы 3.3 с учетом структуры выражений F и f (п. 3.1.4) и условий раздела (п. 3.1.1).

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ У1. Вывод оценок (3.22), (3.23) продемонстрируем на примере слагаемого $\Pi_{\frac{\partial}{\partial x_1}}[a_1^{(0)}(w, x, t) - a_1^{(0)}(u_0, x, t) - (D_u a_1^{(0)})(u_0, x, t)z] \equiv \Pi_{\frac{\partial}{\partial x_1}} A(z, x, t)$, входящего в выражение $F(z, x, t)$, и слагаемого $f^1(z, x, t, \tau) \equiv \Pi_{\frac{\partial}{\partial x_1}} a_1^{(1)}(w, x, t) e^{i\lambda_1 \tau}$, входящего в выражение $f(z, x, t, \tau)$. Для других слагаемых выражений F и f оценки проводятся аналогично. Согласно неравенству Гёльдера при $\|z_i\|_{(C^\mu([0, T], S_{p_0}))} \leq r \leq 1$,

$$\|A(z_1, x, t)\|_{C([0, T], L_{p_0/m})} \leq c(r),$$

$$\|A(z_2, x, t) - A(z_1, x, t)\|_{C([0, T], L_{p_0/m})} \leq c(r) \|z_2 - z_1\|_{C^\mu([0, T], L_{p_0})},$$

где

$$\lim_{r \rightarrow 0} c(r) = 0. \quad (3.27)$$

Отсюда в силу соотношений (3.21), (3.24) вытекают оценки (3.22), (3.23) с заменой $F + f$ на A и $d_0(r, \omega)$ на $c_0(r)$, где $c_0(r)$ удовлетворяет предельному равенству (3.27).

Выведем теперь оценки (3.22), (3.23) для случая $F + f \equiv f^1$. Ограничимся выводом (3.23), так как (3.22) устанавливается аналогично (с соответствующими упрощениями). Мы докажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\omega_0 > 0$ такое, что при $\omega > \omega_0$ и $\|z_i\|_{C^\mu([0,T],S_{p_0})} < \delta \leq 1$

$$\left\| (I - B(t))^{-1} \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0} [f^1(z_2(\tau), \cdot, \tau, \omega\tau) - f^1(z_1(\tau), \cdot, \tau, \omega\tau)] d\tau \right\|_{C([0,T],S_{p_0})} < \varepsilon \|z_2 - z_1\|_{C^\mu([0,T],S_{p_0})}. \quad (3.28)$$

Доказательство этого утверждения проведем в два этапа. Вначале подберем $\delta = \delta(\varepsilon)$, для которого при всех $\omega > 0$ справедливы оценки

$$\sup_{t \in [0,T]} \left\{ \left\| (I - B(t))^{-1} \right\|_{\text{Hom}(S_{p_0}, S_{p_0})} \int_0^{2\delta} \left\| e^{-(t-\tau)A_0} \times [f^1(z_2(\tau), \cdot, \tau, \omega\tau) - f^1(z_1(\tau), \cdot, \tau, \omega\tau)] \right\|_{S_{p_0}} d\tau \right\} < \frac{\varepsilon}{3} \|z_2 - z_1\|_{C([0,T],S_{p_0})}, \quad (3.29)$$

$$\sup_{t \in [0,T]} \left\{ \left\| (I - B(t))^{-1} \right\|_{\text{Hom}(S_{p_0}, S_{p_0})} \int_{t_\delta}^t \left\| e^{-(t-\tau)A_0} \times [f^1(z_2(\tau), \cdot, \tau, \omega\tau) - f^1(z_1(\tau), \cdot, \tau, \omega\tau)] \right\|_{S_{p_0}} d\tau \right\} < \frac{\varepsilon}{3} \|z_2 - z_1\|_{C([0,T],S_{p_0})}, \quad (3.30)$$

где $t_\delta = \max(t - 2\delta, 0)$. Существование такого δ вытекает из леммы 3.3, соотношений (3.22), (2.18) и неравенства Гёльдера. На втором этапе, считая $t > \delta$, осуществим собственно выбор величины ω_0 .

Воспользуемся равенством

$$\begin{aligned}
I_t(z_1, z_2) &\equiv (I - B(t))^{-1} \times \\
&\times \int_{\delta}^{t-\delta} e^{-(t-\tau)A_0} [f^1(z_2(\tau), \cdot, \tau, \omega\tau) - f^1(z_1(\tau), \cdot, \tau, \omega\tau)] d\tau \approx \\
&\approx (I - B(t))^{-1} \sum_{k=M_1}^{M_2} \int_{\frac{2\pi}{|\lambda_1|\omega}k}^{\frac{2\pi}{|\lambda_1|\omega}(k+1)} [e^{-(t-\tau)A_0} - e^{-(t-\frac{2\pi}{|\lambda_1|\omega}k)A_0}] \times \\
&\times \Pi \frac{\partial}{\partial x_1} [a_1^{(1)}(z_2(\tau) + u_0(\tau), \cdot, \tau) - a_1^{(1)}(z_1(\tau) + u_0(\tau), \cdot, \tau)] \times \\
&\times e^{i\lambda_1\omega\tau} d\tau + (I - B(t))^{-1} \sum_{k=M_1}^{M_2} \int_{\frac{2\pi}{|\lambda_1|\omega}k}^{\frac{2\pi}{|\lambda_1|\omega}(k+1)} e^{-(t-\frac{2\pi}{|\lambda_1|\omega}k)A_0} \times \\
&\times \Pi \frac{\partial}{\partial x_1} [a_1^{(1)}(z_2(\tau) + u_0(\tau), \cdot, \tau) - a_1^{(1)}(z_1(\tau) + u_0(\tau), \cdot, \tau) - \\
&- a_1^{(1)}(z_2(\tau_k) + u_0(\tau_k), \cdot, \tau_k) - a_1^{(1)}(z_1(\tau_k) + \\
&+ u_0(\tau_k), \cdot, \tau_k)] e^{i\lambda_1\omega\tau} d\tau \equiv \sum_1 + \sum_2, \quad \tau_k = \frac{2\pi}{|\lambda_1|\omega}k.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Здесь M_1 и M_2 — минимальное и максимальное целые числа, соответственно удовлетворяющие условиям $\delta \leq M_1 \frac{2\pi}{|\lambda_1|\omega} \leq 2\delta$, $t - 2\delta \leq M_2 \frac{2\pi}{|\lambda_1|\omega} \leq t - \delta$, $\omega > \omega_1 = \frac{2\pi}{|\lambda_1|\delta}$. Кроме того, знак приближенного равенства $\approx$ показывает, что в этом равенстве отсутствуют два крайних интеграла; это допустимо в силу оценок (3.29), (3.30). Из соотношений (3.22), (2.22) и неравенства Гёльдера вытекает оценка

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [2\delta, T]} \left\| \sum_1 \right\|_{S_{p_0}} &\leq c(M_2 - M_1) \frac{2\pi}{|\lambda_1|\omega} \delta^{-\frac{(m-1)p_0}{m} - \frac{3}{2}} \|z_2 - z_1\|_{C([0, T], S_{p_0})}, \\
c &= \text{const}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $\omega > \frac{12\pi c(M_2 - M_1)\delta^{-\frac{(m-1)p_0}{m} - \frac{3}{2}}}{|\lambda_1|\varepsilon}$

$$\sup_{t \in [2\delta, T]} \left\| \sum_1 \right\|_{S_{p_0}} < \frac{\varepsilon}{6} \|z_2 - z_1\|_{C([0, T], S_{p_0})}. \tag{3.32}$$

При оценке $\sum_2$ учитывается очевидное представление

$$\begin{aligned} a_1^{(1)}(z_2(\tau) + u_0(\tau), \cdot, \tau) - a_1^{(1)}(z_1(\tau) + u_0(\tau), \cdot, \tau) = \\ = D(z_1(\tau), z_2(\tau), \tau)[z_2(\tau) - z_1(\tau)], \end{aligned} \quad (3.33)$$

где $D(z_1, z_2, \tau)$ — матрица, коэффициенты которой полиномиально зависят от компонент векторов z_1, z_2 и непрерывны от τ . В силу соотношений (3.22), (2.18), (3.33) и неравенства Гёльдера при достаточно больших ω выполняется оценка

$$\sup_{t \in [2\delta, T]} \left\| \sum_2 \right\|_{S_{p_0}} < \frac{\varepsilon}{6} \|z_2 - z_1\|_{C^\mu([0, T], S_{p_0})}. \quad (3.34)$$

Из соотношений (3.28)–(3.34) следует оценка (3.23).

Лемма доказана. $\triangleright$

Лемма 3.5. Пусть $c(x, t)$ — вещественная квадратная матрица 3-го порядка с элементами из пространства $C([0, T], W_\infty^2)$. Тогда операторы

$$T_j v \equiv A_0^{-1} P c(x, t) \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}, \quad D(T_j) = C([0, T], C_0^2)$$

и

$$M v \equiv A_0^{-1} P c(x, t) A_0 v, \quad D(M) = C([0, T], C_0^2 \cap S_p), \quad p > 1,$$

действующие в пространствах $C([0, T], L_p)$ и $C([0, T], S_p)$, соответственно, допускают замыкания по непрерывности до ограниченных операторов в этих пространствах. Здесь через $D(N)$ обозначена область определения оператора N , а символом C_0^2 — множество финитных в Ω трехмерных вектор-функций, принадлежащих пространству $C^2(\bar{\Omega})$.

$\triangleleft$ Рассмотрим интеграл

$$\mathcal{L}_j(v, w) = \int_{\Omega} [T_j v(x)]^* w(x) dx,$$

где $v \in C_0^2$, $w \in S_2 \cap S_q$, $1/p + 1/q = 1$, а значок «*» обозначает операцию транспонирования векторов и матриц. Поскольку оператор A_0

самосопряжен в S_2 и его образ совпадает с S_2 [143, с. 62; 13], то и A_0^{-1} самосопряжен в S_2 , а потому

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j(v, w) &= \int_{\Omega} \left(c(x, t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x_j^2} \right)^* A_0^{-1} w(x) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v^*(x, t)}{\partial x_j^2} \times \\ &\times c^*(x, t) A_0^{-1} w(x) dx = \int_{\Omega} v^*(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} [c^*(x, t) A_0^{-1} w(x)] dx. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Из неравенства коэрцитивности для оператора A_0 (см. [143])

$$\|A_0 z\|_{L_q} \geq c_1 \|z\|_{W_q^2}, \quad z \in \overset{\circ}{W}_q^2 \cap S_q, \quad c_1 = \text{const},$$

вытекают оценки

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^k z}{\partial x_j^k} A_0^{-1} z \right\|_{L_q} &\leq c_2 \|z\|_{S_q}, \\ k &= 0, 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, \quad z \in S_q, \quad c_2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Из (3.35), (3.36) следует неравенство

$$|\mathcal{L}_j(v, w)| \leq c \|v\|_{C([0, T], L_p)} \|w\|_{S_q}, \quad c_2 = \text{const},$$

согласно которому в силу плотности вложения $S_2 \cap S_q \subset S_q$ и теоремы [143, с. 62] об общем виде функционала в S_p , $p > 1$, имеет место оценка

$$\|T_j v\|_{C([0, T], L_p)} \leq c_4 \|v\|_{C([0, T], L_p)}, \quad c_4 = \text{const}. \quad (3.37)$$

Поскольку множество вектор-функций $v \in C([0, T], C_0^2(\Omega))$ плотно в $C([0, T], L_p)$, то в силу (3.37) оператор $T_j : C([0, T], C_2^0) \rightarrow C([0, T], L_p)$ допускает замыкание по непрерывности до ограниченного оператора в $C([0, T], L_p)$. Таким образом, утверждение леммы 3.5 относительно оператора T_j доказано.

Оператор M_j оценивается аналогично. При этом вместо (3.35)

имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(v, w) &= \int_{\Omega} [Mv(x, t)]^* w(x) dx = \\
&= \int_{\Omega} [A_0 v(x, t)]^* \Pi [c^*(x, t) A_0^{-1} w(x)] dx = \\
&= \int_{\Omega} v^*(x, t) A_0 [\Pi c^*(x, t) A_0^{-1} w(x)] dx = \\
&= -\nu \int_{\Omega} v^*(x, t) \sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} [c^*(x, t) A_0^{-1} w(x)] dx, \\
v &\in C([0, T], C_0^2 \cup S_p), \quad w \in S_2 \cap S_q.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Здесь удалось избавиться от проектора Π , используя его ортогональность в S_2 и известное представление вектора $a \in W_q^2(\Omega)$ в виде $a = \Pi a + \nabla \varphi$, где $\varphi \in W_1^3(\Omega)$. Из (3.38), аналогично первой части доказательства леммы, выводится оценка

$$\|Mv\|_{C([0, T], L_p)} \leq c \|v\|_{C([0, T], L_p)}, \quad c = \text{const},$$

на основании которой оператор $M: C([0, T], C_0^2 \cap S_p) \rightarrow C([0, T], S_p)$ допускает замыкание по непрерывности до ограниченного оператора в S_p . Лемма 3.5 доказана. $\triangleright$

Лемма 3.6. Пусть $p > 1$ и $\mu \in (0, 1/2)$. Тогда для каждого $\omega > 1$ найдется такая константа c_ω , что при всех $v \in C([0, T], S_p)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\left\| [I - B(t)]^{-1} \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0} \{E - [E + \Lambda_\omega(\cdot, \tau)]^{-1}\} \Pi \Delta v d\tau \right\|_{C^\mu([0, T], S_p)} &\leq \\
&\leq c_\omega \|v\|_{C([0, T], S_p)},
\end{aligned}$$

причем $\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_\omega = 0$.

$\triangleleft$ В силу соотношения (3.24) лемму 3.6 достаточно доказать при $B = 0$, что мы и сделаем. Воспользуемся двумя неравенствами для дробных степеней позитивных операторов (см. [116, 143]):

$$\|A_0^\alpha (\lambda I - A_0)^{-1} v\|_{S_p} \leq c_{p, \alpha} \cdot \frac{1}{1 + |\lambda|^{1-\alpha}} \|v\|_{S_p}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1; \tag{3.39}$$

$$\left\| \int_0^t A_0^\alpha e^{-(t-\tau)A_0} \varphi(\tau) d\tau \right\|_{C^\mu([0,T],S_p)} \leq c_{p,\mu,\alpha} \|\varphi\|_{C([0,T],S_p)}, \quad (3.40)$$

$|\arg \lambda| \leq \varphi$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \mu < 1 - \alpha$. Оценка (3.39) следует из (2.15) и неравенства моментов для дробных степеней позитивных операторов [37, теорема 14.2]; оценка (3.40) имеется в [116, лемма 3.3]. Лемма 3.6 вытекает из этих неравенств, соотношения (3.24), представления (см. выражение оператора Λ_ω в п. 3.1.4)

$$\begin{aligned} & [E - (E + \Lambda_\omega)^{-1}] \Pi \Delta = \\ & = A_0^{1-\delta} \sqrt{\omega} \sum_{0 < |r| \leq n} A_0^\delta (i\lambda_r \omega I - A_0)^{-1} A_0^{-1} \text{Pc}_1^{(r)} e^{i\lambda_r \omega t} \Pi \Delta - \\ & - A_0^{1-\delta} \omega \sum_{0 < |r_1|, |r_2| \leq n} A_0^\delta (i\lambda_{r_1} \omega I - A_0)^{-1} [A_0^{-1} \text{Pc}_1^{(r_1)} A_0] (i\lambda_{r_2} \omega I - A_0)^{-1} \times \\ & \times A_0^{-1} \text{Pc}_1^{(r_2)} e^{i(\lambda_{r_1} + \lambda_{r_2}) \omega t} \Pi \Delta + \omega \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^{k+1} \sum_{0 < |r_1|, |r_2| \leq n} (i\lambda_{r_1} \omega I - A_0)^{-1} \times \\ & \times \text{Pc}_1^{(r_1)} \Lambda_\omega^{k-2} A_0 (i\lambda_{r_2} \omega I - A_0)^{-1} A_0^{-1} \text{Pc}_1^{(r_2)} e^{i(\lambda_{r_1} + \lambda_{r_2}) \omega t} \Pi \Delta \equiv \\ & \equiv J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned}$$

где $0 < \delta < 1/2$, лемм 3.3, 3.5 и оценки (3.16). Продемонстрируем это на примере слагаемого J_2 :

$$\begin{aligned} & \left\| (I - B(t))^{-1} \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0} J_2(\tau, \omega) d\tau \right\|_{C^\mu([0,T],S_{p_0})} \leq \\ & \leq c_1 \omega \left\| \sum_{0 < |r_1|, |r_2| \leq n} [A_0^\delta (i\lambda_{r_1} \omega I - A_0)^{-1}] [A_0^{-1} \text{Pc}_1^{r_1} A_0] \times \right. \\ & \times (i\lambda_{r_1} \omega I - A_0)^{-1} e^{i(\lambda_{r_1} + \lambda_{r_2}) \omega \tau} [A_0^{-1} \text{Pc}_1^{r_2} \Pi \Delta] v(t) \left. \right\|_{C([0,T],S_{p_0})} \leq \\ & \leq c_2 \omega \frac{1}{1 + \omega^{1-\delta}} \frac{1}{\omega} \|v\|_{C([0,T],S_{p_0})} \leq \frac{c_3}{\omega^{1-\delta}} \|v\|_{C([0,T],S_{p_0})}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где c_1, c_2, c_3 — не зависящие от $\omega \geq 1$ и $v \in C([0, T], S_p)$ положительные постоянные. Отметим, что первое из неравенств (3.41) получено на основании оценки (3.24) и леммы 3.3; второе — на основании (3.39) и леммы 3.5. Лемма 3.6 доказана. $\triangleright$

Лемма 3.7. Для каждого $0 < \mu < \frac{p_0 - 3(m-1)}{2p_0}$ и $c_0 = \text{const} > 0$ найдутся число $\omega_1 > 0$ и функция $d : (0, 1) \times (\omega_1, \infty) \rightarrow R_+$ такие, что $\lim_{\omega \rightarrow \infty} d(\omega) = 0$ и при всех z_1, z_2 , удовлетворяющих условию $\|z_i\|_{C([0, T], S_{p_0})} \leq c_0, i = 1, 2$, и всех $\omega > \omega_1$ справедливы оценки

$$\left\| (I - B(t))^{-1} \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0} \psi_\omega[z_1(\tau), \tau] d\tau \right\|_{C^\mu([0, T], S_{p_0})} \leq d(\omega), \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} & \left\| (I - B(t))^{-1} \int_0^t e^{-(t-\tau)A_0} \{ \psi_\omega[z_2(\tau), \tau] - \right. \\ & \left. - \psi_\omega[z_1(\tau), \tau] \} d\tau \right\|_{C^\mu([0, T], S_{p_0})} \leq d(\omega) \|z_2 - z_1\|_{C([0, T], S_{p_0})}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

◁ Согласно последнему равенству п. 3.1.4 вектор-функция $\psi_\omega(z, t)$ представлена в виде

$$\psi_\omega(z, t) = A_0^\gamma \psi_{1,\omega}(z, t) + \psi_{2,\omega}(z, t),$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{1,\omega}(z, t) &= A_0^{-\gamma} \{ E - [E + \Lambda_\omega](\cdot, t)^{-1} \} \times \\ &\times \Pi [L_1(t)z + F_1(z, \cdot, t) + f_1(z, \cdot, t, \omega t)], \\ \psi_{2,\omega}(z, t) &= [E + \Lambda_\omega](\cdot, t)^{-1} \Pi \varphi_{1\omega}(z, t), \\ 0 < \gamma &< \frac{p_0 - 3(m-1)}{2p_0} - \mu. \end{aligned}$$

Оценки (3.42), (3.43) вытекают из этих представлений, (3.24), леммы 3.3 и ее следствия 3.1, в которых нужно положить $p = p_0$, $r = p_0/m$, а также следующего утверждения. Существуют число $\omega_2 > 0$ и функция $d_1 : (0, 1) \times (\omega_1, \infty) \rightarrow R_+$ такие, что $\lim_{r \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty} d_1(r, \omega) = 0$, и при всех z_1, z_2 , удовлетворяющих условию $\|z_i\|_{C([0, T], S_{p_0})} \leq r < 1$, и всех $\omega > \omega_1$ имеют место оценки

$$\|\psi_{i,\omega}[z_1(t), t]\|_{C([0, T], S_{p_0/m})} \leq d_1(r, \omega), \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} & \|\psi_{i,\omega}[z_2(t), t] - \psi_{i,\omega}[z_1(t), t]\|_{C([0, T], S_{p_0/m})} \leq \\ & \leq d_1(r, \omega) \|z_2 - z_1\|_{C([0, T], S_{p_0})}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Докажем (3.44), (3.45) вначале при $i = 1$. При этом ограничимся рассмотрением в представлении $\psi_{1,\omega}$ только одного слагаемого (так как другие слагаемые оцениваются аналогично)

$$\begin{aligned} \psi_{1,\omega}^{(1)}(z, t) &= A_0^{-\gamma} \{E - [E + \Lambda_\omega(\cdot, t)]^{-1}\} \Pi \frac{\partial}{\partial x_1} a_1^{(1)}(\omega, \cdot, t) e^{i\lambda_1 \omega t} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \Lambda_\omega^k(\cdot, t) \Pi \frac{\partial}{\partial x_1} a_1^{(1)}(u_0 + z, \cdot, t) e^{i\lambda_1 \omega t}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

В силу полиномиальной структуры вектор-функции $a_1^{(1)}(w, x, t)$ относительно w и неравенства Гёльдера найдется такая постоянная c_1 , что при всех $\|z_i\|_{C([0,T], L_{p_0})} \leq r$ справедливы оценки

$$\|a_1^{(1)}(u_0 + z_1, \cdot, t)\|_{C([0,T], L_{p_0/m})} \leq c_1, \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \|a_1^{(1)}(u_0 + z_2, \cdot, t) - a_1^{(1)}(u_0 + z_1, \cdot, t)\|_{C([0,T], L_{p_0/m})} &\leq \\ &\leq c_1 \|z_2 - z_1\|_{C([0,T], L_{p_0})}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Отметим еще три неравенства. Для любых $q > 1$, $\varepsilon > 0$ и $\beta \in [0, 1]$ найдутся постоянные $c_2 = c_2(q, \varepsilon)$ и $c_3 = c_3(\beta)$, при которых справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left\| A_0^{-\alpha} \Pi c_1^{(r)}(\cdot, t) \Pi \frac{\partial}{\partial x_1} \right\|_{\text{Hom}(C([0,T], L_q), C([0,T], L_q))} &\leq c_2, \\ \alpha &= \frac{1}{2} + \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \|A_0^{\beta_1} \Pi c_1^{(r)}(\cdot, t) A_0^{-\beta}\|_{\text{Hom}(C([0,T], S_q), C([0,T], S_q))} &\leq c_3, \\ 0 &\leq \beta_1 < \beta, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\|A_0^\beta \Lambda_\omega(\cdot, t)\|_{\text{Hom}(C([0,T], L_q), C([0,T], L_q))} \leq c_3 \omega^{\beta - \frac{1}{2}}, \quad \omega > 1. \quad (3.51)$$

Оценка (3.49) доказывается аналогично лемме 3.5. При этом дополнительно учитывается самосопряженность оператора $A_0^{-\alpha}$ в S_2 и лемма 3.10 (см. ниже). Оценка (3.50) следует из неравенства

$$\begin{aligned} \|A_0^{\beta_1} \Pi c_1^{(r)} v\|_{C([0,T], S_q)} &\leq c_4 \|A_0^\beta v\|_{C([0,T], S_q)}, \\ v &\in C([0, T], B^\beta), \quad c_4 = c_4(\beta, \beta_1) = \text{const}. \end{aligned}$$

Это следует из интерполяционной теоремы И. Б. Симоненко [116]. Оценка (3.51) следует из выражения Λ_w (см. п. 3.1.4) и неравенства (3.39). Из неравенств (3.48)–(3.51) следует существование таких положительных чисел ω_0 , c_4 и δ , что при $\omega > \omega_0$

$$\begin{aligned} \left\| A_0^{-\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \Lambda_{\omega}^k(\cdot, t) \Pi \frac{\partial}{\partial x_1} \right\|_{Hom(C([0,T], L_q), C([0,T], L_q))} &\leq \\ &\leq c_4 \omega^{-\delta}, \quad \omega > 1. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Из соотношений (3.46), (3.48), (3.52) вытекают оценки (3.44), (3.45) при $\psi_{i,\omega} = \psi_{1\omega}^1$.

Оценки (3.44), (3.45) при $i = 2$ доказываются аналогично случаю $i = 1$, поэтому остановимся здесь лишь на слагаемых R , R_{jk} и r_{jk} , $j = \overline{0, 3}$, $k = 1, 2$ (см. п. 3.1.4). При оценке R используется очевидное представление

$$(i\lambda_r I - \omega^{-1} A_0)^{-1} - (i\lambda_r)^{-1} = (i\lambda_r)^{-1} (i\lambda_r \omega I - A_0)^{-1} A_0,$$

а также оценка (3.39). При оценках R_{jk} используются неравенства (3.11), (3.12). Из этих фактов вытекает следующее утверждение.

Пусть $\gamma > 0$. Существуют такие постоянные c_1 и $c_2 = c_2(\gamma)$, что при всех $\|z_k\|_{C([0,T], S_{p_0})} \leq 1$, $k = 1, 2$ и $\omega > 1$, выполняются оценки

$$\|R_{jk}(\omega, z_1)\|_{C([0,T], S_{p_0/m})} \leq c\omega^{-1/2},$$

$$\|R_{jk}(\omega, z_2) - R_{jk}(\omega, z_1)\|_{C([0,T], S_{p_0/m})} \leq c\omega^{-1/2} \|z_2 - z_1\|_{C([0,T], S_{p_0})},$$

$$\|z_{jk}(z_1)\|_{C([0,T], S_{p_0/m})} \leq c_2 \|z_1\|_{C([0,T], S_{p_0})}^2,$$

$$\begin{aligned} &\|z_{jk}(z_2) - z_{jk}(z_1)\|_{C([0,T], S_{p_0/m})} \leq \\ &\leq c_1 (\|z_1\|_{C([0,T], S_{p_0})} + \|z_2\|_{C([0,T], S_{p_0})}) \|z_2 - z_1\|_{C([0,T], S_{p_0})}, \end{aligned}$$

$$\|A_0^{-\gamma} R(\omega, z_1)\|_{C([0,T], S_{p_0})} \leq c_2 \omega^{-\gamma},$$

$$\|A_0^{-\gamma} [R(\omega, z_2) - R(\omega, z_1)]\|_{C([0,T], S_{p_0})} \leq c_2 \omega^{-\gamma} \|z_2 - z_1\|_{C([0,T], S_{p_0})}.$$

Из этого утверждения следуют оценки (3.42), (3.43) при $\psi_{i,\omega} = R$, R_{jk} или r_{jk} . Лемма доказана. $\triangleright$

3.1.6. Доказательство основного результата: обоснование метода усреднения. Рассмотрим уравнение (3.17). В силу леммы 3.1 оно эквивалентно уравнению

$$z = (I - B)^{-1}N(z, \omega) \equiv M_\omega(z), \quad \omega \gg 1. \quad (3.53)$$

Из проведенных выше рассуждений следует, что правая часть равенства (3.53) определяет оператор в пространстве $C([0, T], S_{p_0})$, который будем обозначать $M_\omega(z)$.

Первое утверждение теоремы 1 вытекает из соотношений (3.10)–(3.12), принципа сжатых отображений и следующей леммы.

Лемма 3.8. *Существуют числа $\mu \in (0, 1)$, $\omega_0 > 0$ и функция $r : [\omega_0, \infty) \rightarrow R_+$ такие, что $\lim_{\omega \rightarrow \infty} r(\omega) = 0$, и оператор $M_\omega(z)$ при $\omega > \omega_0$ в шаре $S : \|z\|_{C^\mu([0, T], S_{p_0})} \leq r(\omega)$ является сжатием.*

◁ Лемма 3.8 вытекает из следующего утверждения. Существуют числа $\mu \in (0, 1)$, $\omega_0 > 0$ и функция $r(\omega)$ такая, что $\lim_{\omega \rightarrow \infty} r(\omega) = 0$, при которых справедливы неравенства

$$\|M_\omega(0)\|_{C^\mu([0, T], S_{p_0})} \leq \frac{1}{2} r(\omega), \quad (3.54)$$

$$\|M_\omega(z_2) - M_\omega(z_1)\|_{C^\mu([0, T], S_{p_0})} \leq \frac{1}{2} \|z_2 - z_1\|_{C^\mu([0, T], S_{p_0})}, \quad (3.55)$$

где $\omega > \omega_0$, $\|z_i\|_{C^\mu([0, T], S_{p_0})} \leq r(\omega)$. Отметим, что инвариантность оператора M_ω , $\omega > \omega_0$, относительно S вытекает из оценок (3.54), (3.55) в силу неравенства треугольника

$$\begin{aligned} \|M_\omega(z)\| &\leq \|M_\omega(0)\| + \|M_\omega(z) - M_\omega(0)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} r(\omega) + \frac{1}{2} r(\omega) = r(\omega), \quad z \in S. \triangleright \end{aligned}$$

Оценки (3.54), (3.55), очевидно, являются следствиями лемм 3.4, 3.6 и 3.7. Первое утверждение теоремы 3.1 доказано.

Второе утверждение теоремы 3.1 вытекает из теоремы работы [65].

3.2. Задача о периодических по времени решениях

В этом разделе рассмотрим задачу о периодических по времени решениях системы (3.1).

3.2.1. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область евклидова пространства R^3 с C^3 -гладкой границей $\partial\Omega$; ν — произвольное положительное число. В бесконечном цилиндре $Q \equiv \overline{\Omega} \times R$ рассмотрим задачу о $2\pi\omega^{-1}$ -периодических по t решениях системы

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v - \nabla P - (v, \nabla)v = \sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(v, x, \omega t) + \quad (3.56)$$

$$+ b(v, x, \omega t) + \sqrt{\omega} c(v, x, \omega t), \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times R,$$

$$v|_{\partial\Omega \times R} = 0, \quad (3.57)$$

где ω — большой параметр. Будем предполагать, что вектор-функции $a_j(v, x, \tau)$, $b(v, x, \tau)$, $c(v, x, \tau) = c_0(x, \tau) + c_1(x, \tau)v$ удовлетворяют условиям п. 3.1.1 (если считать, что одноименные вектор-функции не зависят от t), но при этом числа $\lambda_r = r$. Решение и об. решение сформулированной задачи будем понимать совершенно аналогично тому, как они были определены для начально-краевой задачи (3.1)–(3.3) в разделе 3.1. Предположим, что усредненная задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u - \nabla Q - (u, \nabla)u &= \sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial}{\partial x_j} a_j^{(0)}(u, x) + b^0(u, x) + \\ &+ \sum_{0 < |r| \leq n} \frac{i}{r} c_1^{(r)}(x) \Pi [c_0^{(-r)}(x) + c_1^{(-r)}(x)u], \quad \operatorname{div} u = 0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$u|_{\partial\Omega \times R} = 0 \quad (3.59)$$

имеет стационарное решение $u_0(x)$, причем это решение невырожденное. Последнее означает, что действующий в S_{p_0} оператор

$$\begin{aligned} A_1 z \equiv \Pi [\nu \Delta z + (u_0, \nabla)z + (z, \nabla)u_0] &+ \sum_{1 \leq j \leq 3} \frac{\partial}{\partial x_j} [(D_u a_j^{(0)})(u_0, x)z] + \\ &+ (D_u b^{(0)})(u_0, x)z + \sum_{0 < |r| \leq n} \frac{i}{r} c_1^{(r)}(x) \Pi c_1^{(-r)}(x)z \end{aligned}$$

с областью определения $D(A_1) = S_{p_0} \cap \overset{\circ}{W}_{p_0}^2$ обратим. Здесь и ниже через p_0 обозначено то же число, что и в разделе 3.1.

3.2.2. Формулировка основного результата. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. При выполнении условий п. 3.2.1 существуют такие положительные числа ω_0 , r_0 и $\mu \in (0, 1)$, при которых справедливы следующие утверждения.

1. Возмущенная задача (3.56)–(3.57) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное в шаре $\|u - u_0\|_{C_R^\mu(S_{p_0})} \leq r_0$ об. $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое по времени t решение v_ω , и при этом справедливо равенство

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|v_\omega - u_0\|_{C_R^\mu(S_{p_0})} = 0.$$

2. Если спектр Λ оператора A_1 расположен строго в левой полуплоскости, то об. решение v_ω , $\omega > \omega_0$, экспоненциально устойчиво в S_{p_0} , причем равномерно относительно начальных данных и параметра $\omega > \omega_0$. Это означает, что существуют такие положительные числа r_1 , σ и c , что при $\omega > \omega_0$ для всякого $s \in R$ и всякого вектора $v^0 \in S_{p_0}$, удовлетворяющего условию $\|v^0 - u_0\|_{S_{p_0}} \leq r_1$, существует об. решение $v_\omega^0(x, t)$, $t \geq s$, уравнения (3.56), (3.57) с начальным условием $v_\omega^0(x, s) = v^0$ и справедлива оценка

$$\|v_\omega^0(\cdot, t) - v_\omega(\cdot, t)\|_{S_{p_0}} \leq ce^{-\sigma(t-s)} \|v^0 - v_\omega(\cdot, s)\|_{S_{p_0}}.$$

3. Если спектр Λ имеет строго в правой полуплоскости хотя бы одну точку, то об. решение v_ω , $\omega > \omega_0$, неустойчиво по норме S_{p_0} . Это означает, что существует число $r_2 > 0$ и последовательность $v_\omega^n(x, t)$, $\omega > \omega_0$, об. решений задачи (3.56)–(3.57), определенных на некоторых участках $t \in [0, t_n]$, для которых выполнены соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_\omega^n(\cdot, t) - v_\omega(\cdot, t)\|_{S_{p_0}} = 0, \quad \|v_\omega^n(\cdot, t_n) - v_\omega(\cdot, t_n)\|_{S_{p_0}} > r_2.$$

4. Если дополнительно к предположениям п. 3.2.1 выполнены условия: при некотором $\alpha \in (0, 1]$ $\overset{s}{a}_{ikj}^{(r)} \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\overset{s}{b}_{kj}^{(r)} \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, то $v_\omega(x, t)$ является $2\pi\omega^{-1}$ -периодическим по времени t решением задачи (3.56)–(3.57).

Схема доказательства теоремы 3.2 описана в п. 3.2.3 и п. 3.2.4.

3.2.3. Доказательство основного результата I: обоснование метода усреднения. Действуя по аналогии с п. 3.1.4 в задаче (3.56)–(3.57) произведем замену переменных

$$v(x, t) = z(x, t) + u_0(x) + y_1(x, t, t) \equiv w(x, t) + y_1(x, t, t), \quad (3.60)$$

где $y_1(x, t, s)$ — $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое по t решение задачи

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \nu \Delta y - \nabla p = \sqrt{\omega} c(w(x, s), x, \omega t),$$

$$\operatorname{div} y = 0, \quad y|_{\partial\Omega \times R} = 0.$$

Вектор-функция $y_1(x, t, s)$, как отмечалось в разделе 3.1, имеет вид

$$y_1(x, t, s) = Y_1(x, t, w(\cdot, s)) = \sqrt{\omega} \sum_{0 < |r| \leq n} (ir\omega I - A_0)^{-1} \Pi [c_0^{(r)}(x) + c_1^{(r)}(x)w(x, s)] e^{ir\omega t}, \quad (3.61)$$

и для нее справедлива оценка

$$\|y_1(x, t, s)\|_{C_R(L_{p_0})} \leq c\omega^{-1/2} \|w\|_{C_R(L_{p_0})}, \quad c = \text{const}. \quad (3.62)$$

В результате замены (3.60) мы придем к задаче, которая уже не содержит больших слагаемых. Переходя к проекции этой задачи на пространство S_{p_0} (т. е. действуя на первое уравнение (3.56) проектором Π и отбрасывая второе уравнение), а затем разрешая полученную систему относительно⁶ dz/dt , придем к задаче

$$\frac{dz}{dt} + A_1 z = F^1(z) + f^1(z, \omega t) + \varphi_\omega^1(z, \omega t) \equiv \Phi(z, \omega t, \omega). \quad (3.63)$$

Здесь вектор-функция $\varphi_\omega^1(z, \tau)$ — 2π -периодична по τ и мала (в том же смысле, что и $\varphi_{1,\omega}$ в разделе 3.1 при больших ω , а вектор-функция $f^1(z, \tau)$ — 2π -периодическая по τ и обладает по этой переменной нулевым средним. Выражения вектор-функций F^1 , f^1 и φ_ω^1 мы здесь не приводим, поскольку они громоздки и легко могут быть выведены читателем (см. раздел 3.1). Далее действуем как в [51]. Введем такие положительные числа t_∞ , t_ω и ω^* , что при $\omega > \omega^*$ и $\lambda \in \Lambda$ будут выполнены условия: $e^{\lambda t_\infty} \neq 1$, t_ω — кратно $2\pi\omega^{-1}$,

⁶Ниже вместо $z(x, t)$ будем, как правило, писать $z(t)$, считая, что $z(t) = z(\cdot, t)$ — вектор-функция со значениями в пространстве S_{p_0} .

$0 \leq t_\infty - t_\omega < 2\pi\omega^{-1}$ и $e^{\lambda t_\omega} \neq 1$. Тогда каждое t_ω -периодическое решение z уравнения (3.63) со значениями в $W_{p_0}^2(\Omega)$ при $\omega > \omega^*$ представимо в виде

$$\begin{aligned} z(t) = & (I - e^{-t_\omega A_1})^{-1} \int_0^{t_\omega} e^{-(t_\omega + t - \tau)A_1} \{F^1[z(\tau)] + f^1[z(\tau), \omega\tau] + \\ & + \varphi_\omega^1[z(\tau), \omega(\tau)]\} d\tau + \int_0^t e^{-(t-\tau)A_1} \{...\} d\tau \equiv N_\omega(z), \\ & t \in [0, t_\infty], \end{aligned} \quad (3.64)$$

и, наоборот, каждое решение $z \in C_{[0, t_\infty]}(W_{p_0}^2(\Omega))$ уравнения (3.64), будучи t_ω -периодическим образом продолжено на всю ось $t \in R$, является t_ω -периодическим по t решением уравнения (3.63). Действуя по аналогии с разделом 3.1, далее через $N_\omega(z)$ будем обозначать замыкание по непрерывности действующего в пространстве $C_{[0, t_\infty]}(S_{p_0})$ оператора (3.64).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15 и **Об.** t_ω -периодическим по t решением уравнения (3.63) будем называть t_ω -периодическое по t продолжение решения $z = N_\omega(z)$.

Аналогично лемме 3.8 раздела 3.1 доказывается следующее утверждение.

Лемма 3.9. Для каждого $\mu \in (0, \frac{p_0 - 3(m-1)}{2p_0})$ найдутся число $\omega_0 > 0$ и функция $r : [\omega_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ такие, что $\lim_{\omega \rightarrow \infty} r(\omega) = 0$ и оператор $N_\omega(z)$ при $\omega > \omega_0$ в шаре $\|z\|_{C_{[0, t_\infty]}^\mu(S_{p_0})} \leq r(\omega)$ является сжатием.

Из этой леммы в силу принципа сжатых отображений следует существование относительно единственного малого t_ω -периодического об. решения $z_\omega(t)$ уравнения (3.63) при $\omega > \omega_0$. Поскольку вектор-функция $\Phi(z, \omega t, \omega)$ является $2\pi/\omega$ -периодической по t , то вектор-функция $\hat{z}_\omega(t) = z_\omega(t + 2\pi\omega^{-1})$ тоже является об. t_ω -периодическим решением (3.63), а значит $z_\omega(t + 2\pi\omega^{-1}) = z_\omega(t)$, т. е. решение $z_\omega(t)$ — $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое. Из сказанного в этом абзаце и соотношений (3.60)–(3.62) вытекает утверждение 1 теоремы 3.2. Утверждение 4 теоремы 3.2 вытекает из теоремы, доказанной в работе [65].

3.2.4. Доказательство основного результата II: устойчивость и неустойчивость решения. Перейдем к доказательству утверждений 2 и 3 теоремы 3.2, в которых речь идет об устойчивости и неустойчивости решения v_ω задачи (3.56)–(3.57). Воспользуемся схемой доказательства, разработанной в работе [143, гл. III]. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} + A_1 z &= \Phi(z, \omega t, \omega), \\ z(t_0) &= z_0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

где $z_0 \in S_{p_0}$, $t_0 \in R$. Ее обобщенным решением на участке $t \in [t_0, t_1]$ является вектор-функция $z \in C_{[t_0, t_1]}(S_{p_0})$, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$N(w, z_0, t_0, \omega) \equiv e^{-tA_1} z_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A_1} \Psi(w(s), s, \omega) ds - w(t) = 0,$$

где $w(t) = z(t + t_0)$, $\Psi(w, t, \omega) = \Phi(w, \omega(t + t_0), \omega)$. Пусть $\mu \in (0, \frac{p_0 - 3(m-1)}{2p_0})$, а M — отображение пространства $C_{[0, t_\infty]}^\mu(S_{p_0}) \times S_{p_0} \times (\omega^*, \infty)$ в пространство $C_{[0, t_\infty]}^\mu(S_{p_0})$, определенное для каждого $t_0 \in R$ формулой

$$M_{t_0}(w, z_0, \omega) = \begin{cases} N(w, z_0, t_0, w), & \omega^* < \omega < \infty, \\ N_0(w, z_0, t_0), & \omega = \infty, \end{cases}$$

где

$$N_0(w, z_0, t) \equiv e^{tA_1} z_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_1} F^1[w(s)] ds - w(t).$$

Лемма 3.10. Существует окрестность S_0 точки $(0, 0)$ в пространстве $C_{[0, t_\infty]}^\mu(S_{p_0}) \times S_{p_0}$ такая, что отображение M_{t_0} имеет производные Фреше по переменным w и z_0 , причем M_{t_0} и указанные производные $D_w M_{t_0}$, $D_{z_0} M_{t_0}$ непрерывны в каждой точке (w, z_0, ∞) , где $(w, z_0) \in S_0$, равномерно относительно $(w, z_0, t_0) \in S_0 \times R$. При этом справедливы равенства

$$M_{t_0}(0, 0, \infty) = 0, \quad D_w M_{t_0}(0, 0, \infty) = I, \quad D_{z_0} M_{t_0}(0, 0, \infty) = e^{-tA_1}.$$

Утверждения леммы 3.10 устанавливаются непосредственной проверкой.

Из леммы 3.10 и теоремы о неявных операторах следует существование таких положительных чисел r_0 и ρ_0 , что при $\|z_0\|_{S_{p_0}} < r_0$, $\omega > 1/r_0$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ уравнение

$$M_{t_0}(w, z_0, \omega) = 0$$

имеет единственное в шаре $\|w\|_{C^\mu([0, t_\infty])} \leq \rho_0$ решение

$$w_\omega(t) = U_{t_0}(t, z_0, \omega), \quad t \in [0, t_\infty],$$

которое вместе с производной $\frac{\partial U_{t_0}(t, z_0, \omega)}{\partial z_0}$ равномерно относительно t_0 непрерывно в каждой точке (t, z_0, ∞) . При этом $U_{t_0}(t, 0, \infty) = 0$ и спектр действующего в S_{p_0} оператора

$$D_{z_0} U_{t_0}(t, 0, \infty)$$

состоит из чисел $e^{\lambda t}$, где $\lambda \in \Lambda$. Обозначим $a_\omega = z_\omega(t_0)$, где $z_\omega(t)$ — малое $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое решение уравнения (3.63), о котором говорилось в п. 3.2.3. При этом $\lim_{\omega \rightarrow \infty} a_\omega = 0$. Важную роль в дальнейшем играет уравнение

$$a = V_{t_0}(a, \omega),$$

где

$$\begin{aligned} V_{t_0}(a, \omega) &= U_{t_0}(t_\omega, a + a_\omega, \omega) - a_\omega, \quad 1/r < \omega < \infty, \\ V_{t_0}(a, \infty) &= U_{t_0}(t_\infty, a, \infty). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Из леммы 3.10 и предыдущего абзаца вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.11. *Существует окрестность D_0 точки $a = 0$ в пространстве S_{p_0} такая, что оператор $V_{t_0}(a, \omega)$ имеет производную Фреше $(D_a V_{t_0})(a, \omega)$ по переменной $a \in D_0$, причем V_{t_0} и указанная производная непрерывны в точке $(0, \infty)$ равномерно относительно $t_0 \in \mathbb{R}$. Спектр оператора $D_a V_{t_0}(0, \infty)$ состоит из чисел $e^{\lambda t_\infty}$, $\lambda \in \Lambda$.*

Далее нам понадобятся следующие две леммы, которые представляют собой простые обобщения важных лемм 3.1 и 4.1 монографии [143] на случай операторов, зависящих от параметров.

Пусть A — произвольное множество, M — метрическое и B — банахово пространства. Через $S_r(\mu_0)$ и S^r , где $r > 0$, $\mu_0 \in M$, обозначим шары в пространствах M и B радиусов r с центрами в точках μ_0 и 0 соответственно. В шаре $x \in S^r$ рассмотрим уравнение

$$x = N_\alpha(x, \mu),$$

зависящее от параметров $\alpha \in A$, $\mu \in S_r(\mu_0)$. Предположим, что $N_\alpha(0, \mu) = 0$ и оператор $N_\alpha(x, \mu)$ имеет производную Фреше $(D_x N_\alpha)(x, \mu)$ по x , причем операторы $(D_x N_\alpha)(x, \mu)$ непрерывны по норме $\text{Hom}(B, B)$ в точке $(0, \mu_0)$ равномерно относительно $\alpha \in A$. Положим $(D_x N_\alpha)(0, \mu_0) = U_\alpha$. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 3.12. Пусть существует число $\rho \in (0, 1)$ такое, что все точки λ спектра оператора U_α при любом $\alpha \in A$ удовлетворяют неравенству $|\lambda| \leq \rho$. Тогда существует такое число $r_0 > 0$, что при $\rho_0 > \rho$ итерации $N_\alpha^n(x_0, \mu)$, $n = 1, 2, \dots$, любого вектора $x_0 \in S^{r_0}$ при $\mu \in S_{r_0}(\mu_0)$ и $\alpha \in A$ удовлетворяют оценкам

$$\|N_\alpha^n(x_0, \mu)\| \leq C \rho_0^n \|x_0\|,$$

где постоянная C не зависит от μ , α и x_0 .

Пусть теперь для простоты операторы N_α и U_α не зависят от параметра α : $N_\alpha \equiv N$, $U_\alpha \equiv U$.

Лемма 3.13. Предположим, что спектр $\sigma(U)$ оператора U является объединением замкнутых множеств $\sigma_1(U)$ и $\sigma_2(U)$, удовлетворяющих оценкам

$$|\lambda| > \beta_1 > 1 \quad \text{при} \quad \lambda \in \sigma_1(U), \quad |\lambda| \leq 1 \quad \text{при} \quad \lambda \in \sigma_2(U).$$

Тогда существуют такие положительные числа ε_0 и r_0 , что для любых $\mu \in S^{r_0}(\mu_0)$ и $\delta > 0$ найдется вектор $x \in B$, $\|x\| < \delta$, для которого при некотором натуральном n_0 выполняется оценка

$$\|N^{n_0}(x, \mu)\| \geq \varepsilon_0.$$

Доказательства лемм 3.12 и 3.13 проводятся так же, как и доказательства лемм 3.1 и 4.1 монографии [143]. Дополнительно нужно лишь проследить, что фигурирующие в этих доказательствах константы могут быть выбраны едиными для всех значений параметров α , μ .

Применяя леммы 3.12 и 3.13 к оператору $V_{t_0}(a, \omega)$ ($t_0 \equiv \alpha$, $\omega \equiv \mu$) с учетом леммы 3.11, убеждаемся, что в условиях п. 2 (п. 3) теоремы 3.2 об. $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое решение $z_\omega(t)$ уравнения (3.63) при $\omega \gg 1$ экспоненциально устойчиво в S_{p_0} равномерно относительно начальных данных и ω (неустойчиво в S_{p_0}). Для доказательства утверждений 2, 3 теоремы 3.2 осталось, таким образом, установить, что при $\omega \gg 1$ равномерная экспоненциальная устойчивость в S_{p_0} (неустойчивость в S_{p_0}) решения $z_\omega(t)$ уравнения (3.63) эквивалентна равномерной экспоненциальной устойчивости в S_{p_0} (неустойчивости в S_{p_0}) об. $2\pi\omega^{-1}$ -периодического по t решения $v_\omega(x, t)$ задачи (3.56), (3.57), о котором говорится в этой теореме. Указанное предложение эквивалентности вытекает из следующего простого утверждения.

Лемма 3.14. Пусть $-\infty < t_0 < t_1 \leq \infty$ и $\omega_0 > 0$ таковы, что при $\omega > \omega_0$ уравнение (3.63) имеет на участке $t \in [t_0, t_1]$ об. решения $z_1(\cdot, t)$ и $z_2(\cdot, t)$. Обозначим через $v_1(\cdot, t)$ и $v_2(\cdot, t)$, $t \in [t_0, t_1]$, об. решения задачи (3.56), (3.57), связанные с $z_1(\cdot, t)$ и $z_2(\cdot, t)$ соотношением (3.60). Тогда существуют такие не зависящие от t_0, t_1 постоянные c_1 и c_2 , что при $\omega > \omega_0$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} c_1 \|z_2(t) - z_1(t)\|_{S_{p_0}} &\leq \|v_2(\cdot, t) - v_1(\cdot, t)\|_{S_{p_0}} \leq \\ &\leq c_2 \|z_2(\cdot, t) - z_1(\cdot, t)\|_{S_{p_0}}, \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

◁ Согласно равенствам (3.60), (3.61) имеем

$$v_i(\cdot, t) = z_i(\cdot, t) + u_0(x) + Y_1(\cdot, t, z_i(\cdot, t) + u_0(\cdot)), \quad i = 1, 2,$$

откуда находим

$$\begin{aligned} v_2(\cdot, t) - v_1(\cdot, t) &= z_2(\cdot, t) - z_1(\cdot, t) + \\ &+ \sqrt{\omega} \sum_{0 < |r| \leq n} (ir\omega I - A_0)^{-1} \Pi c_1^{(r)} [z_2(\cdot, t) - z_1(\cdot, t)] e^{ir\omega t}, \quad (3.68) \\ &t \in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

В силу (2.15) при $k=0$ справедлива оценка

$$\|\sqrt{\omega} (ir\omega I - A_0)^{-1}\|_{\text{Hom}(S_p, S_p)} \leq c\omega^{-1/2}, \quad c = \text{const}. \quad (3.69)$$

Из соотношений (3.68), (3.69) следуют неравенства (3.67). Лемма 3.14, а с ней и теорема 3.2, доказана. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Все результаты раздела 3.2 почти дословно переносятся на тот случай, когда правые части системы (3.56) являются конечными суммами гармоник относительно временной переменной $\tau = \omega t$, частоты которых могут не быть рационально зависимыми. При этом вместо задачи о периодических по времени решениях рассматривается задача о почти периодических решениях при дополнительном условии: спектр Λ не содержит точек мнимой оси.

ГЛАВА 4

АБСТРАКТНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ЗАДАЧИ

В данной главе представлены результаты, относящиеся к обоснованию метода усреднения и построению полной обоснованной асимптотики периодических по времени решений полулинейных параболических уравнений и систем Навье — Стокса с быстро осциллирующими слагаемыми, среди которых имеются пропорциональные частоте осцилляций.

Основная часть результатов, посвященных обоснованию метода усреднения, получена для задачи, представленной в форме абстрактного параболического уравнения, частными случаями которого являются параболические задачи и системы Навье — Стокса. Сформулированы утверждения об устойчивости и неустойчивости по Ляпунову этого решения. Полученные результаты затем применяются к параболическим задачам и к задаче движения жидкости в поле больших и быстро меняющихся массовых сил. Приводятся теоремы о построении для этих задач полных обоснованных асимптотик при естественных дополнительных условиях.

Рассматриваемый в данной главе класс нелинейностей в отсутствие асимптотического параметра изучался В. И. Юдовичем в монографии [143].

Результаты раздела 4.1 опубликованы в работе [136], результаты разделов 4.2 и 4.3 — в работе [137].

4.1. Абстрактные параболические уравнения

4.1.1. Вспомогательные сведения. Приведем используемые в данной главе результаты из теории аналитических полугрупп и дробных степеней производящих операторов (см. [37, §§ 13–14; 143, с. 25–30]).

Теорема 4.1 [37, теорема 14.12]. Пусть оператор A позитивен, а A^{-1} вполне непрерывен. Тогда операторы $A^{-\delta}$, $\delta > 0$, вполне непрерывны.

Пусть A порождает аналитическую полугруппу в банаховом пространстве X , а замкнутый линейный оператор B , действующий из X в некоторое банахово пространство Y , определен на образе операторов $(\lambda I - A)^{-1}$ при всех λ из некоторого сектора $\Sigma_{\sigma_0, \theta_0} \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \sigma_0)| \leq \theta_0\}$. Следуя В. И. Юдовичу [143, с. 26], будем говорить, что оператор B имеет дробную степень $\alpha \in [0, 1]$ относительно $-A$, если выполняется оценка

$$\|B(\lambda I - A)^{-1}\|_{\text{Hom}(X, Y)} \leq \frac{C}{(1 + |\lambda|)^{1-\alpha}}.$$

Как отмечено в монографии [143], последняя оценка равносильна тому, что при $t > 0$ имеет место соотношение

$$\|Be^{tA}\|_{\text{Hom}(X, Y)} \leq \frac{C}{t^\alpha} e^{\sigma_0 t}.$$

Приведем еще две оценки. Пусть T — произвольное положительное число или $+\infty$, $f : (0, T) \rightarrow X$ — измеримая вектор-функция, причем $e^{\sigma_0 t} f(t) \in L_p(X)$, $1 \leq p < \infty$, а оператор $B : X \rightarrow Y$ имеет дробную степень $\alpha \in (0, 1)$ относительно A . Нас интересуют свойства вектор-функции

$$u(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)A} f(\tau) d\tau = (Uf)(t), \quad 0 < t < T,$$

которая при достаточно гладких f является решением задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t), \quad u(0) = 0.$$

Лемма 4.1. [143, гл. I, леммы 2.2–2.3]. 1) если $p < \frac{1}{1-\alpha}$, то

$$\|e^{\sigma_0 t} Bu(t)\|_{L_q((0, T), Y)} \leq C \|e^{\sigma_0 t} f(t)\|_{L_p((0, T), X)}, \quad q = \frac{p}{1 - (1 - \alpha)p};$$

2) если же $p > \frac{1}{1-\alpha}$, то

$$\|e^{\sigma_0 t} Bu(t)\|_{C_\mu^{[0, T]}(Y)} \leq C \|e^{\sigma_0 t} f(t)\|_{L_p((0, T), X)}, \quad \mu = 1 - \alpha - \frac{1}{p}.$$

Данная лемма показывает, насколько линейный оператор U «улучшает» свойства вектор-функции f , на которую действует.

4.1.2. Формулировка основного результата. Пусть ω — большой положительный параметр, k_0 — некоторое натуральное число, $n_k, |k| \leq k_0$, — целые неотрицательные числа.

Рассмотрим в банаховом пространстве X дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{|k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} D^{(k,s)} g_{k,s}(x) e^{ik\omega t} + \omega \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \varphi_k e^{ik\omega t} \quad (4.1)$$

при следующих предположениях.

I. Оператор A порождает аналитическую полугруппу e^{tA} , $t \geq 0$, в X , т. е. существуют $\sigma_1 \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $C_A > 0$ такие, что при всех

$$\lambda \in \Sigma_{\sigma_1, \theta} \equiv \{\sigma \in \mathbb{C} : |\arg(\sigma - \sigma_1)| \leq \theta\}$$

операторы $\lambda I - A$ обратимы, причем выполняются оценки

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\text{Hom}(X, X)} \leq \frac{C_A}{1 + |\lambda|}. \quad (4.2)$$

II. Пусть $Y_{k,s}$, $|k| \leq k_0$, $1 \leq s \leq n_k$, — банаховы пространства, имеющие с пространством X общие плотные множества, а линейные операторы $D^{(k,s)} : Y_{k,s} \rightarrow X$ имеют дробную степень $\alpha \in [0, 1)$ относительно $-A$ справа [143; с. 120, 122]:

$$\|(\lambda I - A)^{-1} D^{(k,s)}\|_{\text{Hom}(Y_{k,s}, X)} \leq \frac{C_D}{(1 + |\lambda|)^{1-\alpha}}, \quad \lambda \in \Sigma_{\sigma_1, \theta}. \quad (4.3)$$

Отметим, что если оператор $D^{(k,s)}$ имеет степень $\alpha_{k,s} < \alpha$, то он имеет и степень α .

III. Нелинейные операторы $g_{k,s}$, $|k| \leq k_0$, $1 \leq s \leq n_k$, представляются в виде

$$g_{k,s}(x) = g_0^{(k,s)}(B_{k,s,1}x_1, B_{k,s,2}x_2, \dots, B_{k,s,m_{k,s}}x_{m_{k,s}})|_{x_1=x_2=\dots=x_{m_{k,s}}=x},$$

где $m_{k,s} \geq 0$; $B_{k,s,j}$ ($|k| \leq k_0$, $1 \leq s \leq n_k$, $1 \leq j \leq m_{k,s}$) — линейные операторы, действующие из X в банаховы пространства $Y_{k,s,j}$ и имеющие дробные степени

$$\beta_{k,s,j} \in [0, 1 - \alpha) \quad (4.4)$$

относительно оператора $-A$:

$$\|B_{k,s,j}(\lambda I - A)^{-1}\|_{\text{Hom}(X, Y_{k,s,j})} \leq \frac{C_B}{(1 + |\lambda|)^{1-\beta_{k,s,j}}}, \quad \lambda \in \Sigma_{\sigma_1, \theta}. \quad (4.5)$$

Операторы $g_0^{(k,s)} : Y_{k,s,1} \times Y_{k,s,2} \times \dots \times Y_{k,s,m_{k,s}} \rightarrow Y_{k,s}$ имеют производные Фреше $D_j g_0^{(k,s)}$, $1 \leq j \leq m_{k,s}$, по j -му аргументу, и все вектор-функции $g_0^{(k,s)}$ и $D_j g_0^{(k,s)}$ ограничены и равномерно непрерывны на любом ограниченном множестве.

IV. Существуют числа $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ и $\beta_\varphi \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям

$$\text{Re } \lambda_1 \geq \sigma_1, \quad \beta_\varphi > \bar{\beta} \equiv \max_{|k| \leq k_0} \max_{1 \leq s \leq n_k} \max_{1 \leq j \leq m_{k,s}} \beta_{k,s,j},$$

и такие, что векторы φ_k принадлежат множеству $D((\lambda_1 I - A)^{\beta_\varphi})$ — области определения дробной степени сильно положительного оператора $\lambda_1 I - A$.

V. Существует $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ такое, что оператор $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ определен и вполне непрерывен.

VI. Усредненная задача

$$\frac{du}{dt} - Au = H(u), \quad (4.6)$$

где

$$H(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} D^{(k,s)} \int_0^{2\pi} g_{k,s}(u + N(\tau)) e^{ik\tau} d\tau, \quad (4.7)$$

а

$$N(\tau) = \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} (ik)^{-1} \varphi_k e^{ik\tau},$$

имеет стационарное решение $u = u_0 \in D(A)$.

VII. Спектр оператора $L \equiv -A - A_1$, где линейный оператор A_1 определяется равенством

$$A_1 = DH(u_0) \equiv \frac{1}{2\pi} \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} D^{(k,s)} \int_0^{2\pi} Dg_{k,s}(u_0 + N(\tau)) e^{ik\tau} d\tau,$$

а

$$\begin{aligned}
Dg_{k,s}(x) &\equiv D_1 g_0^{(k,s)}(B_{k,s,1}x, B_{k,s,2}x, \dots, B_{k,s,m_{k,s}}x)B_{k,s,1} + \\
&+ D_2 g_0^{(k,s)}(B_{k,s,1}x, B_{k,s,2}x, \dots, B_{k,s,m_{k,s}}x)B_{k,s,2} + \dots + \\
&+ D_{m_{k,s}} g_0^{(k,s)}(B_{k,s,1}x, B_{k,s,2}x, \dots, B_{k,s,m_{k,s}}x)B_{k,s,m_{k,s}},
\end{aligned} \quad (4.8)$$

не содержит нуля.

Также иногда мы будем использовать следующее условие, усиливающее предположение III.

VIII. Операторы $g_0^{(k,s)} : Y_{k,s,1} \times Y_{k,s,2} \times \dots \times Y_{k,s,m_{k,s}} \rightarrow Y_{k,s}$ линейны по всем аргументам, так что выполняются оценки

$$\begin{aligned}
&\|g_0^{(k,s)}(y_1, y_2, \dots, y_{m_{k,s}})\|_Y \leq \\
&\leq C_g \|y_1\|_{Y_{k,s,1}} \|y_2\|_{Y_{k,s,2}} \dots \|y_{m_{k,s}}\|_{Y_{k,s,m_{k,s}}}.
\end{aligned} \quad (4.9)$$

Определим теперь ряд пространств, которые будут фигурировать в формулировке основного результата данной главы.

Для $\mu \geq 0$ введем банахово пространство $Z^{(1)} = Z_\mu^{(1)}$ вектор-функций x , для которых определена норма

$$\|x\|_{Z^{(1)}} \equiv \|x\|_{C(X)} + \sum_{|k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} \sum_{1 \leq j \leq m_{k,s}} \|B_{k,s,j}x\|_{C_\mu(Y_{k,s,j})}.$$

Аналогично зададим $Z^{(1)}([a_1, a_2]) = Z_\mu^{(1)}([a_1, a_2])$ — банахово пространство определенных на отрезке $[a_1, a_2]$ вектор-функций, где $a_1 < a_2$ — некоторые действительные числа.

Пусть числа $r_{k,s,j}$ ($|k| \leq k_0$, $1 \leq s \leq n_k$, $1 \leq j \leq m_{k,s}$) удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{p_{k,s}} \equiv \sum_{j=1}^{m_{k,s}} \frac{1}{r_{k,s,j}} \leq 1.$$

Введем еще одно банахово пространство $Z^{(2)}(R_1, R_2)$, $R_1 < R_2$, с помощью нормы

$$\begin{aligned}
&\|x\|_{Z^{(2)}(R_1, R_2)} \equiv \|x\|_{C([R_1, R_2], X)} + \\
&+ \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} \sum_{1 \leq j \leq m_{k,s}} \|B_{k,s,j}x\|_{L_{r_{k,s,j}}(R_1, R_2)},
\end{aligned}$$

где

$$\|B_{k,s,j}x\|_{L_{r_{k,s,j}}(R_1,R_2)} \equiv \left[\int_{R_1}^{R_2} \|B_{k,s,j}x(\tau)\|_{Y_{k,s,j}}^{r_{k,s,j}} d\tau \right]^{\frac{1}{r_{k,s,j}}}.$$

Решения уравнения (4.1) будем понимать в следующем (обобщенном) смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Пусть T — положительное число. Вектор-функцию $x \in Z^{(1)}([0, T])$ будем называть *обобщенным (об.) решением* уравнения (4.1) на отрезке $[0, T]$, если при всех $t \in [0, T]$ выполняется равенство

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A}g(x(\tau), \tau, \omega) d\tau, \quad (4.10)$$

где

$$g(x, t, \omega) \equiv \sum_{|k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} D^{(k,s)} g_{k,s}(x) e^{ik\omega t} + \omega \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \varphi_k e^{ik\omega t}.$$

Интеграл в правой части (4.10) считается определенным с помощью замыкания в пространстве $Z_0^{(1)}[0, T]$. Возможность замыкания вытекает из следующей оценки, доказанной в пп. 4.1.3–4.1.8:

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)A} [g(x(\tau), \tau, \omega) - g(y(\tau), \tau, \omega)] d\tau \right\|_{Z_0^{(1)}[0, T]} \leq \|x - y\|_{Z_0^{(1)}[0, T]}.$$

Это замечание касается и остальных векторнозначных и операторнозначных интегралов в данной главе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Пусть T — положительное число. Вектор-функцию $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ назовем *об. T -периодическим решением* уравнения (4.1), если она является T -периодическим продолжением некоторого об. решения задачи Коши для уравнения (4.1) на полуинтервале $[0, T)$.

Аналогично определяются об. периодические решения других абстрактных параболических уравнений, а также об. решения задач Коши для таких уравнений.

Введем еще определение обычного решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Будем говорить, что непрерывная функция $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ является *решением уравнения* (4.1), если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $x(t) \in D(A)$ при всех $t \in \mathbb{R}$;
- 2) $x(t)$ непрерывно-дифференцируема на $\mathbb{R}$;
- 3) x в любой точке $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству (4.1).

Аналогично определяются об. решения других абстрактных параболических уравнений.

В п. 4.1.5 мы докажем, что оператор $-L$ порождает аналитическую полугруппу в X , установив, что в некотором секторе $\Sigma_{\sigma_2, \theta}$, $\sigma_2 \in \mathbb{R}$, для него выполняется оценка вида (4.2). Отсюда следует, что оператор $(\sigma_2 I + L)$ является сильно позитивным, и можно ввести его дробные степени. Определим банаховы пространства Υ^δ , $\delta \geq 0$, введя на линейном многообразии $D((\sigma_2 I + L)^\delta)$ норму

$$\|a\|_{\Upsilon^\delta} = \|(\sigma_2 I + L)^\delta a\|_X.$$

Сформулируем теперь основной результат настоящего раздела.

Теорема 4.2. *Предположим, что выполнены условия I–VII и*

$$0 < \mu < \beta_\varphi - \bar{\beta}, \quad \mu < 1 - (\alpha + \bar{\beta}). \quad (4.11)$$

Тогда для любого $R > 0$ найдутся такие положительные числа ω_0 и r , что справедливы следующие утверждения.

1. Уравнение (4.1) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное в шаре

$$\left\| x - \left(u_0 + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} (ik)^{-1} \varphi_k e^{ik\omega t} \right) \right\|_{Z_0^{(1)}} < r \quad (4.12)$$

об. $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое решение $x_\omega(t)$, причем

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\| x_\omega - \left(u_0 + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} (ik)^{-1} \varphi_k e^{ik\omega t} \right) \right\|_{Z_\mu^{(1)}} = 0. \quad (4.13)$$

2. Если, к тому же, справедливо предположение VIII, то при $\omega > \omega_0$ об. $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое решение x_ω , удовлетворяющее на участке $t \in [0, R]$ условию

$$\left\| x - \left(u_0 + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} (ik)^{-1} \varphi_k e^{ik\omega t} \right) \right\|_{Z^{(2)}(0, R)} < r, \quad (4.14)$$

единственно.

3. Если спектр оператора L лежит в открытой правой полуплоскости, то решение x_ω экспоненциально устойчиво в следующем смысле. Найдутся такие положительные числа δ, σ_0 и c , что при всех $\omega > \omega_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, x_0 из шара $\|x_0 - x_\omega(t_0)\|_{Y^{\bar{\beta}}} \leq \delta$ существует об. решение $x_\omega^0(t)$, $t \geq t_0$, уравнения (4.1) с начальным условием $x_\omega^0(t_0) = x_0$, и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|x_\omega^0(t) - x_\omega(t)\|_X + \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} \sum_{1 \leq j \leq m_{k,s}} \|B_{k,s,j}(x_\omega^0(t) - x_\omega(t))\|_{Y_{k,s,j}} \leq \\ \leq ce^{-\sigma_0(t-t_0)} \|x_0 - x_\omega(t_0)\|_{Y^{\bar{\beta}}}. \end{aligned}$$

4. Если спектр оператора L содержит хотя бы одну точку в открытой левой полуплоскости, то решение x_ω неустойчиво: существует такое $\varepsilon > 0$, что для сколь угодно малых $\delta > 0$ и всех $\omega > \omega_0$ найдется такое об. решение $x_\omega^0(t)$ уравнения (4.1), определенное на некотором участке $[0, t^*]$, что выполняются условия

$$\begin{aligned} \|x_\omega^0(0) - x_\omega(0)\|_{Y^{\bar{\beta}}} < \delta, \\ \|x_\omega^0(t^*) - x_\omega(t^*)\|_X + \\ + \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} \sum_{1 \leq j \leq m_{k,s}} \|B_{k,s,j}(x_\omega^0(t^*) - x_\omega(t^*))\|_{Y_{k,s,j}} \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

В п. 4.1.11 мы рассмотрим вопрос о том, когда указанные об. решения являются решениями в обычном смысле.

В пп. 4.1.3–4.1.6 мы не будем пользоваться условием VIII. В пп. 4.1.3–4.1.10, говоря о решении, будем иметь в виду об. решение.

Чтобы доказательство теоремы 4.2 было менее громоздким, мы проведем его для случая, когда при всех k $n_k = 1$ и $Y_{-k_0,1} = Y_{-(k_0-1),1} = \dots = Y_{k_0,1} \equiv Y$. Из доказательства видно, что случай произвольных n_k и различных $Y_{k,1}$ рассматривается совершенно аналогично.

Ради краткости, во всех обозначениях будем опускать индексы, соответствующие $s = 1$:

$$D^{(k)} \equiv D^{(k,1)}, \quad g_k \equiv g_{k,1}, \quad B_{k,j} \equiv B_{k,1,j}, \quad \beta_{k,j} \equiv \beta_{k,1,j}$$

и т. д. Тогда уравнение (4.1) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{|k| \leq k_0} D^{(k)} g_k(x) e^{ik\omega t} + \omega \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \varphi_k e^{ik\omega t}. \quad (4.15)$$

В пп. 4.1.3–4.1.10 содержится доказательство теоремы 4.2 для уравнения (4.15).

4.1.3. Замены переменных. В этом пункте мы, следуя [49, 114], проведем ряд преобразований. Будем в дальнейшем рассматривать только $\omega > \omega_1 \equiv \max(0, -\sigma_1 \operatorname{tg} \theta)$. Для этих ω и $1 \leq |k| \leq k_0$ операторы $(ik\omega I - A)$, ввиду условия I, обратимы, и можно произвести замену переменных

$$x(t) = u(t) + M_\omega(\omega t), \quad M_\omega(\tau) = \omega \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} (ik\omega I - A)^{-1} \varphi_k e^{ik\tau}, \quad (4.16)$$

в (4.15). Обозначим

$$Q_\omega(\tau) = M_\omega(\tau) - N(\tau),$$

где выражение для $N(\tau)$ выписано в условии VI, и проведем эту замену. Получим уравнение

$$\frac{du}{dt} = Au + \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} D^{(k)} g_k(u + N(\omega t) + Q_\omega(\omega t)) e^{ik\omega t}$$

или

$$\frac{du}{dt} - Au = \eta(u, \omega t) + \psi_\omega(u, \omega t), \quad (4.17)$$

где

$$\eta(u, \tau) = \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} D^{(k)} g_k(u + N(\tau)) e^{ik\tau}, \quad (4.18)$$

$$\psi_\omega(u, \tau) = \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} D^{(k)} (g_k(u + N(\tau) + Q_\omega(\tau)) - (g_k(u + N(\tau)))) e^{ik\tau}.$$

Заменяя в уравнении (4.17) u на $u + u_0$, перепишем его в виде

$$\frac{du}{dt} + Lu = h(u, \omega t, \omega), \quad (4.19)$$

где

$$h(u, \tau, \omega) = \eta(u + u_0, \tau) - H(u_0) - A_1 u + \psi_\omega(u + u_0, \tau),$$

а оператор A_1 определен в условии VII.

4.1.4. Выделение главной части выражения, фигурирующего в замене переменных. Наша ближайшая цель — установить справедливость соотношения

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|Q_\omega(\omega t)\|_{Z_\mu^{(1)}} = 0. \quad (4.20)$$

Тогда вместо теоремы 4.2 достаточно будет доказать ее более простой аналог, в котором уравнение (4.15) заменено на (4.19), шары (4.12) и (4.14) — соответственно на шары

$$\|u\|_{Z_0^{(1)}} < \frac{r}{2} \quad (4.21)$$

и

$$\|u\|_{Z^{(2)}(0,R)} < \frac{r}{2},$$

а равенство (4.13) — на равенство

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|u_\omega\|_{Z_\mu^{(1)}} = 0. \quad (4.22)$$

Здесь мы используем следующий факт: если вектор-функция $u(t)$ является решением уравнения (4.19), то вектор-функция $x(t) = u(t) + M_\omega(\omega t)$ является решением уравнения (4.15).

Начнем со следующего простого утверждения.

Лемма 4.2. Пусть оператор $\tilde{A}$ порождает аналитическую полугруппу в банаховом пространстве $\tilde{X}$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\lambda I + \tilde{A}$ также порождает аналитическую полугруппу в этом пространстве, причем

$$e^{t(\lambda I + \tilde{A})} = e^{\lambda t} e^{t\tilde{A}}, \quad t \geq 0.$$

◁ Пусть вектор-функции $u(t)$ и $v(t)$ при $t \geq 0$ являются решениями задач Коши

$$\frac{du}{dt} = \tilde{A}u, \quad u(0) = u_0$$

и

$$\frac{dv}{dt} = (\tilde{A} + \lambda_0)v, \quad v(0) = u_0$$

соответственно. Ясно, что $u(t) = e^{t\tilde{A}}u_0$, $v(t) = e^{\lambda t} e^{t\tilde{A}}u_0$, откуда и вытекает утверждение леммы. ▷

В дальнейшем нам неоднократно понадобится следующее утверждение.

Лемма 4.3. Пусть оператор B , действующий из X в некоторое банахово пространство Y_0 , имеет дробную степень $\gamma \in [0, 1)$ относительно оператора $-A$:

$$\|Be^{tA}\|_{\text{Hom}(X, Y_0)} \leq \frac{C}{t^\gamma} e^{\sigma_0 t}, \quad t > 0.$$

Тогда для любых $\lambda \in \Sigma_{\sigma_1, \theta}$, $\delta_1 \in (\gamma, +\infty)$ справедлива оценка

$$\|B(\lambda I - A)^{-\delta_1}\|_{\text{Hom}(X, Y_0)} \leq \frac{C}{(1 + |\lambda|)^{\delta_1 - \gamma}}, \quad (4.23)$$

где $C = C(\delta_1)$ не зависит от λ .

Аналогично, если оператор $\tilde{D} : Y \rightarrow X$ имеет дробную степень $\delta \in [0, 1)$ относительно оператора $-A$ справа:

$$\|e^{tA}\tilde{D}\|_{\text{Hom}(Y, X)} \leq \frac{C}{t^\delta} e^{\sigma_0 t}, \quad t > 0, \quad (4.24)$$

то при любых $\lambda \in \Sigma_{\sigma_1, \theta}$, $\delta_2 \in (\delta, +\infty)$ выполняется неравенство

$$\|(\lambda I - A)^{-\delta_2}\tilde{D}\|_{\text{Hom}(Y, X)} \leq \frac{C}{(1 + |\lambda|)^{\delta_2 - \delta}}, \quad (4.25)$$

где $C = C(\delta_2)$ также не зависит от λ .

◁ Отметим, что для всех $\lambda \in \Sigma_{\sigma_1, \theta}$ операторы $\lambda I - A$ позитивны, и дробные степени, фигурирующие в формулировке теоремы, определены.

Аналогично [37, теорема 14.2] устанавливается, что при любых $\lambda \in \Sigma_{\sigma_1, \theta}$, $\delta_1 > \gamma$, $n_1 \in (\delta_1 - \gamma, +\infty) \cap \mathbb{N}$, $\delta_2 > \delta$, $n_2 \in (\delta_2 - \delta, +\infty) \cap \mathbb{N}$ верны неравенства

$$\begin{aligned} & \|B(\lambda I - A)^{-\delta_1}x\|_{Y_0} \leq \\ & \leq C(-\delta_1) \|(\lambda I - A)^{-n_1}x\|_X^{\frac{\delta_1 - \gamma}{n_1}} \|x\|_X^{\frac{\gamma - \delta_1 + n_1}{n_1}}, \quad x \in X, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} & \|(\lambda I - A)^{-\delta_2}\tilde{D}x\|_X \leq \\ & \leq C(-\delta_2) \|(\lambda I - A)^{-n_2}\tilde{D}x\|_X^{\frac{\delta_2 - \delta}{n_2 - \delta}} \|x\|_Y^{\frac{n_2 - \delta_2}{n_2 - \delta}}, \quad x \in D(\tilde{D}). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Соотношение (4.23) следует из (4.26), а (4.25) — из (4.24) и (4.27). Лемма 4.3, таким образом, доказана. $\triangleright$

Следствие 4.1. Для любых $k \in [-k_0, k_0] \cap \mathbb{Z}$, $j \in [1, m_k] \cap \mathbb{N}$, $\delta_3 \in (\alpha, +\infty)$, $\delta_4 \in (\beta_{k,j}, +\infty)$, $\delta_5 \in [0, +\infty)$ найдутся (не зависящие от k и j) числа $C_1 = C_1(\delta_3)$, $C_2 = C_2(\delta_4)$ и $C_3 = C_3(\delta_5)$, при которых для всех $\lambda \in \Sigma_{\sigma_1, \theta}$ справедливы оценки

$$\|(\lambda I - A)^{-\delta_3} D^{(k)}\|_{\text{Hom}(Y, X)} \leq \frac{C_1}{(1 + |\lambda|)^{\delta_3 - \alpha}}, \quad (4.28)$$

$$\|B_{k,j}(\lambda I - A)^{-\delta_4}\|_{\text{Hom}(X, Y_{k,j})} \leq \frac{C_2}{(1 + |\lambda|)^{\delta_4 - \beta_{k,j}}}, \quad (4.29)$$

$$\|(\lambda I - A)^{-\delta_5}\|_{\text{Hom}(X, X)} \leq \frac{C_3}{(1 + |\lambda|)^{\delta_5}}. \quad (4.30)$$

Теперь установим справедливость следующей леммы, из которой вытекает соотношение (4.20).

Лемма 4.4. Пусть оператор B , действующий из X в некоторое банахово пространство $\tilde{X}$, имеет дробную степень $\beta_0 \in [0, \bar{\beta}]$ относительно оператора $-A$:

$$\|Be^{tA}\|_{\text{Hom}(X, \tilde{X})} \leq \frac{C}{t^{\beta_0}} e^{\sigma_1 t}, \quad t > 0. \quad (4.31)$$

Тогда при всех $\omega > \omega_1$, $\tau \in \mathbb{R}$ вектор $Q_\omega(\tau)$ находится в $D(B)$, причем

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|BQ_\omega(\omega t)\|_{C_\mu(\tilde{X})} = 0. \quad (4.32)$$

$\triangleleft$ Чтобы не загромождать доказательство, будем предполагать, что число λ_1 , фигурирующее в условии IV, равно нулю. В противном случае в тексте доказательства оператор A необходимо заменить на $A - \lambda_1 I$ и применить дополнительно некоторые элементарные оценки.

То, что $Q_\omega(\tau) \in D(B)$, следует из неравенства (4.31), условия IV и леммы 4.3. Покажем теперь справедливость предельного соотношения (4.32). Возьмем любые $\omega > \omega_1$, $t_1 < t_2$ и, используя (4.2), (4.31), [37, теорема 14.11], лемму 4.3, а также простое неравенство

$|e^{it_2} - e^{it_1}| \leq 2(t_2 - t_1)^\mu$, выведем

$$\begin{aligned}
& \|B(Q_\omega(\omega t_2) - Q_\omega(\omega t_1))\|_{\tilde{X}} = \\
& = \left\| \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} BA(ik)^{-1}(ik\omega I - A)^{-1} \varphi_k(e^{ik\omega t_2} - e^{ik\omega t_1}) \right\|_{\tilde{X}} \leq \\
& \leq \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \|BA(ik\omega I - A)^{-1}(-A)^{-\beta_\varphi}\|_{\text{Hom}(X, \tilde{X})} \|(-A)^{\beta_\varphi} \varphi_k\|_X \times \\
& \times |e^{ik\omega t_2} - e^{ik\omega t_1}| \leq C \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \|B(ik\omega I - A)^{-\frac{\beta_0 + \beta_\varphi}{2}}\|_{\text{Hom}(X, \tilde{X})} \times \quad (4.33) \\
& \times \|(ik\omega I - A)^{-(1 - \frac{\beta_0 + \beta_\varphi}{2})}(-A)^{1 - \beta_\varphi}\|_{\text{Hom}(X, X)} (k\omega(t_2 - t_1))^\mu \leq \\
& \leq C \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{(k\omega)^\mu}{(1 + |k\omega|)^{\beta_\varphi - \beta_0}} (t_2 - t_1)^\mu \leq C\omega^{\mu + \beta_0 - \beta_\varphi} (t_2 - t_1)^\mu.
\end{aligned}$$

Аналогично получается оценка

$$\|BQ_\omega(\omega t_1)\|_{\tilde{X}} \leq C\omega^{\beta_0 - \beta_\varphi}. \quad (4.34)$$

Равенство (4.32) следует из (4.33), (4.11) и (4.34). $\triangleright$

Итак, лемма 4.4 позволяет вместо теоремы 4.2 доказывать аналогичную теорему для уравнения (4.19).

4.1.5. Доказательство выполнения условий типа I–III для оператора L . В этом пункте мы установим несколько необходимых для дальнейшего фактов.

Докажем следующую лемму.

Лемма 4.5. Для всех $|k| \leq k_0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ линейный оператор $Dg_k(u_0 + N(\tau))$ имеет дробную степень $\bar{\beta}_k \equiv \max_{1 \leq j \leq m_k} \beta_{k,j}$ относительно оператора $-A$:

$$\|Dg_k(u_0 + N(\tau))(\lambda I - A)^{-1}\|_{\text{Hom}(X, Y)} \leq \frac{C}{(1 + |\lambda|)^{1 - \bar{\beta}_k}}, \quad \lambda \in \Sigma_{\sigma_1, \theta},$$

где C не зависит от k и τ .

◁ Из условий III, IV, леммы 4.3 и соотношения (4.8) для произвольного $\lambda \in \Sigma_{\sigma_1, \theta}$ вытекает цепочка неравенств

$$\begin{aligned} & \|Dg_k(u_0 + N(\tau))(\lambda I - A)^{-1}\|_{\text{Hom}(X, Y)} \leq \\ & \leq \sup_{\tau \in [0, 2\pi]} \sum_{1 \leq j \leq m_k} \|D_j g_k^0(B_{k,1}(u_0 + N(\tau)), B_{k,2}(u_0 + N(\tau)), \dots, \\ & B_{k, m_k}(u_0 + N(\tau)))\|_{\text{Hom}(Y_{k,j}, Y)} \frac{C_B}{(1 + |\lambda|)^{1-\bar{\beta}_k}} \equiv \frac{C}{(1 + |\lambda|)^{1-\bar{\beta}_k}}. \triangleright \end{aligned}$$

Следствие 4.2. Для любого $\delta > \bar{\beta}$ существует такое $C = C(\delta)$, что при всех $|k| \leq k_0$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \Sigma_{\sigma_1, \theta}$ имеет место оценка

$$\|Dg_k(u_0 + N(\tau))(\lambda I - A)^{-\delta}\|_{\text{Hom}(X, Y)} \leq \frac{C}{(1 + |\lambda|)^{\delta-\bar{\beta}}}. \quad (4.35)$$

◁ Утверждение непосредственно вытекает из лемм 4.3 и 4.5. ▷

Докажем следующую лемму, которая, в частности, является аналогом [143, гл. I, лемма 3.1] и [116, лемма 8.1].

Лемма 4.6. Оператор $-L$ порождает аналитическую полугруппу в X .

◁ Найдем такое $\sigma_2 \in \mathbb{R}$, чтобы при всех $\lambda \in \Sigma_{\sigma_2, \theta}$ операторы $\lambda I + L : X \rightarrow X$ были обратимы, и при некотором C_L выполнялось неравенство

$$\|(\lambda I + L)^{-1}\|_{\text{Hom}(X, X)} \leq \frac{C_L}{1 + |\lambda|}.$$

Выберем произвольно число γ , удовлетворяющее условию

$$\bar{\beta} < \gamma < 1 - \alpha.$$

Для всех $\lambda \in \Sigma_{\sigma_1, \theta}$ имеем

$$\begin{aligned} & \lambda I + L = \lambda I - A + A_1 = \\ & = (\lambda I - A)^{1-\gamma} [I + (\lambda I - A)^{-(1-\gamma)} A_1 (\lambda I - A)^{-\gamma}] (\lambda I - A)^{\gamma} = \\ & = (\lambda I - A)^{1-\gamma} \left[I + \frac{1}{2\pi} \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \int_0^{2\pi} (\lambda I - A)^{-(1-\gamma)} D^{(k)} \times \right. \\ & \quad \left. \times Dg_k(u_0 + N(\tau))(\lambda I - A)^{-\gamma} e^{ik\tau} d\tau \right] (\lambda I - A)^{\gamma}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Первый и третий множители в правой части обратимы, покажем обратимость второго при λ , принадлежащих некоторому сектору $\Sigma_{\sigma_2, \theta}$, $\sigma_2 \geq \sigma_1$. С помощью леммы 4.3 и (4.35) получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \|(\lambda I - A)^{-(1-\gamma)} D^{(k)} Dg_k(u_0 + N(\tau)) \times \\ & \times (\lambda I - A)^{-\gamma} e^{ik\tau}\|_{\text{Hom}(X, X)} \leq \|(\lambda I - A)^{-(1-\gamma)} D^{(k)}\|_{\text{Hom}(Y, X)} \times \\ & \times \|Dg_k(u_0 + N(\tau))(\lambda I - A)^{-\gamma}\|_{\text{Hom}(X, Y)} \leq \frac{\tilde{C}}{(1 + |\lambda|)^{1-\alpha-\beta}}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

где $\tilde{C}$ не зависит от k , τ и λ . Если величина $\tilde{C}_1 \equiv (2(2k_0+1)\tilde{C})^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} - 1$ неположительна, то возьмем $\sigma_2 = \sigma_1$, иначе — $\sigma_2 = \max(\sigma_1, \frac{\tilde{C}_1}{\sin \theta})$. Тогда для любых $\lambda \in \Sigma_{\sigma_2, \theta}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \|(\lambda I - A)^{-(1-\gamma)} D^{(k)} Dg_k(u_0 + N(\tau))(\lambda I - A)^{-\gamma} e^{ik\tau}\|_{\text{Hom}(X, X)} \leq \\ & \leq \frac{1}{2(2k_0 + 1)}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

и, значит, второй множитель в правой части (4.36) обратим, причем норма обратного к нему не превосходит 2. Тогда при всех $\lambda \in \Sigma_{\sigma_2, \theta}$ операторы $\lambda I + L : X \rightarrow X$ обратимы:

$$\begin{aligned} & (\lambda I + L)^{-1} = (\lambda I - A)^{-(1-\gamma)} \times \\ & \times [I + (\lambda I - A)^{-(1-\gamma)} A_1 (\lambda I - A)^{-\gamma}]^{-1} (\lambda I - A)^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

С помощью (4.30), (4.39) получаем соотношение

$$\|(\lambda I + L)^{-1}\|_{\text{Hom}(X, X)} \leq \frac{2\tilde{C}_2(\gamma)\tilde{C}_2(1-\gamma)}{1 + |\lambda|} \equiv \frac{C_L}{1 + |\lambda|},$$

доказывающее лемму 4.6. $\triangleright$

Следствие. *Справедливы оценки*

$$\|e^{-tL}\|_{\text{Hom}(X, X)} \leq C_L e^{\sigma_2 t}, \quad t \geq 0, \quad (4.40)$$

$$\|Le^{-tL}\|_{\text{Hom}(X, X)} \leq C_L \frac{e^{\sigma_2 t}}{t}, \quad t > 0. \quad (4.41)$$

Здесь, не нарушая общности рассуждений, считаем, что показатель σ_2 тот же, что и выше.

Докажем теперь аналоги условий II и III для оператора $-L$.

Лемма 4.7. *Операторы $D^{(k)}$ имеют дробную степень α относительно оператора L справа. Операторы $B_{k,j}$ имеют дробную степень $\beta_{k,j}$ относительно оператора L ($|k| \leq k_0, 1 \leq j \leq m_k$).*

◁ Пусть γ — то же, что и в лемме 4.6. Тогда с учетом (4.39), (4.38) и следствия из леммы 4.3, получаем для всех $\lambda \in \Sigma_{\sigma_2, \theta}$, $k \in [-k_0, k_0] \cap \mathbb{Z}$, $j \in [1, m_k] \cap \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|(\lambda I + L)^{-1} D^{(k)}\|_{\text{Hom}(Y, X)} &\leq \|(\lambda I - A)^{-\gamma}\|_{\text{Hom}(X, X)} \times \\ &\times \left\| \left[I + (\lambda I - A)^{-(1-\gamma)} A_1 (\lambda I - A)^{-\gamma} \right]^{-1} \right\|_{\text{Hom}(X, X)} \times \\ &\times \|(\lambda I - A)^{-(1-\gamma)} D^{(k)}\|_{\text{Hom}(Y, X)} \leq \frac{2C_1 C_3}{(1 + |\lambda|)^{1-\alpha}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|B_{k,j}(\lambda I + L)^{-1}\|_{\text{Hom}(X, Y_j)} &\leq \|B_{k,j}(\lambda I - A)^{-\gamma}\|_{\text{Hom}(X, Y_j)} \times \\ &\times \left\| \left[I + (\lambda I - A)^{-(1-\gamma)} A_1 (\lambda I - A)^{-\gamma} \right]^{-1} \right\|_{\text{Hom}(X, X)} \times \\ &\times \|(\lambda I - A)^{-(1-\gamma)}\|_{\text{Hom}(X, X)} \leq \frac{2C_2 C_3}{(1 + |\lambda|)^{1-\beta_{k,j}}}. \end{aligned}$$

Лемма 4.7 доказана. ▷

Из [143, гл. I, лемма 2.1] и ее доказательства теперь вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.3. *Для любых $|k| \leq k_0$, $1 \leq j \leq m_k$ справедливы соотношения*

$$\|e^{-tL} D^{(k)}\|_{\text{Hom}(Y, X)} \leq \frac{C_D}{t^\alpha} e^{\sigma_2 t}, \quad t > 0, \quad (4.42)$$

$$\|B_{k,j} e^{-tL}\|_{\text{Hom}(X, Y_j)} \leq \frac{C_B}{t^{\beta_{k,j}}} e^{\sigma_2 t}, \quad t > 0. \quad (4.43)$$

Здесь, не нарушая общности рассуждений, считаем, что константы C_D , C_B , σ_2 те же, что и выше.

4.1.6. Переход к интегральному уравнению. В этом пункте мы от задачи о $2\pi\omega^{-1}$ -периодических решениях дифференциального уравнения (4.19) перейдем к интегральному уравнению с тем, чтобы в дальнейшем применить к последнему принцип сжатых отображений.

Из условия V следует [33, с. 237], что для $\lambda \in \Sigma_{\sigma_2, \theta}$ операторы $(\lambda I - A)^{-1}$ вполне непрерывны. Значит, по [37, теорема 14.12] для всех $\tau \in (0, 1]$ операторы $(\lambda I - A)^{-\tau}$ также вполне непрерывны. Тогда из представления (4.39) вытекает полная непрерывность оператора $(\lambda I + L)^{-1}$. При этом $\sigma(L)$ — дискретное множество, а спектр $\sigma(e^{-tL})$ состоит из точек вида $e^{-\lambda t}$, $\lambda \in \sigma(L)$, $t \geq 0$, а также, быть может, нуля [151, п. 16.7]. Кроме того, множество $\sigma(L)$ не имеет конечных предельных точек.

Покажем, что существует такое $t_0 > 0$, что для всех $\lambda \in \sigma(L)$ выполняется неравенство $e^{-\lambda t_0} \neq 1$. В самом деле, $e^{-\lambda t_0} = 1$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} \lambda = 0$ и $\operatorname{Im} \lambda t_0 = 2\pi k$ при некотором целом k . Так как $0 \notin \sigma(L)$, то $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ (если $\operatorname{Re} \lambda = 0$), и можно записать $t_0 = \frac{2\pi k}{\operatorname{Im} \lambda}$. Если $\sigma_2 \leq 0$, то годится любое t_0 , а в случае $\sigma_2 > 0$ возьмем $t_0 < -\frac{2\pi}{\sigma_2 t g \theta}$.

Для $\omega \geq \frac{2\pi}{t_0}$ обозначим $t_\omega \equiv \max_{k \in \mathbb{N}, k \leq \frac{\omega t_0}{2\pi}} (2\pi k \omega^{-1})$. Ясно, что для этих ω числа t_ω находятся в полуинтервале $(\frac{t_0}{2}, t_0]$. Из рассуждений, приведенных выше, следует выполнение неравенства $e^{-\lambda t_\omega} \neq 1$ для всех $\omega \geq \frac{2\pi}{t_0}$. Тогда $\sigma(I - e^{-t_\omega L}) \not\ni 0$. Поэтому оператор $I - e^{-t_\omega L}$ обратим при $\omega \geq \frac{2\pi}{t_0}$.

Из представления

$$[I - e^{-t_\omega L}]^{-1} = [I - e^{-t_0 L}]^{-1} \left\{ I - [e^{-t_\omega L} - e^{-t_0 L}][I - e^{-t_\omega L}]^{-1} \right\}$$

и оценки [116, лемма 3.1]

$$\|e^{-t' L} - e^{-t L}\|_{\operatorname{Hom}(X, X)} \leq \frac{C}{t} |t' - t|, \quad 0 < t < t',$$

следует существование такого $\omega_2 \geq \max(\omega_1, \frac{2\pi}{t_0})$, что

$$C_4 \equiv \max_{\omega > \omega_2} \left\| [I - e^{-t_\omega L}]^{-1} \right\|_{\operatorname{Hom}(X, X)} < +\infty. \quad (4.44)$$

Как и в случае ограниченных операторов [36, с. 34] доказывается (см. также [49]), что задача о t_ω -периодических решениях уравнения (4.19) при $t \geq 0$ эквивалентна для непрерывных вектор-функций u со значениями в $D(L)$ и $\omega \in (\omega_2, +\infty)$ интегральному

уравнению

$$\begin{aligned}
 (P_\omega u)(t) &\equiv u(t) - (P_{\omega,1}u)(t) - (P_{\omega,2}u)(t) \equiv \\
 &\equiv u(t) - e^{-tL} [I - e^{-t_\omega L}]^{-1} \int_0^{t_\omega} e^{-(t_\omega-\tau)L} h[u(\tau), \omega\tau, \omega] d\tau - \\
 &\quad - \int_0^t e^{-(t-\tau)L} h[u(\tau), \omega\tau, \omega] d\tau = 0.
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Это уравнение мы будем исследовать на конечном временном участке $t \in [0, t_0]$.

В пп. 4.1.7, 4.1.8 будет завершено доказательство утверждений 1 и 2 теоремы 4.2. Для доказательства утверждения 1 будет установлено, что интегральные операторы P_ω при больших ω являются сжимающими в некотором шаре пространства $Z^{(1)}([0, t_0])$. Чтобы доказать утверждение 2, мы установим, что достаточно высокие степени операторов P_ω при больших ω являются сжатиями в некотором шаре пространства $Z^{(2)}(0, t_0)$. Для этого вводится цепочка пространств $Z_0 = Z^{(2)}(0, t_0)$, $Z_1, \dots, Z_\rho$, $\rho \geq 0$ таких, что константа Липшица оператора P_ω при действии из шара пространства Z_l в Z_{l+1} , $0 \leq l \leq \rho-1$, и из шара пространства Z_ρ в $Z^{(1)}(0, t_0)$, ограничена при $\omega > \omega_2$, а из шара пространства $Z^{(1)}(0, t_0)$ в $Z_0 = Z^{(2)}(0, t_0)$ — сколь угодно мала при достаточно больших ω .

В п. 4.1.7 подбирается число ρ , вводятся пространства Z_l , $0 \leq l \leq \rho$, и доказывается ограниченность константы Липшица для указанных выше пар пространств. В п. 4.1.8 вначале доказывается, что P_ω при больших ω являются сжимающими в некотором шаре пространства $Z^{(1)}([0, t_0])$. Отсюда вытекает, во-первых, утверждение 1 теоремы 4.2, а, во-вторых, малость константы Липшица оператора P_ω для пары пространств $Z^{(1)}(0, t_0)$, $Z_0 = Z^{(2)}(0, t_0)$. Последний факт, вкупе с результатами п. 4.1.7, позволяет доказать утверждение 2 теоремы 4.2.

4.1.7. Вспомогательные оценки. В этом пункте мы получим ряд оценок, которые понадобятся для доказательства утверждения 2 теоремы 4.2. Поэтому будем считать выполненным предположение VIII, что позволяет воспользоваться следующими представ-

лениями:

$$\begin{aligned}
H(u) &= \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{\substack{\alpha_j=0, \\ j=1,2,\dots,m_k}}^1 \sum_{\substack{1 \leq |p_l| \leq k_0, l: \alpha_l=0, \\ k + \sum_{l: \alpha_l=0} p_l = 0}} D^{(k)} \times \\
&\times g_0^{(k)} (B_1(\alpha_1 u + (1 - \alpha_1) \varphi_{p_1}) B_2(\alpha_2 u + (1 - \alpha_2) \varphi_{p_2}), \dots, \\
&\quad B_{m_k}(\alpha_{m_k} u + (1 - \alpha_{m_k}) \varphi_{p_{m_k}})) \prod_{r: \alpha_r=0} (ip_r)^{-1}, \\
\eta(u, \tau) &\equiv H(u) + \tilde{\eta}(u, \tau), \tag{4.46} \\
\tilde{\eta}(u, \tau) &\equiv \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} D^{(k)} \tilde{\eta}_k(u, \tau) \equiv \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{\substack{\alpha_j=0, \\ j=1,2,\dots,m_k}}^1 \sum_{\substack{1 \leq |p_l| \leq k_0, l: \alpha_l=0, \\ k + \sum_{l: \alpha_l=0} p_l \neq 0}} D^{(k)} \times \\
&\times g_0^{(k)} [B_1(\alpha_1 u + (1 - \alpha_1) \varphi_{p_1}), B_2(\alpha_2 u + (1 - \alpha_2) \varphi_{p_2}), \dots, \\
&\quad B_m(\alpha_m u + (1 - \alpha_m) \varphi_{p_m})] e^{ik\tau} \prod_{r: \alpha_r=0} (ip_r)^{-1} e^{ip_r \tau}, \\
A_1 u &= \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{\substack{\alpha_j=0, \\ j=1,2,\dots,m_k}}^1 \sum_{\substack{s: \alpha_s=0 \\ k + \sum_{l: \alpha_l=0} p_l = 0}} \sum_{\substack{1 \leq |p_l| \leq k_0, l: \alpha_l=0, \\ k + \sum_{l: \alpha_l=0} p_l = 0}} D^{(k)} \times \\
&\times g_0^{(k)} (B_1(\alpha_1 u_1 + (1 - \alpha_1) \varphi_{p_1}), B_2(\alpha_2 u_2 + (1 - \alpha_2) \varphi_{p_2}), \dots, \\
&\quad B_{m_k}(\alpha_{m_k} u_{m_k} + (1 - \alpha_{m_k}) \varphi_{p_{m_k}})) \Big|_{u_1=\dots=u_{s-1}=u_{s+1}=\dots=u_{m_k}=u_0, u_s=u}, \\
\psi_\omega(u, \tau) &= \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{\substack{\alpha_j=0, \\ j=1,2,\dots,m_k, \\ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{m_k} > 0}}^1 D^{(k)} g_0^{(k)} (\alpha_1(u + N(\tau)) + \\
&\quad + (1 - \alpha_1) Q_\omega(\tau), \alpha_2(u + N(\tau)) + (1 - \alpha_2) Q_\omega(\tau), \dots, \\
&\quad \alpha_m(u + N(\tau)) + (1 - \alpha_m) Q_\omega(\tau)).
\end{aligned}$$

Нам потребуется ряд обозначений. Пусть

$$r_{k,j}^0 \equiv r_{k,j}, \quad p^0 \equiv p \equiv \min_{|k| \leq k_0} p_k.$$

Теперь выберем произвольное $\lambda \in (1 - (1 - \beta)p^1, 1) \cap (0, 1)$ и для $-k_0 \leq k \leq k_0$, $1 \leq j \leq m_k$ введем числа

$$\begin{aligned} \beta &\equiv \alpha + \bar{\beta} < 1, \quad \alpha_{k,j} \equiv \alpha + \beta_{k,j}, \\ r_{k,j}^l &\equiv \begin{cases} \lambda \frac{p^{l-1}}{1 - (1 - \alpha_{k,j})p^{l-1}}, & \text{если } (1 - \alpha_{k,j})p^{l-1} < 1, \\ \infty, & \text{если } (1 - \alpha_{k,j})p^{l-1} \geq 1, \end{cases} \\ \frac{1}{p_k^l} &\equiv \sum_{1 \leq j \leq m_k} \frac{1}{r_{k,j}^l}, \quad p^l \equiv \min_{|k| \leq k_0} p_k^l. \end{aligned}$$

Индекс l пробегает значения от 1 до $\rho = \inf \{l \geq 0 : p^l > \frac{1}{1 - (\beta + \mu)}\}$, а для всех $a \in \mathbb{R}$ формально полагаем $\frac{\infty}{a} = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$.

Лемма 4.8. Величина ρ конечна.

◁ Если $\rho = 0$, то лемма справедлива. Пусть $\rho \geq 1$. Тогда для любого $l \geq 2$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{p^l} \leq \max_{|k| \leq k_0} \sum_{1 \leq j \leq m_k} \frac{1}{r_{k,j}^l} \leq \frac{1}{\lambda} \left\{ \beta + \left[\frac{1}{p^{l-1}} - 1 \right] \right\}.$$

Отсюда с помощью метода математической индукции нетрудно вывести соотношение

$$\frac{p^{l-1}}{p^l} \leq \frac{1 - (1 - \beta)p^1}{\lambda} < 1, \quad l = 2, 3, \dots,$$

из которого и вытекает утверждение леммы. ▷

Пусть $Z_0 \equiv Z^{(2)}([0, t_0])$. Введем банаховы пространства Z_l , $1 \leq l \leq \rho$. Их элементами являются вектор-функции, для которых определены нормы

$$\|x\|_{Z_l} \equiv \|x\|_{C^{[0, t_0]}(X)} + \sum_{k=-k_0}^{k_0} \sum_{j=1}^{m_k} \left[\int_0^{t_0} \|B_{k,j}x(\tau)\|_{Y_{k,j}}^{r_{k,j}^l} d\tau \right]^{\frac{1}{r_{k,j}^l}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (P_{\omega,2}u)(t) &= (P_{\omega,21}u)(t) + (P_{\omega,22}u)(t) + (P_{\omega,23}u)(t) \equiv \\ &\equiv \int_0^t e^{-(t-\tau)L} \tilde{\eta}[u(\tau) + u_0, \omega\tau] d\tau + \int_0^t e^{-(t-\tau)L} \times \\ &\times \{H[u(\tau) + u_0] - H[u_0] - A_1 u(\tau)\} d\tau + \int_0^t e^{-(t-\tau)L} \psi_\omega[u(\tau), \omega\tau] d\tau, \end{aligned}$$

$$(P_{\omega,1}u)(t) = (P_{\omega,11}u)(t) + (P_{\omega,12}u)(t) + (P_{\omega,13}u)(t) \equiv \\ \equiv e^{-tL} [I - e^{-t_\omega L}]^{-1} [(P_{\omega,21}u)(t_\omega) + (P_{\omega,22}u)(t_\omega) + (P_{\omega,23}u)(t_\omega)].$$

Докажем ряд оценок, которые помогут нам установить справедливость леммы 4.17 (см. ниже), из которой будет следовать утверждение 2 теоремы 4.2. Предварительно зафиксируем произвольно $r_0 > 0$.

Лемма 4.9. Пусть $0 < r_1 \leq r_0$, $|l| \leq k_0$, $j \in [1, m_l] \cap \mathbb{N}$. Тогда существует такое число $C > 0$, что при $\omega > \omega_2$, $0 \leq \nu \leq \rho - 1$ для всех вектор-функций u_1, u_2 из шара $\|u\|_{Z_\nu} \leq r_1$ выполняется оценка

$$\left[\int_0^{t_0} \|B_{l,j}(P_{\omega,21}(u_2)(t) - P_{\omega,21}(u_1)(t))\|_{Y_{l,j}}^{r_{l,j}^{\nu+1}} dt \right]^{\frac{1}{r_{l,j}^{\nu+1}}} \leq C \|u_2 - u_1\|_{Z_\nu}.$$

При этом C не зависит от r_1 .

◁ Здесь используются те же методы, что и в [143, гл. I, лемма 2.2]. Оценим выражение

$$\|B_{l,j}(P_{\omega,21}(u_2) - P_{\omega,21}(u_1))\|_{Y_{l,j}} \leq \\ \leq \int_0^t \frac{2^{\alpha_{l,j}} C_B C_D}{(t-\tau)^{\alpha_{l,j}}} \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \|\tilde{\eta}_k[u_2(\tau) + u_0, \omega\tau] - \tilde{\eta}_k[u_1(\tau) + u_0, \omega\tau]\|_Y d\tau.$$

Распишем разность

$$\begin{aligned} & \tilde{\eta}_k[u_2(\tau) + u_0, \omega\tau] - \tilde{\eta}_k[u_1(\tau) + u_0, \omega\tau] = \\ & = \sum_{\substack{\alpha_j=0, \\ j=1,2,\dots,m_k}}^1 \sum_{\substack{1 \leq |p_l| \leq k_0, l: \alpha_l=0, \\ k + \sum_{l: \alpha_l=0} p_l \neq 0}} \sum_{s: \alpha_s=1} g_0^{(k)} \left(B_{k,1} [\alpha_1(u_2(\tau) + u_0) + \right. \\ & \quad \left. + (1 - \alpha_1)\varphi_{p_1}], \dots, B_{k,s-1} [\alpha_{s-1}(u_2(\tau) + u_0) + \right. \\ & \quad \left. + (1 - \alpha_{s-1})\varphi_{p_{s-1}}], B_{k,j} [u_2(\tau) - u_1(\tau)], B_{k,s+1} [\alpha_{s+1}(u_1(\tau) + \right. \\ & \quad \left. + u_0) + (1 - \alpha_{s+1})\varphi_{p_{s+1}}], \dots, B_{k,m_k} [\alpha_{m_k}(u_2(\tau) + u_0) + \right. \\ & \quad \left. + (1 - \alpha_{m_k})\varphi_{p_{m_k}}] \right) e^{ik\omega\tau} \prod_{r: \alpha_r=0} (ip_r)^{-1} e^{ip_r\omega\tau}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Из неравенства (4.9) получаем, что

$$\left[\int_0^{t_0} \|\tilde{\eta}_k[u_2(\tau) + u_0, \omega\tau] - \tilde{\eta}_k[u_1(\tau) + u_0, \omega\tau]\|_Y^{p_\nu} d\tau \right]^{\frac{1}{p_\nu}} \leq \tilde{C}_k \|u_2 - u_1\|_{Z_\nu},$$

где $\tilde{C}_k$ — некоторая константа.

Утверждение леммы теперь вытекает из теоремы о потенциалах [117, с. 49]. $\triangleright$

Лемма 4.10. Пусть $0 < r_1 \leq r_0$, $|k| \leq k_0$, $1 \leq j \leq m_k$. Тогда существует такое число $C > 0$, что при $\omega > \omega_2$ для всех вектор-функций u_1, u_2 из шара $\|u\|_{Z_\rho} \leq r_1$ выполняется оценка $\|B_{k,j}(P_{\omega,11}(u_2) - P_{\omega,11}(u_1))\|_{C_\mu(Y_{k,j})} \leq C \|u_2 - u_1\|_{Z_\rho}$. C не зависит от r_1 .

$\triangleleft$ Для любых $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| [B_{k,j}(P_{\omega,11}u_2)(t_2) - B_{k,j}(P_{\omega,11}u_1)(t_2)] - [B_{k,j}(P_{\omega,11}u_2)(t_1) - \right. \\ & \quad \left. - B_{k,j}(P_{\omega,11}u_1)(t_1)] \right\|_{Y_{k,j}} \leq \int_0^{t_\omega} \|B_{k,j}e^{-\frac{1}{3}(t_\omega - \tau)L}\|_{\text{Hom}(X, Y_{k,j})} \times \\ & \quad \times \|(I - e^{-t_\omega L})^{-1}\|_{\text{Hom}(X, X)} \|e^{-\frac{1}{3}(t_\omega - \tau)L}(\sigma_2 I + L)^\mu\|_{\text{Hom}(X, X)} \times \\ & \quad \times \|(\sigma_2 I + L)^{-\mu}(e^{-t_2 L} - e^{-t_1 L})\|_{\text{Hom}(X, X)} \sum_{|\varkappa| \leq k_0} \|e^{-\frac{1}{3}(t_\omega - \tau)L}\|_{\text{Hom}(X, X)} \times \\ & \quad \times D^{(\varkappa)}\|_{\text{Hom}(Y, X)} \|\tilde{\eta}_\varkappa[u_2(\tau) + u_0, \omega\tau] - \tilde{\eta}_\varkappa[u_1(\tau) + u_0, \omega\tau]\|_Y d\tau \equiv I_1. \end{aligned}$$

Из леммы 4.2 и [37, теорема 14.11] следует, что операторы $(\sigma_2 I + L)^\gamma$, $\gamma \geq 0$, имеют степень γ относительно оператора L :

$$\|(\sigma_2 I + L)^\gamma e^{-tL}\|_{\text{Hom}(X, X)} \leq \frac{C_5(\gamma)}{t^\gamma} e^{\sigma_2 t} \quad (t > 0). \quad (4.48)$$

Теперь, используя (4.48), (4.40) и легко выводимое соотношение $t_2^\mu - t_1^\mu \leq (t_2 - t_1)^\mu$, $t_2 \geq t_1$, оценим четвертый подынтегральный

множитель:

$$\begin{aligned}
& \|(\sigma_2 I + L)^{-\mu} (e^{-t_2 L} - e^{-t_1 L})\|_{\text{Hom}(X, X)} = \\
& = \left\| \int_{t_1}^{t_2} (\sigma_2 I + L)^{-\mu} L e^{-\tau L} d\tau \right\|_{\text{Hom}(X, X)} = \\
& = \left\| \int_{t_1}^{t_2} ((\sigma_2 I + L)^{1-\mu} - \sigma_2 (\sigma_2 I + L)^{-\mu}) e^{-\tau L} d\tau \right\|_{\text{Hom}(X, X)} \leq \\
& \leq C_7 (t_2 - t_1)^\mu,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
C_7 & \equiv C_6 \left[\frac{C_5(1-\mu)}{\mu} + C_L |\sigma_2| \|(\sigma_2 I + L)^{-\mu}\|_{\text{Hom}(X, X)} t_0^{1-\mu} \right], \\
C_6 & \equiv \max(1, e^{\sigma_2 t_0}).
\end{aligned}$$

Тогда, с учетом (4.43) и (4.48), получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
I_1 & \leq C_8 \max_{|\varkappa| \leq k_0} \max_{\substack{\alpha_J \in \{0,1\}, \\ J=1,2,\dots,m_k}} \max_{\substack{1 \leq |p_l| \leq k_0, \\ l=1,2,\dots,m_k}} \sum_{J=1}^{m_k} \int_0^{t_\omega} (t_\omega - \tau)^{-\alpha_{k,j} - \mu} \times \\
& \times \left[\prod_{l=1}^{J-1} \|B_{\varkappa,l}(\alpha_l(u_2(\tau) + u_0) + (1 - \alpha_l)\varphi_{p_l})\|_{Y_{\varkappa,l}} \right] \times \\
& \times \|\alpha_J B_{\varkappa,J}(u_2(\tau) - u_1(\tau))\|_{Y_{\varkappa,J}} \times \\
& \times \prod_{l=J+1}^{m_k} \|B_{\varkappa,l}(\alpha_l(u_1(\tau) + u_0) + (1 - \alpha_l)\varphi_{p_l})\|_{Y_{\varkappa,l}} d\tau (t_2 - t_1)^\mu \leq \\
& \leq \tilde{C} \max_{J=1}^{m_k} \left[\int_0^{t_\omega} (t_\omega - \tau)^{-(\beta_{k,j} + \mu)(1 + \frac{1}{p_J' - 1})} d\tau \right]^{1 - \frac{1}{p_J'}} \|u_2 - u_1\|_{Z_\rho} (t_2 - t_1)^\mu \leq \\
& \leq \tilde{C} \left[\max_{k=-k_0}^{k_0} \max_{1 \leq j \leq m_k} \max_{J=1}^{m_k} t_0^{1 - \frac{1}{p_J'} - \beta_{k,j} - \mu} \right] \|u_2 - u_1\|_{Z_\rho} (t_2 - t_1)^\mu,
\end{aligned}$$

где $C_8 \equiv 3(2k_0 + 1)2^{2m} k_0^m C_B C_4 C_5(\mu) C_7 C_D C_g$, $m \equiv \max_{|k| \leq k_0} m_k$, а $\tilde{C}$ — некоторая константа.

Соответствующая оценка в пространстве $C(Y_{k,j})$ устанавливается аналогично. Лемма 4.10 доказана. $\triangleright$

Лемма 4.11. Пусть $0 < r_1 \leq r_0$, $|k| \leq k_0$, $1 \leq j \leq m_k$. Тогда существует такое число $C > 0$, что при $\omega > \omega_2$ для всех вектор-функций u_1, u_2 из шара $\|u\|_{Z_\rho} \leq r_1$ выполняется оценка

$$\|B_{k,j}(P_{\omega,21}(u_2) - P_{\omega,21}(u_1))\|_{C_\mu(Y_{k,j})} \leq C\|u_2 - u_1\|_{Z_\rho}.$$

$C = C(r_0)$ не зависит от r_1 .

$\triangleleft$ Из соотношений (4.47) и (4.9) получаем, что

$$\|\tilde{\eta}_k[u_2(\tau) + u_0, \omega\tau] - \tilde{\eta}_k[u_1(\tau) + u_0, \omega\tau]\|_{L_{\rho^0}} \leq \tilde{C}\|u_2 - u_1\|_{Z_\rho},$$

где $\tilde{C}$ — некоторая константа. Исходя из этой оценки, утверждение леммы можно доказать аналогично [143, гл. I, лемма 2.3]. $\triangleright$

С помощью уже применявшихся в этом пункте методов устанавливаются следующие две леммы.

Лемма 4.12. Существуют такие положительные числа C и ω_3 , что при любых $r_1 \in (0, r_0]$, $\omega \in (\omega_3, \infty)$, $\nu \in [1, \rho - 1]$ для всех вектор-функций u_1, u_2 из шара $\|u\|_{Z_\rho} \leq r_1$ выполняется оценка

$$\|P_\omega(u_2) - P_\omega(u_1)\|_{Z_{\nu+1}} \leq C\|u_2 - u_1\|_{Z_\nu}.$$

Пусть $Z^{(4)} \equiv Z_\mu^{(1)}([0, t_0])$.

Лемма 4.13. Существуют такие положительные числа C и ω_4 , что при любых $r_1 \in (0, r_0]$, $\omega \in (\omega_4, \infty)$ для всех вектор-функций u_1, u_2 из шара $\|u\|_{Z_\rho} \leq r_1$ выполняется оценка

$$\|P_\omega(u_2) - P_\omega(u_1)\|_{Z^{(4)}} \leq C\|u_2 - u_1\|_{Z_\rho}.$$

4.1.8. Доказательство основного результата I: обоснование метода усреднения. В этом пункте мы докажем утверждения 1, 2 теоремы 4.2. Начнем с утверждения 1.

Лемма 4.14. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta > 0$ и $\omega_5 > 0$, что для всех $k \in [-k_0, k_0]$, $j \in [1, m_k]$, $\omega \in (\omega_5, \infty)$ и вектор-функций u_1, u_2 из шара $\|u\|_{Z^{(4)}} < \delta$ справедливо соотношение

$$\|B_{k,j}(P_{\omega,2}(u_2) - P_{\omega,2}(u_1))\|_{C(Y_{k,j})} < \varepsilon\|u_2 - u_1\|_{Z^{(4)}}. \quad (4.49)$$

◁ Здесь существенно используются методы, изложенные в монографии [116].

Будем рассматривать только такие u_1, u_2 , которые находятся в шаре $\|u\|_{Z^{(4)}} \leq 1$. Из условия II следует, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и постоянных v_1, v_2 из шара $\|u\|_{Z^{(1)}} \leq 1$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \max_{|\varkappa| < k_0} \|\tilde{\eta}_\varkappa(v_2, \tau) - \tilde{\eta}_\varkappa(v_1, \tau)\|_X \leq \\ & \leq C_\eta \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq j \leq m_k} \|B_{k,j}(v_2 - v_1)\|_{Y_{k,j}}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Рассмотрим сначала выражение $\|B_{k,j}(P_{\omega,21}(u_2) - P_{\omega,21}(u_1))\|_{C(Y_{k,j})}$. Обозначим $d \equiv \left(\frac{\varepsilon(1-\alpha_{k,j})}{16C_B C_D C_6 C_\eta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_{k,j}}}$. Тогда если $t \leq d$, то по (4.43) верны соотношения

$$\begin{aligned} & \|B_{k,j}(P_{\omega,21}(u_2) - P_{\omega,21}(u_1))\|_{C(Y_{k,j})} \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{8} \|u_2 - u_1\|_{Z^{(4)}} < \frac{\varepsilon}{4} \|u_2 - u_1\|_{Z^{(4)}}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

В противном случае разобьем соответствующий интеграл на два:

$$\begin{aligned} & (P_{\omega,21}u_2)(t) - (P_{\omega,21}u_1)(t) = \\ & = \int_0^{t-d} e^{-(t-\tau)L} (\tilde{\eta}(u_2(\tau), \omega\tau) - \tilde{\eta}(u_1(\tau), \omega\tau)) d\tau + \\ & + \int_{t-d}^t e^{-(t-\tau)L} (\tilde{\eta}(u_2(\tau), \omega\tau) - \tilde{\eta}(u_1(\tau), \omega\tau)) d\tau \equiv P_{\omega,211}(t) + P_{\omega,212}(t). \end{aligned}$$

Пусть

$$N = N(t, \omega) = \left\lceil \frac{\omega(t-d)}{2\pi} \right\rceil, \quad \tau_j = \frac{2\pi j}{\omega}, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Имеем равенство

$$\begin{aligned}
B_{k,j}P_{\omega,211}(t) &= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{|\varkappa| \leq k_0} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} B_{k,j} (e^{-(t-\tau)L} - e^{-(t-\tau_l)L}) \times \\
&\quad \times D^{(\varkappa)}(\tilde{\eta}_{\varkappa}(u_2(\tau), \omega\tau) - \tilde{\eta}_{\varkappa}(u_1(\tau), \omega\tau)) d\tau + \\
&+ \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{|\varkappa| \leq k_0} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} B_{k,j} e^{-(t-\tau_l)L} D^{(\varkappa)} \left((\tilde{\eta}_{\varkappa}(u_2(\tau), \omega\tau) - \tilde{\eta}_{\varkappa}(u_2(\tau_l), \omega\tau)) - \right. \\
&\quad \left. - (\tilde{\eta}_{\varkappa}(u_1(\tau), \omega\tau) - \tilde{\eta}_{\varkappa}(u_1(\tau_l), \omega\tau)) \right) d\tau + \\
&+ \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{|\varkappa| \leq k_0} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} B_{k,j} e^{-(t-\tau_l)L} D^{(\varkappa)} (\tilde{\eta}_{\varkappa}(u_2(\tau_l), \omega\tau) - \tilde{\eta}_{\varkappa}(u_1(\tau_l), \omega\tau)) d\tau + \\
&+ \sum_{|\varkappa| \leq k_0} \int_{\tau_N}^{t-d} B_{k,j} e^{-(t-\tau)L} D^{(\varkappa)} (\tilde{\eta}_{\varkappa}(u_2(\tau), \omega\tau) - \tilde{\eta}_{\varkappa}(u_1(\tau), \omega\tau)) d\tau \equiv \\
&\equiv B_{k,j} [P_{\omega,2111}(t) + P_{\omega,2112}(t) + P_{\omega,2113}(t) + P_{\omega,2114}(t)].
\end{aligned}$$

Отметим, что третье слагаемое равно нулю. Далее, учитывая (4.41)–(4.43), при $\tau_j \leq \tau \leq t-d$ выводим оценку

$$\begin{aligned}
&\|B_{k,j} (e^{-(t-\tau)L} - e^{-(t-\tau_j)L}) D^{(\varkappa)}\|_{\text{Hom}(X, Y_{k,j})} = \\
&= \left\| \int_{\tau_j}^{\tau} B_{k,j} L e^{-(t-s)L} D^{(\varkappa)} ds \right\|_{\text{Hom}(X, Y_{k,j})} \leq C_{11}(\tau - \tau_j),
\end{aligned}$$

где $C_{11} \equiv 9C_B C_L C_D C_6 d_1^{-(1+\beta)}$, причем $d_1 = \min(1, d)$. Таким образом, из (4.42), (4.43) получаем соотношения

$$\begin{aligned}
&\|B_{k,j}(P_{\omega,2111} + P_{\omega,2114})(t)\|_{Y_{k,j}} \leq \\
&\leq \left(C_{\eta} C_{11} N \frac{2\pi^2}{\omega^2} + 2C_B C_D C_6 C_{\eta} d^{-\alpha_{k,j}} \frac{2\pi}{\omega} \right) \|u_2 - u_1\|_{Z^{(4)}} \leq \quad (4.52) \\
&\leq \left(\frac{1}{2} C_{11} t_0 + 2C_B C_D C_6 d^{-\alpha_{k,j}} \right) C_{\eta} \frac{2\pi}{\omega} \|u_2 - u_1\|_{Z^{(4)}}.
\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$D\eta_k(u, \tau) \equiv Dg_k(u + N(\tau))e^{ik\tau},$$

$$DH_k(u) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Dg_k(u_0 + N(\tau)) e^{ik\tau} d\tau,$$

$$D\tilde{\eta}_k(u, \tau) \equiv D\eta_k(u, \tau) - DH_k(u).$$

Воспользовавшись (4.42), (4.43) и формулой конечных приращений, выводим неравенства

$$\begin{aligned} \|B_{k,j} P_{\omega,2112}(t)\|_{Y_{k,j}} &\leq 2C_B C_D C_6 d_1^{-\beta} C_\eta \sum_{J=0}^{N-1} \sum_{|\varkappa| \leq k_0} \int_{\tau_J}^{\tau_{J+1}} \left\| \int_0^1 D\tilde{\eta}_\varkappa \times \right. \\ &\quad \times [u_1(\tau) + \alpha(u_2(\tau) - u_1(\tau)), \omega\tau] d\alpha(u_2(\tau) - u_1(\tau)) - \\ &\quad \left. - \int_0^1 D\tilde{\eta}_\varkappa [u_1(\tau_J) + \alpha(u_2(\tau_J) - u_1(\tau_J)), \omega\tau] d\alpha(u_2(\tau_J) - u_1(\tau_J)) \right\|_X d\tau \leq \\ &\leq 2C_B C_D C_6 d_1^{-\beta} C_\eta \sum_{J=0}^{N-1} \sum_{|\varkappa| \leq k_0} \int_{\tau_J}^{\tau_{J+1}} \left\| \int_0^1 (D\tilde{\eta}_\varkappa [u_1(\tau) + \alpha(u_2(\tau) - \right. \\ &\quad \left. - u_1(\tau)), \omega\tau] - D\tilde{\eta}_\varkappa [u_1(\tau_J) + \alpha(u_2(\tau_J) - u_1(\tau_J)), \omega\tau]) d\alpha \times \right. \\ &\quad \left. \times (u_2(\tau) - u_1(\tau)) + \int_0^1 D\tilde{\eta}_\varkappa [u_1(\tau_J) + \alpha(u_2(\tau_J) - u_1(\tau_J)), \omega\tau] d\alpha \times \right. \\ &\quad \left. \times [(u_2(\tau) - u_1(\tau)) - (u_2(\tau_J) - u_1(\tau_J))] \right\|_X d\tau \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Из вида функций $\tilde{\eta}_\varkappa$ (см. (4.46), (4.7), (4.18)), формулы (4.8) и условия III следует существование такого $\omega_{51} > \omega_2$, что при всех $\omega > \omega_{51}$, $\tau \in [\tau_j(\omega), \tau_{j+1}(\omega)]$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^1 (D\tilde{\eta}_\varkappa [u_1(\tau) + \alpha(u_2(\tau) - u_1(\tau)), \omega\tau] - D\tilde{\eta}_\varkappa [u_1(\tau_j) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha(u_2(\tau_j) - u_1(\tau_j)), \omega\tau]) d\alpha(u_2(\tau) - u_1(\tau)) \right\|_X < \quad (4.53) \\ &< \frac{d_1^\beta}{64C_B C_D C_6 C_\eta} \varepsilon \|u_2 - u_1\|_{Z^{(4)}}. \end{aligned}$$

Из тех же формул и условия III получаем неравенство

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 3CC_B C_D C_6 d_1^{-\beta} C_\eta \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\tau - \tau_j)^\mu d\tau \|u_2 - u_1\|_{Z^{(4)}} \leq \\ &\leq 3CC_B C_D C_6 d_1^{-\beta} C_\eta \frac{1}{1+\mu} \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^\mu \|u_2 - u_1\|_{Z^{(4)}}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

где C — некоторая константа. Таким образом, из соотношений (4.51)–(4.54) следует, что при $\omega > \max(\omega_{51}, \omega_{52})$, где

$$\begin{aligned} \omega_{52} &\equiv \max \left(32\pi \left(\frac{1}{2} C_{11} t_0 + 2C_B C_D C_6 d^{-\alpha_{k,j}} \right) \frac{C_\eta}{\varepsilon}, \right. \\ &\quad \left. 2\pi \left(\frac{96}{1+\mu} \frac{CC_B C_D C_6 d_1^{-\beta} C_\eta}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right), \end{aligned}$$

справедлива оценка

$$\|B_{k,j}[P_{\omega,21}(u_2) - P_{\omega,21}(u_1)]\|_{C(Y_{k,j})} < \frac{\varepsilon}{4} \|u_2 - u_1\|_{Z^{(4)}}.$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} &P_{\omega,22}(u_2) - P_{\omega,22}(u_1) = \\ &= \int_0^t e^{-(t-\tau)L} \{ [H(u_2(\tau) + u_0) - H(u_1(\tau) + u_0)] - A_1[u_2(\tau) - u_1(\tau)] \} d\tau = \\ &= \int_0^t e^{-(t-\tau)L} \int_0^1 \{ DH[u_0 + u_1(\tau) + \alpha(u_2(\tau) - u_1(\tau))] - A_1 \} \times \\ &\quad \times [u_2(\tau) - u_1(\tau)] d\alpha d\tau. \end{aligned}$$

Вспомним, что $A_1 = DH(u_0)$. Поэтому из формул (4.7), (4.8) и условия III нетрудно получить существование такого числа $\delta > 0$, что для всех вектор-функций u_1, u_2 из шара $\|u\| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$\|B_{k,j}P_{\omega,22}(u_2) - P_{\omega,22}(u_1)\|_{C(Y_{k,j})} \leq \frac{\varepsilon}{4} \|u_2 - u_1\|_{Z^{(4)}}.$$

Оценим, наконец, норму $\|B_{k,j}(P_{\omega,23}(u_2) - P_{\omega,23}(u_1))\|_{C(Y_{k,j})}$. В силу (4.20) и условия III, найдется такое $\omega_{53} > \omega_2$, что для любых $\omega > \omega_{53}$ верно неравенство

$$\|B_{k,j}(P_{\omega,23}(u_2) - P_{\omega,23}(u_1))\|_{C(Y_{k,j})} < \frac{\varepsilon}{4} \|u_2 - u_1\|_{Z^{(4)}}.$$

Итак, достаточно взять $\omega_5 = \max(\omega_{51}, \omega_{52}, \omega_{53})$. Тогда при всех u_1, u_2 из шара $\|u\|_{Z^{(4)}} < \delta$ и $\omega > \omega_5$ выполняется соотношение (4.49). Лемма 4.14 доказана. $\triangleright$

Следствие 4.4. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta_1 > 0$ и $\omega_6 > 0$, что для всех $k \in [-k_0, k_0]$, $j \in [1, m_k]$, $\omega \in (\omega_6, \infty)$ и вектор-функций u_1, u_2 из шара $\|u\|_{Z^{(4)}} < \delta_1$ справедливо соотношение

$$\|B_{k,j}(P_{\omega,1}(u_2) - P_{\omega,1}(u_1))\|_{C(Y_{k,j})} < \varepsilon \|u_2 - u_1\|_{Z^{(4)}}. \quad (4.55)$$

$\triangleleft$ Утверждение вытекает из формул (4.40), (4.44) и леммы 4.14. $\triangleright$

Пусть μ_1 — произвольное число из интервала $(\mu, 1 - \beta)$. Из интерполяционного неравенства [116, лемма 3.16]

$$\begin{aligned} \|x\|_{C^\mu([0, T_1], X)} &\leq \|x\|_{C([0, T_1], X)} + \\ &+ (2\|x\|_{C([0, T_1], X)})^{1-\frac{\mu}{\mu_1}} \|x\|_{C^{\mu_1}([0, T_1], X)}^{\frac{\mu}{\mu_1}} \end{aligned} \quad (4.56)$$

следует, что для доказательства малости некоторой величины в пространстве $C^\mu([0, t_0], Y_{k,j})$ достаточно установить ее малость в $C([0, t_0], Y_{k,j})$ и ограниченность в $C^{\mu_1}([0, t_0], Y_{k,j})$.

Аналогично леммам 4.10 и 4.11, доказывается следующее утверждение.

Лемма 4.15. Существуют такие $C > 0$ и $\omega_7 > 0$, что для всех $k \in [-k_0, k_0]$, $j \in [1, m_k]$, $\omega \in (\omega_7, \infty)$, $r_1 \in (0, r_0]$ и вектор-функций u_1, u_2 из шара $\|u\|_{Z^{(4)}} \leq r_1$ справедливо соотношение

$$\|B_{k,j}(P_\omega(u_2) - P_\omega(u_1))\|_{C_{\mu_1}(Y_{k,j})} \leq C \|u_2 - u_1\|_{Z^{(4)}}. \quad (4.57)$$

Аналогичные неравенствам (4.49), (4.55) и (4.57) оценки, в которых вместо пространства $Y_{k,j}$ фигурирует X , а вместо оператора $B_{k,j}$ — единичный оператор, получаются теми же методами. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 4.16. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ и $\omega_8 = \omega_8(\varepsilon) > 0$, что для всех $k \in [-k_0, k_0]$, $j \in [1, m_k]$, $\omega \in (\omega_8, \infty)$ и вектор-функций u_1, u_2 из шара $\|u\|_{Z^{(4)}} < \delta_2$ справедливо соотношение

$$\|P_\omega(u_2) - P_\omega(u_1)\|_{Z^{(4)}} < \varepsilon \|u_2 - u_1\|_{Z^{(4)}}.$$

Уже примененными методами доказывается, что при достаточно больших ω выполняется оценка $\|P_\omega(0)\|_{Z^{(4)}} \leq \frac{1}{2} \delta_2(\frac{1}{2})$. Значит, при достаточно больших ω для любой вектор-функции u , находящейся в шаре $\|u\|_{Z^{(4)}} \leq \delta_2(\frac{1}{2})$, имеет место цепочка неравенств

$$\|P_\omega(u)\|_{Z^{(4)}} \leq \|P_\omega(0)\|_{Z^{(4)}} + \|P_\omega(u) - P_\omega(0)\|_{Z^{(4)}} \leq \delta_2\left(\frac{1}{2}\right),$$

из которой следует, что шар $\|u\|_{Z^{(4)}} < \delta_2(\frac{1}{2})$ является инвариантным относительно оператора P_ω .

Поэтому, на основании принципа сжатых отображений, существуют $\omega_3 \geq \omega_2$ и $r_0 > 0$ такие, что при $\omega > \omega_3$ интегральное уравнение (4.45) имеет единственное в шаре $\|u\|_{Z^{(4)}} < r_0$ решение u_ω и при этом справедливо соотношение $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|u_\omega\|_{Z^{(4)}} = 0$.

Ввиду 2π -периодичности функции h по второму аргументу и относительно единственности решения $u_\omega(t)$, это решение является $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодическим. Продолжив функцию $u_\omega(t)$ $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодически на всю вещественную ось и сохранив за этим продолжением прежнее обозначение, получим единственное в шаре $\|u\|_{Z_\mu^{(1)}} < r_0$ $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодическое решение, для которого выполняется соотношение (4.22). Рассуждая так же, как при доказательстве лемм 4.10, 4.11, нетрудно найти такие $r > 0$, $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ всякое (обобщенное) решение уравнения (4.19), находящееся в шаре (4.14), принадлежит и шару $\|u\|_{Z_\mu^{(1)}} < r_0$. В силу замечания, приведенного в начале п. 4.1.4, утверждение 1 теоремы 4.2 доказано.

Перейдем теперь к утверждению 2. Соответственно, будем считать выполненным предположение VIII. Из изложенного в п. 4.1.7 и п. 4.1.8 вытекает следующая лемма.

Лемма 4.17. Существуют такие числа $r_1 > 0$ и $\omega_9 \geq \omega_2$, что при $\omega > \omega_9$ оператор P_ω^{p+1} , т. е. $(p+1)$ -я итерация оператора P_ω , является сжатием в шаре $\|u\|_{Z_0} \leq r_1$, а относительно P_ω^{p+2} этот шар инвариантен.

Отсюда следует существование такой функции u из указанного шара, что $P_\omega^{\rho+1}u = u$. Действуя оператором P_ω на обе части последнего равенства [23, с. 89], получим соотношение $P_\omega^{\rho+1}(P_\omega u) = P_\omega u$. Таким образом, при достаточно больших ω вектор-функция $P_\omega u$ также будет неподвижной точкой этого шара. Значит, $P_\omega(u) = u$, и $u(t)$ — решение интегрального уравнения (4.45). Рассуждая так же, как и выше, получаем единственность $2\pi\omega^{-1}$ -периодического решения $u(t) = u_\omega(t)$ в некотором шаре пространства $Z_0 = Z^{(2)}(0, t_0)$. Так как период $2\pi\omega^{-1}$ мал при больших ω , то для любого $R > 0$ найдутся такие положительные числа ω_0 и $r = r(r_1, R)$, что при $\omega > \omega_0$ единственность $2\pi\omega^{-1}$ -периодического решения имеет место и в шаре $\|u_\omega\|_{Z^{(2)}(0, R)} < \frac{r}{2}$. Утверждение 2 теоремы 4.2 доказано.

4.1.9. Доказательство основного результата II: устойчивость решения. В п. 4.1.9 и п. 4.1.10 используются методы и подходы работ [23, 49, 62, 116, 143]. Здесь мы докажем утверждение 3 теоремы 4.2. Учитывая его предположение, будем считать, что $\sigma_2 < 0$.

Нетрудно убедиться, что для доказательства утверждения 3 теоремы 4.2 достаточно установить аналогичный факт для решения $u_\omega(t)$ уравнения (4.19).

Введем вспомогательное пространство Θ_μ , $0 < \mu < 1$, с помощью нормы

$$\begin{aligned} \|u\|_{\Theta_\mu} = & \|u\|_{C^{[0, +\infty)}(X)} + \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq j \leq m_k} \left[\|B_{k,j}u\|_{C^{[0,1]}(Y_{k,j})} + \right. \\ & \left. + \sup_{0 < t_1 < t_2 \leq 1} t_1^\mu \frac{\|B_{k,j}(u(t_2) - u(t_1))\|_{Y_{k,j}}}{(t_2 - t_1)^\mu} + \|B_{k,j}u\|_{C_\mu^{[1, +\infty)}(Y_{k,j})} \right]. \end{aligned}$$

Аналогично введем $\Theta_{\mu,l}$ для $l > 0$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{\Theta_{\mu,l}} = & \|u\|_{C^{[0,l]}(X)} + \|u\|_{C^{[0,l]}(\Upsilon^\beta)} + \\ & + \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq j \leq m_k} \left[\|B_{k,j}u\|_{C^{[0,l]}(Y_{k,j})} + \right. \\ & \left. + \sup_{0 < t_1 < t_2 \leq l} t_1^\mu \frac{\|B_{k,j}(u(t_2) - u(t_1))\|_{Y_{k,j}}}{(t_2 - t_1)^\mu} \right], \end{aligned}$$

если $0 < l \leq 1$, и нормой

$$\begin{aligned} \|u\|_{\Theta_{\mu,l}} &= \|u\|_{C^{[0,l]}(X)} + \|u\|_{C^{[0,l]}(\Upsilon^{\beta})} + \\ &+ \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq j \leq m_k} \left[\|B_{k,j}u\|_{C^{[0,1]}(Y_{k,j})} + \right. \\ &\left. + \sup_{0 < t_1 < t_2 \leq 1} t_1^{\mu} \frac{\|B_{k,j}(u(t_2) - u(t_1))\|_{Y_{k,j}}}{(t_2 - t_1)^{\mu}} + \|B_{k,j}u\|_{C_{\mu}^{[1,l]}(Y_{k,j})} \right] \end{aligned}$$

для $l > 1$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 4.18. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные числа δ и ω_0 , что при любых $s \in \mathbb{R}$, $\|a\|_{\Upsilon^{\beta}} \leq \delta$ и $\omega > \omega_0$ существует единственное на полуинтервале $[s, +\infty)$ решение $u(t)$ задачи Коши для уравнения (4.19) с начальным условием

$$u(s) = a. \quad (4.58)$$

При этом для вектор-функции $\hat{u}(t) = u(t + s)$ выполняется оценка

$$\|\hat{u}\|_{\Theta_{\mu}} \leq \varepsilon. \quad (4.59)$$

◁ От задачи Коши (4.19), (4.58) перейдем к эквивалентному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= e^{-tL}a + \int_0^t e^{-(t-\tau)L} [\hat{\eta}(\hat{u}(\tau) + u_0, \omega\tau) + H(\hat{u}(\tau) + u_0) - \\ &- H(u_0) - A_1\hat{u}(\tau) + \hat{\psi}_{\omega}(\hat{u}(\tau) + u_0, \omega\tau)] d\tau \equiv \{[\hat{P}_{\omega}(a)]\hat{u}\}(t), \end{aligned}$$

где

$$\hat{\eta}(u, \tau) \equiv \tilde{\eta}(u, \tau + s), \quad \hat{\psi}_{\omega}(u, \tau) \equiv \psi_{\omega}(u, \tau + s).$$

Мы хотим показать, что оператор $\hat{P}_{\omega}(a)\hat{u}$ при достаточно больших ω и малых a удовлетворяет в шаре (4.59) принципу сжатых отображений. Для этого нам понадобится ряд оценок.

Неравенство

$$\|e^{-tL}a\|_{\Theta_{\mu}} \leq C\|a\|_{\Upsilon^{\beta}} \quad (4.60)$$

с некоторой постоянной C доказывается так же, как [116, лемма 3.1].

Также можно установить существование таких положительных чисел $\varepsilon_0 < \varepsilon$, ω_0 и δ , что при $\omega > \omega_0$, $\|a\|_{Y^{\bar{\beta}}} \leq \delta$ и $\|\hat{u}\|_{\Theta_\mu} \leq \varepsilon_0$ выполняются соотношения

$$\|D_{\hat{u}}[\hat{P}_\omega(a)\hat{u}]\|_{\text{Hom}(\Theta_\mu, \Theta_\mu)} < \frac{1}{2}, \quad \|\hat{P}_\omega(a)0\|_{\Theta_\mu} \leq \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (4.61)$$

Через $D_{\hat{u}}f(\hat{u})$ здесь обозначена производная Фреше вектор-функции f .

Доказательство этих соотношений имеет много общего с доказательством утверждения 1 теоремы 4.2. Приведем лишь те его фрагменты, в которых содержатся идеи, не использовавшиеся в п. 4.1.7 и п. 4.1.8.

Зафиксируем сколь угодно малое $\varepsilon_1 \in (0, \frac{1}{2})$. Под $D\hat{\eta}$ будем понимать производную Фреше в пространстве X функции $\hat{\eta}$ по первому аргументу. Для $k \in [-k_0, k_0]$, $j \in [1, m_k]$, $\|\hat{u}\|_{\Theta_\mu} \leq \varepsilon$, $v \in \Theta_\mu$, $\omega \in [\omega_2, +\infty)$, $t \in [0, +\infty)$ рассмотрим выражение

$$\left\| \int_0^t B_{k,j} e^{-(t-\tau)L} D^{(\varkappa)} D\hat{\eta}_\varkappa(\hat{u}(\tau) + u_0, \omega\tau)v(\tau) d\tau \right\|_{Y_{k,j}}, \quad (4.62)$$

где $D\hat{\eta}_\varkappa(u, \tau) = D\tilde{\eta}_\varkappa(u, \tau + s)$.

Пусть $d \equiv \left(\frac{(1-\alpha_{k,j})\varepsilon_1}{8C_B C_D C_\eta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_{k,j}}}$. Тогда выполняется оценка

$$\left\| \int_{[0, \min(t,d)] \cup [\max(0,t-d), t]} B_{k,j} e^{-(t-\tau)L} D^{(\varkappa)} D\hat{\eta}_\varkappa(\hat{u}(\tau) + u_0, \omega\tau)v(\tau) d\tau \right\|_{Y_{k,j}} \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \|v\|_{\Theta_\mu}. \quad (4.63)$$

Так как интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sigma_2 s}}{s^{\alpha_{k,j}}} ds$$

сходится, то существует настолько большое число $R \geq 0$, что справедливо неравенство

$$\int_{d+R}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma_2 s}}{s^{\alpha_{k,j}}} ds < \frac{\varepsilon_1}{8C_B C_D C_\eta},$$

и, значит, имеет место соотношение

$$\left\| \int_0^{\max(0, t-(d+R))} B_{k,j} e^{-(t-\tau)L} D^{(\varkappa)} D\hat{\eta}_{\varkappa}(\hat{u}(\tau) + u_0, \omega\tau) v(\tau) d\tau \right\|_{Y_{k,j}} < \frac{\varepsilon_1}{4} \|v\|_{\theta_\mu}.$$

Из формулы (4.63) следует, что при $t \leq 2d$ выражение (4.62) не превосходит $\varepsilon_1 \|v\|_{\theta_\mu}$. Пусть $t > 2d$. Введем следующие числа:

$$d_1 = d_1(t) = \max(d, t - (d + R)), \quad N = N(t, \omega) = \frac{(t - d - d_1)\omega}{2\pi},$$

$$\tau_j = d_1 + \frac{2\pi j}{\omega}, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\begin{aligned} & \int_{d_1}^{t-d} B_{k,j} e^{-(t-\tau)L} D^{(\varkappa)} D\hat{\eta}_{\varkappa}(\hat{u}(\tau) + u_0, \omega\tau) v(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} B_{k,j} (e^{-(t-\tau)L} - e^{-(t-\tau_j)L}) D^{(\varkappa)} D\hat{\eta}_{\varkappa}(\hat{u}(\eta) + u_0, \omega\tau) v(\tau) d\tau + \\ & \quad + \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} B_{k,j} e^{-(t-\tau_j)L} D^{(\varkappa)} (D\hat{\eta}_{\varkappa}(\hat{u}(\tau) + u_0, \omega\tau) - \\ & \quad - D\hat{\eta}_{\varkappa}(\hat{u}(\tau_j) + u_0, \omega\tau)) v(\tau) d\tau + \\ & \quad + \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} B_{k,j} e^{-(t-\tau_j)L} D^{(\varkappa)} D\hat{\eta}_{\varkappa}(\hat{u}(\tau_j) + u_0, \omega\tau) (v(\tau) - v(\tau_j)) d\tau + \\ & \quad + \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} B_{k,j} e^{-(t-\tau_j)L} D^{(\varkappa)} D\hat{\eta}_{\varkappa}(\hat{u}(\tau_j) + u_0, \omega\tau) v(\tau_j) d\tau + \\ & \quad + \int_{\tau_N}^{t-d} B_{k,j} e^{-(t-\tau)L} D^{(\varkappa)} D\hat{\eta}_{\varkappa}(\hat{u}(\tau) + u_0, \omega\tau) v(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Четвертое слагаемое равно нулю, первое и пятое оцениваются так же, как в лемме 4.14. А во втором и третьем слагаемом нужно лишь несколько по-другому оценить разности вида

$$\|B_{k,j}(w(\tau) - w(\tau_j))\|_{Y_{k,j}}$$

для $w \in \Theta_\mu$, $\tau_j < 1$. Если при этом $\tau \leq 1$, то

$$\|B_{k,j}(w(\tau) - w(\tau_j))\|_{Y_{k,j}} \leq \frac{(\tau - \tau_j)^\mu}{\tau_j^\mu} \|w\|_{\theta_\mu} \leq \frac{(\tau - \tau_j)^\mu}{d^\mu} \|w\|_{\theta_\mu}.$$

Если же $\tau > 1$, то предварительно прибавляем и вычитаем вектор $B_{k,j}w(1)$:

$$\begin{aligned} \|B_{k,j}(w(\tau) - w(\tau_j))\|_{Y_{k,j}} &\leq \|B_{k,j}(w(\tau) - w(1))\|_{Y_{k,j}} + \\ &+ \|B_{k,j}(w(1) - w(\tau_j))\|_{Y_{k,j}} \leq \left((\tau - 1)^\mu + \frac{(1 - \tau_j)^\mu}{d^\mu} \right) \|w\|_{\theta_\mu} \leq \\ &\leq (1 + d^{-\mu})(\tau - \tau_j)^\mu \|w\|_{\theta_\mu}. \end{aligned}$$

Учитывая выписанные оценки, так же, как в лемме 4.14, доказывается, что выражение (4.62) меньше $\varepsilon_1 \|v\|_{\Theta_\mu}$ при достаточно больших ω и малых по норме пространства Θ_μ вектор-функциях $\hat{u}$. Справедливость соотношений (4.61) устанавливается с помощью методов, изложенных в данной лемме и пп. 4.1.7, 4.1.8. При этом нужно отметить, что в Θ_μ непрерывно вложено пространство $Y_\mu^{[0,+\infty)}$ вектор-функций, для которых определена норма

$$\|w\|_{Y_\mu^{[0,+\infty)}} = \|w\|_{C^{[0,+\infty)}(X)} + \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq j \leq m_k} \|B_{k,j}w\|_{C_\mu^{[0,+\infty)}(Y_{k,j})}.$$

Из оценок (4.61) следует, что при $\omega > \omega_0$, $\|a\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} < \delta$ оператор $\hat{P}_\omega(a)$ удовлетворяет в шаре $\|\hat{u}\|_{\Theta_\mu} \leq \varepsilon_0$ принципу сжатых отображений, из которого следует существование ограниченного решения $u(t)$. Единственность этого решения доказывается аналогично [116, лемма 3.11]: вместо фигурирующих там оценок в пространстве B^β нужно использовать выражения вида

$$\sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq j \leq m_k} \|B_{k,j}w\|_{Y_{k,j}}.$$

Лемма 4.18, таким образом, доказана. $\triangleright$

Экспоненциальная устойчивость в смысле утверждения 3 теоремы 4.2 вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.19. *Существуют такие положительные числа δ , ω_0 и C , что при всех $\omega > \omega_0$ и любых решениях $u(t)$, $v(t)$, $t \geq s$, уравнения (4.19), для которых выполняется неравенства $\|u(s)\|_{Y^\beta} \leq \delta$, $\|v(s)\|_{Y^\beta} \leq \delta$, справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_X + \sum_{k=-k_0}^{k_0} \sum_{j=1}^{m_k} \|B_{k,j}(u(t) - v(t))\|_{Y_{k,j}} &\leq \\ &\leq Ce^{-\frac{\sigma_2}{2}(t-s)} \|u(s) - v(s)\|_{Y^\beta}, \quad t \geq s. \end{aligned} \quad (4.64)$$

◁ Прежде всего потребуем, чтобы числа δ и ω_0 удовлетворяли условию предыдущей леммы. Обозначим $\hat{u}(t) = u(t+s)$, $\hat{v}(t) = v(t+s)$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) - \hat{v}(t) &= e^{-tL}(\hat{u}(0) - \hat{v}(0)) + \\ &+ \int_0^t e^{-(t-\tau)L} [h(\hat{u}(\tau), \omega(\tau+s), \omega) - h(\hat{v}(\tau), \omega(\tau+s), \omega)] d\tau. \end{aligned}$$

Умножим обе его части на $e^{\frac{\sigma_2}{2}t}$, обозначим $w(t) \equiv [\hat{u}(t) - \hat{v}(t)]e^{\frac{\sigma_2}{2}t}$ и применим формулу конечных приращений. Воспользовавшись леммой 4.2, получим соотношение

$$\begin{aligned} w(t) &= e^{t(-L+\frac{\sigma_2}{2}I)}(\hat{u}(0) - \hat{v}(0)) + \int_0^t e^{(t-\tau)(-L+\frac{\sigma_2}{2}I)} \times \\ &\times \int_0^1 Dh(\hat{v}(\tau) + \gamma(\hat{u}(\tau) - \hat{v}(\tau)), \omega(\tau+s), \omega) d\gamma w(\tau) d\tau \equiv \\ &\equiv e^{t(-L+\frac{\sigma_2}{2}I)}(\hat{u}(0) - \hat{v}(0)) + (\tilde{P}_\omega w)(t), \end{aligned} \quad (4.65)$$

где

$$Dh(u, \tau, \omega) \equiv D\eta(u + u_0, \tau) - DH(u_0) - A_1 + D\psi_\omega(u + u_0, \tau),$$

$$D\psi_\omega(u, \tau) \equiv \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} D^{(k)}(Dg_k(u+N(\tau)+Q_\omega(\tau)) - (Dg_k(u+N(\tau))))e^{ik\tau}.$$

Ясно, что $\operatorname{Re} \sigma(-L + \frac{\sigma_2}{2}) \leq \frac{\sigma_2}{2}$. Так же, как оценки (4.61), доказывается, что существуют такие положительные числа δ и ω_0 , что при $\omega > \omega_0$, $\|\hat{u}(0)\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} \leq \delta$, $\|\hat{v}(0)\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} \leq \delta$ справедливо неравенство

$$\|\tilde{P}_\omega\|_{\operatorname{Hom}(\Theta_\mu, \Theta_\mu)} < \frac{1}{2}. \quad (4.66)$$

Формула (4.64) следует из соотношений (4.65), (4.66). Лемма 4.19 и, соответственно, утверждение 3 теоремы 4.2 доказаны. $\triangleright$

4.1.10. Доказательство основного результата III: неустойчивость решения. В этом пункте мы докажем утверждение 4 теоремы 4.2. Заметим сразу, что для этого достаточно установить аналогичный факт для решения $u_\omega(t)$ уравнения (4.19). Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.20. *Существуют такие числа l , ε_0 , ω_0 и C , что для любых $\omega > \omega_0$, $s \in \mathbb{R}$ и $a \in \Upsilon^{\bar{\beta}}$ задача Коши (4.19), (4.58) имеет при $\omega > \omega_0$ и $s \leq t \leq s + l$ единственное решение $\hat{u}(t)$, причем выполняются оценки*

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(\cdot + s)\|_{\Theta_{\mu,t}} &\leq \varepsilon_0, \\ \|\hat{u}(\cdot + s) - u_\omega(\cdot + s)\|_{\Theta_{\mu,t}} &\leq C\|\hat{u}(s) - u_\omega(s)\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

$\triangleleft$ Вектор-функция $w(t) \equiv \hat{u}(t + s)$, если она существует, удовлетворяет интегральному уравнению

$$w(t) = e^{-tL}a + \int_0^t e^{-(t-\tau)L}h(w(\tau), \omega(\tau + s), \omega) d\tau \equiv [\hat{P}_\omega w](t).$$

Пусть $\varepsilon_0 \equiv 2\|e^{-tL}a\|_{\Theta_{\mu,1}} + 1$. Поступая так же, как в пп. 4.1.7–4.1.9, нетрудно установить существование такого $l_1 \in (0, 1]$, что при $\omega > \omega_2$ и

$$\|w\|_{\Theta_{\mu,l_1}} \leq \varepsilon_0 \quad (4.68)$$

справедливы неравенства

$$\|\hat{P}_\omega 0\|_{\Theta_{\mu,l_1}} < \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \|D\hat{P}(w)\|_{\operatorname{Hom}(\Theta_{\mu,l_1}, \Theta_{\mu,l_1})} < \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что оператор $\hat{P}_\omega$ является сжатием в шаре (4.68). Значит, при $t \in [s, s + l_1]$ решение задачи Коши (4.19), (4.58) существует, единственно (см. конец доказательства леммы 4.18) и удовлетворяет первой оценке (4.67).

Введем $v(t) = \hat{u}(t) - u_\omega(t)$, а также $\hat{v}(t) = v(t+s)$ и $\hat{u}_\omega(t) = u_\omega(t+s)$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \hat{v}(t) &= e^{-tL}\hat{v}(0) + \\ &+ \int_0^t e^{-(t-\tau)L} \int_0^1 Dh(\hat{u}_\omega(\tau) + \gamma\hat{v}(\tau), \omega(\tau+s), \omega) d\gamma v(\tau) d\tau \equiv \quad (4.69) \\ &\equiv e^{-tL}\hat{v}(0) + \{[\bar{P}_\omega(\hat{v})]\hat{v}\}(t). \end{aligned}$$

Фигурирующий здесь оператор $[\bar{P}_\omega(u)]v$ линеен по v и, вообще говоря, нелинеен по u . Можно показать, что существуют числа $\omega_0 > \omega_2$ и $l \in (0, l_1)$ такие, что при всех $\omega > \omega_0$ и любых вектор-функциях $\hat{u}$, удовлетворяющих первому неравенству (4.67), выполняется соотношение

$$\|\bar{P}_\omega(\hat{v})\|_{\text{Hom}(\Theta_{\mu,l}, \Theta_{\mu,l})} < \frac{1}{2}.$$

Утверждение леммы следует из этого соотношения и формулы (4.69). $\triangleright$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству утверждения 4 теоремы 4.2. Предположим противное. В таком случае для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что все решения $u_\omega^0(t)$ уравнения (4.19), удовлетворяющие условию

$$\|u_\omega^0(0) - u_\omega(0)\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} < \delta, \quad (4.70)$$

удовлетворяют и неравенству

$$\begin{aligned} &\|x_\omega^0(t) - x_\omega(t)\|_X + \|x_\omega^0(t) - x_\omega(t)\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} + \\ &+ \sum_{k=-k_0}^{k_0} \sum_{j=1}^{m_k} \|B_{k,j}(x_\omega^0(t) - x_\omega(t))\|_{Y_{k,j}} < \varepsilon \end{aligned} \quad (4.71)$$

при $t \geq 0$ и некоторых сколь угодно больших значениях ω .

Введем для $t \geq 0$ вектор-функцию $v(t) = v_\omega(t) \equiv u_\omega^0(t) - u_\omega(t)$, а также семейство операторов $V(t, s)$, $t \geq s \geq 0$. Пусть $V(t, 0)v(0) \equiv v(t)$, $t \geq 0$, а для $s > 0$, $\|v_0\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} < \varepsilon$ $V(t, s)$ ставит в соответствие вектору v_0 вектор $\hat{u}(t) - u_\omega(t)$, где $\hat{u}(t)$ — решение уравнения (4.19), удовлетворяющее условию $\hat{u}(s) - u_\omega(s) = v_0$. Будем считать $V(t, s)$ определенным для тех $t \geq s$, при которых $\hat{u}(t)$ существует, и его

норма в $\Upsilon^{\bar{\beta}}$ меньше ε . Ради краткости обозначим $V_k \equiv V(kl, (k-1)l)$, $k \in \mathbb{N}$. Отметим очевидную формулу

$$V(nl, 0) = V_n V_{n-1} \dots V_1. \quad (4.72)$$

Для решения $\hat{u}(t)$ уравнения (4.19), удовлетворяющего условию $\hat{u}((k-1)l) = u_\omega((k-1)l) + v_0$, выполняется равенство (см. (4.69), $s = (k-1)l$)

$$\begin{aligned} V_k v_0 &= e^{-iL} v_0 + \bar{P}_\omega [\hat{u}(t + (k-1)l) - u_\omega(t + (k-1)l)](kl) \equiv \\ &\equiv e^{-iL} v_0 + \check{P}_k(v_0). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Используя лемму 4.20, можно вывести оценку

$$\begin{aligned} \|\check{P}_k(v_0)\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} &\leq c_1(\varepsilon, \omega) \|\hat{u}(t + (k-1)l) - u_\omega(t + (k-1)l)\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} \leq \\ &\leq C c_1(\varepsilon, \omega) \|v_0\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

в которой числа C и $c_1(\varepsilon, \omega)$ не зависят от k , v_0 , а их произведение $c(\varepsilon, \omega) \equiv C c_1(\varepsilon, \omega)$ обладает следующим свойством:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0, \\ \omega \rightarrow +\infty}} c(\varepsilon, \omega) = 0.$$

Обозначим для краткости $U = e^{-tL}$. Заметим, что $\sigma(U)$ — дискретное множество, причем лишь конечное число его точек превосходит по модулю единицу. Это следует из изложенного в начале п. 4.1.6 и того, что $\sigma(-L) \cap \Sigma_{\sigma_2, \theta} = \emptyset$. Теперь разобьем $\sigma(U) = \sigma_- \cup \sigma_+$, где $\lambda \in \sigma_-$, когда $|\lambda| \leq 1$, и $\lambda \in \sigma_+$ в противном случае. При этом существует такое $r > 1$, что для $\lambda \in \sigma_+$ выполняется неравенство $|\lambda| > r$. Введем еще спектральные проекторы

$$P_- = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} (\lambda I - U)^{-1} d\lambda, \quad P_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} (\lambda I - U)^{-1} d\lambda.$$

Здесь γ_- , γ_+ — гладкие контуры, охватывающие соответственно множества σ_- , σ_+ . Пространство X разбивается на прямую сумму подпространств $X_- = P_- X$ и $X_+ = P_+ X$, а спектр сужения $U_- (U_+)$ оператора U на $X_- (X_+)$ есть $\sigma_- (\sigma_+)$.

Справедливы оценки [143, с. 156]

$$\begin{aligned} \|U_+^n a\|_X &\geq C r^n, \quad a \in X_+, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \|U_-^n\|_{\text{Hom}(X, X)} &\leq \tilde{C} r^{\frac{n}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

с некоторыми постоянными $C, \tilde{C}$. Поэтому при достаточно большом $m \in \mathbb{N}$ выполняется оценка

$$\|U_-^m\|_{\text{Hom}(X, X)} < C_9 \equiv Cr^m > 1.$$

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что она выполняется уже при $m = 1$. К этому случаю можно перейти, заменяя в дальнейших рассуждениях l на ml и, соответственно, U на U^m . При этом в аналоге соотношения (4.72) оператор $V(nml, 0)$ будет представлен в виде произведения операторов $\tilde{V}_k = V(kml, (k-1)ml)$, $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $b > 0$ — любое число. Будем считать ε настолько малым, а ω настолько большим, чтобы коэффициент $c = c(\varepsilon, \omega)$, фигурирующий в неравенстве (4.74), удовлетворял соотношениям

$$\begin{aligned} c(\varepsilon, \omega) &< \frac{(C_9 - \|U_-\|_{\text{Hom}(X, X)})b}{(b\|P_-\|_{\text{Hom}(X, X)} + \|P_+\|_{\text{Hom}(X, X)})(b+1)}, \\ c(\varepsilon, \omega) &< \frac{(C_9 - 1)b}{\|P_+\|_{\text{Hom}(X, X)}(a+1)}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Теперь рассмотрим в пространстве X множество Σ , которое состоит из векторов a , для которых выполнены условия

$$\|a\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} < \varepsilon, \quad \|P_+a\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} \geq b\|P_-a\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}}. \quad (4.77)$$

Пусть $\hat{u}_\omega^0(t)$ такое решение уравнения (4.19), что величина $v(0)$, где $v(t) \equiv u_\omega^0(t) - u_\omega(t)$ не равна нулю, удовлетворяет условию (4.70) и находится в Σ . Будем рассматривать только такие ω , при которых справедливо соотношение (4.71). Покажем сначала, что тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ вектор $v(kl) = V(kl, 0)v(0)$ находится в Σ . Воспользуемся методом математической индукции. Для $k = 0$ утверждение выполняется. Пусть оно верно для $k-1$, $k \in \mathbb{N}$. Введем обозначение $x = v((k-1)l)$ и докажем, что $V_kx \in \Sigma$. Ясно, что первому неравенству (4.77) это x удовлетворяет.

Используя (4.73)–(4.75), (4.77), оценим теперь снизу норму

$$\begin{aligned} \|P_+V_kx\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} &= \|P_+Ux + P_+\check{P}_k(x)\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} \geq \\ &\geq C_9\|P_+x\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} - c\|P_+\|_{\text{Hom}(X, X)}\|x\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} \geq \\ &\geq \left[C_9 - c\|P_+\|_{\text{Hom}(X, X)} \left(1 + \frac{1}{b} \right) \right] \|P_+x\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Здесь учтено, что $P_+U = P_+P_+U = P_+UP_+$. Аналогично выводим соотношение

$$\|P_-V_kx\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} \leq \left[\frac{\|U_-\|_{\text{Hom}(X,X)}}{b} + c\|P_-\|_{\text{Hom}(X,X)} \left(1 + \frac{1}{b}\right) \right] \|P_+x\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}}.$$

Из этого неравенства и формул (4.76), (4.78) получаем, что $V_kx \in \Sigma$. Значит, действительно, для всех $k \in \mathbb{N}$ векторы $v(kl)$ принадлежат множеству Σ .

Теперь докажем для натуральных k оценку

$$\|P_+v(kl)\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} \geq d^k \|P_+v(0)\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}}, \quad (4.79)$$

где $d \equiv C_9 - c\|P_+\|_{\text{Hom}(X,X)}(1 + \frac{1}{b})$. Отметим, что, вследствие второго неравенства (4.76), $d > 1$. Вновь воспользуемся методом математической индукции. Оценка при $k = 1$ есть не что иное как соотношение (4.78). Предположим, что формула (4.79) доказана для $k - 1$ и установим ее для k . Аналогично (4.78) имеем

$$\begin{aligned} \|P_+v(kl)\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} &= \|P_+V_kv((k-1)l)\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} \geq \\ &\geq d\|P_+v((k-1)l)\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} \geq d^k \|P_+v(0)\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Оценка (4.79), таким образом, доказана.

Осталось заметить, что из соотношения (4.71) вытекает неравенство

$$\|P_+v(kl)\|_{\Upsilon^{\bar{\beta}}} \leq \varepsilon \|P_+\|_{\text{Hom}(X,X)},$$

противоречащее (4.80) при достаточно больших k . Таким образом, справедливость утверждения 4 теоремы 4.2 установлена.

4.1.11. Заключительные замечания. Заметим, что если для всех k, s выполняются равенства $Y_{k,s} = X$ и $D^{(k,s)} = I$, то теорема 4.2 остается справедливой, даже если речь в ней идет об обычных решениях. Вновь, чтобы не загромождать доказательство, рассмотрим случай, когда все n_k равны единице, и отметим, что случай произвольных n_k рассматривается совершенно аналогично.

Итак, пусть $Y_{k,s} = X$ и $D^{(k,s)} = I$. В силу условия III и принадлежности $u_\omega \in Z^{(4)}$ функция $h(u_\omega(t), \omega t, \omega)$ удовлетворяет равномерному условию Гёльдера с показателем μ при $\omega > \omega_0$, $0 < t < t_0$. Значит [33, с. 609], $u_\omega(t)$ является решением уравнения (4.19), а $x_\omega(t)$ — решением (4.1). Аналогично доказывается, что фигурирующие в утверждениях 3, 4 об. решения в этом нашем случае также являются решениями в обычном смысле.

Утверждение 4 теоремы 4.2 остается в силе, если в его формулировке $\Upsilon^{\bar{\beta}}$ заменить на Υ^{δ} , $\bar{\beta} \leq \delta < 1 - \alpha$. Разумеется, это же замечание справедливо и для утверждения 3.

Полученные для уравнения (4.1) результаты без труда переносятся на уравнение более общего вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} g_k(x, \omega t) + \omega \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \varphi_k(\omega t), \quad (4.81)$$

в котором периодические по $\tau = \omega t$ вектор-функции g_k , φ_k представлены хорошо сходящимися рядами Фурье.

Аналогично исследуется задача о почти периодических решениях абстрактного параболического уравнения вида (4.81) с почти периодическими по $\tau = \omega t$ вектор-функциями g_k , φ_k . В этом случае ограничение на спектр оператора L необходимо усилить: он не должен иметь точек на мнимой оси.

4.2. Параболические уравнения

В разделе 4.2 используются некоторые сведения из теории эллиптических операторов [147, с. 120–127; 125, § 6; 116, § 4, пп. 2°, 6°; 143, с. 48–50].

4.2.1. Вспомогательные сведения. В этом пункте излагаются некоторые результаты Л. В. Коледова по конструктивному описанию областей определения дробных степеней позитивных операторов [34].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с C^{2l+1} -гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим дифференциальный оператор A , отображающий $D(A)$ в $L_p(\Omega)$, $p > 1$, и заданный регулярной краевой эллиптической задачей

$$A(x, D)u \equiv \sum_{|\alpha| \leq 2l} a_\alpha(x) D^\alpha u = f \quad \text{в } \Omega, \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} V_j(s, D)u &\equiv \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j,\alpha}(s) D^\alpha u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ m_j &< 2l, \quad j = 0, 1, \dots, l-1. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Его область определения $D(A)$ состоит из тех функций пространства $W_p^{2l}(\Omega)$, которые удовлетворяют граничным условиям (4.83).

Приведем определения [34] функциональных пространств $\widetilde{W}_p^{\tau,-1}(\Omega)$ и $\widetilde{W}_p^{\tau,1}(\Omega)$ для $p \in (1, +\infty)$, $\tau \in (0, +\infty)$. Для этого

вначале вводятся функциональные пространства $\widetilde{W}_p^{\tau,\mu}(\mathbb{R}^n)$, $\mu = \pm 1$. В последние входят функции u , заданные на $\mathbb{R}^n$ и обладающие следующими свойствами. Если τ — целое число и $\mu = -1$, то u имеет обобщенные производные порядка $\tau - 1$ и

$$\begin{aligned} & \|u\|_{\widetilde{W}_p^{\tau,-1}(\mathbb{R}^n)} \equiv \|u\|_{W_p^{\tau-1}(\mathbb{R}^n)} + \\ & + \sup_{\substack{h \in \mathbb{R}^n, \\ 0 < |h| < 1/2}} \frac{|h|^{-1}}{|\ln |h||} \sum_{|\alpha|=\tau-1} \|D^\alpha u(x+h) - D^\alpha u(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < +\infty. \end{aligned}$$

В остальных случаях u имеет обобщенные производные порядка $[\tau]$ и

$$\begin{aligned} & \|u\|_{\widetilde{W}_p^{\tau,\mu}(\mathbb{R}^n)} \equiv \|u\|_{W_p^{[\tau]}(\mathbb{R}^n)} + \\ & + \sup_{\substack{h \in \mathbb{R}^n, \\ 0 < |h| < 1/2}} |h|^{\tau-[\tau]} |\ln |h||^\mu \sum_{|\alpha|=[\tau]} \|D^\alpha u(x+h) - D^\alpha u(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < +\infty, \end{aligned}$$

Тогда через $\widetilde{W}_p^{\tau,\mu}(\Omega)$, $\mu = \pm 1$, обозначается пространство функций u , заданных на Ω , допускающих продолжение до функций из $\widetilde{W}_p^{\tau,\mu}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяющих краевым условиям

$$\begin{aligned} V_j u|_{\partial\Omega} & \equiv \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j,\alpha}(x) D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0, \quad b_{j,\alpha} \in C^{2l}(\partial\Omega), \\ 0 & \leq m_0 < m_1 < \dots < m_{l-1} < 2l, \quad j = 0, 1, \dots, l-1, \end{aligned} \quad (4.84)$$

при тех j , для которых выполняется неравенство $m_j \leq \tau - \frac{1}{p}$. Норма в $\widetilde{W}_p^{\tau,\mu}(\Omega)$ задается равенством

$$\|u\|_{\widetilde{W}_p^{\tau,\mu}(\Omega)} \equiv \inf \{ \|\bar{u}\|_{\widetilde{W}_p^{\tau,\mu}(\mathbb{R}^n)} : \bar{u}|_{\Omega} = u \}.$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) A — позитивный оператор;
- 2) функции $b_{j,\alpha}$, $1 \leq j \leq l$, $|\alpha| \leq m_j$, фигурирующие в краевых условиях, принадлежат классу $C^{2l}(\partial\Omega)$;
- 3) $m_i < m_j$ как только $i < j$.

Справедлива следующая теорема [34].

Теорема 4.3. Для всех $\tau \in (0, 1)$ имеют место непрерывные вложения

$$\widetilde{W}_p^{2l\tau,1}(\Omega) \subset D(A^\tau) \subset \widetilde{W}_p^{2l\tau,-1}(\Omega).$$

Норма в $D(A^\tau)$ задается равенством $\|a\|_{D(A^\tau)} = \|A^\tau a\|_{L_p}$.

4.2.2. Параболические уравнения второго порядка. Об уравнениях второго порядка мы скажем лишь несколько слов, а в следующих пунктах более подробно остановимся на уравнениях произвольного порядка $2l$.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с C^2 -гладкой границей, $p \in (1, \infty)$. Рассмотрим следующую задачу о $2\pi\omega^{-1}$ -периодических решениях системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{s,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_s} \left[a_{sj}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \left[\sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x_s} (b_{sk}(x) u^{m_{sk}}) + \right. \\ \left. + c_k(x) u^{m_k} \right] e^{ik\omega t} + \omega \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \varphi_k(x) e^{ik\omega t}, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = 0, \quad (4.86)$$

где все k_0, m_{sk}, m_k — целые неотрицательные числа.

Предположим, что для фигурирующих в (4.85) функций выполнены следующие условия:

$$a_{sj} = a_{js} \in \mathbb{R}, \quad a_{sj}, b_{sk} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad c_k \in C(\overline{\Omega}), \quad \varphi_k \in C^\mu(\overline{\Omega}),$$

где $\mu \in (0, 1]$. Также требуется параболичность дифференциального выражения

$$\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{s,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_s} a_{sj}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Тогда к задаче (4.85), (4.86) применима теория первого раздела. В самом деле, оператор A в пространстве $X \equiv L_p = L_p(\Omega)$, $p > n$, задается следующим образом. Его область определения $D(A)$ образуют обращающиеся в нуль на $\partial\Omega$ функции пространства $W_p^2(\Omega)$, а сам оператор A действует по правилу

$$Au = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} u.$$

Как установлено в работе [120], при этих условиях оператор A порождает аналитическую полугруппу в $X = L_p$. Вообще, уравнение (4.85) имеет вид (4.1), и к нему можно применить результаты раздела 4.1.

Например, для слагаемых $\sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x_s} (b_{sk}(x) u^{m_{sk}})$ в качестве операторов $D^{(k,s)}$, фигурирующих в (4.1), можно взять операторы $D^{(k,s)}u = \frac{\partial}{\partial x_s} b_{sk}u$. В этом случае $Y_{k,s} = L_q$, $Y_{k,s,j} = L_{q_1}$, где числа q, q_1 удовлетворяют условиям

$$1 \leq q \leq p, \quad q_1 \geq \max(p, mq), \quad m \equiv \max_{\substack{0 \leq |s| \leq k_0, \\ 1 \leq j \leq n}} m_{js}, \quad \frac{n}{q} - \frac{n}{q_1} < 1.$$

Эти условия непротиворечивы.

Для задачи (4.85), (4.86) легко теперь следует аналог теоремы 4.2. Ради краткости и в связи с тем, что в следующем пункте подробно рассматриваются уравнения порядка $2l$, мы не останавливаемся на его формулировке.

4.2.3. Обоснование метода усреднения. Формулировка.

Пусть l, Ω и p — те же, что в п. 4.2.1, $q \in (1, p]$, ω — большой параметр, $A(x, D)$ — эллиптическое дифференциальное выражение, $V_j(s, D)$, $j = 0, 1, \dots, l-1$, — система граничных условий, удовлетворяющая условиям 2 и 3 п. 4.2.1. Предположим далее, что дифференциальный оператор A , порожденный регулярной краевой эллиптической задачей (4.82), (4.83), является производящим оператором некоторой аналитической полугруппы в $L_p = L_p(\Omega)$.

Рассмотрим задачу о $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодических по $t \in \mathbb{R}$ решениях параболического уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & Au + \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} e^{ik\omega t} \sum_{s=1}^{n_k} D^{\gamma_{k,s}} \times \\ & \times \left[f_{k,s}(x) \prod_{|\gamma| < 2l - |\gamma_{k,s}|} (D^\gamma u)^{\mu_{k,s,\gamma}} \right] + \omega \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} h_k(x) e^{ik\omega t} \end{aligned} \quad (4.87)$$

с граничными условиями (4.83). Здесь $\gamma_{k,s}$, γ — n -мерные мультииндексы, $\mu_{k,s,\gamma}$ ($|k| \leq k_0, 1 \leq s \leq n_k, |\gamma| < 2l - |\gamma_{k,s}|$) — целые неотрицательные числа. Если хотя бы одно из чисел $|\gamma_{k,s}|$ отлично от нуля, то будем дополнительно считать оператор A самосопряженным в $L_2(\Omega)$.

Потребуем выполнения следующих предположений.

I. Пусть $J_{k,s} \equiv \{\gamma | \mu_{k,s,\gamma} > 0\}$. Рассмотрим $q_{k,s}, q_{k,s,\gamma}$ ($0 \leq |k| \leq k_0, 1 \leq s \leq n_k, \gamma \in J_{k,s}$) — произвольный набор чисел, удовлетворяющих

условиям

$$\begin{aligned}
 q_{k,s,\gamma} &\geq p, \quad \sum_{\gamma \in J_{k,s}} \frac{\mu_{k,s,\gamma}}{q_{k,s,\gamma}} \leq \frac{1}{q} - \frac{1}{q_{k,s}}, \quad |k| \leq k_0, \quad 1 \leq s \leq n_k, \\
 \beta + \frac{\Gamma}{2l} &< 1, \quad \beta \equiv \max_{\substack{|k| \leq k_0, \\ 1 \leq s \leq n_k, \\ \gamma \in J_{k,s}}} \frac{1}{2l} \left(\frac{n}{q} - \frac{n}{q_{k,s,\gamma}} + |\gamma| \right), \\
 \Gamma &\equiv \max_{\substack{|k| \leq k_0, \\ 1 \leq s \leq n_k}} |\gamma_{k,s}|.
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

Потребуем, чтобы все $f_{k,s}$ принадлежали $L_{q_{k,s}}$.

II. $h_k \in \widetilde{W}_p^{2l\beta_h, 1}(\Omega)$, $\beta_h > \beta$.

III. Усредненная задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} - Av = H_1(v), \tag{4.89}$$

где

$$\begin{aligned}
 H_1(v) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} D^{\gamma_{k,s}} \times \\
 &\times \left[f_{k,s}(x) \int_0^{2\pi} e^{ik\tau} \prod_{|\gamma| < 2l - |\gamma_{k,s}|} (D^\gamma[u + N(\tau)])^{\mu_{k,\gamma}} d\tau \right], \\
 N(\tau) &= \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \frac{1}{ik} h_k(x) e^{ik\tau},
 \end{aligned}$$

с граничными условиями (4.83) имеет стационарное решение $v_0(x)$.

IV. Спектр оператора $L_2 \equiv -A - A_2$, где линейный оператор A_2 определяется равенством

$$\begin{aligned}
 A_2 v &= \frac{1}{2\pi} \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} D^{\gamma_{k,s}} \left[f_{k,s}(x) \int_0^{2\pi} e^{ik\tau} \sum_{\substack{|\nu| < 2l - |\gamma_{k,s}|, \\ \mu_{k,s,\nu} \geq 1}} \mu_{k,s,\nu} \times \right. \\
 &\times (D^\nu[u_0 + N(\tau)])^{\mu_{k,s,\nu} - 1} \prod_{\substack{|\gamma| < 2l - |\gamma_{k,s}|, \\ \gamma \neq \nu}} (D^\gamma[u_0 + N(\tau)])^{\mu_{k,s,\gamma}} d\tau \left. \right] D^\nu v,
 \end{aligned}$$

не содержит нуля.

Возьмем число $\mu > 0$ такое, что справедливы неравенства

$$\frac{n}{q} - \frac{n}{q_{k,s,\gamma}} + |\gamma_{k,s}| + |\gamma| < 2l(1 - \mu), \quad |k| \leq k_0, \quad 1 \leq s \leq n_k, \quad \gamma \in J_{k,s}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Будем говорить, что непрерывная функция $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ является решением уравнения (4.87) на всей вещественной оси, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $x(t) \in D(A)$ при всех $t \in \mathbb{R}$;
- 2) $x(t)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$;
- 3) $x(t)$ в любой точке $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству (4.87).

При $k \in [-k_0, k_0] \cap \mathbb{Z}$, $s \in [-k_0, k_0] \cap \mathbb{N}$ и $\gamma \in J_{k,s}$ рассмотрим произвольные положительные числа $r_{k,s,\gamma}$, удовлетворяющие условиям

$$\frac{1}{p_{k,s}} \equiv \sum_{\gamma \in J_{k,s}} \frac{1}{r_{k,s,\gamma}} \leq 1.$$

Для $\gamma \in J \equiv \bigcup_{|k| \leq k_0, 1 \leq s \leq n_k} J_{k,s}$ обозначим $r_\gamma \equiv \max_{k,s} r_{k,s,\gamma}$, $q_\gamma \equiv \max_{k,s} q_{k,s,\gamma}$.

Пусть $R_1 < R_2$. Введем банахово пространство $Z^{(3)}(R_1, R_2)$ с помощью нормы

$$\|u\|_{Z^{(3)}(R_1, R_2)} \equiv \|u\|_{C^{[R_1, R_2]}(L_p)} + \sum_{\gamma \in J} \left[\int_{R_1}^{R_2} \|D^\gamma u(t)\|_{L_{q_\gamma}}^{r_\gamma} dt \right]^{\frac{1}{r_\gamma}}.$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 4.4. Пусть выполнены условия I–IV. Тогда для любого $R > 0$ существуют такие положительные числа ω_0 и r , что при $\omega > \omega_0$ справедливы следующие утверждения.

1. Для $\omega > \omega_0$ существует единственное об. $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое решение u_ω системы (4.87), (4.83), удовлетворяющее на множестве $(x, t) \in \Omega \times [0, R]$ условию

$$\left\| u - \left(v_0 + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} (ik)^{-1} h_k e^{ik\omega t} \right) \right\|_{Z^{(3)}(0, R)} < r. \quad (4.90)$$

При этом справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\left\| u_\omega - \left(v_0 + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} (ik)^{-1} h_k e^{ik\omega t} \right) \right\|_{C_\mu(L_p)} + \right. \\ & \left. + \sum_{\gamma \in J} \left\| D^\gamma \left(u_\omega - \left(v_0 + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} (ik)^{-1} h_k e^{ik\omega t} \right) \right) \right\|_{C_\mu(L_{q_\gamma})} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.91)$$

2. Если спектр оператора L лежит в открытой правой полуплоскости, то решение u_ω экспоненциально устойчиво в следующем смысле. Найдутся такие положительные числа δ, σ_0 и c , что при всех $\omega > \omega_0$, $s \in \mathbb{R}$, u_0 из шара $\|u_0 - u_\omega(s)\|_{\widetilde{W}_p^{2l\beta, -1}} \leq \delta$ существует об. решение $u_\omega^0(t)$, $t \geq s$, уравнения (4.87) с начальным условием $u_\omega^0(s) = u_0$, и справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|u_\omega^0(t) - u_\omega(t)\|_{L_p} + \sum_{\gamma \in J} \|D^\gamma(u_\omega^0(t) - u_\omega(t))\|_{L_{q_\gamma}} \leq \\ & \leq ce^{-\sigma_0(t-s)} \|u_0 - u_\omega(s)\|_{\widetilde{W}_p^{2l\beta, -1}}. \end{aligned}$$

3. Если спектр оператора L содержит хотя бы одну точку в открытой левой полуплоскости, то решение u_ω неустойчиво. Это означает, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для сколь угодно малых $\delta > 0$ и всех $\omega > \omega_0$ найдется такое об. решение $u_\omega^0(t)$ уравнения (4.87), определенное на некотором участке $[0, t^*]$, что выполняются условия

$$\|u_\omega^0(0) - u_\omega(0)\|_{\widetilde{W}_p^{2l\beta, -1}} < \delta,$$

$$\|u_\omega^0(t) - u_\omega(t)\|_{L_p} + \sum_{\gamma \in J} \|D^\gamma(u_\omega^0(t^*) - u_\omega(t^*))\|_{L_{q_\gamma}} \geq \varepsilon.$$

В п. 4.2.5 мы рассмотрим вопрос о том, когда указанные об. решения являются решениями в обычном смысле (см. определение 20).

4.2.4. Обоснование метода усреднения. Доказательство.

Будем интерпретировать задачу (4.87), (4.83) как абстрактное параболическое уравнение (4.1) и применим для него теорему 4.2. Возьмем $X = L_p$, $Y \equiv Y_{k,s} = L_q$, $Y_{k,s,j} = L_{q_{k,s,\gamma}}$, $D^{(k,s)} = D^{\gamma_{k,s}}$. Будем считать, что для всех фиксированных k, s индекс j пробегает значения от 1 до $m_{k,s,0} \equiv \sum_{|\gamma| < 2l - |\gamma_{k,s}|} \mu_{k,s,\gamma}$, причем каждому γ отвечает $\mu_{k,s,\gamma}$ пространств $Y_{k,s,j} = L_{q_{k,s,\gamma}}$ и операторов $B_{k,s,j} = D^\gamma$.

Очевидно, что условия I, VI и VII выполняются. Из [143, гл. I, лемма 4.1] следует, что операторы $D^\gamma : L_p \rightarrow L_{q_{k,s,\gamma}}$ имеют относительно A дробную степень

$$\beta_{k,s,\gamma} = \frac{1}{2l} \left(\frac{n}{p} - \frac{n}{q_{k,s,\gamma}} + |\gamma| \right), \quad |k| \leq k_0, \quad 1 \leq s \leq n_k, \quad \gamma \in J_{k,s}.$$

Аналогично [143, гл. I, теорема 6.2] устанавливается, что операторы $D^{\gamma_{k,s}} : L_q \rightarrow L_p$ имеют относительно A степень

$$\alpha = \frac{1}{2l} \left(\frac{n}{q} - \frac{n}{p} + \max_{|k| \leq k_0} \max_{1 \leq s \leq n_k} |\gamma_{k,s}| \right)$$

справа. Ввиду соотношений (4.88), все $\beta_{k,s,\gamma}$ меньше $1 - \alpha$, и слагаемые типа $g_0^{(k,s)}$ действуют в L_q . Таким образом, предположения II, III и VIII теоремы 4.2 также выполнены. Условие IV выполнено в силу теоремы 4.3.

Осталось проверить справедливость предположения V. Так как оператор A порождает аналитическую полугруппу, то [37, теорема 16.1] существует число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ такое, что выполняется оценка

$$\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|_{L_q \rightarrow W_q^{2l}} \leq C.$$

Тогда предположение V теоремы 4.2 имеет место ввиду компактности вложения $L_q \subset W_q^{2l}$ [117, с. 94].

Теорема 4.4 теперь вытекает из теоремы 4.2.

4.2.5. Замечание о существовании классических решений. Если выполняются условия

$$\beta_h > \beta + \frac{\Gamma}{2l}, \quad f_{k,s} \in W_{q_{k,s}}^{|\gamma_{k,s}|}, \quad (4.92)$$

то все утверждения теоремы 4.4 остаются справедливыми, даже если в них речь идет об обычных решениях в смысле следующих определений (при этом в ее формулировке число β необходимо заменить на $\beta + \frac{\Gamma}{2l}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Функцию $u(x, t)$, определенную и непрерывную на $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, назовем решением системы (4.87), (4.83), если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ функция $u(\cdot, t) \in W_p^{2l}(\Omega)$;

2) $u(\cdot, t)$ как отображение $\mathbb{R}$ в пространство $L_p(\Omega)$ непрерывно дифференцируемо;

3) для любых $t \in \mathbb{R}$ $u(x, t)$ удовлетворяет соотношению (4.87) при $x \in \Omega$ и равенствам (4.83) при $x \in \partial\Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Пусть $-\infty < T_1 < T_2 < +\infty$, $u_0 \in L_p(\Omega)$. Функцию $u(x, t)$, определенную в цилиндре $\Omega \times [T_1, T_2]$, будем называть решением начально-краевой задачи с начальным условием $u(x, T_1) = u_0(x)$ для системы (4.87), (4.83), если она удовлетворяет следующим условиям:

1) при всех $t \in (T_1, T_2]$ функция $u(\cdot, t) \in W_p^{2l}(\Omega)$;

2) $u(\cdot, t)$ непрерывно дифференцируемо как отображение полуинтервала $(T_1, T_2]$ в пространство $L_p(\Omega)$;

3) $u(x, t)$ для любых $t \in (T_1, T_2]$ удовлетворяет уравнению (4.87) при $x \in \Omega$ и граничным условиям (4.83) при $x \in \partial\Omega$;

4) $(D^\gamma u) \in C^{[T_1, T_2]}(L_{qk, \gamma}(\Omega))$, $|k| \leq k_0$, $\gamma \in J_k$.

Аналогично определяется решение в полубесконечном цилиндре $\Omega \times (T_1, +\infty)$.

Итак, покажем, что при выполнении условия (4.92) теорема 4.4 остается справедливой, если речь в ней идет о решениях в обычном смысле, а число β в ее формулировке заменено на $\beta + \frac{\Gamma}{2l}$.

Для этого в (4.87) выражение $D^{\gamma_{k,s}}[f_{k,s}(x) \prod_{|\gamma| < 2l - |\gamma_{k,s}|} (D^\gamma u)^{\mu_{k,s,\gamma}}]$ распишем формально по формуле Лейбница и получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & Au + \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} e^{ik\omega t} \sum_{\theta} C_{k,s,\theta} f_{k,s,\theta}(x) \times \\ & \times \prod_{|\gamma| < 2l} (D^\gamma u)^{\mu_{k,s,\gamma,\theta}} + \omega \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} h_k(x) e^{ik\omega t}, \end{aligned} \quad (4.93)$$

в котором θ пробегает при всех k конечные множества, $C_{k,s,\theta}$ и $\mu_{k,s,\gamma,\theta}$ суть некоторые целые неотрицательные числа, $f_{k,s,\theta} \in L_{qk,s}$. Отметим равенство

$$\sum_{|\gamma| < 2l - |\gamma_{k,s}|} \mu_{k,s,\gamma} = \sum_{|\gamma| < 2l} \mu_{k,s,\gamma,\theta},$$

справедливое для всех k , s и θ .

Тогда для уравнения (4.93) выполняются условия теоремы 4.2. Это устанавливается с помощью тех же рассуждений, которые проводились выше для уравнения (4.87). В данном случае можно взять

$X = Y_{k,s} = L_p$, $D^{(k,s)} = I$. В качестве $Y_{k,s,j}$ следует выбрать некоторый набор пространств Лебега такой, чтобы пространства в этом наборе были нестрого вложены в соответствующие пространства $L_{q_{k,s,\gamma}}$. В силу изложенного в п. 4.1.11, решение, существование которого гарантирует теорема, является решением в обычном смысле.

Найденное при применении теоремы 4.2 к уравнению (4.93) решение является решением (4.87), причем находится при достаточно больших ω в шаре (4.90). В силу единственности, об. решение уравнения (4.87), существование которого гарантируется теоремой 4.2, является обычным решением в смысле определения 19, а значит, и в смысле определения 20.

4.2.6. Асимптотическое интегрирование. Формулировка.

В дополнение к условиям п. 4.2.3 сделаем следующие предположения. Граница $\partial\Omega$ является C^∞ -гладкой, функции $a_\alpha(x)$, $f_{k,s}(x)$, $h_k(x)$ имеют непрерывные производные любого порядка. Все $\gamma_{k,s}$, не нарушая общности рассуждений, будем считать равными нулю и, кроме того, ограничимся рассмотрением граничных условий Дирихле

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, l-1, \quad (4.94)$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по внутренней нормали в точке s .

Отметим (см. [121]), что в случае граничных условий Дирихле для инфинитезимальности оператора A достаточно, чтобы он был самосопряженным и положительно определенным в смысле L_2 . Таким образом, при указанных условиях выполнены требования к оператору A , сформулированные во втором абзаце п. 4.2.3.

Пусть M — максимальный порядок производной в нелинейной части (4.87), т. е. $M \equiv \max_{|k| \leq k_0, \gamma \in J_k} |\gamma|$. Асимптотическое разложение решения u_ω будем строить методом пограничного слоя [9] (см. также [60]). Для этого введем в некоторой пограничной полосе области Ω местные криволинейные координаты. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$ — криволинейные ортогональные координаты на поверхности $\partial\Omega$. Для любой точки $x \in \Omega$, лежащей в столь малой окрестности границы $\partial\Omega$, что нормали к $\partial\Omega$ в этой окрестности не пересекаются, обозначим через $r(x)$ расстояние от x до $\partial\Omega$, отсчитываемое вдоль нормали. Для таких x определим криволинейные координаты $(\varphi, r) \equiv (\varphi(x), r(x))$, где $\varphi(x)$ — точка поверхности $\partial\Omega$,

лежащая с x на одной нормали. Для достаточно малого $r_0 > 0$ положим $\Omega_0 \equiv \{x \in \Omega : r(x) < r_0\}$.

Асимптотические приближения решения $u_\omega(t)$ строятся по аналогии с [60] в виде

$$u_\omega^N(x, \tau) = \begin{cases} u_0(x) + v_0(x, \tau) + \sum_{j=M}^{\min(N, l-1)} \varepsilon^j z_j(\varphi, \rho), & 0 \leq N < 2l, \\ u_0(x) + v_0(x, \tau) + \sum_{j=M}^{l-1} \varepsilon^j z_j(\varphi, \rho) + \\ + \sum_{j=2l}^N \varepsilon^j [u_j(x) + w_j(\rho, \varphi) + z_j(\rho, \varphi, \tau)] + \\ + \varepsilon^{2l} v_{2l}(x, \tau) + \sum_{j=4l}^N \varepsilon^j v_j(x, \tau), & N \geq 2l, \end{cases} \quad (4.95)$$

где $\tau = \omega t$, $\varepsilon = \omega^{-\frac{1}{2l}}$, $\rho = \varepsilon^{-1}r$. Здесь $u_j(x)$, $v_j(x, \tau)$ — так называемые регулярные, а $w_j(\varphi, \rho)$, $z_j(\varphi, \rho, \tau)$ — погранслойные функции. Последние нас интересуют лишь в погранполосе Ω_0 , вне которой считаются равными нулю. Таким образом, для них должны выполняться соотношения

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} z_j(\rho, \varphi, \tau) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} w_j(\rho, \varphi) = 0.$$

Кроме того, функции $v_j(x, \tau)$, $z_j(\rho, \varphi, \tau)$ являются 2π -периодическими по переменной τ с нулевым средним:

$$\langle v_j(x, \cdot) \rangle = 0, \quad \langle z_j(\rho, \varphi, \cdot) \rangle = 0.$$

Для формулировки теоремы нам необходимо ввести приближения более общего, нежели (4.95), вида

$$u_\omega^{N,k}(x, \tau) = u_\omega^{N+k}(x, \tau) - \sum_{j=N+1}^{N+k} \varepsilon^j u_j(x), \quad N, k \geq 0.$$

Здесь и далее мы считаем, что $u_j = 0$ при $j = 1, 2, \dots, 2l-1$.

Теорема 4.5. Для любого целого неотрицательного N и неотрицательного k существует такое число $\omega_{N,k} > 0$, что при $\omega > \omega_{N,k}$ разность $2\pi\omega^{-1}$ -периодического решения $u_\omega(t)$ задачи (4.87), (4.83)

и его старшего приближения $u_\omega^{N,[k]}$ удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} \|u_\omega - u_\omega^{N,[k]}\|_k &\leq C(k)\omega^{-\frac{M-k}{2l}}, \quad N+k < M, \\ \|u_\omega - u_\omega^{N,[k]}\|_k &\leq C(k)\omega^{-\frac{N+1-\{k\}}{2l}}, \quad M \leq N+k < l-1, \\ \|u_\omega - u_\omega^{N,[k]}\|_k &\leq C(k)\omega^{-1+\frac{k}{2l}}, \quad l-1 \leq N+k < 2l, \\ \|u_\omega - u_\omega^{N,[k]}\|_k &\leq C(N,k)\omega^{-\frac{N+1-\{k\}}{2l}}, \quad N+k \geq 2l, \end{aligned} \quad (4.96)$$

где $C(N,k) = \text{const}$, $\{k\} \equiv k - [k]$. Построение приближения $u_\omega^{N,[k]}$ сводится к решению конечного (зависящего от N, k) числа линейных однозначно разрешимых эллиптических задач Дирихле в области Ω с единым дифференциальным выражением L_2 порядка $2l$.

4.2.7. Построение асимптотики. Содержание п. 4.2.7 и п. 4.2.8 представляет собой доказательство теоремы 4.5 и, по сути, мало чем отличается от изложенного в работе [60]. Однако, для полноты изложения, мы приводим это доказательство.

Дифференциальное выражение оператора A в погранслоиных координатах (φ, ρ) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha| \leq 2l} a_\alpha(x) D^\alpha u = \\ &= \varepsilon^{-2l} \left[b(\varphi) \frac{\partial^{2l} u}{\partial \rho^{2l}} + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j M_j(\rho, \varphi) u + \varepsilon^{N+1} M_{N+1}(\varphi, \rho, \varepsilon) u \right]. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Здесь $b \in C^\infty(\partial\Omega)$, N — произвольное натуральное число, M_j , $1 \leq j \leq N$, — линейные дифференциальные выражения относительно φ, ρ , коэффициенты которых представляют собой полиномы по ρ с бесконечно дифференцируемыми по φ коэффициентами, а M_{N+1} — дифференциальное выражение относительно φ, ρ с равномерно ограниченными по $(\varphi, \rho, \varepsilon)$ коэффициентами.

Из инфинитезимальности оператора A и эллиптичности его дифференциального выражения вытекает параболичность последнего, из которой, в свою очередь, следует неравенство $(-1)^{l+1}b > 0$.

Для нахождения членов приближения (4.95) подставим его вместо u в исходную систему (4.87) и, с учетом (4.97), сгруппируем и приравняем в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для регулярных и погранслоиных функций.

Полученные уравнения затем разобьем еще на уравнения для стационарных коэффициентов и коэффициентов, осциллирующих по τ и имеющих нулевые средние.

Для $v_0(x, \tau)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tau} = \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} h_k(x) e^{ik\tau},$$

из которого находим, что

$$v_0(x, \tau) = - \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} ik^{-1} h_k(x) e^{ik\tau}. \quad (4.98)$$

Из условия II следует, что все функции $h_k(x)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\left. \frac{\partial^j h_k}{\partial \nu^j} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

Значит, вектор-функция $v_0(x, \tau)$ также удовлетворяет граничным условиям

$$\left. \frac{\partial^j v_0(x, \tau)}{\partial \nu^j} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

Для $u_0(x)$ получаем задачу (4.89), однозначно разрешимую по условию. Коэффициент $z_j(\varphi, \rho, \tau)$, $M \leq j \leq l-1$, является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_j}{\partial \tau} &= b(\varphi) \frac{\partial^{2l} z_j}{\partial \rho^{2l}}, \\ \left. \frac{\partial^s z_j}{\partial \rho^s} \right|_{\rho=0} &= 0, \quad s \neq j; \\ \left. \frac{\partial^j z_j}{\partial \rho^j} \right|_{\rho=0} &= - \left. \frac{\partial^j v_0}{\partial \nu^j} \right|_{\partial \Omega}; \quad z_j|_{\rho=\infty} = 0. \end{aligned} \quad (4.99)$$

В силу представления (4.98) решение последней задачи имеет вид

$$z_j(\varphi, \rho, \tau) = \sum_{k \neq 0} z_{j,k}(\varphi, \rho) e^{ik\tau}, \quad (4.100)$$

где коэффициенты $z_{j,k}(\varphi, \rho)$ являются, в свою очередь, решениями задач

$$ikz_{j,k} - b(\varphi) \frac{\partial^{2l} z_{j,k}}{\partial \rho^{2l}} = 0, \\ \left. \frac{\partial^s z_{j,k}}{\partial \rho^s} \right|_{\rho=0} = 0, \quad s \neq j; \quad \left. \frac{\partial^j z_{j,k}}{\partial \rho^j} \right|_{\rho=0} = ik^{-1} \left. \frac{\partial^j h_k}{\partial \nu^j} \right|_{\partial \Omega}, \quad z_{j,k}|_{\rho=\infty} = 0.$$

Обозначим через λ_{kr} , $r = 1, 2, \dots, l$, корни уравнения $b(\varphi)\lambda^{2l} = ik$, удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} \lambda_{kr} < 0$. Решение последней задачи однозначно находится в виде

$$z_{j,k}(\varphi, \rho) = \sum_{r=1}^l z_{j,k,r}(\varphi) e^{\lambda_{kr}\rho}. \quad (4.101)$$

Таким образом, явный вид функции z_j задается соотношениями (4.100), (4.101).

Функция v_{2l} находится из соотношения

$$\frac{\partial v_{2l}}{\partial \tau} = \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} R_\tau [g_{k,s}(u_0 + v_0) e^{ik\tau}],$$

где

$$g_{k,s}(u, x) \equiv f_{k,s}(x) \prod_{|\gamma| < 2l} (D^\gamma u)^{\mu_{k,s,\gamma}}.$$

Заметим, что v_{2l} можно представить в виде

$$v_{2l}(x, \tau) = \sum_{k \neq 0} v_{2l,k}(x) e^{ik\tau}, \quad (4.102)$$

где k пробегает некоторое конечное множество целых чисел.

Для коэффициента w_{2l} получается задача

$$b(\varphi) \frac{d^{2l} w_{2l}}{d\rho^{2l}} = \Phi(\varphi, \rho), \quad w_{2l}|_{\rho=\infty} = 0.$$

Здесь $\Phi(\varphi, \rho)$ — известная функция, зависящая, в частности, от z_M и являющаяся конечной суммой экспонент относительно ρ с отрицательными вещественными частями показателей и зависящими от φ

коэффициентами. Отсюда следует, что функция w_{2l} определяется однозначно и имеет ту же структуру, что и Φ .

Рассуждая аналогично, нетрудно показать по индукции, что коэффициенты разложения (4.95) определяются однозначно. При этом функции $v_j(x, \tau)$ и $z_j(\varphi, \rho, \tau)$ являются тригонометрическими многочленами относительно τ , причем коэффициенты таких многочленов, представляющих $z_j(\varphi, \rho, \tau)$, как и функции $w_j(\varphi, \rho)$, суть квазимногочлены относительно ρ , показатели экспонент в которых имеют отрицательные вещественные части.

4.2.8. Обоснование асимптотики. Заметим, что достаточно доказать оценку (4.96) с заменой $u_\omega^{N, [k]}$ на

$$\hat{u}_\omega^{N+[k]} \equiv u_\omega^{N+[k]} + \sum_{j=N+[k]-(l-2)}^{N+[k]} \varepsilon^j (\hat{u}_j(x) - u_j(x)) + \sum_{j=N+[k]+1}^{N+[k]+l-1} \varepsilon^j \hat{z}_j(\rho, \varphi, \tau),$$

где функции $\hat{u}_j$ и $\hat{z}_j$ определяются из тех же дифференциальных уравнений, что u_j и z_j соответственно, однако удовлетворяют таким краевым условиям, при которых для функции $\hat{u}_\omega^{N+[k]}$ выполнены граничные условия (4.94).

Введем функцию $z_\omega^N = u_\omega - \hat{u}_\omega^N$. Она удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_\omega^N}{\partial t} = & A z_\omega^N + \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} [g_{k,s}(u_\omega(x), x) - g_{k,s}(u_\omega^N(x), x)] e^{ik\omega t} + \\ & + \omega^{-\frac{N+1}{2l}+1} \Phi_{N,1}(x, t, \omega), \end{aligned}$$

где функция $\Phi_{N,1}$ подчиняется оценке $\|\Phi_{N,1}(\cdot, \cdot, \omega)\|_k \leq C(k) \omega^{\frac{k}{2l}}$.

Пусть $p, q, q_{k,s,\gamma}$ — произвольный набор чисел, удовлетворяющий условиям п. 4.2.3. Выберем последовательно числа δ, μ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2l} \left(1 - \frac{n}{p}\right) &< \delta < 1, \\ 0 < \mu < \min \left[\frac{1}{2l} \left(1 - \frac{n}{p}\right) - (1 - \delta), 1 - \delta \right]. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Рассуждая так же, как в п. 4.1.8 и п. 4.3.2, можно для достаточно больших ω доказать оценку

$$\|z_\omega^N\|_{C_\mu(\Upsilon^\delta)} \leq C \omega^{-\frac{N+1}{2l}+1}.$$

Из (4.103) и [37, теорема 16.5] следует непрерывность вложения $\Upsilon^\delta \subset C^{2l-1+2l\mu}(\bar{\Omega})$. Поэтому для всех мультииндексов α , удовлетворяющих неравенству $|\alpha| \leq 2l-1$, справедливо соотношение

$$\|D^\alpha z_\omega^N\|_{2l\mu} \leq C\omega^{-\frac{N+1}{2l}+1}. \quad (4.104)$$

Пусть $\lambda(t)$ — бесконечно дифференцируемая на числовой оси $t \in \mathbb{R}$ функция с носителем, лежащем на интервале $(0, 3)$, причем $\lambda(t) = 1$ при $t \in [1, 2]$. Рассмотрим функцию $y_\omega^N(x, t) = \lambda(t)z_\omega^N(x, t)$. Так как функция z_ω^N имеет малый период $2\pi\omega^{-1}$, то достаточно доказать оценку (4.96) с заменой $u_\omega - u_\omega^{N,[k]}$ на $y_\omega^{N+[k]}$.

Введем цилиндр $Q_0 = \Omega \times [0, 3]$ с боковой поверхностью $\Gamma_0 = \partial\Omega \times [0, 3]$. Функция y_ω^N , рассматриваемая в Q_0 , является решением начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial y_\omega^N}{\partial t} - Ay_\omega^N = \\ & = \lambda(t) \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} [g_{k,s}(u_\omega(x), x) - g_{k,s}(u_\omega^N(x), x)] \times \\ & \times e^{ik\omega t} - \lambda'(t)z_\omega^N + \omega^{-\frac{N+1}{2l}+1}\lambda(t)\Phi_{N,1}(x, t, \omega) \equiv \Phi_{N,2}(x, t, \omega), \\ & y_\omega^N(x, 0) = 0, \quad y_\omega^N|_{\Gamma_0} = \frac{\partial y_\omega^N}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_0} = \dots = \frac{\partial^{l-1} y_\omega^N}{\partial \nu^{l-1}}\bigg|_{\Gamma_0} = 0. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Из (4.104) следует неравенство

$$\|\Phi_{N,2}(\cdot, \cdot, \omega)\|_{2l\mu} \leq C\omega^{-\frac{N+1}{2l}+1}.$$

Теперь воспользуемся априорными оценками [123] решения задачи (4.105). Заметим, что из определения функции y_ω^N вытекает выполнение условий согласования краевых и начальных данных сколь угодно высокого порядка. Значит, справедливо соотношение

$$\|y_\omega^N\|_{2l(1+\mu)} \leq C\omega^{-\frac{N+1}{2l}+1}.$$

С его учетом вновь можно оценить правую часть $\Phi_{N,2}$ уравнения (4.105) и выписать априорную оценку y_ω^N в более сильной норме, т. е. применить так называемый «метод шнуровки». Таким образом, для всех $k \geq 0$ за конечное зависящее от k число шагов получаем оценку вида

$$\|y_\omega^N\|_k \leq C(k)\omega^{-\frac{N-k+1}{2l}+2}.$$

В результате получаем оценку

$$\|u_\omega - u_\omega^{N,[k]}\|_k \leq C\omega^{-\frac{N+1-\{k\}}{2l}+2}.$$

Теперь следующим образом выводим неравенство (4.96) для $N + k \geq 2l$:

$$\begin{aligned} \|u_\omega - u_\omega^{N,[k]}\|_k &\leq \|u_\omega - u_\omega^{N+4l,[k]}\|_k + \\ &+ \|u_\omega^{N,[k]} - u_\omega^{N+4l+1,[k]}\|_k \leq C\omega^{-\frac{N+1-\{k\}}{2l}}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Оценки для $N + k < 2l$ выводятся совершенно аналогично (4.106). Теорема 4.5 полностью доказана.

4.3. Обобщенные уравнения Навье — Стокса

4.3.1. Обоснование метода усреднения. Формулировка.

Пусть ω — большой параметр, ν — положительное число, Ω — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ с C^2 -гладкой границей.

Рассмотрим задачу о $2\pi\omega^{-1}$ -периодических по $t \in \mathbb{R}$ решениях системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla)u &= -\nabla P + \nu \Delta u + \\ &+ \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \left[\sum_{1 \leq s \leq n_k} D^{(k,s)} h_{k,s}(x, u) \right] e^{ik\omega t} + \omega \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} a_k(x) e^{ik\omega t}, \quad (4.107) \\ \operatorname{div} u &= 0, \end{aligned}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.108)$$

Здесь $D^{(k,s)}$ — операторы обобщенного дифференцирования порядка $d_{k,s} \leq 1$, $h_{k,s}(x, u)$ — трехмерные вектор-функции.

Потребуем выполнения следующих предположений.

I. При всех $k \in [-k_0, k_0] \cap \mathbb{Z}$, $s \in [1, n_k] \cap \mathbb{N}$ вектор-функция $h_{k,s}(x, u)$ имеет вид

$$h_{k,s}(x, u) = F_{k,s}(x) h_0^{(k,s)}(v_1, v_2, \dots, v_{\mu_{k,s}})|_{v_1=\dots=v_{\mu_{k,s}}=u},$$

где формы $h_0^{(k,s)} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линейны по каждому своему аргументу, $\mu_{k,s} \geq 0$. Существуют такие числа $q_{k,s} \geq 1$, $k \in [-k_0, k_0] \cap \mathbb{Z}$, $s \in [1, n_k] \cap \mathbb{N}$, и $p > 3$, что элементы матриц-функций $F_{k,s}(x)$ принадлежат $L_{q_{k,s}}$, и для всех k, s выполняются неравенства

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3(\mu_{k,s} - 1)}{p} + \frac{3}{q_{k,s}} + d_{k,s} \right) < 1.$$

II. Вектор-функции a_k , $1 \leq |k| \leq k_0$, принадлежат $C^\theta(\bar{\Omega})$, где θ — некоторое положительное число.

III. Усредненная задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \nabla Q = H_2(x, v), \quad \operatorname{div} v = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.109)$$

где

$$\begin{aligned} H_2(x, u) = & -(u, \nabla)u - \sum_{0 < |k| \leq k_0} k^{-2} (\Pi a_k(x), \nabla) \Pi a_{-k}(x) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} D^{(k,s)} \int_0^{2\pi} h_{k,s}(x, u + N(x, \tau)) e^{ik\tau} d\tau, \end{aligned}$$

а

$$N(x, \tau) = \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} (ik)^{-1} \Pi a_k(x) e^{ik\tau},$$

с граничным условием (4.108) имеет стационарное решение $\overset{\circ}{v} \in \overset{\circ}{S}_p^2$.

IV. Спектр оператора $L_3 \equiv -A - \Pi A_3 : S_p \rightarrow S_p$, $D(L_3) = D(A) = \overset{\circ}{S}_p^2$, где $A \equiv \nu \Pi \Delta$, а линейный оператор A_3 определяется равенством

$$\begin{aligned} A_3 v = & -(\overset{\circ}{v}, \nabla)v - (v, \nabla)\overset{\circ}{v} + \frac{1}{2\pi} \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} D^{(k,s)} \left[F_{k,s}(x) \times \right. \\ & \left. \times \int_0^{2\pi} \sum_{\alpha=1}^{\mu_{k,s}} h_0^{(k,s)}(v_1, v_2, \dots, v_{\mu_{k,s}}) \Big|_{v_\alpha=v, v_j=\overset{\circ}{v} + N(\tau)(1 \leq j \leq \mu_{k,s}, j \neq \alpha)} e^{ik\tau} d\tau \right], \end{aligned}$$

не содержит нуля.

Решение (u, P) системы (4.107), (4.108) (а также усредненной системы (4.109), (4.108)), как и в абстрактном случае, будем понимать

в об. смысле, т. е. как решение соответствующего интегрального уравнения. Если пара (u, P) является об. решением задачи (4.107), (4.108), то вектор-функцию u также будем называть об. решением этой задачи.

Заметим [143, с. 61], что каждому об. решению u задачи (4.107), (4.108) отвечает единственная (с точностью до аддитивной постоянной) функция давления P такая, что пара (u, P) является об. решением этой задачи.

Зафиксируем число $\mu > 0$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3(\mu_{k,s} - 1)}{p} + \frac{3}{q_{k,s}} + d_{k,s} \right) < 1 - \mu, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{3}{p} + 1 \right) < 1 - \mu, \\ |k| \leq k_0, \quad 1 \leq s \leq n_k.$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 4.6. Пусть выполнены условия I–IV. Тогда для любого $R > 0$ найдутся такие положительные числа ω_0 и r , что справедливы следующие утверждения.

1. При $\omega > \omega_0$ существует единственное об. $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое решение u_ω системы (4.107), (4.108), удовлетворяющее на множестве $(x, t) \in \Omega \times [0, R]$ условию

$$\left\| u - \left(\overset{\circ}{v} + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} (ik)^{-1} \Pi a_k e^{ik\omega t} \right) \right\|_{C(S_p)} < r. \quad (4.110)$$

При этом справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\| u_\omega - \left(\overset{\circ}{v} + \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} (ik)^{-1} \Pi a_k e^{ik\omega t} \right) \right\|_{C_\mu(S_p)} = 0.$$

2. Если спектр оператора L лежит в открытой правой полуплоскости, то решение u_ω экспоненциально устойчиво в следующем смысле. Найдутся такие положительные числа δ , σ_0 и c , что при всех $\omega > \omega_0$, $s \in \mathbb{R}$, $u_0 \in S_p$ из шара $\|u_0 - u_\omega(s)\|_{S_p} \leq \delta$ существует об. решение $u_\omega^0(t)$, $t \geq s$, уравнения (4.107) с начальным условием $u_\omega^0(s) = u_0$, и справедлива оценка

$$\|u_\omega^0(t) - u_\omega(t)\|_{S_p} \leq ce^{-\sigma_0(t-s)} \|u_0 - u_\omega(s)\|_{S_p}.$$

3. Если спектр оператора L содержит хотя бы одну точку в открытой левой полуплоскости, то решение u_ω неустойчиво. Это означает, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для сколь угодно малых $\delta > 0$ и всех $\omega > \omega_0$ найдется такое об. решение $u_\omega^0(t)$ уравнения (4.107), определенное на некотором участке $[0, t^*]$, что выполняются условия

$$\|u_\omega^0(0) - u_\omega(0)\|_{S_p} < \delta, \quad \|u_\omega^0(t^*) - u_\omega(t^*)\|_{S_p} \geq \varepsilon.$$

В п. 4.3.3 мы рассмотрим вопрос о том, когда указанные об. решения являются решениями в обычном смысле (см. определение 22 там же).

4.3.2. Обоснование метода усреднения. Доказательство.

Поддействовав на обобщенное уравнение Навье — Стокса в (4.107) проектором Π , получим соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \Pi(u, \nabla)u = \nu \Pi \Delta u + \\ & + \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} \Pi D^{(k,s)} h_{k,s}(x, u) e^{ik\omega t} + \omega \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \Pi a_k(x) e^{ik\omega t}. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Будем интерпретировать задачу (4.111) как абстрактное параболическое уравнение (4.1) и применим для него теорему 4.2. Рассмотрим числа q и $p_{k,s}$, $-k_0 \leq k \leq k_0$, $1 \leq s \leq n_k$, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{1}{q} = \max_{\substack{-k_0 \leq k \leq k_0, \\ 1 \leq s \leq n_k}} \left(\frac{\mu_{k,s}}{p_{k,s}} + \frac{1}{q_{k,s}} \right), \quad q \leq p \leq p_{k,s}.$$

Возьмем $X = S_p$, $Y = Y_{k,s} = L_q$, $Y_{k,s,j} = S_{p_{k,s}}$, $B_{k,s,j} = J_{S_p \rightarrow S_{p_{k,s}}}$ — оператор вложения пространства S_p в пространство $S_{p_{k,s}}$. Также воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} (u, \nabla)u &= \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} u = \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u) - (\operatorname{div} u)u = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u). \end{aligned}$$

Тогда выполнение условий I–VIII, фигурирующих в теореме 4.2, вытекает из вспомогательных сведений, изложенных в разделе 2.1,

и того факта, что множество $PC^{\mu_0}(\Omega)$ вложено в $D((-A)^\varepsilon)$ при некотором положительном ε [116]. Таким образом, утверждение 1 теоремы 4.6 доказано.

Утверждения 2 и 3 теоремы 4.6 доказываются аналогично соответствующим результатам в абстрактном случае. При этом мы пользуемся тем, что операторы $B_{k,s,j}$ коммутируют с e^{-tL} , $t \geq 0$, так как роль первых играет оператор вложения пространства S_{p_1} в S_p , где p_1 определяется равенством

$$\frac{1}{p_1} = \min \left[\frac{2}{p}, \min_{\substack{|k| \leq k_0, \\ 1 \leq s \leq n_k}} \left(\frac{\mu_{k,s}}{p} + \frac{1}{q_{k,s}} \right) \right].$$

4.3.3. Замечание о существовании обычных решений. Если выполнены следующие дополнительные условия гладкости:

$$\partial\Omega \in C^{2+\theta_1}, \quad F_{k,s} \in C^{1+\theta_2}(\overline{\Omega}), \quad a_k \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \theta_1, \theta_2 > 0,$$

то, используя методику работы [51], можно показать, что указанное об. решение является обычным решением в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Пару (u, P) , составленную из трехмерной вектор-функции $u(x, t)$ и скалярной функции $P(x, t)$, будем называть решением системы (4.107), (4.108), если выполняются следующие условия:

- 1) u, P определены и непрерывны на $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$;
- 2) для каждого $t \in \mathbb{R}$ $u(\cdot, t) \in W_p^2$, $P(\cdot, t) \in W_p^1$;
- 3) $u(\cdot, t)$ как отображение $\mathbb{R}$ в L_p непрерывно дифференцируемо;
- 4) u, P удовлетворяют соотношениям (4.107), (4.108).

Саму вектор-функцию u также будем называть решением.

4.3.4. Асимптотическое интегрирование. Формулировка.

В дополнение к условиям п. 4.3.1 предположим, что граница $\partial\Omega$, элементы матриц-функций $F_{k,s}(x)$ и вектор-функций $a_k(x)$ являются бесконечно гладкими.

Воспользуемся методом пограничного слоя и введем аналогично п. 2.3.2 криволинейные координаты $(\varphi_1, \varphi_2, r)$, параметр $\varepsilon = \omega^{-1/2}$, переменные $\tau = \omega t$, $\rho = \varepsilon^{-1}r$, положительное число r_0 и погранплосу Ω_0 .

Пусть u_ω — решение задачи (4.107), (4.108), о котором идет речь в теореме 4.6. Ему отвечает единственная функция P_ω , удовлетворяющая следующим двум условиям:

- 1) пара (u_ω, P_ω) является решением задачи (4.107), (4.108);
- 2) справедливо равенство $\int_\Omega P_\omega dx = 0$.

Нетрудно показать, что функция P_ω является $2\pi\omega^{-1}$ -периодической по переменной t .

Асимптотические приближения (вектор-) функций u_ω, P_ω строятся по аналогии с разделом 2.3 в виде

$$\begin{aligned} u_\omega^{N,k}(x, \tau) &= \sum_{j=0}^N \varepsilon^j u_j(x) + \sum_{j=0}^{N+k} \varepsilon^j [v_j(x, \tau) + w_j(\varphi, \rho) + z_j(\varphi, \rho, \tau)], \\ P_\omega^{N,k}(x, \tau) &= \sum_{j=0}^N \varepsilon^j p_j(x) + \sum_{j=-2}^{N+k} \varepsilon^j s_j(x, \tau) + \\ &+ \sum_{j=-1}^{N+k} \varepsilon^j [h_j(\varphi, \rho) + g_j(\varphi, \rho, \tau)], \quad N, k \geq 0. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Здесь через u_j, v_j, p_j, s_j обозначены регулярные, а через w_j, z_j, h_j, g_j — погранслойные (вектор-) функции, причем (вектор-) функции, зависящие от τ , имеют нулевые средние по этой переменной. Погранслойные (вектор-) функции вне полосы Ω_0 считаются равными нулю.

В формулировке следующей теоремы и в п. 4.3.6, где содержится часть ее доказательства, используется запись $\|u\|_k$, введенная на с. 62.

Теорема 4.7. Для любого целого N и целого неотрицательного k существует такое число $\omega_{N,k} > 0$, что при всех $\omega > \omega_{N,k}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|u_\omega - u_\omega^{N,[k]}\|_k &\leq C(N, k) \omega^{-\frac{N+1-\{k\}}{2}}, \\ \|\nabla P_\omega - \nabla P_\omega^{N,[k]}\|_k &\leq C(N, k) \omega^{-\frac{N-\{k\}}{2}}, \end{aligned}$$

где $C(N, k) = \text{const}$. Построение приближения $u_\omega^{N,k}$ сводится к решению конечного числа не зависящих от ω однозначно разрешимых линейных задач двух типов: первой краевой задачи в области Ω для уравнения, порожденного дифференциальным выражением оператора L_3 , и задачи Неймана для уравнения Пуассона в той же области.

4.3.5. Построение асимптотики. Содержание п. 4.3.5 и п. 4.3.6 представляет собой доказательство теоремы 4.7 и, по сути, мало чем отличается от изложенного в разделе 2.3. Однако мы приводим это доказательство для полноты изложения.

Для нахождения коэффициентов разложения (4.112) подставим его в уравнение (4.107) и, учитывая представления (2.26), (2.27), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε отдельно для регулярных и погранслойных функций. Каждое из полученных соотношений разобьем на равенства для стационарных и осциллирующих с нулевым средним функций.

Из условия несжимаемости и представлений (2.26), (2.27) вытекают равенства

$$\frac{\partial w_0^{(3)}}{\partial \rho} = 0, \quad w_0^{(3)} \Big|_{\rho=\infty} = 0, \quad \frac{\partial z_0^{(3)}}{\partial \rho} = 0, \quad z_0^{(3)} \Big|_{\rho=\infty} = 0,$$

из которых находим $w_0^{(3)} = z_0^{(3)} = 0$. Для v_0 и s_{-2} получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial \tau} + \nabla s_{-2} &= \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} a_k e^{ik\tau}, \quad \operatorname{div} v_0 = 0, \\ (v_0, \nu) \Big|_{\partial \Omega} &= 0, \quad \int_{\Omega} s_{-2} dx = 0, \end{aligned}$$

которая сводится к однозначно разрешимой задаче

$$\begin{aligned} \Delta s_{-2} &= \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} \operatorname{div} a_k e^{ik\tau}, \quad \frac{\partial s_{-2}}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} e^{ik\tau} (a_k, \nu) \Big|_{\partial \Omega}, \\ \int_{\Omega} s_{-2} dx &= 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial \tau} = \sum_{1 \leq |k| \leq k_0} a_k e^{ik\tau} - \nabla s_{-2}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Далее, из соотношений

$$-\nu \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial \rho^2} = 0, \quad w_0^{(s)} \Big|_{\rho=\infty} = 0, \quad s = 1, 2,$$

получаем равенство нулю компонент $w_0^{(s)}$, а из системы уравнений

$$\frac{\partial z_0^{(s)}}{\partial \tau} - \nu \frac{\partial^2 z_0^{(s)}}{\partial \rho^2} = 0, \quad z_0^{(s)} \Big|_{\partial \Omega} = -v_0^{(s)} \Big|_{\partial \Omega}, \quad z_0^{(s)} \Big|_{\rho=\infty} = 0, \quad s = 1, 2,$$

отделяя переменную τ , находим компоненты $z_0^{(s)}$. Затем из соотношений

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_{-1}}{\partial \rho} &= 0, \quad h_{-1}|_{\rho=\infty} = 0, \\ \frac{\partial g_{-1}}{\partial \rho} &= -\frac{\partial z_0^{(3)}}{\partial \tau} = 0, \quad g_{-1}|_{\rho=\infty} = 0\end{aligned}$$

определяем, что $h_{-1} = g_{-1} = 0$.

Далее аналогичным образом последовательно находим $w_1^{(3)} = 0$, $z_1^{(3)}$, s_{-1} , v_1 , $w_1^{(s)}$, $z_1^{(s)}$ ($s = 1, 2$), h_0 , g_0 .

На следующем шаге для u_0 , p_0 получаем стационарную задачу для (4.109), которая по предположению III имеет решение, и это решение невырожденно в том смысле, что выполняется предположение IV. После этого находим $w_2^{(3)}$, $z_2^{(3)}$. Пару v_2 , s_0 найдем из системы

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_2}{\partial \tau} + \nabla s_0 &= \nu \Delta v_0 - (u_0 + v_0, \nabla)(u_0 + v_0) + \\ &+ \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} D^{(k,s)} h_{k,s}(x, u_0 + v_0) e^{ik\tau} - H_2(x, u_0), \\ \operatorname{div} v_2 &= 0, \quad v_2^{(3)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} s_0 dx = 0.\end{aligned}$$

Эта система сводится к однозначно разрешимой задаче типа (4.113).

Действуя по индукции, нетрудно показать, что можно определить приближения (4.112) со сколь угодно большими номерами.

4.3.6. Обоснование асимптотики. Заметим, что найденные приближения являются бесконечно гладкими. Это следует из классических шаудеровских оценок для уравнения Пуассона при краевых условиях Неймана и результатов работы [122].

Обозначим

$$\begin{aligned}u_{\omega}^N &\equiv u_{\omega}^{N,0}, \quad P_{\omega}^N \equiv P_{\omega}^{N,0}, \\ h(u, \tau) &\equiv (u, \nabla)u + \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} D^{(k,s)} h_{k,s}(x, u) e^{ik\tau},\end{aligned}$$

$$Dh(u, \tau)v \equiv (v, \nabla)u + (u, \nabla)v + \sum_{0 \leq |k| \leq k_0} \sum_{1 \leq s \leq n_k} D^{(k,s)} D_u h_{k,s}(x, u) v e^{ik\tau},$$

где $D_u h_{k,s}(x, u)$ — матрица, являющаяся производной формы $h_{k,s}$ по переменной u .

Пусть u_ω — точное решение системы (4.107), существование и однозначительная единственность которого гарантируются теоремой 4.6, а P_ω — соответствующая функция давления. Отметим, что фигурирующие в теореме 4.7 оценки для $u_\omega^{N,[k]}$ достаточно установить для $u_\omega^{N+[k]} \equiv u_\omega^{N+[k],0}$, $P_\omega^{N+[k]} \equiv P_\omega^{N+[k],0}$.

Введем функции $z^N = u_\omega - u_\omega^N$, $q^N = P_\omega - P_\omega^N$. Пара (z^N, q^N) является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^N}{\partial t} - \nu \Delta z^N + \nabla q^N &= \\ &= h(u_\omega, \omega t) - h(u_\omega^N, \omega t) + \omega^{-\frac{N-1}{2}} \Psi_{N,9}(x, t, \omega), \\ \operatorname{div} z^N &= \omega^{-\frac{N}{2}} \Psi_{N,10}(x, t, \omega), \quad z^N|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Здесь $\Psi_{N,9}$ — сумма регулярной и погранслойной функции, $\Psi_{N,10}$ — погранслойная функция. При этом для любых $s \geq 0$, $\omega \geq 1$ справедливо соотношение

$$\|\Psi_{N,9}\|_{2s} \leq C(s)\omega^s, \quad \|\Psi_{N,10}\|_{2s} \leq C(s)\omega^s, \quad \int_{\Omega} \Psi_{N,10} dx = 0,$$

где $C = C(s)$ не зависит от x, t .

Теперь мы хотим от (4.114) перейти к соответствующей задаче для некоторой близкой к z^N соленоидальной вектор-функции. Для этого проведем замену переменных $z^N = y^N + w^N$, $q^N = p^N + r^N$, где пара (w^N, r^N) удовлетворяет равенствам

$$-\nu \Delta w^N + \nabla r^N = 0, \quad \operatorname{div} w^N = \omega^{-\frac{N}{2}} \Psi_{N,10}(x, t, \omega), \quad w^N|_{\partial\Omega} = 0.$$

Из результатов работы [122] вытекают бесконечная гладкость этой пары по $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ и оценки

$$\begin{aligned} \|w^N\|_{2s} &\leq C(s)\omega^{-\frac{N+1}{2}+s}, \quad \|\nabla r^N\|_{2s} \leq C(s)\omega^{-\frac{N-1}{2}+s}, \\ s &\geq 0, \quad w \geq 1. \end{aligned}$$

Вектор-функция (y^N, p^N) является $2\pi\omega^{-1}$ -периодическим по времени решением системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^N}{\partial t} - \nu \Delta y^N + \nabla p^N &= h(u_\omega^N + y^N + w^N, \omega t) - h(u_\omega^N, \omega t) + \\ &+ \omega^{-\frac{N-1}{2}} \Psi_{N,11}(x, t, \omega), \quad \operatorname{div} y^N = 0, \quad y^N|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Функция $\Psi_{N,11}$ представляет собой сумму регулярной и погранслоистой функции, и при любых $s \geq 0$, $\omega \geq 1$ справедлива оценка

$$\|\Psi_{N,11}\|_{2s} \leq C(s)\omega^s.$$

Последнюю систему перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^N}{\partial t} - \nu \Delta y^N - A_3 y^N + \nabla p^N &= [Dh(u_0 + v_0, \omega t) - A_3] y^N + \\ &+ [h(u_\omega^N + y^N, \omega t) - h(u_\omega^N, \omega t) - Dh(u_0 + v_0, \omega t) y^N] + \\ &+ [h(u_\omega^N + y^N + w^N, \omega t) - h(u_\omega^N + y^N, \omega t)] + \\ &+ \omega^{-\frac{N-1}{2}} \Psi_{N,11}(x, t, \omega), \\ \operatorname{div} y^N &= 0, \quad y^N|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2.5 (см. п. 2.3.6), отсюда для достаточно малого $\mu_0 > 0$ выводим неравенство

$$\|y^N\|_{2\mu_0} + \|\nabla y^N\|_{2\mu_0} \leq C\omega^{-\frac{N-1}{2}}. \quad (4.116)$$

Теперь мы хотим оценить производные $\frac{\partial y^N}{\partial t}$ и $\frac{\partial(\nabla y^N)}{\partial t}$. Для произвольной функции $f(t)$ введем обозначение $(f)_h(t) = [f(t+h) - f(t)]h^{-1}$ и рассмотрим функции $y_h(x, t) \equiv (y^N)_h(x, t)$ и $p_h(x, t) \equiv (p^N)_h(x, t)$. Из (4.115) для y_h, p_h получаем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_h}{\partial t} - \nu \Delta y_h - A_3 y_h + \nabla p_h &= (Dh(u_0 + v_0, \omega t))_h y^N(t+h) + \\ &+ [Dh(u_0 + v_0, \omega t) - A_3] y_h + ([Dh(u_\omega^N + y^N, \omega t) - h(u_\omega^N, \omega t) - \\ &- Dh_k(u_0 + v_0, \omega t) y^N])_h + \omega^{-\frac{N-3}{2}} \Psi_{N,12}(x, t, h, \omega), \\ \operatorname{div} y_h &= 0, \quad y_h|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\Psi_{N,12}$ — вектор-функция, удовлетворяющая при $s \geq 0$, $h \in (0, 1)$ и достаточно больших ω неравенству

$$\|\Psi_{N,12}(\cdot, \cdot, h, \omega)\|_{2s} \leq C(s)\omega^s.$$

Используя те же рассуждения, что при выводе (4.116), можно получить равномерную относительно $h \in (0, 1)$, $\omega > \omega_1$, где ω_1 — достаточно большое число, оценку

$$\|y_h\|_{2\mu_0} + \|\nabla y_h\|_{2\mu_0} \leq C\omega^{-\frac{N-3}{2}},$$

из которой следует соотношение

$$\left\| \frac{\partial y^N}{\partial t} \right\|_{2\mu_0} + \left\| \nabla \frac{\partial y^N}{\partial t} \right\|_{2\mu_0} \leq C\omega^{-\frac{N-3}{2}}.$$

Дальнейшее доказательство проводится совершенно аналогично п. 2.3.6.

ГЛАВА 5

ТРАДИЦИОННАЯ ЗАДАЧА КОНВЕКЦИИ. УСРЕДНЕНИЕ И АСИМПТОТИКА

В работе [29] при помощи метода усреднения Крылова — Боголюбова исследовалась задача о конвекции вязкой несжимаемой жидкости в сосуде, который совершает малые (по амплитуде) вертикальные гармонические высокочастотные вибрации конкретного вида. В статье [114] установлена справедливость применения метода усреднения в [29]. В работах [49, 51, 52] метод усреднения обоснован для более широкого, нежели в [29, 114], класса гармонических вертикальных и наклонных вибраций в поле силы тяжести и в невесомости.

Во введении и главе 2 отмечалось, что в работе [115] предложен и обоснован алгоритм построения асимптотик решений абстрактных параболических уравнений вида (1.34). Этот алгоритм состоит в построении последовательности линейных абстрактных параболических уравнений, решения которых являются высшими приближениями исходного нелинейного уравнения. Однако указанные линейные задачи зависят от асимптотического параметра $\omega \gg 1$, а поэтому нуждаются в асимптотическом интегрировании. В работах [50, 53] изложен и обоснован базирующийся на только что описанных соображениях способ асимптотического интегрирования задачи о тепловой конвекции жидкости в быстро осциллирующем сосуде (задача о периодических по времени решениях). Этот способ реализуется там в три этапа. На первом этапе в задаче делается замена переменных типа классической замены Крылова — Боголюбова [6], с помощью которой уничтожаются слагаемые, пропорциональные частоте осцилляций $\omega \gg 1$. На втором этапе аналогично [115] асимптотические приближения (преобразованной) задачи задаются как решения линейных задач с единым для всех приближений линейным оператором и с правыми частями, зависящими от предыдущих прибли-

жений и ω . Наконец, на третьем этапе указанные линейные задачи асимптотически интегрируются с помощью метода пограничного слоя [9]. В данной главе изложен с обоснованием более естественный и удобный алгоритм, аналогичный описанному в главе 2.

В этой главе рассмотрена задача о тепловой конвекции вязкой несжимаемой жидкости в быстро вибрирующем сосуде. Рассмотрен широкий класс гармонических вибраций в поле силы тяжести и в невесомости. Исследуется задача о периодических по времени решениях в окрестности невырожденного стационарного решения усредненной задачи. Глава состоит из двух разделов. В разделе 5.1 обоснован метод усреднения, а в разделе 5.2 при естественных дополнительных условиях гладкости изложен и обоснован эффективный алгоритм построения полных асимптотических разложений решения. Он состоит в непосредственном применении метода пограничного слоя [9] к исходной задаче и интегрировании возникающих при этом не зависящих от ω задач с помощью разделения на плавную и осциллирующие части.

Результаты раздела 5.1 содержатся в статье [51], а раздела 5.2 — в [54].

5.1. Обоснование метода усреднения

5.1.1. Формулировка основного результата. Пусть Ω — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Рассмотрим задачу о $2\pi\omega^{-1}$ -периодических по времени t решениях системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} - \nu \Delta u' + \nabla p' &= -(u', \nabla)u' + \left[a_0(x) + \right. \\ &+ \omega \sum_{0 < |k| \leq m} a_k(x) e^{ik\omega t} \left. \right] T' + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} b_j(x, \omega t), \quad \operatorname{div} u' = 0, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} - \chi \Delta T' &= -(u, \nabla T') + b_0(x, \omega t), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \\ u'|_{\partial\Omega} &= 0, \quad T'|_{\partial\Omega} = h(x), \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь m — натуральное число; ν, χ — положительные числа; a_k — вектор-функции со значениями в трехмерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$, причем $a_k \in C^1(\bar{\Omega})$, $k \neq 0$, $a_0 \in C(\bar{\Omega})$; вектор-функции $b_j(x, \tau)$, $j = 1, 2, 3$, со значениями в $\mathbb{C}^3$ и функция $b_0(x, \tau)$ со

значениями в $\mathbb{C}^1$ определены на множестве $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, 2π -периодичны по τ (конкретнее о них будет сказано в формулировке теоремы); функция h является следом некоторой комплекснозначной функции из $W_{q_0}^2(\Omega)$, $q_0 > 3/2$, ω — большой параметр. Решение системы (5.1) понимается в обобщенном смысле, который будет разъяснен в п. 5.1.2.

Отметим, что если a_k не зависят от x , $a_0 = -\beta g$ (g — ускорение свободного падения, $\beta > 0$), векторы a_k и a_{-k} комплексно сопряжены и $b_j = 0$, $b_0 = 0$, $\text{Im } h = 0$, то система (5.1) описывает задачу о конвекции в жидкости при наклонных вибрациях в подвижной системе координат, связанной с вибрирующей полостью Ω . Если в дополнение к этому все векторы a_k параллельны g , то система (5.1) отвечает задаче о конвекции при вертикальных вибрациях вида

$$x_3 = \omega^{-1} \sum_{0 < |k| \leq m} C_k e^{ik\omega t}, \quad C_k = -k^{-2} a_k.$$

Если же $a_0 = 0$, то (5.1) описывает задачу о конвекции в невесомости (см. [44]). Системе (5.1) поставим в соответствие систему

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \nabla v + \nabla q = -(v, \nabla)v + a_0(x)\tau' + \\ & + \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} [a_k(\Pi a_{-k}\tau', \nabla \tau') - (\Pi a_k \tau', \nabla) \Pi a_{-k} \tau'] + \\ & + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} B_j(x) \equiv F'_1(v, \tau') + \sum_{j=1}^3 B_j(x), \quad \text{div } v = 0, \\ & \frac{\partial \tau'}{\partial t} - \chi \Delta \tau' = -(v, \nabla \tau') + B_0(x) \equiv F'_2(v, \tau') + B_0(x), \\ & v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \tau'|_{\partial\Omega} = h(x), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где Π — проектор Вейля (см. с. 54), действующий из $L_q(\Omega)$ на подпространство соленоидальных векторов S_q , а

$$B_j(x) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} b_j(x, \tau) d\tau, \quad j = 0, \dots, 3.$$

Как и в предыдущих главах, через $\overset{\circ}{S}_q^2(\overset{\circ}{W}_q^2)$, $q > 1$, обозначим замыкание по норме $W_q^2(\Omega)$ множества гладких исчезающих на $\partial\Omega$ вектор-функций из $S_q(L_q)$. Предположим, что система (5.2) имеет стационарное решение $(\overset{\circ}{v}, \overset{\circ}{q}, \overset{\circ}{r}) \in \overset{\circ}{S}_{q_0}^2 \times W_{q_0}^1 \times W_{q_0}^2$. В пространстве $S_q \times L_q$, где $q > 3$ связано с q_0 , как указано в п. 1 формулировки теоремы 5.1 (см. ниже), определим оператор A с областью определения $D(A) = \overset{\circ}{S}_q^2 \times \overset{\circ}{W}_q^2$, действующий по закону

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\nu \Pi \Delta v + \Pi[(\overset{\circ}{v}, \nabla)v + (v, \nabla)\overset{\circ}{v}] + C_1 \tau \\ -\chi \Delta \tau + (\overset{\circ}{v}, \nabla \tau) + (v, \nabla \overset{\circ}{\tau}') \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} -\nu \Pi \Delta v + B_1 v + C_1 \tau \\ -\chi \Delta \tau + B_2 v + C_2 \tau \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_1 \tau &= \Pi \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} \left[(\Pi a_k \overset{\circ}{\tau}', \tau) \Pi a_{-k} \tau + (\Pi a_k \tau, \nabla) \Pi a_{-k} \overset{\circ}{\tau}' - \right. \\ &\quad \left. - a_k (\Pi a_{-k} \tau, \nabla \overset{\circ}{\tau}') - a_k (\Pi a_{-k} \overset{\circ}{\tau}', \nabla \tau) \right] - \Pi a_0 \tau. \end{aligned}$$

Пусть для банахова пространства B , $\mu \in (0, 1]$, $\rho > 0$, $\overset{\circ}{x} \in B$ обозначения $C(\mathbb{R}, B)$, $C^\mu(\mathbb{R}, B)$, $S_B^\rho(\overset{\circ}{x})$ имеют тот же смысл, что в разделе 2.1.

Теорема 5.1. Пусть система (5.2) имеет стационарное решение $(\overset{\circ}{v}, \overset{\circ}{q}, \overset{\circ}{r}) \in \overset{\circ}{S}_{q_0}^2 \times W_{q_0}^1 \times W_{q_0}^2$, и спектр Λ оператора A не содержит нуля. Тогда существует такое $\omega_0 > 0$, при котором справедливы следующие утверждения.

1. Пусть $3 < q < 3q_0/(3 - q_0)$ для $3/2 < q_0 < 3$ и $q > 3$ для $q_0 > 3$. Тогда при $b_j \in C(\mathbb{R}, L_{q/2})$, $b_0 \in C(\mathbb{R}, L_{q/2})$ найдется такое положительное число r_0 , что при $\omega > \omega_0$ система (5.1) имеет $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое по t решение $(u'_\omega, p'_\omega, T'_\omega)$, причем его компонента (u'_ω, T'_ω) (мы ее будем также называть решением системы (5.1)) единственна в шаре

$$\left\| T - \overset{\circ}{\tau}' \right\|_{C(\mathbb{R}, W_q^1(\Omega))} + \left\| u - \left(\overset{\circ}{v} + \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} e^{ik\omega t} \Pi a_k \overset{\circ}{\tau}' \right) \right\|_{C(\mathbb{R}, S_q)} \leq r_0.$$

Кроме того,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\left\| T'_\omega - \overset{\circ}{\tau}' \right\|_{C(\mathbb{R}, W_q^1(\Omega))} + \left\| u'_\omega - \left(\overset{\circ}{v} + \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} e^{ik\omega t} \text{Па}_k \overset{\circ}{\tau}' \right) \right\|_{C(\mathbb{R}, S_q)} \right] = 0.$$

2. Если $q_0 > 2$ и при некотором $\alpha \in (0, 1)$ вектор-функция $(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} b_j, b_0)$ принадлежит $C(\mathbb{R}, C^\alpha)$, $a_0 \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$,

то решение (u'_ω, T'_ω) принадлежит $(\mathbb{R}, \overset{\circ}{S}_{q_0}^2 \times W_{q_0}^2) \cap C^1(\mathbb{R}, S_{q_0} \times L_{q_0})$

3. Пусть выполнены условия п. 2 теоремы и $6 < q < 3q_0/(3 - q_0)$ для $2 < q_0 < 3$, $q > 6$ для $q_0 > 3$. Тогда если спектр Λ лежит строго внутри правой комплексной полуплоскости, то решение (u'_ω, T'_ω) экспоненциально устойчиво по норме $S_q \times W_q^l$ равномерно относительно $\omega > \omega_0$ и начальных данных. Это означает, что существуют такие положительные числа c_0, σ_0, ρ_0 , что при $\omega > \omega_0$ для любого $s \in \mathbb{R}$ и любого вектора $(u_s, T_s) \in S_{S_q \times W_q^1}^{p_0}(u'_\omega(\cdot, s), T'_\omega(\cdot, s))$ существует единственное решение (u_ω^s, T_ω^s) задачи Коши для уравнения (5.1) с начальным условием $u_\omega^s(x, s) = u_s(x)$, $T_\omega^s(x, s) = T_s(x)$, определенное на луче $t > s$, и выполняется оценка

$$\begin{aligned} & \|u'_\omega(\cdot, t) - u_\omega^s(\cdot, t)\|_{S_q} + \|T'_\omega(\cdot, t) - T_\omega^s(\cdot, t)\|_{W_q^1} \leq \\ & \leq C_0 e^{-\sigma_0(t-s)} (\|u'_\omega(\cdot, s) - u_\omega^s(\cdot, s)\|_{S_q} + \|T'_\omega(\cdot, s) - T_\omega^s(\cdot, s)\|_{W_q^1}). \end{aligned}$$

4. Пусть выполнены условия п. 2 теоремы и q связано с q_0 , как указано в п. 3. Тогда если спектр Λ имеет хотя бы одну точку строго внутри левой полуплоскости, то решение (u'_ω, T'_ω) неустойчиво по норме $S_q \times W_q^l$ при $\omega > \omega_0$. Это означает, что найдутся такие число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $t_n, n = 1, 2, \dots$, сколь угодно больших чисел, что для любого $s \in \mathbb{R}$ существует последовательность (u_ω^n, T_ω^n) решений уравнения (5.1), определенных при $t \in [s, s + t_n]$ и удовлетворяющих условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u'_\omega(\cdot, s) - u_\omega^{n_s}(\cdot, s)\|_{S_q} + \|T'_\omega(\cdot, s) - T_\omega^{n_s}(\cdot, s)\|_{W_q^1}) = 0,$$

$$\|u'_\omega(\cdot, s + t_n) - u_\omega^{n_s}(\cdot, s + t_n)\|_{S_q} + \|T'_\omega(\cdot, s + t_n) - T_\omega^{n_s}(\cdot, s + t_n)\|_{W_q^1} \geq \varepsilon_0.$$

Доказательству данной теоремы посвящена оставшая часть раздела.

5.1.2. Доказательство основного результата I: обоснование метода усреднения. В этом пункте будем предполагать, что q связано с q_0 , как указано в первом утверждении теоремы 5.1. Следуя идее замены переменных Крылова — Боголюбова [6] и работе [114], сделаем в системе (5.1) замену

$$u'(x, t) = u(x, t) + v(x, t), \quad v(x, t) = w(x, t, t), \quad (5.3)$$

где вектор-функция $w(x, t, \tau)$ является $2\pi\omega^{-1}$ -периодическим по t решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, t, \tau)}{\partial t} &= \nu \Pi \Delta w + \omega \Pi \sum_{0 < |k| \leq m} a_k(x) e^{ik\omega t} T'(x, \tau), \\ \operatorname{div} w &= 0, \quad w|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Для удобства записи преобразованной системы вводятся операторы A_3 , $N(t)$ и $M_\omega(t)$, определенные соответственно на пространствах $S_q \times W_q^2$, L_q и L_q формулами

$$\begin{aligned} A_3(v, T') &= \chi \Delta T' - (v, \nabla T'), \\ N(t)r &= \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} e^{ikt} \Pi a_k r, \\ M_\omega(t)r &= v(x, t) - N(\omega t)r, \end{aligned}$$

где v — $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое по t решение системы

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \Delta v + \omega \Pi \sum_{0 < |k| \leq m} a_k e^{ik\omega t} r, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

При этом замену (5.3) можно переписать в форме

$$u' = u + N(\omega t)T' + M_\omega(t)T'.$$

Легко видеть, что в результате замены система (5.1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta u + \nabla p &= f'_1(u, T', \omega t) + \varphi'_{\omega,1}(u, T', t) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} b_j(\cdot, \omega t), \\ \frac{\partial T'}{\partial t} - \chi \Delta T' &= f'_2(u, T', \omega t) + \varphi'_{\omega,2}(u, T', t) + b_0(\cdot, \omega t), \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad T'|_{\partial\Omega} = h. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Участвующие здесь отображения

$$\begin{aligned} f'_1, f'_2 &: (W_q^1 \cap S_q) \times W_q^2 \times \mathbb{R} \rightarrow L_q, \\ \varphi'_{\omega,1}, \varphi'_{\omega,2} &: (W_q^1 \cap S_q) \times W_q^2 \times \mathbb{R} \rightarrow L_q \end{aligned}$$

определяются равенствами

$$\begin{aligned} f'_1(u, T', t) &= F'_1(u, T') + \tilde{f}'_1(u, T', t), \\ \tilde{f}'_1(u, T', t) &= (N(t)T', \nabla)u - (u, \nabla)N(t)T' - \\ &- \sum_{\substack{0 < |k|, |s| \leq m, \\ k+s \neq 0}} (ks)^{-1} e^{i(k+s)t} (\Pi a_k T', \nabla) \Pi a_s T' - N(t)A_3(u, T') + \\ &+ \sum_{\substack{0 < |k|, |s| \leq m, \\ k+s \neq 0}} (ks)^{-1} e^{i(k+s)t} \Pi a_k (\Pi a_s T', \nabla T'), \\ \varphi'_{\omega,1}(u, T', t) &= -(M_\omega(t)T', \nabla)u - (u, \nabla)M_\omega(t)T' - \\ &- (M_\omega(t)T', \nabla)M_\omega(t)T' - (N(\omega t)T', \nabla)M_\omega(t)T' - \\ &- (M_\omega(t)T', \nabla)N(\omega t)T' - M_\omega(t)A_3(u, T') + M_\omega(t)(M_\omega(t)T', \nabla T'), \\ f'_2(u, T', t) &= F'_2(u, T') + \tilde{f}'_2(u, T', t), \\ \tilde{f}'_2(u, T', t) &= -(N(t)T', \nabla T') + \tilde{f}'_2(\cdot, t), \\ \varphi'_{\omega,2}(u, T', t) &= -(M_\omega(t)T', \nabla T'). \end{aligned}$$

Здесь выражения F'_1, F'_2 — те же, что и в (5.2). Подействуем теперь на первое уравнение системы (5.4) проектором Π и обозначим через $f_1, f_2, F_1, F_2, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ и $\varphi_{\omega,1}, \varphi_{\omega,2}$ отображения, принадлежащие тем же пространствам, что и $f'_1, f'_2, F'_1, F'_2, \tilde{f}'_1, \tilde{f}'_2$ и $\varphi'_{\omega,1}, \varphi'_{\omega,2}$ соответственно, и связанные с последними соотношениями

$$f_1(u, T, t) = \Pi f'_1(u, T + \Phi, t), \quad f_2(u, T, t) = f'_2(u, T + \Phi, t),$$

$$F_1(u, T) = \Pi F'_1(u, T + \Phi), \quad F_2(u, T) = F'_2(u, T + \Phi),$$

$$\tilde{f}_1(u, T) = \Pi \tilde{f}'_1(u, T + \Phi), \quad \tilde{f}_2(u, T) = \tilde{f}'_2(u, T + \Phi),$$

$$\varphi_{\omega,1}(u, T, t) = \Pi \varphi'_{\omega,1}(u, T + \Phi, t), \quad \varphi_{\omega,2}(u, T, t) = \varphi'_{\omega,2}(u, T + \Phi, t),$$

где функция Φ является решением задачи

$$\Delta \Phi = 0, \quad \Phi|_{\partial\Omega} = h.$$

Заменим еще u на $u + \overset{\circ}{v}$, T на $T + \overset{\circ}{\tau}$, где $\overset{\circ}{\tau} = \overset{\circ}{\tau}' - \Phi$. В результате всех этих преобразований система (5.4) примет вид

$$\frac{\partial z}{\partial t} + Az = f(z, t, \omega), \quad (5.5)$$

где $z = (u, T)$, $f(z, t, \omega) = (f_1(u + \overset{\circ}{v}, T + \overset{\circ}{\tau}, \omega t) - F_1(\overset{\circ}{v}, \overset{\circ}{\tau}) + B_1 u + C_1 T + \varphi_{\omega,1}(u + \overset{\circ}{v}, T + \overset{\circ}{\tau}, \omega t), f_2(u + \overset{\circ}{v}, T + \overset{\circ}{\tau}, \omega t) - F_2(\overset{\circ}{v}, \overset{\circ}{\tau}) + B_2 T + C_2 u + \varphi_{\omega,2}(u + \overset{\circ}{v}, T + \overset{\circ}{\tau}, \omega t))$. Нетрудно видеть, что вектор-функция f является $2\pi\omega^{-1}$ -периодической по t .

Как и в [49], устанавливается, что спектр оператора e^{-tA} состоит из числе $e^{-\lambda t}$, $\lambda \in \Lambda$, и числа 0, причем спектр Λ дискретен. Поскольку $0 \notin \Lambda$, существует такое число $t_\infty > 0$, что

$$e^{-\lambda t_\infty} \neq 1, \quad \lambda \in \Lambda. \quad (5.6)$$

Пусть n_ω — натуральное число такое, что для $t_\omega = 2\pi\omega^{-1}n_\omega$ выполняется неравенство

$$0 \leq t_\infty - t_\omega < 2\pi\omega^{-1}. \quad (5.7)$$

В силу соотношений (5.6), (5.7) найдется такое ω^* , что при $\omega > \omega^*$ и всех $\lambda \in \Lambda$ будет $e^{-\lambda t_\omega} \neq 1$.

Резюмируя сказанное, можно утверждать, что при $\omega > \omega^*$

$$[I - e^{-t_\omega A}]^{-1} \in \text{Hom}(S_q \times L_q, S_q \times L_q).$$

Отсюда следует, что

$$[I - e^{-t_\omega A}]^{-1} \in \text{Hom}(S_q \times W_q^1, S_q \times W_q^1), \quad \omega > \omega^*.$$

Так же как и при выводе формулы (8) из [49], устанавливается, что всякое t_ω -периодическое решение $z \in C(\mathbb{R}, \overset{\circ}{S}_q^2 \times \overset{\circ}{W}_q^2)$ уравнения (5.5), $\omega > \omega^*$, удовлетворяет при $t \geq 0$ интегральному уравнению

$$\begin{aligned} z(t) = & [I - e^{-t_\omega A}]^{-1} \int_0^{t_\omega} e^{-(t_\omega + t - \tau)A} f(z, \tau, \omega) d\tau + \\ & + \int_0^t e^{-(t - \tau)A} f(z, \tau, \omega) d\tau \equiv [\overset{\circ}{N}_\omega(z)](t), \end{aligned} \quad (5.8)$$

и в более короткой записи

$$z(t) = \int_0^{t_\omega} G_\omega(t - \tau) f(z, \tau, \omega) d\tau,$$

где $G_\omega(s)$ — функция Грина, определяемая соотношением

$$G_\omega(s) = \begin{cases} [I - e^{-t_\omega A}]^{-1} e^{-sA}, & s \geq 0 \\ [I - e^{-t_\omega A}]^{-1} e^{-(t_\omega + s)A}, & s < 0. \end{cases}$$

Наоборот, всякое решение $z \in C([0, 2t_\omega], (S_q \cap W_q^1) \times W_q^2)$ уравнения (5.8), будучи t_ω -периодическим образом продолженным на всю ось $t \in \mathbb{R}$, является t_ω -периодическим решением уравнения (5.5).

В пространстве $C([0, 2t_\omega], S_q \times W_q^1)$ выделим подпространство C_q^ω вектор-функций $\overset{\circ}{z}$, для которых при всех $t \in [0, t_\omega]$ выполняется равенство

$$\overset{\circ}{z}(t + t_\omega) = \overset{\circ}{z}(t).$$

Через $C_{q,\mu}^\omega$, $0 < \mu \leq 1$, обозначим банахово пространство, состоящее из вектор-функций $\overset{\circ}{z} \in C_q^\omega$, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ :

$$\|\overset{\circ}{z}\|_{C_{q,\mu}^\omega} = \|\overset{\circ}{z}\|_{C_q^\omega} + \sup_{0 \leq t_1 < t_2 \leq 2t_\omega} \frac{\|\overset{\circ}{z}(t_2) - \overset{\circ}{z}(t_1)\|_{S_q \times W_q^1}}{(t_2 - t_1)^\mu} < \infty.$$

Пространство C_q^ω будем также обозначать через $C_{q,0}^\omega$.

Рассмотрим оператор N_ω , действующий в пространстве C_q^ω и являющийся замыканием оператора $\overset{\circ}{N}_\omega$, определенного на (гладких) вектор-функциях $\overset{\circ}{z} \in C([0, 2t_\omega], (S_q \cap W_q^1) \times W_q^2) \cap C_q^\omega$ правой частью равенства (5.8). Корректность такого определения следует из соотношения $\overset{\circ}{N}_\omega \overset{\circ}{z} \in C_q^\omega$ и возможности указанного замыкания. Докажем вначале это соотношение. Рассмотрим гладкую вектор-функцию $\overset{\circ}{z} \in C_q^\omega$ и t_ω -периодическое продолжение z функции $\overset{\circ}{z}$ на полуось $t \geq 0$. Обозначим через y t_ω -периодическое решение уравнения

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f(z, t, \omega), \quad t \geq 0.$$

Тогда при $t \in [0, 2t_\omega]$

$$y(t) = \left[\overset{\circ}{N}_\omega \left(\overset{\circ}{z} \right) \right](t),$$

т. е. $\overset{\circ}{N}_\omega \left(\overset{\circ}{z} \right) \in C_q^\omega$, что и требовалось доказать.

Возможность замыкания $\overset{\circ}{N}_\omega$ в C_q^ω вытекает из следующего утверждения.

Лемма 5.1. *Существует такое число $\omega_0 > 0$, что для любого $r > 0$ можно указать число $c > 0$, при котором для всех $\omega > \omega_0$ и любых гладких вектор-функций z_1, z_2 , удовлетворяющих условию*

$$\|z_1\|_{C_q^\omega}, \|z_2\|_{C_q^\omega} \leq r,$$

справедливо неравенство

$$\|\overset{\circ}{N}_\omega(z_2) - \overset{\circ}{N}_\omega(z_1)\|_{C_q^\omega} \leq c\|z_2 - z_1\|_{C_q^\omega}.$$

Учитывая сказанное, дадим следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. t_ω -периодическим (обобщенным) решением уравнения (5.5) будем называть t_ω -периодическое продолжение на всю ось $t \in \mathbb{R}$ вектор-функции $\overset{\circ}{z} \in C_q^\omega$, являющейся неподвижной точкой оператора N_ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. $2\pi\omega^{-1}$ -периодическим по t (обобщенным) решением уравнения (5.1) будем называть $2\pi\omega^{-1}$ -периодическую по t вектор-функцию $(u, T') \in C(\mathbb{R}, S_q \times W_q^1)$, связанную заменой (5.3) с t_ω -периодическим продолжением на ось $t \in \mathbb{R}$ некоторой вектор-функции, являющейся неподвижной точкой оператора N_ω .

Как указано в п. 2 теоремы 5.1, при $q_0 > 2$ и достаточно гладких b_0, b_j, a_0 и $\partial\Omega$ всякое обобщенное решение задачи (5.1) является ее решением в обычном смысле.

Лемма 5.2. *Для любого достаточно малого числа $r_0 > 0$ существует такое $\omega_0 > \omega^*$, что при $\omega > \omega_0$ оператор N_ω^2 (вторая итерация оператора N_ω) в шаре $S_{C_q^\omega}^{r_0}(0) \equiv \{z = (u, T) : \|z\|_{C_q^\omega} \leq r_0\}$ является сжатием, причем $S_{C_q^\omega}^{r_0}(0)$ инвариантен относительно N_ω^3 .*

Доказательства лемм 5.1, 5.2 предоставляются читателю. Отметим, что они осуществляются с помощью использовавшейся в [49] техники. Аналогично тому, как в [49] п. 1 теоремы выведен из леммы 1, в настоящем разделе п. 1 следует из леммы 5.2.

5.1.3. Доказательство основного результата II: дополнительная гладкость решения. Докажем п. 2 теоремы 5.1. Пусть $6 < q < 3q_0/(3 - q_0)$ при $2 < q_0 < 3$ и $q > 6$ при $q_0 \geq 3$. Рассмотрим исходную систему (5.1). Подействуем на уравнение Навье — Стокса проектором Π и полученную в результате этого систему запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + A_1 u' &= -\Pi(u', \nabla)u' + \Pi \left[\omega \sum_{0 < |k| \leq m} a_k e^{ik\omega t} + a_0 \right] T' + \\ &+ \Pi \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} b_j(x, \omega t) \equiv f_1(u', T', t, \omega), \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + A_2 T' &= (u', \nabla T') + b_0(x, \omega t) \equiv f_2(u', T', t, \omega), \quad T' = T + \Phi, \end{aligned}$$

где операторы A_1 и A_2 те же, что и в [49].

Задача о t_ω -периодических решениях последней системы сводится согласно к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u' &= \int_0^t e^{-(t-\tau)A_1} f_1(u', T', \tau, \omega) d\tau + \\ &+ [I_1 - e^{-t_\omega A_1}]^{-1} \int_0^{t_\omega} e^{-(t_\omega+t-\tau)A_1} f_1(u', T', \tau, \omega) d\tau, \\ T' &= \int_0^t e^{-(t-\tau)A_2} f_2(u', T', \tau, \omega) d\tau + \\ &+ [I_2 - e^{-t_\omega A_2}]^{-1} \int_0^{t_\omega} e^{-(t_\omega+t-\tau)A_2} f_2(u', T', \tau, \omega) d\tau, \end{aligned} \tag{5.9}$$

где I_1, I_2 — тождественные операторы.

(Обобщенное) решение (u', T') системы (5.1), о котором говорится в п. 1 теоремы 5.1 (точнее, его сужение на участок $t \in [0, 2t_\omega]$), удовлетворяет системе (5.9), где интегралы, строго говоря, определены с помощью соответствующего замыкания. Для доказательства п. 2 теоремы 5.1 достаточно показать, что решение (u', T') системы (5.9) принадлежит пространству $C([0, 2t_\omega], \overset{\circ}{S}_{q_0}^2 \times \overset{\circ}{W}_{q_0}^2)$. Ограничимся рассмотрением первого уравнения (5.9), так как второе исследуется аналогично. Для краткости запишем его в виде

$$\begin{aligned} u(t) = & - \int_0^{t_\omega} G_{1,\omega}(t-\tau) \Pi \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u) d\tau + \\ & + \int_0^{t_\omega} G_{1,\omega}(t-\tau) \Pi \left[\omega \sum_{0 < |k| \leq m} a_k e^{ik\omega t} + a_0 \right] T d\tau + \\ & + \int_0^{t_\omega} G_{1,\omega} \Pi \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} b_j(x, \omega t) \equiv \widehat{G}_{\omega,1} + \widehat{G}_{\omega,2} + \widehat{G}_{\omega,3}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где

$$G_{1,\omega}(t) = \begin{cases} [I_1 - e^{-t_\omega A_1}]^{-1} e^{-t A_1}, & t > 0, \\ [I_1 - e^{-t_\omega A_1}]^{-1} e^{-(t_\omega+t) A_1}, & t < 0, \end{cases}$$

а штрихи в обозначениях решения (u', T') опущены.

В дальнейшем через $\overset{\circ}{S}_p^{2\delta}$ и $\overset{\circ}{W}_p^{2\delta}$, $p > 1$, $\delta \in (0, 1)$, будем обозначать области определения дробных степеней операторов A_1^δ и A_2^δ соответственно (см. раздел 2.1).

Ниже будем опираться на следующие пять вспомогательных утверждений.

1 (лемма 2.2). Для любых $\mu \in (0, 1]$ и $p > 3$ существует число $\varepsilon = \varepsilon(p, \mu) \in (0, 1]$, при котором имеет место непрерывное вложение

$$PC^\mu \subset \overset{\circ}{S}_p^{2\varepsilon}. \quad (5.11)$$

2. Пусть $l \in [0, 2]$, $p > 1$, $\delta \in [0, 1]$ и $\delta > l/2 + 3/2p$. Тогда имеют место непрерывные вложения

$$\overset{\circ}{S}_p^{2\delta} \subset C^l, \quad \overset{\circ}{W}_p^{2\delta} \subset C^l. \quad (5.12)$$

Доказательство соотношения (5.12) осуществляется с помощью интерполяционной теоремы 2.3 И. Б. Симоненко.

3. Пусть $\gamma_1 > \gamma_2 > 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 > 1/2$. Тогда при всех $\overline{\varphi} \in L_p$, $p > 1$, справедлива оценка

$$\left\| \left(\overline{A_1^{-\gamma_1} \Pi \frac{\partial}{\partial x_i} A_1^{-\gamma_2} \Pi} \right) \overline{\varphi} \right\|_{L_p} \leq C \|\overline{\varphi}\|_{L_p}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.13)$$

где черта над оператором означает его замыкание по норме L_p . При доказательстве неравенства (5.13) используются интегральное представление отрицательной дробной степени оператора A_1 [37, формула (14.15)] и известные оценки резольвенты этого оператора [143].

4. Для всех $\overline{\varphi} \in W_p^1$, $p > 1$, справедливо тождество

$$\Pi \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\varphi}(x) = \Pi \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi \overline{\varphi}(x), \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.14)$$

Оно очевидно для $\overline{\varphi} \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha > 0$, а для остальных $\overline{\varphi} \in W_p^1$ получается в результате замыкания.

5 [37]. Для любых $\tau \in [0, 1]$ и $0 < \varphi < 2\pi$ при всех λ , лежащих вне сектора $0 < |\arg \lambda| < \varphi$, выполняется оценка

$$\|A_1^\tau (\lambda I_1 - A_1)^{-1}\|_{\text{Hom}(S_q, S_q)} < C(q, \tau, \varphi) (1 + |\tau|^{\tau-1}). \quad (5.15)$$

Перейдем к непосредственному исследованию гладкости вектор-функции u в (5.10).

Поскольку $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} b_j(\cdot, \tau) \in C(\mathbb{R}, C^\alpha(\overline{\Omega}))$ при некотором $\alpha > 0$, то в силу утверждения (5.11) найдется такое число $\delta_1 > 0$, что

$$\Pi \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{b}_j(\cdot, \tau) \in C(\mathbb{R}_1, \overset{\circ}{S}_q^{2\delta_1}).$$

Отсюда с помощью представления

$$\widehat{G}_{\omega,3} = \int_0^{t_\omega} A_1^{1-\delta_1} G_{1,\omega}(t-\tau) A_1^{\delta_1} \Pi \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{b}_j(\cdot, \tau) d\tau$$

и известной оценки

$$\|A_1^\delta e^{-tA_1}\|_{\text{Hom}(S_q, S_q)} \leq c_0 t^{-\delta},$$

где $\delta > 0$, $c_0 = c_0(\delta) = \text{const}$, выводим, что

$$\|\widehat{G}_{\omega,3}\|_{C([0,2t_\omega], \dot{S}_q^2)} \leq c \left\| \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{b}_j \right\|_{C([0,t_\omega], C^\alpha(\bar{\Omega}))}, \quad c = \text{const}. \quad (5.16)$$

Так как $T \in C(\mathbb{R}, W_q^1)$, то с помощью представления

$$A_1 \widehat{G}_{\omega,2} = \int_0^{t_\omega} A_1^{1-\delta_2} G_{1,\omega}(t-\tau) A_1^{\delta_2} \sum_{0 < |k| \leq m} \Pi(a_k e^{ik\omega t} + a_0) T d\tau,$$

$$0 < \delta_2 \ll 1,$$

аналогично оценке (5.15) устанавливается неравенство

$$\|\widehat{G}_{\omega,2}\|_{C([0,2t_\omega], \dot{S}_q^2)} \leq c \|T\|_{C([0,2t_\omega], W_q^1)}. \quad (5.17)$$

Перейдем к рассмотрению интеграла $\widehat{G}_{\omega,1}$. Напомним известные неравенства [143]

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} e^{-tA_1} \right\|_{\text{Hom}(S_p, L_p)}, \quad \left\| e^{-tA_1} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\|_{\text{Hom}(L_p, S_p)} \leq c t^{-1/2},$$

$$t > 0, \quad p > 1, \quad c = \text{const}. \quad (5.18)$$

Из оценок (5.15), (5.18) и полугруппового свойства оператор-функции e^{-tA_1} вытекает неравенство

$$\|A_1^{\delta_1} \widehat{G}_{\omega,1}\|_{C([0,2t_\omega], S_{q/2})} \leq c \|u\|_{C([0,2t_\omega], S_q)}, \quad (5.19)$$

где δ_1 — произвольное число из промежутка $[0, 1/2)$.

В силу соотношений (5.10), (5.19), (5.16), (5.17), (5.12) и (5.11) имеем

$$\Pi(u_i, u) \in C([0, 2t_\omega], \mathring{S}_q^{2\delta_3}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.20)$$

где $\delta_3 \in (0, 1)$. Отсюда с учетом (5.14) приходим к представлению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \widehat{G}_{\omega,1} &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} e^{-\frac{t-\tau}{2}A_1} A_1^{\delta_4} e^{-\frac{t-\tau}{2}A_1} A_1^{-\delta_4} \Pi \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} A_1^{-\delta_3} A_1^{\delta_3} \Pi \times \\ &\times (u_j u) d\tau + \int_0^{t_\omega} \frac{\partial}{\partial x_i} e^{\frac{t+t_\omega-\tau}{2}A_1} A_1^{\delta_4} e^{\frac{t+t_\omega-\tau}{2}A_1} [I_1 - e^{-t_\omega A_1}]^{-1} \{\dots\} d\tau, \end{aligned}$$

где $1/2 - \delta_3 < \delta_4 < 1/2$, $i = 1, 2, 3$. Из него согласно соотношениям (5.18), (5.15), (5.13) и (5.20) вытекает принадлежность $\widehat{G}_{\omega,1}$ пространству $C([0, 2t_\omega], W_q^1)$. Отсюда с учетом теоремы вложения $W_q^1 \subset C(\overline{\Omega})$ следует, что

$$(u, \nabla)u \in C([0, 2t_\omega], L_q).$$

Но тогда в силу (5.10), (5.16), (5.17) и (5.15)

$$u \in C([0, 2t_\omega], \mathring{S}_q^{2\delta})$$

при любом $\delta \in [0, 1)$. Отсюда согласно (5.12) для некоторого $l_0 > 1$ будет $u \in C([0, 2t_\omega], C^{l_0})$, а, следовательно, в силу (5.11) для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\Pi(u, \nabla)u \in C([0, 2t_\omega], \mathring{S}_q^{2\varepsilon}).$$

Из последнего включения и соотношений (5.10), (5.16), (5.17) легко следует п. 2 теоремы 5.1.

П. 3 теоремы 5.1 доказывается так же, как и п. 3 теоремы из [49].

Докажем п. 4. Обозначим для краткости через B_q пространство $S_q \times W_q^1$, где q связано с q_0 , как указано в п. 4 теоремы 5.1. По условию существует такое число $\sigma_1 > 0$, что спектр Λ оператора A представим в виде объединения спектральных подмножеств $\sigma_\pm$, где $\operatorname{Re} \lambda \geq \sigma_1 \geq 0$ при $\lambda \in \sigma_+$ и $\operatorname{Re} \lambda < -\sigma_1 < 0$ при $\lambda \in \sigma_-$. Пусть $B_{q\pm}$ — инвариантные относительно A подпространства пространства B_q , соответствующие $\sigma_\pm$, а $P_\pm$ — отвечающие им проекторы. Для любого $z \in B_q$ положим $z_\pm = P_\pm z$. Подпространство B_{q-} ввиду

полной непрерывности оператора A^{-1} конечномерно, поэтому сужение e^{-tA_-} полугруппы e^{-tA} на B_{q-} продолжается на всю ось $t \in \mathbb{R}$ и образует группу.

Лемма 5.3. В условиях п. 4 теоремы 5.1 найдется такое число $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ для каждого $s \in \mathbb{R}$ в некоторой окрестности вектора $z_\omega(s)$ ($z_\omega = (u_\omega, T_\omega)$ — $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое решение уравнения (5.5), существование которого установлено леммой 5.2) пространства B_q существует многообразие Y_-^s , определенное уравнением $z_+ = \varphi_s(z_-)$ и обладающее следующими свойствами.

1. Отображение φ_s задано в некотором шаре фиксированного (т. е. не зависящего от ω, s) радиуса с центром в точке $P_- z_\omega(s)$ пространства B_{q-} и там непрерывно дифференцируемо.

2. Для любых $s \in \mathbb{R}$, $z_0 \in Y_-^s$ существует решение $z(t)$ уравнения (5.5) с начальным условием $z(0) = z_0$, определенное и равномерно ограниченное в норме B_q при $t \leq s$.

3. Семейство многообразий Y_-^s $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое по s , т. е. в фазовом пространстве множества $Y_-^{s+2\pi\omega^{-1}}$ и Y_-^s совпадают.

4. Любые два решения z_1 и z_2 , описанные в п. 2, экспоненциально сближаются в норме B_q при $t \rightarrow -\infty$.

◁ Так же, как в [23, с. 122], доказывается, что каждое ограниченное в норме B_q при $t \leq s$ ($s \in \mathbb{R}$) решение $z(t)$ системы (5.5) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} z(t) = e^{-(t-s)A_-} a_- + \int_s^t e^{-(t-\tau)A_-} P_- f(z, \tau, \omega) d\tau + \\ + \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)A_+} P_+ f(z, \tau, \omega) d\tau \equiv M_\omega^s(a_-, z), \end{aligned} \quad (5.21)$$

где $a_- = z_-(s)$, $A_\pm = P_\pm A P_\pm$. Легко доказывается и обратное утверждение, т. е. всякое решение $z \in C((-\infty, s], B_q)$ уравнения (5.21) принадлежит $C((-\infty, s], \mathring{S}_q^2 \times \mathring{W}_q^2)$ и удовлетворяет уравнению (5.5).

Для обоснования утверждения 1 леммы 5.3, следуя В. И. Юдовичу [143], воспользуемся теоремой о неявной функции. В окрестности U^s вектора $(P_- z_\omega(s), z_\omega)$ пространства $B_{q-} \times C^n((-\infty, s], B_q)$, $\gamma_1 \in (0, 1/4(1 - 3/q))$, рассмотрим оператор $F_\omega^s : U_s \rightarrow$

$C^{\gamma_1}((-\infty, s], B_q)$, определенный равенством

$$F_{\omega}^s(a_-, z) = z - M_{\omega}^s(a_-, z).$$

Очевидно, что уравнение (5.21) в окрестности решения $z_{\omega}(t)$ можно переписать в виде

$$F_{\omega}^s(a_-, z) = 0, \quad (5.22)$$

причем $F_{\omega}^s(P_- z_{\omega}(s), z_{\omega}) = 0$. С помощью используемой в [49] техники доказывается, что F_{ω}^s в шаре U^s непрерывен и непрерывно дифференцируем, а оператор

$$D_z F_{\omega}^s(P_- z_{\omega}(s), z_{\omega}) = I - D_z M_{\omega}^s(P_- z_{\omega}(s), z_{\omega})$$

при $\omega > \omega_0$, где ω_0 — достаточно большое число, обратим в $\text{Hom}(C^{\gamma_1}((-\infty, s], B_q), C^{\gamma_1}((-\infty, s], B_q))$.

Из теоремы о неявных функциях теперь следует, что при $\omega > \omega_0$ в пространстве $B_{q-} \times C^{\gamma_1}((-\infty, s), B_q)$ существует шар U^s , а в пространстве B_{q-} существует шар V_-^s с центром в $P_- z_{\omega}(s)$ такие, что

а) в шаре V_-^s определен и непрерывно дифференцируем действующий в $C^{\gamma_1}((-\infty, s), B_q)$ оператор R_{ω}^s , для которого

$$[R_{\omega}^s P_- z_{\omega}(s)](t) = z_{\omega}(t), \quad t \geq s;$$

б) из уравнения (5.22) в шаре U^s однозначно выражается z через a_- :

$$z = R_{\omega}^s(a_-).$$

Ввиду равномерности по (ω, s) используемых здесь оценок можно считать, что радиус шара V_-^s не зависит от ω, s .

Из уравнения (5.21) следует соотношение

$$P_+ z(s) = \int_{-\infty}^s e^{-(s-\tau)A_+} P_+ f(z, \tau, \omega) d\tau, \quad z = R_{\omega}^s(a_-), \quad a_- \in V_-^s.$$

Поэтому для любого s отображение φ_s задается равенством

$$a_+ = \varphi_s(a_-) = \int_{-\infty}^s e^{-(s-\tau)A_+} P_+ f[\{R_{\omega}^s(a_-)\}(\tau), \tau, \omega] d\tau, \quad a_- \in V_-^s,$$

$z(s) = a_+ + a_-$, $2\pi\omega^{-1}$ -периодичность семейства Y_s^- вытекает из $2\pi\omega^{-1}$ -периодичности $f(z, \tau, \omega)$ по τ и следующих простых соотношений:

$$\begin{aligned} V_-^{s+2\pi\omega^{-1}} &= V_-^s, \\ [R_\omega^{s+2\pi\omega^{-1}}(a_-)](t+2\pi\omega^{-1}) &= [R_\omega^s(a_-)](t), \\ t \leq s, \quad a_- \in V_-^s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Утверждения 1, 2 леммы 5.3 доказаны.

Докажем п. 3 леммы 5.3. Пусть $z_1(t)$ и $z_2(t)$, $t \leq s$, — два решения системы (5.5), о которых говорится в п. 3. Обозначим $z_2(t) - z_1(t) = w(t)$, $P_-[z_2(s) - z_1(s)] = w_-(s)$. В силу (5.21) справедливо равенство

$$\begin{aligned} e^{-\sigma_1 t} w(t) &= e^{-\sigma_1(t-s)} e^{-(t-s)A_-} e^{-\sigma_1 s} w_-(s) + \int_s^t e^{-\sigma_1(t-\tau)} \times \\ &\times e^{-(t-\tau)A_-} P_- \int_0^1 D_z f(\theta z_2 + (1-\theta)z_1, \tau, \omega) d\theta e^{-\sigma_1 \tau} w(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{-\infty}^t e^{-\sigma_1(t-\tau)} e^{-(t-\tau)A_+} P_+ \int_0^1 D_z f(\theta z_2 + (1-\theta)z_1, \tau, \omega) d\theta \times \\ &\times e^{-\sigma_1 \tau} w(\tau) d\tau \equiv e^{-\sigma_1(t-s)} e^{-(t-s)A_-} e^{-\sigma_1 s} w_-(s) + \\ &+ [N_\omega(z_1, z_2)] [e^{-\sigma_1 t} w(t)]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Аналогично неравенству (63) из [49] доказываем существование таких положительных чисел ω_1 и r_1 , что при $\omega > \omega_1$ и $\|z_i(s) - z_\omega(s)\| \leq r_1$, $i = 1, 2$, выполняется оценка

$$\|N_\omega(z_1, z_2)\|_{\text{Hom}(C^{\gamma_1}((-\infty, s), B_q), C^{\gamma_1}((-\infty, s), B_q))} < 1/2, \quad (5.24)$$

где $\gamma_1 \in (0, 1/4(1 - 3/q))$. Кроме того, учитывая ограниченность проектора P_- в B_q , легко выводим оценку

$$\begin{aligned} \|e^{-\sigma_1(t-s)}e^{-A_-(t-s)}e^{-\sigma_1}w_-(s)\|_{C^{\gamma_1}((-\infty, s), B_q)} &\leq \\ &\leq ce^{-\sigma_1 s}\|w(s)\|_{B_q}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Из соотношений (5.23)–(5.25) вытекает неравенство

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_{B_q} \leq ce^{-\sigma_1(s-t)}\|z_1(s) - z_2(s)\|_{B_q}.$$

Лемма 5.3 доказана. $\triangleright$

Докажем п. 4 теоремы 5.1. Пусть $\omega > \omega_0$, где ω_0 — то же, что и в лемме 5.3, и $z_0 = (u_0, T_0) \in Y_-^0$, $z_0 \neq z_\omega(0)$. Тогда в силу леммы 5.3 существует ограниченное при $t \leq 0$ решение $\overset{\circ}{z}(t)$ уравнения (5.5) с начальным условием $\overset{\circ}{z}(0) = z_0$. При этом

$$\|z_\omega(t) - \overset{\circ}{z}(t)\|_{B_q} \leq ce^{\sigma_1 t}\|z_\omega(0) - \overset{\circ}{z}(0)\|_{B_q}, \quad t \leq 0. \quad (5.26)$$

Пусть z'_ω и $\overset{\circ}{z}'$ — решения системы (5.1), связанные с вектор-функциями z_ω и $\overset{\circ}{z}$ посредством замены переменных (5.3). Тогда из оценки (5.26) выводим неравенство

$$\|x'_\omega(t) - \overset{\circ}{z}'(t)\|_{B_q} \leq c_1 e^{\sigma_1 t}\|z'_\omega(0) - \overset{\circ}{z}'(0)\|_{B_q}, \quad t \leq 0.$$

Очевидно, вектор-функции $\overset{k}{z}'(t) = \overset{\circ}{z}'(t - 2k\pi\omega^{-1})$, $\overset{k}{z}'_\omega(t) = z'_\omega(t - 2k\pi\omega^{-1})$, $k = 1, 2, \dots$, определены при $t \leq 2k\pi\omega^{-1}$ и являются решениями системы (5.1). Кроме того, при $k \rightarrow \infty$

$$\|\overset{k}{z}'_\omega(0) - \overset{k}{z}'(0)\|_{B_q} = \|z'_\omega(-2k\pi\omega^{-1}) - \overset{\circ}{z}'(-2k\pi\omega^{-1})\|_{B_q} \rightarrow 0,$$

$$\|z'_\omega(2k\pi\omega^{-1}) - \overset{k}{z}'(2k\pi\omega^{-1})\|_{B_q} \geq \varepsilon_0 > 0.$$

где ε_0 — наименьшее из положительных чисел $\|\bar{u}_0 - \bar{u}_\omega(0)\|_{S_q}$, $\|T_0 - T_\omega(0)\|_{W_q^1}$. Это и означает неустойчивость z'_ω .

5.2. Асимптотический анализ

5.2.1. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$. В цилиндре $Q = \Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о $2\pi\omega^{-1}$ -периодических по t решениях системы уравнений¹

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \nabla p + (u, \nabla u) = \\ & = \left[a_0(x) + \omega \sum_{0 < |k| \leq m} a_k(x) e^{ik\omega t} \right] T + \sum_{0 \leq |k| \leq m} b_k(x) e^{ik\omega t}, \\ & \frac{\partial T}{\partial t} - \chi \Delta T + (u, \nabla T) = \sum_{0 \leq |k| \leq m} c_k(x) e^{ik\omega t}, \\ & \operatorname{div} u = 0, \quad x \in \Omega, \\ & u|_{\partial\Omega} = 0, \quad T|_{\partial\Omega} = h(x), \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Здесь m — натуральное, а ν и χ — положительные числа, $a_k(x)$ и $b_k(x)$ — вектор-функции со значениями в трехмерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$, $c_k(x)$ и $h(x)$ — функции со значениями в $\mathbb{C}^1$. Будем предполагать, что a_k , b_k , c_k и h бесконечно гладкие.

Решения задачи (5.27) и всех остальных задач в настоящем разделе понимаются в классическом смысле.

Рассмотрим еще систему

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \nabla q + (v, \nabla)v - a_0 T + \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} [(\Pi a_k T, \nabla) \Pi a_{-k} T - \\ & - a_k (\Pi a_{-k} T, \nabla T)] = - \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} a_k c_{-k} + b_0, \quad \operatorname{div} v = 0, \\ & \frac{\partial T}{\partial t} - \chi \Delta T + (v, \nabla T) = c_0, \quad x \in \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad T|_{\partial\Omega} = h, \end{aligned} \quad (5.28)$$

где Π — ортопроектор в $L_2(\Omega)$ на подпространство соленоидальных векторов $S_2(\Omega)$. Предположим, что (5.28) имеет стационарное реше-

¹Как отмечено в [50], задачи о конвекции жидкости при гармонических высокочастотных вертикальных и наклонных вибрациях сосуда в поле силы тяжести и в невесомости являются частными случаями системы (5.27).

ние (u_0, p_0, T_0) , а система

$$\begin{aligned} L(v, q, T) &\equiv -\nu \Delta v + (u_0, \nabla)v + (v, \nabla)u_0 + \nabla q + \\ &+ \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} [(\Pi a_k T_0, \nabla) \Pi a_{-k} T + (\Pi a_k T, \nabla) \Pi a_{-k} T_0 - \\ &- a_k (\Pi a_{-k} T, \nabla T_0) - a_k (\Pi a_{-k} T, \nabla T)] - \Pi a_0 T = f, \\ R(v, T) &\equiv -\chi T + (u_0, \nabla T) + (v, \nabla T_0) = \varphi, \\ \operatorname{div} v &= 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad T|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} q \, dx = 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

при $f = 0$, $\varphi = 0$ не имеет нетривиальных решений. Тогда (см. [52]) при $\omega \gg 1$ существует $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое по t решение $(u_\omega, p_\omega, T_\omega)$ системы (5.27), для которого равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\left\| u_\omega - \left(u_0 + \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} \Pi a_k T_0 e^{ik\omega t} \right) \right\|_{L_s} + \right. \\ \left. + \|T_\omega - T_0\|_{W_s^1} \right] = 0, \quad s > 3, \end{aligned} \quad (5.30)$$

причем такое решение (удовлетворяющее (5.30) и условию $\int_{\Omega} P_\omega \, dx = 0$) единственно.

5.2.2. Вспомогательные построения. Для построения асимптотического разложения решения $(u_\omega, p_\omega, T_\omega)$ сделаем в системе (5.27) замену $\omega t = \tau$, $\omega^{-1/2} = \varepsilon$. В результате придем к задаче о 2π -периодических по τ решениях системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \varepsilon^2 \nu \Delta u + \varepsilon^2 \nabla p + \varepsilon^2 (u, \nabla) u &= \\ = \varepsilon^2 \left[a_0(x) T + \sum_{0 \leq |k| \leq m} b_k e^{ik\tau} \right] + \sum_{0 < |k| \leq m} a_k(x) e^{ik\tau} T, \\ \frac{\partial T}{\partial \tau} - \varepsilon^2 \chi \Delta T + \varepsilon^2 (u, \nabla T) &= \varepsilon^2 \sum_{0 \leq |k| \leq m} c_k e^{ik\tau}, \quad \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad T|_{\partial\Omega} = h. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Предполагая применить метод пограничного слоя [9] к последней задаче, введем некоторые обозначения.

Пусть $q = (q_1, q_2)$ — криволинейные ортогональные координаты на поверхности $\partial\Omega$. Для любой точки $x \in \Omega$, лежащей в столь малой окрестности границы $\partial\Omega$, что нормали к $\partial\Omega$ в этой окрестности не пересекаются, обозначим через $r(x)$ расстояние от x до $\partial\Omega$, а через Ω_δ , $\delta > 0$, — погранслоем толщины δ : $\Omega_\delta \equiv \{x \in \Omega : r(x) < \delta\}$. Тогда в Ω_δ определены ортогональные криволинейные координаты $(q, r) = (q(x), r(x))$, где $q(x)$ — точка $\partial\Omega$, лежащая на одной нормали с x . (Вектор-) функции $\alpha(x, \varepsilon)$, которые для любого фиксированного $\delta_0 \in (0, \delta)$ могут быть при достаточно малых ε существенно отличными от нуля лишь внутри погранслоя Ω_{δ_0} , называются погранслоинными [9]. Конечные суммы вида $\alpha(x, \varepsilon)e^{il\tau}$, где α — погранслоинная (вектор-) функция, а $l \in \mathbb{R}$, будем называть осциллирующими погранслоинными (вектор-) функциями.

Асимптотические приближения 2π -периодического по τ решения задачи (5.31) ищем в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, \tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(x) + \sum_{k=0}^{n+2} \varepsilon^k v_k(x, \tau) + \\
 &+ \sum_{k=0}^{n+2} \varepsilon^k w_k(q, \rho) + \sum_{k=0}^{n+2} \varepsilon^k z_k(q, \rho, \tau), \\
 p(x, \tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^k p_k(x) + \sum_{k=0}^{n+2} \varepsilon^{k-2} s_k(x, \tau) + \\
 &+ \sum_{k=2}^{n+3} \varepsilon^{k-2} h_k(q, \rho) + \sum_{k=1}^{n+3} \varepsilon^{k-2} g_k(q, \rho, \tau), \\
 T(x, \tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^k T_k(x) + \sum_{k=2}^{n+2} \varepsilon^k R_k(x, \tau) + \\
 &+ \sum_{k=0}^{n+2} \varepsilon^k W_k(q, \rho) + \sum_{k=2}^{n+2} \varepsilon^k Z_k(q, \rho, \tau), \quad \rho = \varepsilon^{-1}r.
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Здесь первые две суммы в каждом представлении являются регулярными [9], а вторые — погранслоинными (вектор-) функциями и все (вектор-) функции, зависящие от τ , являются 2π -периодическими по этому аргументу с нулевым средним. Погранслоинные (вектор-) функции в области $\Omega \setminus \Omega_\delta$, где координаты (q, r) не определены, считаются равными нулю.

Гёльдеровский класс (вектор-) функций $C^{l,m}$ и обозначение $\|\cdot\|_{l,m}$, о которых идет речь ниже в данном разделе, введены на с. 62.

5.2.3. Формулировка основного результата.

Теорема 5.2. Пусть выполнены условия п. 5.2.1, $\omega > \omega_0$, где ω_0 — достаточно большое число, и $(u_\omega, p_\omega, T_\omega)$ — указанное в п. 5.2.1 $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое по t решение системы (5.27),

$$u^n(x, t, \omega) = \overset{n}{u}(x, \omega t, \omega^{-1/2}), \quad p^n(x, t, \omega) = \overset{n}{p}(x, \omega t, \omega^{-1/2}),$$

$$T^n(x, t, \omega) = \overset{n}{T}(x, \omega t, \omega^{-1/2}).$$

Тогда для любых неотрицательных чисел l, m решение $(u_\omega, p_\omega, T_\omega) \in C^{l,m}(Q)$ и справедливы оценки

$$\|u_\omega - u^n\|_{l,m} + \|T_\omega - T^n\|_{l,m} \leq c_{l,m,n} \omega^{-[n+1-\max(l-2, 2m-2, 0)]/2},$$

$$\|\nabla p_\omega - \nabla p^n\|_{l,m} \leq c_{l,m,n} \omega^{-[n+1-\max(l, 2m)]/2},$$

где $c_{l,m,n}$ — не зависящие от ω постоянные.

Построение вектор-функции (u^n, p^n, T^n) сводится к решению не зависящих от ω линейных стационарных задач-систем (5.29) с гладкими правыми частями и задач Неймана для уравнения Пуассона.

5.2.4. Построение формальной асимптотики. В этом пункте с помощью метода пограничного слоя [9] построим формальную асимптотику решения задачи (5.31). При этом будем пользоваться выписанными на основании [35] в [53, формулы (24), (25)] представлениями дифференциальных выражений, входящих в (5.31), в координатах (q, ρ) .

Подставим выражения (5.32) в систему (5.31) и, учитывая представления [53, формулы (24), (25)], сгруппируем и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях ε отдельно для регулярных и погранслоевых (вектор-) функций. Каждое из полученных равенств разобьем затем на уравнения для стационарных и осциллирующих с нулевым по τ средним слагаемых.

Начнем с уравнений для первой группы регулярных (вектор-) функций:

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + \nabla s_0 = \sum_{0 < |k| \leq m} a_k T_0 e^{ik\tau}, \quad \operatorname{div} v_0 = 0,$$

$$v_0^{(3)} \Big|_{\partial\Omega} = -z_0^{(3)} \Big|_{\partial\Omega}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial \tau} = \sum_{0 < |k| \leq m} c_k e^{ik\tau} - (v_0, \nabla T_0); \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned}
& -\nu \Delta u_0 + \nabla p_0 + (u_0, \nabla u_0) + \langle (v_0, \nabla) v_0 \rangle = \\
& = a_0 T_0 + b_0 + \left\langle \sum_{0 < |k| \leq m} a_k R_2 e^{ik\tau} \right\rangle, \\
& -\chi \Delta T_0 + (u_0, \nabla T_0) = c_0, \quad \operatorname{div} u_0 = 0, \\
& u_0|_{\partial\Omega} = -w_0|_{\partial\Omega}, \quad T_0|_{\partial\Omega} = h.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Здесь через $\langle f \rangle$ обозначено усреднение 2π -периодической по τ вектор-функции $f(x, \tau)$:

$$\langle f \rangle(x) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(x, \tau) d\tau.$$

Уравнения для первых погранслоевых вектор-функций имеют вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w_0^{(3)}}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial x_0^{(3)}}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial \rho^2} = 0, \quad s = 1, 2, \\
& \frac{\partial z_0^{(s)}}{\partial \tau} - \nu \frac{\partial^2 z_0^{(s)}}{\partial \rho^2} = 0, \quad z_0^{(s)}|_{\partial\Omega} = -v_0^{(s)}|_{\partial\Omega}, \\
& \frac{\partial^2 W_0}{\partial \rho^2} = 0, \quad \frac{\partial Z_2}{\partial \tau} - \chi \frac{\partial^2 Z_2}{\partial \rho^2} = 0, \quad Z_2|_{\partial\Omega} = -R_2|_{\partial\Omega}, \\
& \frac{\partial g_1}{\partial \rho} = -\frac{\partial z_0^{(3)}}{\partial \tau} + \sum_{0 < |k| \leq m} (a_k)_0 W_0 e^{ik\tau},
\end{aligned} \tag{5.35}$$

где $(a_k)_0 = a_k(x(q, \rho))|_{\rho=0}$. Напомним [9], что для построения погранслоевых функций нужно решить в области Ω_δ соответствующие уравнения, доопределить решения нулями при $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$ и умножить полученные функции на «срезающую» функцию $\chi \in C^\infty(\Omega)$ такую, что $\chi(x) = 1$ при $x \in \Omega_{\delta/2}$, $\chi(x) = 0$ при $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$. Для краткости ограничимся лишь рассмотрением соответствующих уравнений в погранслое Ω_δ .

Из равенств (5.35) однозначно находим $w_0 = 0$, $z_0^{(3)} = 0$. В силу последнего соотношения и равенства (5.33)

$$v_0 = \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} \Pi a_k T_0 e^{ik\tau}, \quad \nabla s_0 = (I - \Pi) \sum_{0 < |k| \leq m} a_k T_0 e^{ik\tau}.$$

Подставляя найденное представление для v_0 в уравнение для R_2 , находим

$$R_2 = \sum_{0 < |k| \leq m} [(ik)^{-1}c_k + k^{-2}(\text{Па}_k T_0, \nabla T_0)] e^{ik\tau}.$$

Заменяя теперь v_0 и R_2 в системе (5.34) этими выражениями, получаем для (u_0, p_0, T_0) задачу (5.28), которая по условию разрешима. Разрешимость остальных задач после этого очевидна.

Выведем теперь уравнения для коэффициентов $u_i, p_i, v_i, s_i, w_i, z_i, h_{i+1}, g_{i+1}, T_i, R_{i+2}, W_i, Z_{i+2}$, $i = n$, считая, что при $i < n$ они определены. Вначале устанавливаем соотношения для регулярных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial \tau} + \nabla s_n - \sum_{0 < |k| \leq m} a_k e^{ik\tau} T_n &= f_n(x, \tau), \\ \text{div } v_n &= 0, \quad v_n^{(3)}|_{\partial\Omega} = -z_n^{(3)}|_{\partial\Omega}; \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial R_{n+2}}{\partial \tau} + (v_0, \nabla T_n) + (v_n, \nabla T_0) = \varphi_n(x, \tau); \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u_n + \nabla p_n + (u_0, \nabla)u_n + (u_n, \nabla)u_0 + \langle (v_0, \nabla)v_n \rangle + \\ + \langle (v_n, \nabla)v_0 \rangle - a_0 T_n - \sum_{0 < |k| \leq m} a_k \langle R_{n+2} e^{ik\tau} \rangle &= \psi_n(x), \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} -\chi \Delta T_n + (u_0, \nabla T_n) + (u_n, \nabla T_0) &= \chi_n(x), \\ \text{div } u_n &= 0, \quad u_n|_{\partial\Omega} = -w_n|_{\partial\Omega}, \quad T_n|_{\partial\Omega} = -W_n|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

В правых частях равенств (5.36)–(5.38) стоят уже известные (вектор-) функции, причем средние по τ от $f_n(x, \tau)$ и $\varphi_n(x, \tau)$ равны нулю.

Выпишем теперь задачи для погранслоинных коэффициентов. Начнем со стационарных задач:

$$\frac{\partial w_n^{(3)}}{\partial \rho} = \alpha_n(q, \rho), \quad (5.39)$$

$$\nu \frac{\partial^2 w_n^{(s)}}{\partial \rho^2} + \sum_{0 < |k| \leq m} (a_k)_0 \langle z_n e^{ik\tau} \rangle = \beta_{n,s}(q, \rho), \quad s = 1, 2, \quad (5.40)$$

$$\chi \frac{\partial^2 W_n}{\partial \rho^2} = \gamma_n(q, \rho), \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial h_{n+1}}{\partial \rho} - \sum_{0 < |k| \leq m} (a_k)_0 \langle Z_n e^{ik\tau} \rangle = \delta_n(q, \rho). \quad (5.42)$$

Здесь α_n , $\beta_{n,s}$, γ_n , δ_n — известные на этом этапе погранслоиные функции. Осциллирующие погранслоиные функции удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial z_n^{(3)}}{\partial \rho} = \lambda_n(q, \rho, \tau), \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial z_n^{(s)}}{\partial \tau} - \nu \frac{\partial^2 z_n^{(s)}}{\partial \rho^2} - \sum_{0 < |k| \leq m} (a_k)_0 W_n e^{ik\tau} = \mu_{n,s}(q, \rho, \tau), \quad s = 1, 2, \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial z_n}{\partial \tau} - \chi \frac{\partial^2 z_n}{\partial \rho^2} = \nu_n(q, \rho, \tau), \quad z_n|_{\rho=0} = -R_n|_{\rho=0}, \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial g_{n+1}}{\partial \rho} + \frac{\partial Z_n}{\partial \tau} - \sum_{0 < |k| \leq m} (a_k)_0 e^{ik\tau} W_n = \xi_n(q, \rho, \tau), \quad (5.46)$$

где λ_n , $\mu_{n,s}$, ν_n , ξ_n — известные на этом шаге осциллирующие погранслоиные функции с нулевым средним по τ .

Рассмотрим теперь вопрос о разрешимости задач (5.36)–(5.38). Из (5.43), (5.45) с помощью отделения переменной τ однозначно найдем $z_n^{(s)}$ и Z_n . Затем из (5.39), (5.40) определим w_n , а из (5.41) найдем W_n . Обозначим через $(\overset{\circ}{v}_n, \overset{\circ}{s}_n)$ решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \nabla s = f_n, \quad \operatorname{div} v_n = 0, \quad v_n|_{\partial\Omega} = -z_n^{(3)}|_{\partial\Omega},$$

которая разрешима в силу равенства

$$\int_{\partial\Omega} z_n^{(3)} ds = 0$$

(см. [53, лемма 4]). Тогда в силу (5.36)

$$v_n = \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} \Pi a_k T_n e^{ik\tau} + \overset{\circ}{v}_n. \quad (5.47)$$

Подставляя выражения (5.36), (5.47) для v_0 и v_n в (5.37), находим

$$\begin{aligned} R_{n+2} = & \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} (\Pi a_k T_0, \nabla T_n) e^{ik\tau} + \\ & + \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} (\Pi a_k T_n, \nabla T_0) e^{ik\tau} + d_n(x, \tau), \end{aligned} \quad (5.48)$$

где $d_n(x, \tau)$ — известная функция. Подставляя затем выражения (5.47), (5.48) для v_n , R_{n+2} в (5.38), приходим к задаче

$$\begin{aligned} & -\nu \Delta u_n + \nabla p_n + (u_0, \nabla) u_n + (u_n, \nabla) u_0 + \\ & + \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} (\Pi a_k T_0, \nabla) \Pi a_{-k} T_n + \\ & + \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} (\Pi a_k T_n, \nabla) \Pi a_{-k} T_0 - \\ & - a_0 T_n - \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} a_k (\Pi a_{-k} T_0, \nabla T_n) - \\ & - \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} a_k (\Pi a_{-k} T_n, \nabla T_0) = l_n(x), \\ \operatorname{div} u_n = 0, \quad & -\chi \Delta T_n + (u_0, \nabla T_n) + (u_n, \nabla T_0) = \chi_n(x), \\ u_n|_{\partial\Omega} = -w_n|_{\partial\Omega}, \quad & T_n|_{\partial\Omega} = -W_n|_{\partial\Omega}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Заметим, что, благодаря соотношению

$$\int_{\partial\Omega} w_n^{(3)} ds = 0$$

[53, лемма 4], можно снять неоднородность в граничных условиях, построив бесконечно гладкую пару $(\overset{\circ}{u}_n, \overset{\circ}{T}_n)$, удовлетворяющую краевым условиям задачи (5.49) и условию $\operatorname{div} \overset{\circ}{u}_n = 0$ (см. [42, с. 38, 39]. В результате приходим к задаче (см. (5.29)), которая по условию разрешима. Осталось найти функции $z_n^{(s)}$, $s = 1, 2$, g_{n+1} , h_{n+1} , что очевидным образом осуществляется с помощью уравнений (5.44), (5.42), (5.46). Итак, построение формального асимптотического разложения решения $(u_\omega, p_\omega, T_\omega)$ задачи (5.27) завершено.

5.2.5. Обоснование асимптотик. Этот пункт посвящен обоснованию построенной в п. 5.2.4 асимптотики, т. е. установлению бесконечной гладкости решения $(u_\omega, p_\omega, T_\omega)$ и приближения (u^n, p^n, T^n) , а также доказательству указанных в теореме 5.2 оценок. Начнем с рассмотрения главного члена приближения (u^n, p^n, T^n) , т. е. с $(u_0 + v_0 + z_0, p_0 + \omega s_0 + \omega^{1/2} g_1, T_0)$. Тройка (u_0, p_0, T_0) является классическим стационарным решением задачи (5.28), поэтому $u_0, T_0 \in C^2(\Omega)$. Бесконечная гладкость (u_0, p_0, T_0) устанавливается теперь путем переноса младших членов (5.28) в правую часть и многократного использования шаудеровских априорных оценок для решений системы Стокса и уравнения теплопроводности с граничными условиями Дирихле [43, 122]. Функция s_0 является решением задачи (см. (5.33))

$$\Delta s_0 = \operatorname{div} \sum_{0 < |k| \leq m} a_k T_0 e^{ik\omega t}, \quad \left. \frac{\partial s_0}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \sum_{0 < |k| \leq m} (a_k T_0)^{(3)} e^{ik\omega t} \Big|_{\partial\Omega}.$$

Отсюда, в силу шаудеровских априорных оценок для решения уравнения Пуассона при краевых условиях Неймана [43], следует бесконечная гладкость функции s_0 , а значит (см. (5.33)), и вектор-функции v_0 . Аналогичный результат для z_0 и g_1 следует теперь непосредственно из определяющих их уравнений. Бесконечная гладкость остальных слагаемых, входящих в (u^n, p^n, T^n) , устанавливается аналогичным образом.

Рассмотрим теперь вектор-функцию

$$(z^n, g^n, Q^n) = (u_\omega, p_\omega, T_\omega) - (\hat{u}^n, p^n, T^n), \\ \hat{u}^n = u^n + \omega^{-(n+1)/2} u_{n+1} + \omega^{-(n+2)/2} u_{n+2},$$

которая, очевидно, является решением задачи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial t} - \nu \Delta z + \nabla g + (z, \nabla)z + (\hat{u}^n, \nabla)z + (z, \nabla)\hat{u}^n = \\ & = \left[a_0(x) + \omega \sum_{0 < |k| \leq m} a_k e^{ik\omega t} \right] Q + \omega^{-(n+1)/2} f_n(x, \omega t, \omega), \\ & \frac{\partial Q}{\partial t} - \chi \Delta Q + (z, \nabla Q) + (\hat{u}^n, \nabla Q) + (z, \nabla T^n) = \\ & \quad = \omega^{-(n+1)/2} \varphi_n(x, \omega t, \omega), \\ & \operatorname{div} z = \omega^{-(n+2)/2} \chi_n(q, \rho, \omega t, \omega), \quad z|_{\partial\Omega} = 0, \quad Q|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Здесь $f_n(x, \tau, \omega)$, $\varphi_n(x, \tau, \omega)$ и $\chi_n(x, \tau, \omega)$ — бесконечно гладкие 2π -периодические по τ (вектор-) функции, причем χ_n погранслоная, удовлетворяющие оценкам

$$\|g(x, \omega t, \omega)\|_{C^{l,m}(Q)} \leq c_{l,m,n} \omega^{(2l+m)/2}, \quad (5.51)$$

где $g(x, \tau, \omega) = f_n(x, \tau, \omega)$, $\varphi_n(x, \tau, \omega)$ или $\chi_n(x, \tau, \omega)$.

Отметим, что для доказательства указанных в теореме неравенств достаточно их установить при замене u^n на $\hat{u}^n$. Поэтому дело сводится к оценке вектор-функции (z^n, g^n, Q^n) .

В задаче (5.50) сделаем замену

$$z(x, t) = y(x, t) + w(x, t, t), \quad (5.52)$$

где $\omega(x, t, \tau)$ — решение системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \nu \Delta w + \nabla r &= \omega \sum_{|k| \leq m} a_k e^{ik\omega t} Q(x, \tau), \\ \operatorname{div} w &= \omega^{-(n+2)/2} \chi_n(q, \rho, \omega t, \omega), \quad w|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} w(x, t, t) &= \sum_{0 < |k| \leq m} (ikI\omega^{-1} - A_1)^{-1} \Pi a_k Q(x, t) e^{ik\omega t} + \\ &+ \omega^{-(n+3)/2} \psi(x, \omega t, \omega) \equiv \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} \Pi a_k Q e^{ik\omega t} + \\ &+ M_\omega(t) Q + \omega^{-(n+3)/2} \psi. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Здесь $A_1 = -\nu \Pi \Delta$ — оператор Стокса, действующий в пространстве соленоидальных вектор-функций S_q , $q > 1$, с областью определения $\overset{\circ}{S}_q^2$ — замыкание по норме $W_q^2(\Omega)$ множества гладких соленоидальных вектор-функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. Через I обозначен тождественный в S_q оператор, слагаемое $M_\omega(t)Q$ определено соотношением (5.53), ψ — гладкая функция, удовлетворяющая оценке (5.51). Полученную в результате замены (5.52) систему мож-

но представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} + L(y, p, Q) &= \varphi(y, Q, \omega) + \\ &+ \varphi_\omega(y, Q, \omega) + \omega^{-(n+1)/2} f(x, \omega t, \omega), \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + R(y, Q) &= \psi(y, Q, \omega t) + \\ &+ \psi_\omega(y, Q, \omega t) + \omega^{-(n+1)/2} \chi(x, \omega t, \omega). \end{aligned} \quad (5.54)$$

Здесь L и R — те же выражения, что и в (5.29); f и χ удовлетворяют оценке (5.51); φ_ω и ψ_ω состоят из всех слагаемых, в выражения которых входят $M_\omega(\omega t)Q$ и $z - u_0 - v_0$ либо же производная какой-нибудь из этих вектор-функций по пространственной переменной; φ и ψ являются, соответственно, суммами остальных слагаемых.

Обозначим через A_2 оператор в $L_q(\Omega)$, $q > 1$, с областью определения $D(A_2) = \overset{\circ}{W}_q^2 = \{Q \in W_q^2, Q|_{\partial\Omega} = 0\}$, действующий по закону

$$A_2 T = -\chi \Delta T.$$

Через $\overset{\circ}{S}_q^{2\delta}$ и $\overset{\circ}{W}_q^{2\delta}$, $\delta \in (0, 1)$, обозначим области определения дробных степеней A_1^δ и A_2^δ , снабженные естественными нормами. Пространство $C_\mu(B)$, где $\mu \in (0, 1)$, B — банахово пространство, определено на с. 53.

Аналогично [49] переходим от задачи для $2\pi\omega^{-1}$ -периодических по времени t решений системы (5.54) к системе интегральных уравнений для пары (y, Q) и устанавливаем при $\omega \gg 1$ оценку

$$\begin{aligned} \|y\|_{C_\mu(S)} + \|Q\|_{C_\mu(W)} &\leq c\omega^{-(n+1)/2}, \quad q > 3, \\ C_\mu(S) &= C_\mu(\overset{\circ}{S}_q^{2\delta}), \quad C_\mu(W) = C_\mu(\overset{\circ}{W}_q^{2\delta+1}), \end{aligned}$$

где μ и δ — достаточно малые положительные числа, а c — не зависящая от ω постоянная. Опираясь на эту оценку, опять же с помощью использовавшихся в [49] приемов, устанавливаем существование чисел $\mu, \delta \in (0, 1/2)$, для которых выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|y\|_{C_\mu(S_q)} + \|Q\|_{C_\mu(W_q)} &\leq c_1\omega^{-n/2}, \quad q > 3, \quad c_1 = \text{const}, \\ C_\mu(S_q) &= C_\mu(\overset{\circ}{S}_q^{2\delta+1}), \quad C_\mu(W_q) = C_\mu(\overset{\circ}{W}_q^{2\delta+1}). \end{aligned}$$

Из последнего, в силу непрерывных вложений (см. [52, соотношение (12)]), следует оценка

$$\|y\|_{C^{1/2+\delta_1, \mu_1}} + \|Q\|_{C^{1/2+\delta_1, \mu_1}} \leq c_1 \omega^{-n/2}, \quad (5.55)$$

где μ_1 и δ_1 — достаточно малые положительные числа. Дифференцируя теперь уравнение (5.54) по t , используя (5.55) и действуя по только что описанной схеме, устанавливаем в дополнение к (5.55) оценку

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial y}{\partial t} \right\|_{C^{\delta_1, \mu_1}} + \left\| \nabla \frac{\partial y}{\partial t} \right\|_{C^{\delta_1, \mu_1}} + \left\| \frac{\partial Q}{\partial t} \right\|_{C^{\delta_1, \mu_1}} + \\ & + \left\| \nabla \frac{\partial Q}{\partial t} \right\|_{C^{\delta_1, \mu_1}} \leq c_2 \omega^{-(n-2)/2}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Производные более высоких порядков оцениваются с использованием классических априорных оценок решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности [43] и системы Стокса [122]. Для этого введем бесконечно дифференцируемую функцию $\lambda : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям $\lambda(t) = 0$, $t \in [0, 1]$, и $\lambda(t) = 1$, $t \in [2, 3]$, и положим $(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{Q}) = \lambda(t)(y, p, Q)$. От задачи (5.54) для (y, p, Q) перейдем к начально-краевой задаче в цилиндре $\Omega \times [0, 3]$ для вектор-функции $(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{Q})$. Оставляя в левых частях уравнений начально-краевой задачи лишь старшие члены (операторы Стокса и теплопроводности) и оценивая их правые части согласно (5.56), с помощью указанных классических априорных оценок получаем соответствующие оценки для $(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{Q})$. Учитывая малость периода по t вектор-функции (y, p, Q) , а также совпадение ее с $(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{Q})$ при $t \in [2, 3]$, отсюда получаем аналогичные оценки и для (y, p, Q) . На следующем шаге дважды дифференцируем уравнение (5.54) по t и по описанной выше схеме получаем неравенства типа (5.56) для $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $\nabla \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}$, $\nabla \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}$, а затем вновь с помощью классических априорных оценок получаем соответствующие оценки для решения $(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{Q})$ начально-краевой задачи. Повторяя описанную процедуру соответствующее число раз, приходим для любого заданного $s \geq 0$ к неравенствам

$$\begin{aligned} & \|y^n\|_{s+2, (s+2)/2} + \|\nabla p^n\|_{s, s/2} + \|Q^n\|_{s+2, (s+2)/2} \leq \\ & \leq c_n \omega^{-(n-s-1)/2}, \quad c_n = \text{const}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Учитывая теперь связь (5.52), (5.53) вектор-функций y^n и z^n , с помощью априорных шаудеровских оценок решений стационарной системы Стокса [122] убеждаемся, что оценка (5.57) справедлива и для вектор-функции (z^n, g^n, Q^n) . Отсюда, в частности, следует, что $(u_\omega, p_\omega, T_\omega) \in C^{l,m}(Q)$ для любых неотрицательных l, m . Первая оценка теоремы теперь легко вытекает из (5.57) и структуры приближений (5.32). Действительно, пусть, для определенности, $l \leq 2$, $m \geq 1$. Тогда эту оценку получаем в силу следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} & \|u_\omega - u^n\|_{l,m} + \|T_\omega - T^n\|_{l,m} \leq \|u_\omega - u^N\|_{s,s/2} + \\ & + \|T_\omega - T^N\|_{s,s/2} + \|u^n - u^N\|_{l,m} + \|T^n - T^N\|_{l,m} \leq \\ & \leq c_N \omega^{-(N-s-3)/2} + d_{n,N} \omega^{-(n+1-\max(l-2, 2m-2))/2}, \end{aligned}$$

где $s = \max(l, 2m)$, $N = [n + 2 - \max(l - 2, 2m - 2) + 4]$, c_N и $d_{n,N} = \text{const}$. Вторая оценка теоремы 5.2 аналогичным образом выводится из (5.57), (5.32) и первой оценки.

ГЛАВА 6

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОНВЕКЦИИ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

В разделе 6.1 данной главы метод усреднения обоснован для задачи о периодических по времени решениях эволюционной системы дифференциальных уравнений в частных производных с высокочастотными младшими членами, среди которых имеется гармоническое слагаемое, пропорциональное высокой частоте. Эта система является значительным обобщением задачи конвекции, исследовавшейся в главе 5, а потому мы называем ее обобщенной задачей конвекции.

В разделе 6.2 для обобщенной задачи конвекции при естественных дополнительных условиях гладкости построена полная обоснованная асимптотика $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодического по времени t решения, главным членом которой служит решение усредненной задачи. Доказано, что построение каждой частичной суммы асимптотики сводится (при известной $\overset{\circ}{v}$) к решению конечного числа не зависящих от ω линейных однозначно разрешимых стационарных задач пяти конкретных типов. Два из этих типов относятся к уравнениям в частных производных и три — к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Обоснование построенной здесь полной асимптотики может быть проведено аналогично [54].

Результаты главы 6 изложены в работах [30, 152].

6.1. Обоснование метода усреднения

6.1.1. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. В цилиндре $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о $2\pi\omega^{-1}$ -периодических по t решениях системы

уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla)v &= -\nabla q + \nu \Delta v + \omega \sum_{0 < |k| \leq m} a_k(x) e^{ik\omega t} T + \\
&+ g_1\left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x}, T, \frac{\partial T}{\partial x}, \omega t\right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} b_j(x, \omega t), \\
\frac{\partial T}{\partial t} + (v, \nabla T) &= \chi \Delta T + g_2\left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x}, T, \frac{\partial T}{\partial x}, \omega t\right), \\
\operatorname{div} v &= 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad T|_{\partial\Omega} = h.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь $m \in \mathbb{N}$, $\nu, \chi > 0$, ω — большой параметр, $v(x, t)$ и $T(x, t)$ — неизвестные вещественные трехмерная и одномерная вектор-функции. Далее, при $(x, v, w, T, S, \tau) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ вектор-функции $g_1(x, v, w, T, S, \tau)$, $g_2(x, v, w, T, S, \tau)$, $b_j(x, \tau)$, $j = 1, 2, 3$, и $h(x)$ вещественнозначны, $a_k(x) = \overline{a_{-k}(x)}$, где чертой над функцией обозначена операция комплексного сопряжения. Пусть $a_k \in C^1(\overline{\Omega})$, $0 < |k| \leq m$, g_1, g_2 непрерывно дифференцируемы по v, w, T, S и вместе с этими производными удовлетворяют условию Гёльдера по x, v, w, T, S равномерно относительно τ , вектор-функции $g_1(x, v, w, T, S, \tau)$, $g_2(x, v, w, T, S, \tau)$, $b_j(x, \tau)$, $j = 1, 2, 3$, 2π -периодичны по τ , $b_j \in C(\mathbb{R}, L_{q/2})$, $q > 3$.

6.1.2. Основной результат. Пусть $q > 3$. Обозначим через $J_q(\overset{\circ}{J}_q^2)$ замыкание в $L_q(W_q^2)$ множества гладких соленоидальных ($\operatorname{div} u = 0$) трехмерных вектор-функций, определенных в $\overline{\Omega}$ и исчезающих на границе $\partial\Omega$. Символом Π обозначим известный проектор из L_q на J_q , который при $q = 2$ ортогонален (см., например, [143, 146]). Пусть A_1 и A_2 — операторы, действующие соответственно в J_q и L_q по законам

$$\begin{aligned}
A_1 u &= -\Pi \Delta u, \quad u \in D(A_1) = \overset{\circ}{J}_q^2, \\
A_2 T &= -\nu \Delta T, \quad T \in D(A_2) = \overset{\circ}{W}_q^2,
\end{aligned}$$

а I_1 и I_2 — единичные операторы в J_q и L_q соответственно. Здесь

$D(A_1), D(A_2)$ — соответственно области определения операторов A_1, A_2 , $\overset{\circ}{W}_q^2$ — замыкание в W_q^2 множества гладких в Ω функций, которые исчезают на границе $\partial\Omega$.

Следуя [114], подействуем на задачу (6.1) проектором Π , а также проведем в этой задаче замену переменных $Q = T - \Phi, u = v - N(\omega t)T - M_\omega(t)T$. Здесь $\Phi(x)$ — решение задачи Дирихле

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= 0, \quad \Phi|_{\partial\Omega} = h, \\ N(\tau)T &= \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} e^{ik\tau} \Pi a_k T, \\ M_\omega(t)T &= \omega \Pi \sum_{0 < |k| \leq m} (ik\omega I_1 + A_1)^{-1} a_k T e^{ik\omega t} - N(\omega t)T.\end{aligned}$$

Тогда система (6.1) будет иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + A_1 u &= f_1\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, x, \omega t\right) + \\ &+ \varphi_{\omega,1}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, x, t\right) + \Pi \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} b_j(x, \omega t), \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + A_2 Q &= f_2\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, x, \omega t\right) + \\ &+ \varphi_{\omega,2}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, x, t\right),\end{aligned}\tag{6.2}$$

Прежде чем выписать выражения $f_i, \varphi_{\omega,i}$, $i = 1, 2$, обозначим $\frac{\partial Q}{\partial x} = S$, $\frac{\partial T}{\partial x} = S'$ и для каждой непрерывной 2π -периодической по τ (вектор-) функции $s(\dots, \tau)$ положим

$$\langle s(\dots, \tau) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(\dots, \tau) d\tau.$$

(Вектор-) функции

$$\begin{aligned}f_1 &: (C^1 \cap J_q) \times C \times W_q^2 \times W_q^1 \times (-\infty, \infty) \rightarrow J_q, \\ f_2 &: (C^1 \cap J_q) \times C \times W_q^2 \times W_q^1 \times (-\infty, \infty) \rightarrow L_q,\end{aligned}$$

$$\varphi_{\omega,1} : (C^1 \cap J_q) \times C \times W_q^2 \times W_q^1 \times (-\infty, \infty) \rightarrow J_q,$$

$$\varphi_{\omega,2} : (C^1 \cap J_q) \times C \times W_q^2 \times W_q^1 \times (-\infty, \infty) \rightarrow L_q$$

заданы равенствами

$$\begin{aligned} f_1(u, w, Q, S, x, \tau) &= F_1(u, w, Q, S, x) - \Pi(N(\tau)T, \nabla)u - \\ &- \Pi(u, \nabla)N(\tau)T - \Pi \sum_{\substack{0 < |k|, |s| \leq m, \\ k+s \neq 0}} (ks)^{-1} e^{i(k+s)\tau} (\Pi a_k T, \nabla) \Pi a_s T + \\ &+ [K_1(x, u, w, T, S', \tau) - \langle K_1(x, u, w, T, S', \tau) \rangle], \\ F_1(u, w, Q, S, x) &= -\Pi(u, \nabla)u + \\ &+ \Pi \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} (\Pi a_k T, \nabla) \Pi a_{-k} T + \langle K_1(x, u, w, T, S', \tau) \rangle, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_1(x, u, w, T, S', \tau) &= \\ &= \Pi g_1 \left(x, u + N(\tau)T, w + \frac{\partial(N(\tau)T)}{\partial x}, T, S', \tau \right) + \Pi \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} b_j(x, \tau), \\ \varphi_{\omega,1}(u, w, Q, S, x, t) &= \\ &= -\Pi(M_\omega(t)T, \nabla)u - \Pi(u, \nabla)M_\omega(t)T - \Pi(M_\omega(t)T, \nabla)M_\omega(t)T - \\ &- \Pi(N(\omega t)T, \nabla)M_\omega(t)T - \Pi(M_\omega(t)T, \nabla)N(\omega t)T + \\ &+ \left[\Pi g_1 \left(x, u + N(\omega t)T + M_\omega(t)T, w + \frac{\partial(N(\omega t)T + M_\omega(t)T)}{\partial x}, T, S', \omega t \right) - \right. \\ &\quad \left. - K_1(x, u, w, T, S', \omega t) \right], \\ f_2(u, w, Q, S, x, \tau) &= F_2(u, w, Q, S, x) - (N(\tau)T, \nabla T) + \\ &+ [K_2(x, u, w, T, S', \tau) - \langle K_2(x, u, w, T, S', \tau) \rangle], \\ F_2(u, w, Q, S, x) &= -(u, \nabla T) + \langle K_2(x, u, w, T, S', \tau) \rangle, \end{aligned}$$

где

$$K_2(x, u, w, T, S', \tau) = \Pi g_2 \left(x, u + N(\tau)T, w + \frac{\partial(N(\tau)T)}{\partial x}, T, S', \tau \right),$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\omega,2}(u, w, Q, S, x, t) = & -(M_{\omega}(t)T, \nabla T) + \\ & + \left[\Pi g_2 \left(x, u + N(\omega t)T + M_{\omega}(t)T, w + \frac{\partial(N(\omega t)T + M_{\omega}(t)T)}{\partial x}, T, S', \omega t \right) - \right. \\ & \left. - K_2(x, u, w, T, S', \omega t) \right], \quad T = Q + \Phi. \end{aligned}$$

Пусть усредненная задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + A_1 u &= F_1 \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \tau, \frac{\partial \tau}{\partial x}, x \right), \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + A_2 \tau &= F_2 \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \tau, \frac{\partial \tau}{\partial x}, x \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

имеет стационарное решение $(\overset{\circ}{v}, \overset{\circ}{\tau}) \in \overset{\circ}{J}_q^2 \times \overset{\circ}{W}_q^2$. С целью линеаризации в этой точке вектор-функций $\gamma_1 \equiv \Pi \langle g_1(x, v, w, T, S, \tau) \rangle, \gamma_2 \equiv \Pi \langle g_2(x, v, w, T, S, \tau) \rangle$ выделим линейные части соответствующих разностей:

$$\begin{aligned} \gamma_1(x, v, w, T, S) - \gamma_1 \left(x, \overset{\circ}{v}, \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial x}, \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial \overset{\circ}{\tau}}{\partial x} \right) &= L_{1v}(x)(v - \overset{\circ}{v}) + \\ &+ L_{1w}(x) \left(w - \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial x} \right) + L_{1T}(x)(T - \overset{\circ}{\tau}) + L_{1S}(x) \left(S - \frac{\partial \overset{\circ}{\tau}}{\partial x} \right), \\ \gamma_2(v, w, T, S, x) - \gamma_2 \left(\overset{\circ}{v}, \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial x}, \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial \overset{\circ}{\tau}}{\partial x}, x \right) &= L_{2v}(x)(v - \overset{\circ}{v}) + \\ &+ L_{2w}(x) \left(w - \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial x} \right) + L_{2T}(x)(T - \overset{\circ}{\tau}) + L_{2S}(x) \left(S - \frac{\partial \overset{\circ}{\tau}}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим в пространстве $J_q \times L_q$ оператор A с областью определения $D(A) = \overset{\circ}{J}_q^2 \times \overset{\circ}{W}_q^2$, который действует по закону

$$A \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 v + B_1 v + C_1 \tau + L_{1v} v + L_{1w} \frac{\partial v}{\partial x} + L_{1\tau} \tau + L_{1S} \frac{\partial \tau}{\partial x} \\ A_2 \tau + B_2 \tau + C_2 v + L_{2v} v + L_{2w} \frac{\partial v}{\partial x} + L_{2\tau} \tau + L_{2S} \frac{\partial \tau}{\partial x} \end{pmatrix},$$

$$(v, \tau) \in D(A).$$

Здесь

$$B_1 v = -\Pi(\overset{\circ}{v}, \nabla)v - \Pi(v, \nabla)\overset{\circ}{v},$$

$$\begin{aligned} C_1 \tau &= -\Pi \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} (\Pi a_k \overset{\circ}{\tau}', \nabla) \Pi a_{-k} \tau - \\ &- \Pi \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} (\Pi a_k \tau, \nabla) \Pi a_{-k} \overset{\circ}{\tau}', \end{aligned}$$

$$B_2 \tau = -(\overset{\circ}{v}, \nabla \tau), C_2 v = (v, \nabla \overset{\circ}{\tau}'), \quad \overset{\circ}{\tau}' = \overset{\circ}{\tau} + \Phi.$$

В системе (6.2) заменим u на $u + \overset{\circ}{v}$, а Q на $Q + \overset{\circ}{\tau}$ и перепишем систему в виде

$$\frac{\partial z}{\partial t} + Az = f\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, t, \omega\right), \quad (6.4)$$

где $z = (u, Q)$,

$$\begin{aligned} f\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, t, \omega\right) &= \left(f_1\left(u + \overset{\circ}{v}, \frac{\partial(u + \overset{\circ}{v})}{\partial x}, Q + \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial(Q + \overset{\circ}{\tau})}{\partial x}, x, \omega t\right) - \right. \\ &- F_1\left(\overset{\circ}{v}, \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial x}, \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial \overset{\circ}{\tau}}{\partial x}, x\right) - B_1 u - C_1 Q - L_{1u} u - L_{1w} \frac{\partial u}{\partial x} - \\ &- L_{1T} Q - L_{1S} \frac{\partial Q}{\partial x} + \varphi_{\omega,1}\left(u + \overset{\circ}{v}, \frac{\partial(u + \overset{\circ}{v})}{\partial x}, Q + \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial(Q + \overset{\circ}{\tau})}{\partial x}, x, t\right), \\ f_2\left(u + \overset{\circ}{v}, \frac{\partial(u + \overset{\circ}{v})}{\partial x}, Q + \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial(Q + \overset{\circ}{\tau})}{\partial x}, x, \omega t\right) &- F_2\left(\overset{\circ}{v}, \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial x}, \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial \overset{\circ}{\tau}}{\partial x}\right) - \\ &- B_2 Q - C_2 u - L_{2u} u - L_{2w} \frac{\partial u}{\partial x} - L_{2T} Q - L_{2S} \frac{\partial Q}{\partial x} + \\ &+ \varphi_{\omega,2}\left(u + \overset{\circ}{v}, \frac{\partial(u + \overset{\circ}{v})}{\partial x}, Q + \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial(Q + \overset{\circ}{\tau})}{\partial x}, x, t\right)\Bigg). \end{aligned}$$

Теорема 6.1. Пусть усредненная задача (6.3) имеет стационарное решение $(\overset{\circ}{v}, \overset{\circ}{\tau})$, и спектр Λ оператора A не содержит нуля. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Существуют такие положительные числа ω_0 и r_0 , что при $\omega > \omega_0$ система (6.1) имеет единственное в шаре

$$\begin{aligned} & \|T - (\overset{\circ}{\tau} + \Phi)\|_{C_0(W_q^1)} + \\ & + \left\| v - \left(\overset{\circ}{v} + \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} e^{ik\omega t} \Pi a_k(\overset{\circ}{\tau} + \Phi) \right) \right\|_{C_0(J_q)} < r_0 \end{aligned}$$

$2\pi\omega^{-1}$ -периодическое по t решение (v_ω, T_ω) , причем

$$\begin{aligned} & \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\|T_\omega - (\overset{\circ}{\tau} + \Phi)\|_{C_0(W_q^1)} + \right. \\ & \left. + \left\| v_\omega - \left(\overset{\circ}{v} + \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} e^{ik\omega t} \Pi a_k(\overset{\circ}{\tau} + \Phi) \right) \right\|_{C_0(J_q)} \right) = 0. \end{aligned}$$

2. Если спектр Λ лежит в правой полуплоскости, то указанное решение асимптотически устойчиво при больших ω по норме $J_q \times W_q^1$.

3. Если спектр Λ не имеет точек на мнимой оси и имеет хотя бы одну точку в левой полуплоскости, то при больших ω решение (v'_ω, T'_ω) неустойчиво по норме $J_q \times W_q^1$.

6.2. Асимптотический анализ

6.2.1. Постановка задачи и формулировка результата.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. В цилиндре $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о $2\pi\omega^{-1}$ -периодических по t решениях системы уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla)v &= -\nabla p + \nu \Delta v + \omega \sum_{0 < |k| \leq m} a_k(x) e^{ik\omega t} T + \\
&+ \sum_{0 \leq |k| \leq m} f_{1k} \left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x}, T, \frac{\partial T}{\partial x} \right) e^{ik\omega t}, \\
\frac{\partial T}{\partial t} + (v, \nabla T) &= \chi \Delta T + \sum_{0 \leq |k| \leq m} f_{2k} \left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x}, T, \frac{\partial T}{\partial x} \right) e^{ik\omega t}, \\
\operatorname{div} v &= 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad T|_{\partial\Omega} = h.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Здесь $m \in \mathbb{N}$, ω — большой параметр, $\nu, \chi > 0$, причем значения

$$\begin{aligned}
a_k(x), f_{1k}(x, v, w, T, S) &\in \mathbb{C}^3, \quad f_{2k}(x, v, w, T, S) \in \mathbb{C}, \\
h(x) \in \mathbb{R}, \quad a_k(x) &= \overline{a_{-k}(x)}, \\
f_{1k}(x, v, w, T, S) &= \overline{f_{1, -k}(x, v, w, T, S)}, \\
f_{2k}(x, v, w, T, S) &= \overline{f_{2, -k}(x, v, w, T, S)},
\end{aligned}$$

где

$$(x, v, w, T, S) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3,$$

а чертой над (вектор-) функцией обозначена операция комплексного сопряжения. Пусть также f_{1k} , f_{2k} , a_k бесконечно дифференцируемы по своим аргументам.

Будем еще предполагать, что компоненты f_{ikr} вектор-функций f_{ik} зависят от компонент v , w и S полиномиальным образом, причем относительно компонент w являются полиномами не выше первой степени:

$$\begin{aligned}
f_{ikr}(x, v, w, T, S) &= \\
&= \sum_{|\alpha|=0}^Q \psi_{ikr\alpha}(x, T) v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} v_3^{\alpha_3} w_1^{\alpha_4} w_2^{\alpha_5} \dots w_9^{\alpha_{12}} S_1^{\alpha_{13}} S_2^{\alpha_{14}} S_3^{\alpha_{15}},
\end{aligned}$$

где $Q \in \mathbb{N}$, $\alpha = \alpha_{ikr} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{15})$ — мультииндекс, причем $\alpha_4 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{12} \leq 1$. Решения задачи (6.5) и всех остальных задач в данной работе понимаются в классическом смысле.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \nabla q + (u, \nabla)u + \\
& + \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} [(\Pi a_k W, \nabla) \Pi a_{-k} W - a_k (\Pi a_{-k} W, \nabla W)] = \\
& = \sum_{0 < |k| \leq m} \left\langle a_k \Psi \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, W, \frac{\partial W}{\partial x}, \tau \right) e^{ik\tau} \right\rangle + \\
& + \sum_{0 \leq |k| \leq m} \left\langle \varphi_{1k} \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, W, \frac{\partial W}{\partial x}, \tau \right) \right\rangle, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (6.6) \\
& \frac{\partial W}{\partial t} - \chi \Delta W + (u, \nabla W) = \\
& = \sum_{0 \leq |k| \leq m} \left\langle \varphi_{2k} \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, W, \frac{\partial W}{\partial x}, \tau \right) \right\rangle, \quad x \in \Omega, \\
& u|_{\partial\Omega} = 0, \quad W|_{\partial\Omega} = h(x),
\end{aligned}$$

которую будем называть усредненной (предельной) задачей. Здесь и ниже символом $\langle \varphi(\dots, \tau) \rangle$ обозначено усреднение φ по τ :

$$\langle \varphi(\dots, \tau) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\dots, \tau) d\tau,$$

где $\varphi(\dots, \tau)$ — непрерывная 2π -периодическая по τ (вектор-) функция,

$$\begin{aligned}
& \varphi_{rk} \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, W, S, \tau \right) = \\
& = f_{rk} \left(x, u + u_0, \frac{\partial(u + u_0)}{\partial x}, W, S \right) e^{ik\tau} \equiv \sum_s l_{rks} e^{is\tau}, \\
& r = 1, 2, \quad u_0 = \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} \Pi a_k W e^{ik\tau},
\end{aligned}$$

Π — известный ортопроектор в $L_2(\Omega)$ на подпространство соленоидальных векторов $S_2(\Omega)$ (см. раздел 2.1),

$$\Psi \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, W, S \right) \equiv \sum_{\substack{s \neq 0, \\ 0 \leq |k| \leq m}} (is)^{-1} l_{2ks} e^{is\tau}.$$

Пусть задача (6.6) имеет вещественное стационарное решение $(u, q, w) = (v_0, p_0, T_0)$, а система

$$\begin{aligned}
L(v, q, T) &\equiv -\nu \Delta v + (v_0, \nabla)v + (v, \nabla)v_0 + \nabla q + \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} \times \\
&\times [(\Pi a_k T_0, \nabla) \Pi a_{-k} T + (\Pi a_k T, \nabla) \Pi a_{-k} T_0 - a_k (\Pi a_{-k} T, \nabla T_0) - \\
&- a_k (\Pi a_{-k} T_0, \nabla T)] - \sum_{0 < |k| \leq m} \left\langle a_k \left[\frac{\partial \Psi}{\partial u} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) v + \right. \right. \\
&+ \frac{\partial \Psi}{\partial w} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) T + \\
&+ \left. \frac{\partial \Psi}{\partial S} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right] e^{ik\tau} \rangle - \\
&- \sum_{0 \leq |k| \leq m} \left[\left\langle \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial u} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) v + \right. \right. \\
&+ \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial w} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \\
&+ \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial T} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) T + \\
&+ \left. \left. \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial S} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle \right] = 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \\
R(v, T) &\equiv -\chi \Delta T + (v_0, \nabla T) + (v, \nabla T_0) - \\
&- \sum_{0 \leq |k| \leq m} \left[\left\langle \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial u} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) v + \right. \right. \\
&+ \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial w} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \\
&+ \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial T} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) T + \\
&+ \left. \left. \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial S} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right\rangle \right] = 0, \\
v|_{\partial\Omega} &= 0, \quad T|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} q \, dx = 0
\end{aligned} \tag{6.7}$$

не имеет нетривиальных решений.

Чтобы построить асимптотическое разложение решения поставленной задачи, положим в (6.5) $\omega t = \tau$, $\omega^{-1/2} = \varepsilon$. Получим задачу о 2π -периодических по τ решениях системы

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial \tau} - \varepsilon^2 \nu \Delta v + \varepsilon^2 \nabla p + \varepsilon^2 (v, \nabla) v = \\ & = \sum_{0 < |k| \leq m} a_k(x) e^{ik\tau} T + \varepsilon^2 \sum_{0 \leq |k| \leq m} f_{1k} \left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x}, T, \frac{\partial T}{\partial x} \right) e^{ik\tau}, \\ & \frac{\partial T}{\partial \tau} - \varepsilon^2 \chi \Delta T + \varepsilon^2 (v, \nabla T) = \varepsilon^2 \sum_{0 \leq |k| \leq m} f_{2k} \left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x}, T, \frac{\partial T}{\partial x} \right) e^{ik\tau}, \\ & \operatorname{div} v = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad T|_{\partial\Omega} = h. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Для применения метода пограничного слоя [9] введем криволинейную систему координат (ψ, r) в замыкании $\overline{\Omega}_\eta$ пограничной под-области Ω_η области Ω толщины η следующим образом. Определим отображение $\partial\Omega \times [0, \eta] \rightarrow \overline{\Omega}_\eta$ по закону $(\psi, r) \rightarrow \psi + n_\psi r$, где $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ — точка на $\partial\Omega$ с местной координатой ψ , а n_ψ — вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке ψ . Число η выберем достаточно малым так, чтобы указанные нормали в Ω_η не пересекались. Введем затем новую независимую переменную $\rho = \sqrt{\omega} r$, $r \leq \eta$, выразим производные по x_j , $1 \leq j \leq 3$, через производные по ψ_1, ψ_2 и ρ и разложим коэффициенты в полученных равенствах по степеням $\omega^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} &= \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial r} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \psi_k} = \sqrt{\omega} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \rho} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \psi_k}, \\ \frac{\partial r}{\partial x_j} &\equiv b_j(x) = b_j(\psi, r) = b_j \left(\psi, \frac{\rho}{\sqrt{\omega}} \right) = b_j(\psi, 0) + \frac{\partial b_j(\psi, 0)}{\partial r} \frac{\rho}{\sqrt{\omega}} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b_j(\psi, 0)}{\partial r^2} \frac{\rho^2}{\omega} + \dots \equiv b_{j0} + b_{j1} \frac{\rho}{\sqrt{\omega}} + b_{j2} \frac{\rho^2}{\omega} + \dots, \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} &\equiv c_{kj}(x) = c_{kj}(\psi, r) = c_{kj} \left(\psi, \frac{\rho}{\sqrt{\omega}} \right) = c_{kj}(\psi, 0) + \frac{\partial c_{kj}(\psi, 0)}{\partial r} \frac{\rho}{\sqrt{\omega}} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_{kj}(\psi, 0)}{\partial r^2} \frac{\rho^2}{\omega} + \dots \equiv c_{kj0} + c_{kj1} \frac{\rho}{\sqrt{\omega}} + c_{kj2} \frac{\rho^2}{\omega} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} = & \left(\sqrt{\omega} b_{j0} + b_{j1} \rho + b_{j2} \frac{\rho^2}{\sqrt{\omega}} + b_{j3} \frac{\rho^3}{\omega} + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \rho} + \\ & + \sum_{k=1}^2 \left(c_{kj0} + c_{kj1} \frac{\rho}{\sqrt{\omega}} + c_{kj2} \frac{\rho^2}{\omega} + \dots \right) \frac{\partial}{\partial \psi_k}. \end{aligned}$$

Асимптотику 2π -периодического по τ решения задачи (6.8) будем искать в виде

$$\begin{aligned} v(x, \tau, \varepsilon) = & \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, \tau) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(\psi, \rho) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\psi, \rho, \tau), \\ p(x, \tau, \varepsilon) = & \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k-2} s_k(x, \tau) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k h_k(\psi, \rho) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k-1} g_k(\psi, \rho, \tau), \\ T(x, \tau, \varepsilon) = & \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k T_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+2} R_k(x, \tau) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} W_k(\psi, \rho) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+2} Z_k(\psi, \rho, \tau), \\ & \rho = \varepsilon^{-1} r, \end{aligned} \tag{6.9}$$

Введем в рассмотрение пять вспомогательных задач.

(A1) Задача Неймана для системы вида

$$\Delta s = \operatorname{div} f(x), \quad \left. \frac{\partial s}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = f(x)_n|_{\partial\Omega},$$

где f — бесконечно дифференцируемая в Ω трехмерная вектор-функция, n — внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega$, $f(x)_n$ — проекция вектора $f(x)$ на n .

(A2) Задача Дирихле для системы вида

$$\begin{aligned} L(v, q, T) &= f(x), \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \int_{\Omega} q \, dx = 0, \\ R(v, T) &= g(x), \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad T|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}$$

где f, g — бесконечно дифференцируемые (вектор-) функции.

(A3) Задача об ограниченном на луче $\rho \in (0, \infty)$ решении $z(\psi, \rho)$ дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} ikz(\psi, \rho) &= \nu \frac{\partial^2 z(\psi, \rho)}{\partial \rho^2} + F(\psi, \rho)e^{\xi\rho}, \\ z(\psi, 0) &= z_0(\psi), \quad z|_{\rho=\infty} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Re} \xi < 0$, F — полином по ρ с бесконечно дифференцируемыми по $\psi \in \partial\Omega$ коэффициентами.

(A4) Задача об ограниченном на луче $\rho \in (0, \infty)$ решении $w(\psi, \rho)$ дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 w(\psi, \rho)}{\partial \rho^2} + G(\psi, \rho)e^{\zeta\rho} = 0, \quad w|_{\rho=\infty} = 0,$$

где $\operatorname{Re} \zeta < 0$, G — полином по ρ с бесконечно дифференцируемыми по $\psi \in \partial\Omega$ коэффициентами.

(A5) Задача об ограниченном на луче $\rho \in (0, \infty)$ решении $w(\psi, \rho)$ дифференциального уравнения

$$\frac{\partial w(\psi, \rho)}{\partial \rho} + H(\psi, \rho)e^{\lambda\rho} = 0, \quad w|_{\rho=\infty} = 0,$$

где $\operatorname{Re} \lambda < 0$, H — полином по ρ с бесконечно дифференцируемыми по $\psi \in \partial\Omega$ коэффициентами.

Теорема 6.2. Пусть выполнены условия данного пункта, $\omega > \omega_0$, где ω_0 — достаточно большое число, и пусть $(u_\omega, p_\omega, T_\omega)$ — указанное выше $2\pi\omega^{-1}$ -периодическое по t решение системы (6.1). Тогда выполняются следующие утверждения.

1. Построение любой частичной суммы (u^n, p^n, T^n) полной формальной асимптотики решения поставленной задачи при $\omega \gg 1$ сводится к решению конечного числа линейных однозначно разрешимых задач типов (A1)–(A5). При этом все слагаемые частичные суммы рядов (6.9) вещественны и бесконечно гладкие.

2. Для любых неотрицательных чисел l, m решение $(u_\omega, p_\omega, T_\omega) \in C^{l,m}(\bar{Q})$ и выполняются оценки

$$\|u_\omega - u^n\|_{l,m} + \|T_\omega - T^n\|_{l,m} \leq c_{l,m,n} \omega^{-[n+1-\max(l-2, 2m-2, 0)]/2},$$

$$\|\nabla p_\omega - \nabla p^n\|_{l,m} \leq c_{l,m,n} \omega^{-[n+1-\max(l, 2m)]/2},$$

где $c_{l,m,n}$ — не зависящие от ω постоянные.

Пространство $C^{l,m}$ и обозначение $\|\cdot\|_{l,m}$ введены на с. 62.

6.2.2. Построение асимптотики. В данном пункте докажем теорему 6.2. Вначале установим, что построение коэффициентов равенств (6.5) действительно сводится к решению конечного числа задач (A1)–(A5). Для $x \in \Omega_\eta$ через $v^{(s)}(x)$, $s = 1, 2, 3$, будем обозначать компоненты произвольного вектора $v(x) \in \mathbb{R}^3$ в криволинейных координатах (ψ_1, ψ_2, r) . Если $v(x) = v_1(x) + v_2(x)i$, $v_1(x), v_2(x) \in \mathbb{R}^3$, то полагаем $v^{(s)}(x) = v_1^{(s)}(x) + v_2^{(s)}(x)i$.

Подставим формально ряды (6.9) в равенства (6.8):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[\frac{\partial u_k(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial z_k(\psi, \rho, \tau)}{\partial \tau} \right] - \\ & - \varepsilon^2 \nu \Delta \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [v_k(x) + u_k(x, \tau) + w_k(\psi, \rho) + z_k(\psi, \rho, \tau)] + \\ & + \varepsilon^2 \nabla \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [p_k(x) + \varepsilon^{-2} s_k(x, \tau) + h_k(\psi, \rho) + \varepsilon^{-1} g_k(\psi, \rho, \tau)] + \\ & + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [v_k(x) + u_k(x, \tau) + w_k(\psi, \rho) + z_k(\psi, \rho, \tau)], \nabla \right) \times \\ & \times \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [v_k(x) + u_k(x, \tau) + w_k(\psi, \rho) + z_k(\psi, \rho, \tau)] = \\ & = \sum_{0 < |k| \leq m} a_k(x) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [T_k(x) + \varepsilon^2 R_k(x, \tau) + \\ & + \varepsilon W_k(\psi, \rho) + \varepsilon^2 Z_k(\psi, \rho, \tau)] e^{ik\tau} + \\ & + \varepsilon^2 \sum_{0 \leq |k| \leq m} f_{1k} \left(x, v(x, \tau), \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x}, T(x, \tau), \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} e^{ik\tau} \right); \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+2} \left[\frac{\partial R_k(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial Z_k(\psi, \rho, \tau)}{\partial \tau} \right] - \\
& - \varepsilon^2 \chi \Delta \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [T_k(x) + \varepsilon^2 R_k(x, \tau) + \varepsilon W_k(\psi, \rho) + \varepsilon^2 Z_k(\psi, \rho, \tau)] + \\
& + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [v_k(x) + u_k(x, \tau) + w_k(\psi, \rho) + z_k(\psi, \rho, \tau)] \right), \quad (6.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [T_k(x) + \varepsilon^2 R_k(x, \tau) + \varepsilon W_k(\psi, \rho) + \varepsilon^2 Z_k(\psi, \rho, \tau)] = \\
& = \varepsilon^2 \sum_{0 \leq |k| \leq m} f_{2k} \left(x, v(x, \tau), \frac{\partial v(x, \tau)}{\partial x}, T(x, \tau), \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right) e^{ik\tau}, \\
& \operatorname{div} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [v_k(x) + u_k(x, \tau) + w_k(\psi, \rho) + z_k(\psi, \rho, \tau)] \right) = 0, \quad (6.12)
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [v_k(x) + u_k(x, \tau) + w_k(\psi, \rho) + z_k(\psi, \rho, \tau)] \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (6.13)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k [T_k(x) + \varepsilon^2 R_k(x, \tau) + \varepsilon W_k(\psi, \rho) + \varepsilon^2 Z_k(\psi, \rho, \tau)] \Big|_{\partial \Omega} = h(x). \quad (6.14)$$

Разложим (вектор-) функции f_{ik} , в которых v , $\frac{\partial v}{\partial x}$, T , $\frac{\partial T}{\partial x}$ представлены рядами (6.9), в ряды Тейлора с центром $(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x})$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для регулярных и погранслойных (вектор-) функций, а затем операцией усреднения по τ разобьем полученные задачи на задачи для стационарных и нестационарных (вектор-) функций.

Из третьего и первого уравнений (6.12), с учетом равенств (2.26), (2.27), прежде всего находим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w_0^{(3)}}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial z_0^{(3)}}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial \rho^2} = 0, \quad s = 1, 2, \\
& w_0|_{\rho=\infty} = z_0|_{\rho=\infty} = 0, \quad \langle z_0^{(3)} \rangle = 0.
\end{aligned} \quad (6.15)$$

Для первых осциллирующих регулярных (из двух первых уравне-

ний (6.10)) находим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \nabla s_0 &= \sum_{0 < |k| \leq m} a_k T_0 e^{ik\tau}, \quad \operatorname{div} u_0 = 0, \quad u_0^{(3)}|_{\partial\Omega} = -z_0^{(3)}|_{\partial\Omega}, \\
\frac{\partial R_0}{\partial \tau} + (u_0, \nabla T_0) &= \\
&= \sum_{0 \leq |k| \leq m} \left[f_{2k} \left(x, v_0 + u_0, \frac{\partial(v_0 + u_0)}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) e^{ik\tau} - \right. \\
&\quad \left. - \left\langle f_{2k} \left(x, v_0 + u_0, \frac{\partial(v_0 + u_0)}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) e^{ik\tau} \right\rangle \right] = \quad (6.16) \\
&= \sum_{0 \leq |k| \leq m} \left[\varphi_{2k} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left\langle \varphi_{2k} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \right\rangle \right], \\
\langle R_0 \rangle &= \langle u_0 \rangle = \langle s_0 \rangle = 0.
\end{aligned}$$

В последнем представлении учтено вытекающее из первого уравнения (6.16) равенство (6.19) (см. ниже).

Далее имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_0^{(s)}}{\partial \tau} - \nu \frac{\partial^2 z_0^{(s)}}{\partial \rho^2} &= 0, \\
\langle z_0^{(s)} \rangle &= 0, \quad z_0^{(s)}|_{\partial\Omega} = -v_0^{(s)}|_{\partial\Omega}, \quad s = 1, 2, \\
\frac{\partial^2 W_0}{\partial \rho^2} &= \sum_{0 \leq |k| \leq m} \left\langle \left(\frac{\partial f_{2k}}{\partial w} \left(x, u_0 + v_0, \frac{\partial(u_0 + v_0)}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) \right)_0 \times \right. \\
&\quad \left. \times e^{ik\tau} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \rho} + \frac{\partial z_0}{\partial \rho} \right) \right\rangle, \quad (6.17) \\
\frac{\partial g_0}{\partial \rho} &= -\frac{\partial z_0^{(3)}}{\partial \tau}, \quad \langle g_0 \rangle = 0, \\
\frac{\partial Z_0}{\partial \tau} - \chi \frac{\partial^2 Z_0}{\partial \rho^2} - (z_0, \nabla T_0) &= 0, \quad \langle Z_0 \rangle = 0, \quad Z_0|_{\partial\Omega} = -R_0|_{\partial\Omega}, \\
W_0|_{\rho=\infty} &= Z_0|_{\rho=\infty} = z_0|_{\rho=\infty} = g_0|_{\rho=\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Для старших стационарных регулярных коэффициентов (6.9) находим

$$\begin{aligned}
& -\nu\Delta v_0 + \nabla p_0 + (v_0, \nabla)v_0 + \langle (u_0, \nabla)u_0 \rangle = \\
& = \sum_{0 \leq |k| \leq m} \left\langle \varphi_{1k} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \right\rangle + \left\langle \sum_{0 < |k| \leq m} a_k R_0 e^{ik\tau} \right\rangle, \\
& \operatorname{div} v_0 = 0, \\
& -\chi\Delta T_0 + (v_0, \nabla T_0) = \sum_{0 \leq |k| \leq m} \left\langle \varphi_{2k} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \right\rangle, \\
& v_0|_{\partial\Omega} = -w_0|_{\partial\Omega}, \quad T_0|_{\partial\Omega} = h.
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Следуя [9], мы считаем, что все погранслоиные функции обращаются в ноль вне погранполосы $\Omega_{2\eta/3}$, а в ней умножены на срезающую функцию $\chi(x) \in C^\infty(\Omega)$ такую, что

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq \eta/3, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_{2\eta/3}. \end{cases}$$

Из (6.15) однозначно находим $w_0 = 0, z_0^{(3)} = 0$. Из первого равенства (6.16) имеем

$$\begin{aligned}
u_0 &= \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} \Pi a_k T_0 e^{ik\tau}, \\
\Delta s_0 &= \operatorname{div} \sum_{0 < |k| \leq m} a_k T_0 e^{ik\omega t}, \\
\frac{\partial s_0}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} &= \sum_{0 < |k| \leq m} (a_k T_0)^{(3)} e^{ik\omega t} \Big|_{\partial\Omega}, \quad \langle s_0 \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Из второго уравнения (6.16) и (6.19) найдем

$$R_0 = \Psi\left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau\right) + \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} (\Pi a_k T_0, \nabla T_0) e^{ik\tau}. \quad (6.20)$$

Заменяем теперь u_0 и R_0 в системе (6.18) найденными только что их выражениями (6.19), (6.20). Получим задачу (6.6) для $u = v_0$, $q = p_0$, $W = T_0$, которая по условию разрешима. В результате остальные задачи сводятся к конечному числу задач типов (A1)–(A5).

Методом математической индукции докажем, что построение каждого коэффициента сводится к решению конечного числа задач типов (A1)–(A5). Пусть $n \geq 1$ и при $k < n$ предположение индукции выполнено для набора P_k : $v_k, u_k, p_k, u_k, s_k, w_k, z_k, h_{k-1}, g_k, T_k, R_k, W_k, Z_k$. Воспользовавшись (2.26), (2.27), (6.10)–(6.14), выпишем соотношения для коэффициентов P_n .

Согласно (6.12), (6.10), (2.26), (2.27) и предположению индукции имеем

$$\frac{\partial w_n^{(3)}}{\partial \rho} = \alpha_n(\psi, \rho), \quad w_n^{(3)} \Big|_{\rho=\infty} = 0, \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial^2 w_n^{(s)}}{\partial \rho^2} = \beta_{n,s}(\psi, \rho), \quad w_n^{(s)} \Big|_{\rho=\infty} = 0, \quad s = 1, 2, \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial z_n^{(3)}}{\partial \rho} = \lambda_n(\psi, \rho, \tau), \quad z_n^{(3)} \Big|_{\rho=\infty} = 0, \quad \langle z_n^{(3)} \rangle = 0. \quad (6.23)$$

Здесь $\alpha_n, \beta_{n,s}, \lambda_n$ — известные на этом шаге погранслойные функции, причем λ_n — быстро осциллирующая по τ с нулевым средним по τ .

Теперь для регулярных нестационарных вектор-функций находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial \tau} + \nabla s_n - \sum_{0 < |k| \leq m} a_k T_n e^{ik\tau} &= f_n(x, \tau), \\ \operatorname{div} u_n &= 0, \quad u_n^{(3)} \Big|_{\partial\Omega} = -z_n^{(3)} \Big|_{\partial\Omega}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial R_n}{\partial \tau} + (u_0, \nabla T_n) + (u_n, \nabla T_0) - \\
& - \left[\sum_{0 \leq |k| \leq m} \left\{ \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial u} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) v_n + \right. \right. \\
& \quad + \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial w} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial v_n}{\partial x} + \\
& \quad + \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial T} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) T_n + \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial S} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial T_n}{\partial x} \right\} - \langle \dots \rangle \right] = \varphi_n(x, \tau), \\
& \langle u_n \rangle = \langle R_n \rangle = \langle s_n \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{6.25}$$

В правых частях равенств (6.24), (6.25) стоят известные (вектор-) функции $f_n(x, \tau)$, $\varphi_n(x, \tau)$ с нулевым средним по τ .

Снова для погранслоёных

$$\chi \frac{\partial h_n}{\partial \rho} = \delta_n(\psi, \rho), \quad h_n|_{\rho=\infty} = 0, \tag{6.26}$$

$$\frac{\partial z_n^{(s)}}{\partial \tau} - \nu \frac{\partial^2 z_n^{(s)}}{\partial \rho^2} = \mu_{n,s}(\psi, \rho, \tau), \quad z_n^{(s)}|_{\partial \Omega} = -v_n^{(s)}|_{\partial \Omega}, \quad s = 1, 2, \tag{6.27}$$

$$\chi \frac{\partial^2 W_n}{\partial \rho^2} = \gamma_n(\psi, \rho), \quad W_n|_{\rho=\infty} = 0, \tag{6.28}$$

$$\frac{\partial g_n}{\partial \rho} + \frac{\partial z_n^{(3)}}{\partial \tau} = \xi_n(\psi, \rho, \tau), \tag{6.29}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial Z_n}{\partial \tau} - \chi \frac{\partial^2 Z_n}{\partial \rho^2} + (z_0, \nabla T_n) = v_n(\psi, \rho, \tau), \quad Z_n|_{\partial \Omega} = -R_n|_{\partial \Omega}, \\
& \langle Z_n \rangle = \langle z_n^{(s)} \rangle = \langle g_n \rangle = 0,
\end{aligned} \tag{6.30}$$

$$W_n|_{\rho=\infty} = Z_n|_{\rho=\infty} = z_n|_{\rho=\infty} = g_n|_{\rho=\infty} = 0.$$

Здесь v_n , $\mu_{n,s}$, ξ_n , γ_n , δ_n — известные погранслоёные (вектор-) функции, v_n , $\mu_{n,s}$, ξ_n имеют нулевое среднее по τ .

Для регулярных

$$\begin{aligned}
& -\nu \Delta v_n + \nabla p_n + (v_0, \nabla) v_n + (v_n, \nabla) v_0 + \langle (u_0, \nabla) u_n \rangle + \\
& \quad + \langle (u_n, \nabla) u_0 \rangle - \left\langle \sum_{0 < |k| \leq m} a_k R_n e^{ik\tau} \right\rangle - \\
& - \sum_{0 \leq |k| \leq m} \left[\left\langle \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial u} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) v_n + \right. \right. \\
& \quad + \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial w} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial v_n}{\partial x} + \\
& \quad + \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial T} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) T_n + \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial S} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial T_n}{\partial x} \right\rangle \right] = \psi_n(x), \\
& \quad \operatorname{div} v_n = 0, \\
& \quad -\chi \Delta T_n + (v_0, \nabla T_n) + (v_n, \nabla T_0) - \\
& - \sum_{0 \leq |k| \leq m} \left[\left\langle \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial u} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) v_n + \right. \right. \\
& \quad + \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial w} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial v_n}{\partial x} + \\
& \quad + \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial T} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) T_n + \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial S} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial T_n}{\partial x} \right\rangle \right] = \chi_n(x), \\
& \quad v_n|_{\partial\Omega} = w_n|_{\partial\Omega}, \quad T_n|_{\partial\Omega} = -W_n|_{\partial\Omega},
\end{aligned} \tag{6.31}$$

где $\psi_n(x)$, $\chi_n(x)$ — известные регулярные (вектор-) функции.

Из (6.21), (6.22) найдем w_n , а из (6.28) — W_n . Теперь из (6.23), (6.30), отделив переменную τ , однозначно определим $z_n^{(3)}$, Z_n . Пусть $(\overset{\circ}{u}_n, \overset{\circ}{s}_n)$ — решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \nabla s = f_n, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u^{(3)}|_{\partial\Omega} = -z_n^{(3)}|_{\partial\Omega}, \quad \langle u \rangle = \langle s \rangle = 0,$$

которая разрешима в силу равенства

$$\int_{\partial\Omega} z_n^{(3)} ds = 0$$

(см. [54, лемма 4]). Докажем его.

Рассмотрим подробнее равенство (6.12). Воспользуемся формулой для дивергенции в криволинейных координатах. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для регулярных и погранслойных функций. Имеем при ε^{-1} :

$$\frac{\partial z_0^{(3)}}{\partial \rho} = 0.$$

При ε^0 :

$$\frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial \rho} + D_{0,1} z_0^{(1)} + D_{0,2} z_0^{(2)} + D_{0,3} z_0^{(3)} = 0.$$

Из формулы Остроградского — Гаусса получаем следующее:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} z_0 d\Omega = \int_{\partial\Omega} (z_0, n) dS = \int_{\partial\Omega} z_0^{(3)} dS = 0.$$

Пусть по индукции для $i = 0, \dots, k$, $k \geq 0$, имеем $\int_{\Omega} \operatorname{div} z_i d\Omega = \int_{\partial\Omega} z_i^{(3)} dS = 0$. А значит,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\operatorname{div} z_i - \varepsilon^{-1} \frac{\partial z_i^{(3)}}{\partial \rho} - \right. \\ & \left. - \sum_{s=0}^{k-i} \varepsilon^s (D_{s,1} z_i^{(1)} + D_{s,2} z_i^{(2)} + D_{s,3} z_i^{(3)}) \right] d\Omega = O(\varepsilon^{k-i+1}). \end{aligned} \quad (6.32)$$

При ε^k имеем

$$\frac{\partial z_{k+1}^{(3)}}{\partial \rho} + \sum_{j=0}^k (D_{j,1} z_{k-j}^{(1)} + D_{j,2} z_{k-j}^{(2)} + D_{j,3} z_{k-j}^{(3)}) = 0.$$

Проинтегрируем это равенство по области Ω , затем применим оценку (6.32), прибавив для этого недостающие равные нулю слагаемые из равенств для предыдущих степеней ε . Получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^k : \int_{\Omega} \left[\frac{\partial z_{k+1}^{(3)}}{\partial \rho} + \sum_{j=0}^k (D_{j,1} z_{k-j}^{(1)} + D_{j,2} z_{k-j}^{(2)} + D_{j,3} z_{k-j}^{(3)}) \right] d\Omega = \\ = 0 = \int_{\partial\Omega} z_{k+1}^{(3)} dS + \int_{\Omega} O(\varepsilon) d\Omega. \end{aligned}$$

Заметим, что первое слагаемое правой части не зависит от ε . Тогда получаем требуемое, т. е. $\int_{\partial\Omega} z_{k+1}^{(3)} dS = 0$. Тогда в силу (6.24)

$$u_n = \sum_{0 < |k| \leq m} (ik)^{-1} \Pi a_k T_n e^{ik\tau} + \overset{\circ}{u}_n. \quad (6.33)$$

Подставим выражения (6.24) для u_0 , u_n в (6.25), найдем

$$\begin{aligned} R_n = \sum_{0 < |k| \leq m} [k^{-2} \{ (\Pi a_k T_n, \nabla T_0) + (\Pi a_k T_0, \nabla T_n) \} e^{ik\tau}] + \\ + \frac{\partial \Psi}{\partial u} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) v_n + \\ + \frac{\partial \Psi}{\partial w} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial v_n}{\partial x} + \\ + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) T_n + \\ + \frac{\partial \Psi}{\partial S} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial T_n}{\partial x} + d_n(x, \tau), \end{aligned} \quad (6.34)$$

где $d_n(x, \tau)$ — известная функция. Теперь подставим выражения (6.33), (6.34) для u_n , R_n в (6.31). Получим задачу

$$\begin{aligned} -\nu \Delta v_n + \nabla p_n + (v_0, \nabla) v_n + (v_n, \nabla) v_0 + \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} \times \\ \times (\Pi a_k T_0, \nabla) \Pi a_{-k} T_n + \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} (\Pi a_k T_n, \nabla) \Pi a_{-k} T_0 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} a_k (\Pi a_{-k} T_0, \nabla T_n) - \sum_{0 < |k| \leq m} k^{-2} a_k (\Pi a_{-k} T_n, \nabla T_0) - \\
& - \sum_{0 < |k| \leq m} \left\langle a_k \left[\frac{\partial \Psi}{\partial u} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) v_n + \right. \right. \\
& \quad + \frac{\partial \Psi}{\partial w} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial v_n}{\partial x} + \\
& \quad + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) T_n + \\
& \quad \left. + \frac{\partial \Psi}{\partial S} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial T_n}{\partial x} \right] e^{ik\tau} \right\rangle - \\
& - \sum_{0 \leq |k| \leq m} \left[\left\langle \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial u} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) v_n + \right. \right. \\
& \quad + \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial w} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial v_n}{\partial x} + \\
& \quad + \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial T} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) T_n + \\
& \quad \left. + \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial S} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial T_n}{\partial x} \right\rangle \right] = l_n(x), \\
& \quad \operatorname{div} v_n = 0, \\
& \quad -\chi \Delta T_n + (v_0, \nabla T_n) + (v_n, \nabla T_0) - \\
& - \sum_{0 \leq |k| \leq m} \left[\left\langle \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial u} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) v_n + \right. \right. \\
& \quad + \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial w} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial v_n}{\partial x} + \\
& \quad + \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial T} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) T_n + \\
& \quad \left. + \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial S} \left(x, v_0, \frac{\partial v_0}{\partial x}, T_0, \frac{\partial T_0}{\partial x}, \tau \right) \frac{\partial T_n}{\partial x} \right\rangle \right] = \chi_n(x), \\
& \quad v_n|_{\partial\Omega} = -w_n|_{\partial\Omega}, \quad T_n|_{\partial\Omega} = -W_n|_{\partial\Omega}.
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Благодаря соотношению [54, лемма 4]

$$\int_{\partial\Omega} w_n^{(3)} ds = 0$$

снимается неоднородность в граничных условиях. Таким образом, можно построить бесконечно гладкую пару $(\overset{\circ}{v}_n, \overset{\circ}{T}_n)$, которая удовлетворяет краевым условиям задачи (6.35), а также условию $\operatorname{div} \overset{\circ}{v}_n = 0$. В результате получим задачу (6.7), которая по условию разрешима. Найдем функции $z_n^{(s)}$, $s = 1, 2$, g_n , h_n из уравнений (6.26), (6.27), (6.29). Очевидно, что наше предположение индукции выполнено, т. е. на каждом шаге нахождение коэффициентов разложения сводится к решению конечного числа однозначно разрешимых задач типов (A1)–(A5). Построение формального асимптотического разложения решения задачи (6.5) закончено. Его обоснование осуществляется аналогично разделу 5.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абоод Х. Д. Асимптотическое интегрирование задачи о периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми: дис. . . . канд. физ.-мат. наук.—Ростов-н/Д., 2005.—103 с.
2. Басистая Д. А., Левенштам В. Б. Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Математика и механика сплошной среды.—2004.—С. 46–48.
3. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике.—Киев: Изд-во АН УССР, 1945.—139 с.
4. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. ин-та строит. мех. АН УССР.—1950.—№ 14.—С. 9–34.
5. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н. Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле // Укр. мат. журн.—1955.—Т. 7.—С. 5–17.
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.—М.: Наука, 1974.—503 с.
7. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. Об ортогональных разложениях пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по данной области // Тр. МИАН СССР.—1960.—Т. 59.—С. 6–36.
8. Ван-дер-Пооль Б. Нелинейная теория электрических колебаний / Пер. с англ.; с предисл. С. Э. Хайкина.—М.: Связьиздат, 1935.—140 с.
9. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук.—1957.—Т. 12, № 5.—С. 3–122.
10. Волосов В. М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.—1962.—Т. 17, № 6.—С. 3–126.
11. Волосов В. М. Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанные с усреднением // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1963.—Т. 3, № 1.—С. 3–53.
12. Волосов В. М., Моргунов Б. И. К расчету стационарных резонансных режимов некоторых нелинейных колебательных систем // Докл. АН СССР.—1963.—Т. 153, № 3.—С. 559–561.
13. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Асимптотика некоторых вращательных движений // Докл. АН СССР.—1963.—Т. 151, № 6.—С. 1260–1263.
14. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Асимптотический расчет некоторых вращательных движений в резонансном случае // Докл. АН СССР.—1965.—Т. 161, № 6.—С. 1303–1305.
15. Волосов В. М., Моргунов Б. И. К расчету стационарных резонансных колебательных режимов некоторых негамильтоновых систем // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика и астрономия.—1965.—№ 4.—С. 86–89.

16. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Методы расчета стационарных резонансных колебательных и вращательных движений некоторых нелинейных систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1968.—Т. 8, № 2.—С. 251–294.
17. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем.—М.: Изд-во МГУ, 1971.—505 с.
18. Волосов В. М., Медведев Г. Н., Моргунов Б. И. Применение метода усреднения к расчету некоторых систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика и астрономия.—1965.—№ 6.—С. 89–91.
19. Волосов В. М., Медведев Г. Н., Моргунов Б. И. О применении метода усреднения к некоторым системам дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика и астрономия.—1968.—№ 2.—С. 129–131.
20. Гихман И. И. О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями // Укр. мат. журн.—1950.—Т. 2, № 3.—С. 45–69.
21. Гихман И. И. По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Укр. мат. журн.—1952.—Т. 4, № 2.—С. 215–219.
22. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения.—Киев: Наукова думка, 1968.—354 с.
23. Далецкий Ю. А., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.—М.: Наука, 1970.—534 с.
24. Жиков В. В. Принцип усреднения для параболических уравнений с переменным главным членом // Докл. АН СССР.—1973.—Т. 208, № 1.—С. 31–35.
25. Жиков В. В. Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1976.—Т. 40, № 6.—С. 1380–1408.
26. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний.—М.: Наука, 1988.—325 с.
27. Забрейко П. П., Ледовская И. Б. О старших приближениях метода усреднения Н. Н. Боголюбова — Н. М. Крылова // Докл. АН СССР.—1966.—Т. 171, № 2.—С. 262–265.
28. Забрейко П. П., Колесов Ю. С., Красносельский М. А. Неявные функции и принцип усреднения Н. Н. Боголюбова — Н. М. Крылова // Докл. АН СССР.—1969.—Т. 184, № 3.—С. 526–529.
29. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН. СССР. Механика жидкости и газа.—1966.—№ 5.—С. 51–55.
30. Ивлева Н. С., Левенштам В. Б. Обоснование метода усреднения для обобщенной задачи конвекции // Исследования по дифференциальным уравнениям, математическому моделированию и проблемам математического образования.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2014.—С. 105–111.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 8, ч. 2).
31. Капикян А. К., Левенштам В. Б. Уравнения в частных производных первого порядка с большими высокочастотными слагаемыми // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2008.—Т. 48, № 11.—С. 2024–2041.
32. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперим. и теорет. физики.—1951.—Т. 21, № 5.—С. 588–598.
33. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.—М.: Мир, 1972.—740 с.

34. Колецов Л. В. Конструктивное описание областей определения дробных степеней эллиптических операторов // Сиб. мат. журн.—1975.—Т. 16, № 5.—С. 1011–1019.
35. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2.—М.: Физматгиз, 1963.—728 с.
36. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1966.—331 с.
37. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—499 с.
38. Красносельский М. А., Крейн С. Г. О принципе усреднения в нелинейной механике // Успехи мат. наук.—1955.—№ 3.—С. 147–152.
39. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.—М.: Наука, 1977.—464 с.
40. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний.—Киев: Изд-во ВУАН, 1934.—112 с.
41. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику.—Киев: Изд-во АН УССР, 1937.—353 с.
42. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.—М.: Наука, 1970.—288 с.
43. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.—М.: Наука, 1967.—736 с.
44. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.—М.: Наука, 1986.—736 с.
45. Левенштам В. Б. Метод усреднения и бифуркация ограниченных решений абстрактных параболических уравнений // Сиб. мат. журн.—1976.—Т. 17, № 5.—С. 1058–1068.
46. Левенштам В. Б. Одно свойство проектора Π гидродинамики // Комплексный анализ. Дифференциальные и интегральные уравнения.—Элиста, 1990.—С. 89–96.
47. Левенштам В. Б. Усреднение квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующей главной частью. Экспоненциальная дихотомия // Изв. РАН. Сер. мат.—1992.—Т. 56, № 4.—С. 813–851.
48. Левенштам В. Б. Об области значений сужения на пространство Гёльдера проектора Π гидродинамики // Материалы VII школы-семинара «Нелинейные задачи теории устойчивости».—М.: Изд-во МГУ, 1992.—С. 35.
49. Левенштам В. Б. Обоснование метода усреднения для задачи конвекции при высокочастотных вибрациях // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 2.—С. 92–109.
50. Левенштам В. Б. Старшие приближения метода усреднения для задачи о вибрационной конвекции // Диф. уравнения.—1995.—Т. 31, № 5.—С. 814–822.
51. Левенштам В. Б. Метод усреднения в задаче конвекции при высокочастотных наклонных вибрациях // Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37, № 5.—С. 1103–1116.
52. Левенштам В. Б. Обоснование метода усреднения для задачи о тепловой вибрационной конвекции // Докл. АН.—1996.—Т. 349, № 5.—С. 621–623.
53. Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование задачи о вибрационной конвекции // Диф. уравнения.—1997.—Т. 34, № 4.—С. 523–532.

54. Левенштам В. Б. Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2000.—Т. 40, № 9.—С. 1416–1424.
55. Левенштам В. Б. Принцип усреднения в случае задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений с переменной главной частью // Сиб. мат. журн.—2000.—№ 4.—С. 839–857.
56. Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование систем Навье — Стокса с быстро осциллирующей массовой силой // Диф. уравнения.—2001.—Т. 37, № 5.—С. 696–705.
57. Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующими по времени коэффициентами // Изв. вузов. Математика.—2002.—№. 5.—С. 36–43.
58. Левенштам В. Б. Старшие приближения метода усреднения для параболических начально-краевых задач с быстро осциллирующими коэффициентами // Диф. уравнения.—2003.—Т. 39, № 10.—С. 1395–1403.
59. Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами // Диф. уравнения.—2005.—Т. 41, № 6.—С. 761–770; № 8.—С. 1084–1091.
60. Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование параболических задач с большими высокочастотными слагаемыми // Сиб. мат. журн.—2005.—Т. 46, № 4.—С. 805–821.
61. Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Докл. АН.—2005.—Т. 405, № 2.—С. 169–172.
62. Левенштам В. Б. Обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений, содержащих быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами // Изв. РАН. Сер. мат.—2006.—Т. 70, № 2.—С. 25–56.
63. Левенштам В. Б. Асимптотические разложения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Диф. уравнения.—2008.—Т. 44, № 1.—С. 52–68.
64. Левенштам В. Б. Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми (усреднение и асимптотики).—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2008.—366 с.
65. Левенштам В. Б. О взаимосвязи двух классов решений уравнений Навье — Стокса // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, № 3.—С. 56–66.
66. Левенштам В. Б. Обоснование метода усреднения для системы уравнений с оператором Навье — Стокса в главной части // Алгебра и анализ.—2014.—Т. 26, № 1.—С. 94–127.
67. Левенштам В. Б., Ишмеев М. Р. Эволюционные задачи с большими слагаемыми. Высокочастотные асимптотики.—Saarbrücken: LAP Lambert Acad. Publ., 2012.—105 p.
68. Левенштам В. Б., Хатламаджиян Г. Л. Распространение теории усреднения на дифференциальные уравнения, содержащие быстро осциллирующие слагаемые с большими амплитудами. Задача о периодических решениях // Изв. вузов. Математика.—2006.—№ 6.—С. 35–47.
69. Левенштам В. Б., Хатламаджиян Г. Л. Асимптотическое интегрирование задачи о периодических решениях системы с быстрыми и медленными переменными // Тр. междунар. школы-семинара по геометрии и анализу памяти

- Н. В. Ефимова.—Абрау-Дюрсо, 2008.—С. 230–232.
70. Левитан Б. М. Почти периодические функции.—М.: Наука, 1958.—396 с.
71. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения.—М.: Изд-во МГУ, 1978.—204 с.
72. Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. Т. 1.—М.: Изд-во АН СССР, 1948.—352 с.
73. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. Обоснование одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений // Журн. эксперим. и теорет. физики.—1934.—Т. 4, № 2.—С. 117–122.
74. Митропольский Ю. А. Медленные процессы в нелинейных колебательных системах со многими степенями свободы // Прикл. мат. и мех.—1950.—Т. 14, № 2.—С. 139–170.
75. Митропольский Ю. А. Исследование колебаний нелинейной системы с медленно меняющимися параметрами // Сб. тр. ин-та строит. мех. АН УССР.—1950.—№ 14.—С. 134–144.
76. Митропольский Ю. А. О колебаниях в гироскопических системах при прохождении через резонанс // Укр. мат. журн.—1953.—Т. 5, № 3.—С. 333–349.
77. Митропольский Ю. А. О нестационарных колебаниях в системах со многими степенями свободы // Укр. мат. журн.—1954.—Т. 6, № 2.—С. 176–189.
78. Митропольский Ю. А. О воздействии на нелинейный вибратор «синусоидальной» силы с модулированной частотой // Укр. мат. журн.—1954.—Т. 6.—С. 442–447.
79. Митропольский Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах.—Киев: Изд-во АН СССР, 1955.—282 с.
80. Митропольский Ю. О. До питання про порядок погрешності при асимптотичному інтегруванні рівнянь, близьких до точно інтегрованих // Вісник Київськ. ун-ту, 1. Сер. астроном., мат. та мех.—1958.—Вип. 2.—С. 3–6.
81. Митропольский Ю. О. До питання про нелінійні рівняння з періодичними коефіцієнтами // Вісник Київськ. ун-ту, 2. Сер. астроном., мат. та мех.—1959.—Вип. 2.—С. 3–12.
82. Митропольский Ю. А. О периодических решениях систем нелинейных дифференциальных уравнений, правые части которые не дифференцируемы // Укр. мат. журн.—1959.—Т. 11, № 4.—С. 366–379.
83. Митропольский Ю. А. О периодических решениях систем нелинейных дифференциальных уравнений, правые части которые не дифференцируемы // Докл. АН СССР.—1959.—Т. 128, № 6.—С. 1118–1121.
84. Митропольский Ю. О. Про нелінійні диференціальні рівняння з періодичними коефіцієнтами та повільно змінними параметрами // Вісник Київськ. ун-ту, 2. Серія мат. та мех.—1961.—Вип. 2.—С. 3–10.
85. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.—М.: Наука, 1964.—431 с.
86. Митропольский Ю. А. Лекции по методу усреднений в нелинейной механике.—Киев: Наукова думка, 1966.—467 с.
87. Митропольский Ю. О. Метод усреднения в нелінійній механіці (оглядова доповідь) // Друга наукова конференція молодих математиків України.—Киев: Наукова думка, 1966.—С. 5–34.
88. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике // Тр. V Междунар. конф. по нелин. колебаниям. Т. 1.—Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1970.—С. 21–39.

89. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике.—Киев: Наукова думка, 1971.—400 с.
90. Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г. Применение принципа усреднения к исследованию влияния случайных воздействий на колебательные системы // Математическая физика.—Киев: Наукова Думка, 1967.—Вып. 3.—С. 146–168.
91. Митропольский Ю. А., Корневский Д. Г. Исследование нелинейных колебаний в системах с распределенными параметрами и запаздыванием // Математическая физика.—Киев: Наукова думка, 1968.—Вып. 4.—С. 93–146.
92. Митропольский Ю. О., Лыкова О. Б. Про нелінійні диференціальні рівняння з періодичними коефіцієнтами та повільною змінними параметрами // Весник Київськ. ун-ту, 3. Серія мат. та мех.—1961.—Вип. 2.—С. 3–10.
93. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Об исследовании одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Междунар. конгр. математиков. Секция 6. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Тез. крат. науч. сообщений.—М., 1966.—С. 38–39.
94. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Лекции по методу интегральных многообразий.—Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1968.—416 с.
95. Митропольский Ю. А., Мосеев Б. И. Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных.—Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1968.—414 с.
96. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Стрижак Т. Г. О приведении к стандартному виду... // Тр. семинара по мат. физике и теории нелинейных колебаний.—К.: Наукова думка, 1968.—Т. 1, вып. 2.—С. 4–20.
97. Митропольский Ю. А., Фодчук В. И. Асимптотические методы нелинейной механики применительно к нелинейным дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом // Укр. мат. журн.—1966.—Т. 18, № 3.—С. 65–84.
98. Митропольский Ю. А., Хома Г. П. О принципе усреднения для гиперболических уравнений вдоль характеристик // Укр. мат. журн.—1970.—Т. 21, № 5.—С. 600–610.
99. Моргунов Б. И. Высшие приближения при расчете некоторых вращательных движений // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика и астрономия.—1963.—№ 6.—С. 35–42.
100. Моргунов Б. И. Стационарные резонансные режимы некоторых вращательных движений // Докл. АН СССР.—1964.—Т. 155, № 2.—С. 277–280.
101. Моргунов Б. И. Полный расчет второго приближения для вращательного движения // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика и астрономия.—1964.—№ 1.—С. 23–28.
102. Моргунов Б. И. Асимптотический анализ некоторых вращательных движений // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика и астрономия.—1965.—№ 4.—С. 56–65.
103. Моргунов Б. И. Расчет вращательных режимов некоторых негамильтоновых систем // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика и астрономия.—1965.—№ 4.—С. 83–86.
104. Найфэ А. Х. Методы возмущений.—М.: Мир, 1976.—456 с.
105. Папалекси Н. Д. Собрание трудов.—М.: Изд-во АН СССР, 1948.—436 с.
106. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений.—Киев: Изд-во АН УССР, 1954.—286 с.
107. Самойленко А. М. Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами в автоколебательных системах второго порядка с малыми параметрами // Укр. мат. журн.—1961.—Т. 13, № 3.—С. 103–109.

108. *Самойленко А. М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра // Укр. мат. журн.—1962.—Т. 14, № 3.—С. 289–298.
109. *Самойленко А. М.* Обоснование принципа усреднения для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Приближенные методы решения дифференциальных уравнений.—Киев: Изд-во АН УССР, 1963.—С. 90–95.
110. *Самойленко А. М.* К вопросу о периодических решениях дифференциальных с нелинейными частями // Укр. мат. журн.—1963.—Т. 15.—С. 328–332.
111. *Самойленко А. М.* Методы усреднения в системах с толчками // Математическая физика.—Киев: Наукова думка, 1971.—Вып.9.—С. 101–117.
112. *Самойленко А. М.* Боголюбов Н. Н. и нелинейная механика // Успехи мат. наук.—1994.—Т. 49, № 5.—С. 103–146.
113. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода усреднения для абстрактных параболических уравнений // Мат. сб.—1970.—Т. 81 (123), № 1.—С. 53–61.
114. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода усреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений // Мат. сб.—1972.—Т. 87 (129), № 2.—С. 236–253.
115. *Симоненко И. Б.* Старшие приближения метода усреднения для абстрактных параболических уравнений // Мат. сб.—1973.—Т. 92.—С. 541–549.
116. *Симоненко И. Б.* Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости.—Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1989.—112 с.
117. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.—255 с.
118. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховых пространствах // Тр. Моск. мат. о-ва.—1961.—Т. 10.—С. 297–350.
119. *Соболевский П. Е.* Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений // Докл. АН СССР.—1964.—Т. 157, № 1.—С. 62–65.
120. *Соломяк М. З.* Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха // Докл. АН СССР.—1958.—Т. 122, № 5.—С. 767–769.
121. *Соломяк М. З.* Оценка нормы эллиптического оператора в пространствах L_p // Успехи мат. наук.—1960.—Т. 15, № 6 (96).—С. 141–148.
122. *Солонников В. А.* О дифференциальных свойствах решений первой краевой задачи для нестационарной системы Навье — Стокса // Тр. МИАН СССР.—1964.—Т. 73.—С. 221–291.
123. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. МИАН СССР.—1965.—Т. 83.—С. 3–162.
124. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.—Ташкент: ФАН, 1971.—279 с.
125. Функциональный анализ. СМБ / Под ред. *С. Г. Крейна*. —М.: Наука, 1972.—544 с.
126. *Халаев М. М.* О методе усреднения и некоторые задачи, связанные с усреднением // Диф. уравнения.—1966.—Т. 2, № 5.—С. 600–608.
127. *Халаев М. М.* Об одной теореме типа Ляпунова // Докл. АН СССР.—1967.—Т. 176, № 6.—С. 1262–1265

128. Хапаев М. М. Об исследовании на устойчивость в теории нелинейных колебаний // Мат. заметки.—1968.—Т. 3, № 3.—С. 307–318.
129. Хапаев М. М. Об устойчивости положения равновесия систем дифференциальных уравнений // Диф. уравнения.—1969.—Т. 5, № 5.—С. 848–855.
130. Хасьминский Р. З. О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теория вероятности и ее применение.—1963.—Т. 8, № 1.—С. 3–25.
131. Хасьминский Р. З. О работе автоколебательной системы при воздействии на нее малого шума // Прикл. мат. и мех.—1963.—Т. 27, № 4.—С. 683–688.
132. Хасьминский Р. З. О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром // Теория вероятности и ее применение.—1966.—Т. 11, № 2.—С. 240–259.
133. Хасьминский Р. З. Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Теория вероятности и ее применение.—1966.—Т. 11, № 3.—С. 444–462.
134. Хасьминский Р. З. О принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений Ито // Kybernetika.—1968.—Vol. 4, № 3.—Р. 260–279.
135. Хатламаджиян Г. Л. Развитие теории метода усреднения для дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми: дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Ростов-н/Д., 2008.—167 с.
136. Хатламаджиян Г. Л. Обоснование метода усреднения для одного класса параболических уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Экологический вестник научных центров ЧЭС.—2013.—№ 1.—С. 68–74.
137. Хатламаджиян Г. Л. Асимптотическое интегрирование некоторых эволюционных задач с большими высокочастотными слагаемыми // Диф. уравнения.—2013.—Т. 49, № 12.—С. 1641–1653.
138. Хома Г. П. Теорема об усреднении для гиперболических систем первого порядка // Укр. мат. журн.—1970.—Т. 22, № 5.—С. 699–704.
139. Хома Г. П. Про неперервну залежність розв'язку гіперболічно системи від параметра // Доповіді АН УРСР.—1970.—Сер. А 7.—С. 615–617.
140. Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // Докл. АН СССР.—1956.—Т. 110, № 3.—С. 345–347.
141. Эйдельман С. Д. О применении принципа усреднения к квазилинейным параболическим системам второго порядка // Сиб. мат. журн.—1962.—Т. 3, № 2.—С. 302–307.
142. Эйлер Л. Новая теория движения Луны / Пер. с лат.—Л.: Изд-во АН СССР, 1934.—224 с.
143. Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической устойчивости.—Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1984.—190 с.
144. Юдович В. И. Вибродинамика систем со связями // Докл. РАН.—1997.—Т. 354, № 5.—С. 622–624.
145. Юдович В. И. Динамика материальной частицы на вибрирующей гладкой поверхности // Прикл. мат. и мех.—1998.—Т. 62, № 6.—С. 968–976.
146. Юдович В. И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики.—2006.—Т. 4, № 3.—С. 26–158.
147. Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Comm. Pure Appl. Math.—1962.—Vol. 15, № 2.—Р. 119–158.

148. *Clairaut A.* Mémoire sur l'orbite apparent du soleil autour de la Terre, an ayant égard aux perturbations produites par les actions de la Lune et des Planetes principales // Mém. de l'Acad des Sci. Paris.—1754.—P. 521–564.
149. *Fatou P.* Sur le mouvement d'un système soumis á des forces á courte période // Bull. Soc. Math.—1928.—Vol. 56.—P. 98–139.
150. *Gauss C. F.* Determinativ attractionis quam in punctum quodvis data exercerat planeta, si ejus massa per totam orbitam ratione temporis quo singulae partes describuntur esset disperlita // Werke.—Göttingen, 1867.—Vol. 3.—P. 331.–355.
151. *Hille H., Phillips R. S.* Functional analysis and semi-groups.—Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1957.—Colloquium Publications. Vol. 31.—808 p.
152. *Ivleva N., Levenshtam V.* Asymptotic analysis of the generalized convection problem // Eurasian Math. J.—(to appear).
153. *de La Caille N. L.* Tabulae Solares.—Parisiis: E Typographia H. L. Guerin & L. F. Delatour, 1758.—27 p.
154. *Lagrange J.-L.* Mécanique Analytique (2 vol.) / Ed. Albert Blanchard.—Paris, 1788.—522 p. Рус. пер.: *Лагранж Ж.* Аналитическая механика (в 2-х томах).—М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.
155. *de Laplace S. P.* Traité de Méchanique Céleste.—Paris: Bachelier, 1799–1825.—542 p. English transl.: *Laplace P. S.* A treatise of celestial mechanics.—Dublin: Printed for R. Milliken, 1822.—721 p.
156. *Levenshtam V. B.* Asymptotic integration on initial value problem for Navier–Stokes system with a rapidly oscillating mass force // Russian J. Math. Phys.—2005.—Vol. 12, № 1.—P. 40–48.
157. *Sanders J. A., Verhulst F.* Averaging methods in nonlinear dynamical systems // Appl. Math. Sci.—Springer-Verlag, 1985.—Vol. 59.—247 p.
158. *van der Pol B.* A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations // The Radio Review.—London, 1920.—P. 701–710.
159. *van der Pol B.* On relaxation-oscillations // Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.—1926.—Vol. 2.—P. 978–992.
160. *van der Pol B.* Nonlinear theory of electric oscillations // Proc. IRE.—1934.—Vol. 22.—P. 1051–1086.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Басистая Д. А., 43
Боголюбов Н. Н., 5, 6, 17, 18, 20–23, 25–28, 42, 191
Ван-дер-Поль Б., 12, 18–20
Волосов В. М., 5, 26, 27
Гаусс К., 11, 12, 15–18, 20
Гихман И. И., 28
Даламбер Ж., 15
де Лакайль Н., 15
Жиков В. В., 34
Журавлёв В. Ф., 6
Зеньковская С. М., 6, 42
Зубарев Д. Н., 26
Ивлева Н. С., 8
Ишмеев М. Р., 6
Капица П. Л., 6, 42
Кеплер И., 13, 15
Клеро А., 5, 11–15
Климов Д. М., 6
Коледов Л. В., 164
Крамер Г., 20
Красносельский М. А., 28
Крылов Н. М., 5, 20–22, 26, 191
Лагранж Ж., 5, 11, 12, 18, 19
Лаплас С., 5, 11, 12
Левенштам В. Б., 6, 8, 31, 34, 42, 43, 48
Ляпунов А. М., 21
Мандельштам Л. И., 12
Митропольский Ю. А., 5, 26
Моргунов Б. И., 5
Ньютон И., 13
Папалекси Н. Д., 12
Пуанкаре А., 21
Рапопорт И. Н., 26
Самойленко А. М., 6
Сандерс Я., 5
Симоненко И. Б., 6, 7, 28, 31, 42, 49, 54, 55, 59, 60, 203
Соболев С. Л., 57–59
Соболевский П. Е., 71
Солонников В. А., 71, 80
Фату П., 12
Ферхюльст Ф., 5
Фурье Ж., 15
Хапаев М. М., 28
Хасьминский Р. З., 28
Хатламаджиян Г. Л., 8
Челомей В. Н., 6, 42
Эйдельман С. Д., 28
Эйлер Л., 5, 11, 12, 15
Юдович В. И., 6, 42, 57, 123

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аналитическая полугруппа, 51
Аппроксимационная шкала, 55
Вложимое пространство, 36
Дробная степень сильно позитивного оператора, 52
Квазилинейные колебательные системы, 21
Корректный оператор, 35
Коэрцитивный линейный оператор, 36
Моментная шкала, 55
Обобщенная задача конвекции, 9
Оператор дробной степени,
— справа, 125
— (по Юдовичу), 124
Оператор Стокса, 54
Оператор, порождающий полугруппу, 52
Проектор Вейля, 54
Равномерная экспоненциальная дихотомия, 37
Равномерно регулярное семейство операторов, 37
Регулярный оператор, 35
Сильно непрерывная полугруппа операторов, 51
Сильно позитивный оператор, 52
Сильно эллиптический линейный оператор, 36
Система,
— кеплеровых оскулирующих элементов, 15
— с быстро вращающейся фазой, 26
— с быстрыми и медленными переменными, 27
Слабо регулярный оператор, 36
Схема усреднения,
— Ван-дер-Поля, 18
— Гаусса, 15
Уравнение в стандартной форме, 22
Усиленно корректный оператор, 35
Условие разрешимости вправо, 34
Экспоненциальная дихотомия, 37

Научное издание

Серия

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

Выпуск 8

**Левенштам Валерий Борисович,
Хатламаджиян Гаспар Лусегенович**

**УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ — СТОКСА
С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ**

Ответственный редактор

В. Г. Ильичев

Редакторы серии:

Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев

*Утверждено к печати Ученым советом
Южного математического института
Владикавказского научного центра
Российской академии наук*

Компьютерная верстка: *М. У. Вазагаева*

Зав. редакцией: *В. В. Кибизова*

Подписано в печать 20.10.2014.
Формат бумаги $60 \times 84^{1/16}$. Усл. п. л. 15,11.
Тираж 200 экз. Заказ № 125.

Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

ISBN 978-5-904695-27-9



9 785904 695279