

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО НАУЧНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

И Т О Г И Н А У К И • Ю Г Р О С С И И

С Е Р И Я

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

В ы п у с к 9

Ю. Г. Никоноров

АСИМПТОТИКА ТОЧЕК
СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ

Владикавказ
2015

ББК 22.16+22.151

УДК 517+514.772

Н 64

Ответственный редактор

д. ф.-м. н., профессор А. В. АБАНИН

Рецензенты:

д. ф.-м. н., профессор В. И. БОГАЧЕВ,

д. ф.-м. н., профессор В. В. СЛАВСКИЙ

Редакторы серии:

д. ф.-м. н., профессор Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК,

д. ф.-м. н., профессор А. Г. КУСРАЕВ

Никоноров Ю. Г.

Асимптотика точек среднего значения / отв. ред. А. В. Абанин.—
Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН, 2015.—200 с.—(Итоги науки. Юг Рос-
сии. Математическая монография. Вып. 9).

В монографии излагаются как хорошо известные, так и недавно полученные результаты об асимптотическом поведении точек промежуточного значения в ряде классических аналитических теорем о среднем значении и их обобщениях. Большое внимание уделено геометрическим интерпретациям и методам исследования.

Для преподавателей вузов, аспирантов и студентов старших курсов университетов, а также для всех исследователей, использующих методы математического анализа и геометрии.

Nikonorov Yu. G.

Asymptotics of the Mean Value Points / ed. A. V. Abanin.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2015.—200 p.

The book is devoted both to well-known and recently obtained results on the asymptotic behavior of the intermediate value points in various classical analytic mean value theorems and their generalizations. Much attention is paid to geometric interpretations and research methods.

This volume is intended for graduate students, post graduates, and researchers whose work involves mathematical analysis and geometry.

ISBN 978-5-904695-33-0

© Южный математический институт
ВНИЦ РАН, 2015

© Ю. Г. Никоноров, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Аналитические теоремы о среднем значении ...	9
1.1. Некоторые вспомогательные результаты	9
1.2. Классические теоремы о среднем значении и их обобщения	12
1.3. Вокруг формулы Тейлора	18
1.4. Обзор других теорем о среднем значении	27
Глава 2. Асимптотика точек среднего значения в классических теоремах	31
2.1. Гипотеза В. К. Ионина	31
2.2. Вторая гипотеза В. К. Ионина и точки Лагранжа в формуле Тейлора	43
2.3. Некоторые функциональные уравнения	49
Глава 3. Промежуточные значения функции для абстрактных операторов	51
3.1. Теорема о среднем для абстрактных операторов	51
3.2. Задача об асимптотике точек среднего значения для операторов	52
3.3. Асимптотические оценки в первой интегральной теореме о среднем значении	57
Глава 4. Интегральные операторы с усредняющим ядром и их обобщения	69
4.1. Определение вспомогательной шкалы	69
4.2. Операторы с усредняющим ядром	72
4.2.1. Операторы с регулярным ядром	78
4.2.2. Операторы с простым усредняющим ядром	80
4.3. Еще раз о точках Лагранжа в формуле Тейлора	82

Глава 5. Несколько добавлений	87
5.1. Решения интегральных уравнений с отклоняющимся аргументом	87
5.2. Многомерная теорема о среднем	94
5.3. Операторы со знакопеременным ядром	99
Глава 6. Асимптотика точек среднего значения для разделенных разностей	105
6.1. Оценки в интегральных неравенствах	105
6.2. Разделенные разности	108
6.2.1. Основные свойства разделенных разностей	108
6.2.2. B -сплайны и ядра Пеано	112
6.3. Асимптотика точек среднего значения в теореме Шварца для разделенных разностей	116
6.3.1. Постановка задачи об асимптотике точек среднего значения в теореме Шварца	116
6.3.2. Асимптотика для функций специального вида	118
6.3.3. Асимптотика для функций общего вида	121
6.4. Некоторые следствия	127
Глава 7. Асимптотика опорных точек и точек касания плоских кривых	137
7.1. Постановка задачи на плоскости и основные результаты	137
7.2. Некоторые примеры	142
7.3. Доказательство теоремы 7.1.2	144
7.4. Доказательство теоремы 7.1.1	149
7.5. Связь доказанных теорем с другими результатами	157
7.6. Дальнейшие направления исследований	163
7.6.1. Нерешенные задачи для кривых на плоскости	164
7.6.2. Теорема Пеано и точки компланарности	165
7.6.3. Серия примеров для $n = 2$ и $k = 1$	168
7.6.4. Исследование случая $k = n$	176
Заключение	186
Литература	187
Предметный указатель	195
Список иллюстраций	197

ПРЕДИСЛОВИЕ

Идея этой книги созревала давно, но ее реализация потребовала в совокупности около пяти лет. В свое время (в 1988 г.) мне (в то время студенту первого курса мехмата НГУ) была предложена для исследования гипотеза об асимптотике поведения точек среднего значения непрерывной функции в интегральной теореме о среднем значении. Это предложение исходило от ее автора (а по счастливому совпадению, моего преподавателя, проводившего практические занятия по математическому анализу) — Владимира Кузьмича Ионина (1935–2014). Приведем формулировку этой гипотезы.

Рассмотрим непрерывную функцию $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Для каждого числа $x \in (0, 1]$ существует $\tau \in [0, x]$ такое, что $\int_0^x f(t) dt = xf(\tau)$. Такое τ единственно, если f возрастает или убывает. В общем случае положим

$$\xi(x) := \max \left\{ \tau \in [0, x] \left| \int_0^x f(t) dt = xf(\tau) \right. \right\}.$$

Тогда (в этом и состоит суть гипотезы) выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq \frac{1}{e} = \exp(-1).$$

По рассказам Владимира Кузьмича, он придумал эту гипотезу еще в середине прошлого века в свою бытность студентом. К ее формулировке естественно приводят простые вычисления с различными (в частности, степенными) функциями. Благодаря этому обстоятельству гипотеза могла бы появиться и на несколько столетий раньше, но (по крайней мере мне) такие данные неизвестны.

Лично для меня эта гипотеза оказалась чрезвычайно важной, поскольку ее решение легло в основу моей магистерской работы в 1993 г., а дальнейшие исследования (проведенные под руководством профессора В. К. Ионина) стали основой моей кандидатской диссертации.

Важный вклад в развитие оформившейся тематики внес Владимир Вениаминович Иванов, доказавший в полном объеме гипотезу В. К. Ионина об асимптотике точек промежуточного значения в формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (она являлась обобщением приведенной выше гипотезы об интегральной теореме о среднем значении). Наша совместная с В. В. Ивановым работа 1995 г. (наряду с новыми результатами) содержала новые идеи и подходы к изучению задач такого вида. Применение новых методов привело к далеко идущим обобщениям. Более подробно обо всем этом можно узнать из материалов второй, третьей и четвертой глав книги.

Отметим, что содержание главы 2 вполне доступно студенту второго (или даже первого) курса математической специальности. Материал в ней собран (в том числе и) для удобства преподавателей математического анализа, которые захотят познакомить своих студентов с соответствующими результатами на каких-либо занятиях.

Вспомогательную, но важную роль играет первая глава книги, в которой приводится ряд необходимых в дальнейшем изложении результатов, а также обзор классических и относительно новых аналитических теорем о промежуточном значении. В ряде случаев для удобства читателей приводятся и доказательства соответствующих результатов. Если какое-то утверждение не снабжено доказательством или специальной ссылкой, то найти его доказательство можно в любом стандартном курсе анализа, например, в [1, 12, 13, 21, 26, 39, 40, 43, 50]. Необходимая информация содержится также в книгах [62, 63, 75, 138, 155]. Кроме того, в этой главе многие классические результаты снабжены комментариями исторического плана, что позволяет более рельефно представить эволюцию теорем о среднем значении. Необходимые сведения по теории функций можно найти, например, в [3, 16, 24, 42].

Следует отметить, что в этой книге совершенно не обсуждается важный круг вопросов, связанных со средними значениями комплексных аналитических или гармонических функций (см., например, [99] и [100]). Также мы не затрагиваем в книге обсуждения большого класса специальных теорем о среднем значении в контексте исследования решений дифференциальных уравнений (см., например, работу [168] и библиографию в ней).

Интересные дополнения к материалу предыдущих глав собраны в главе 5. К ним можно относиться как к основе новых исследований, которые позволят глубже уяснить суть нетривиальных асимптотиче-

ских оценок для ряда теорем о промежуточном значении, в частности, для некоторых интегральных операторов со знакопеременным ядром или для многомерной версии интегральной теоремы о среднем.

Материалы глав 6 и 7 появились благодаря первым попыткам написать данную книгу, которые я начал предпринимать в 2010 г. Желание разобраться в некоторых старых вопросах привело к новым результатам, а также и к новым вопросам. Шестая глава посвящена исследованию асимптотики точек промежуточного значения в теореме Шварца для разделенных разностей, в то время как в седьмой главе с геометрической точки зрения исследуется асимптотика точек промежуточного значения в теореме Пеано для плоских и пространственных кривых.

Предполагается знакомство читателя с университетским курсом математического анализа, поэтому использующиеся в книге обозначения не нуждаются в дополнительных комментариях за исключением тех, которые появляются в процессе доказательств каких-либо утверждений. В последнем случае пояснения приводятся в соответствующих местах текста. Здесь мы поясним лишь некоторые обозначения, которые встречаются на протяжении всей книги.

Пусть $\mathbb{X}$ — некоторое топологическое пространство. Для произвольного множества $A \subset \mathbb{X}$ через $\overline{A}$, $\text{int}(A)$ и $\partial(A)$ соответственно обозначаются замыкание, внутренность и граница множества A в $\mathbb{X}$. Отметим, что $\overline{A} = A \cup \partial(A) = \text{int}(A) \cup \partial(A)$ и $\partial(A) = \overline{A} \setminus \text{int}(A)$. Пусть $x_0 \in \overline{A}$, тогда для функций $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ используется (изображающая асимптотическое равенство) запись

$$f(x) = o(g(x)) \quad (f(x) = O(g(x))) \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0,$$

если для некоторой окрестности U точки x_0 в $\mathbb{X}$ существует функция $\alpha : (A \cap U) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f(x) = g(x)\alpha(x)$ для всех $x \in (A \cap U) \setminus \{x_0\}$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ (соответственно, функция α ограничена на множестве $(A \cap U) \setminus \{x_0\}$). Если при тех же условиях выполнено равенство $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 1$, то используется асимптотическое равенство

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0.$$

Для функции, заданной на некотором отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, в тексте книги часто говорится (иногда без дополнительных комментариев)

о пределе или производной в точке α (соответственно, β), при этом подразумевается предел справа и правая производная (соответственно, предел слева и левая производная). Это естественное соглашение позволяют в ряде случаев существенно упростить изложение.

Формулы, теоремы, леммы, предложения, следствия, замечания, определения, примеры, гипотезы и задачи нумеруются в книге тремя числами, разделенными точками. При этом первое число представляет собой номер части книги, второе — номер параграфа в этой части, а третье — номер объекта заданного типа.

Автор признателен всем коллегам, общение с которыми позволило глубже понять характеристики асимптотического поведения точек промежуточного значения в различных задачах. Привести здесь полный список их имен не представляется возможным. Я считаю своим долгом отметить лишь одного из них — Владимира Кузьмича Ионина. Его неподдельный интерес и ценные советы помогли привести к окончательному виду все мои опубликованные на настоящий момент работы по тематике этой книги.

Хочется надеяться на то, что эта книга будет интересна и полезна специалистам в области анализа и геометрии, научным сотрудникам и преподавателям вузов, работающих в смежных разделах математики, а также студентам и аспирантам математических специальностей. Автор будем признателен всем читателям, которые сообщат ему о каких-либо неточностях в изложении материала или о пробелах в цитировании.

Ю. Г. Никоноров
29 июля 2014 г.

ГЛАВА 1

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ

Эта глава играет вспомогательную роль, в частности, в ней приводится ряд необходимых в дальнейшем изложении результатов, а также обзор классических и относительно новых аналитических теорем о промежуточном значении. В ряде случаев для удобства читателей приводятся и доказательства соответствующих результатов.

1.1. Некоторые вспомогательные результаты

Здесь мы приводим некоторые более или менее известные результаты, которые будут полезны нам в дальнейшем изложении. В основном они хорошо известны и приведены лишь для удобства ссылок.

Одной из важнейших теорем анализа является теорема Больцано — Коши о промежуточном значении непрерывной на отрезке вещественной прямой функции. Ее доказательство (как и определение непрерывной функции) впервые появилось в работе Бернарда Больцано (Bernard Bolzano) [70] (имеется перевод на английский язык [139]). Также ее доказательство приведено в фундаментальном труде Огюстена Луи Коши (Augustin-Louis Cauchy) [77] (существует современный перевод на английский язык [74]).

Теорема 1.1.1 (теорема Больцано — Коши [50, гл. II, § 5]). *Если функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и число C находится между числами $A := f(a)$ и $B := f(b)$, то существует число $c \in [a, b]$ такое, что $f(c) = C$.*

Эта теорема отражает одно из важнейших свойств непрерывных функций и может быть переформулирована следующим образом: непрерывная функция на числовом промежутке принимает все промежуточные значения, т. е. отображает промежуток на другой промежуток. Следует отметить, что этим свойством обладают и другие важные классы функций.

Следующий результат получен Жаном Гастоном Дарбу (Jean Gaston Darboux) в работе [80] (см. с. 109–110 указанной работы).

Теорема 1.1.2 (теорема Дарбу [50, гл. III, § 3]). *Если функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема (в точках a и b роль производных выполняют соответствующие односторонние производные), тогда функция $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ принимает, в качестве значений, все числа из промежутка между $f'(a)$ и $f'(b)$. В частности, производная дифференцируемой на некотором промежутке функции отображает его также на некоторый промежуток.*

Вариант обобщения теоремы Дарбу на случай функции нескольких переменных и обсуждение связанных с этим вопросов можно найти в работе [17].

Теорема 1.1.3 (интегральное неравенство Гёльдера [52, § 6.9]). *Пусть $f \in L_p[a, b]$, $g \in L_q[a, b]$, где $1/p + 1/q = 1$ и $p > 1$. Тогда выполнено неравенство*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

обращающееся в равенство лишь тогда, когда либо одна из функций равна нулю почти всюду на $[a, b]$, либо $|f(x)|^p = \lambda |g(x)|^q$ почти всюду на $[a, b]$ для некоторого $\lambda > 0$.

Теорема 1.1.4 [24, гл. VIII, § 2]. *Для неубывающей функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ почти всюду на отрезке $[a, b]$ существует производная $f'(x)$, при этом f' интегрируема по Лебегу на $[a, b]$ и выполнено неравенство*

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a).$$

В некоторых рассуждениях мы будем использовать понятие *абсолютно непрерывной функции* (см. определение и основные свойства абсолютно непрерывных функций, например, в главе IX книги [24]). Для нас особое значение имеет тот факт, что абсолютно непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ почти всюду дифференцируема и является неопределенным интегралом своей производной, т. е.

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt \quad \text{для всех } x \in [a, b]. \quad (1.1.1)$$

Отметим, что это свойство полностью характеризует абсолютно непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции.

Теорема 1.1.5 [24, гл. IX, § 8]. Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет производную в каждой точке и при этом f' интегрируема по Лебегу на $[a, b]$. Тогда функция f абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$. В частности, каждая монотонная всюду дифференцируемая функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна.

Рассмотрим некоторое множество $E \subset \mathbb{R}$ и некоторую систему M невырождающихся в точки отрезков числовой оси. Если для каждой точки $x \in E$ и каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такой отрезок $[a, b] \in M$, что $x \in [a, b]$ и $(b - a) < \varepsilon$, то говорят, что множество E покрыто системой отрезков M в смысле Витали. Отметим, что это название дано в честь исследовавшего такие системы итальянского математика Джузеппе Витали (Giuseppe Vitali). Имеет место следующий результат (его доказательство можно найти в [24, гл. III, § 8] или [48, § 2.8]).

Теорема 1.1.6 (теорема Витали [24]). Если ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}$ покрыто в смысле Витали системой отрезков M , то из M можно выделить такое конечное или счетное число отрезков $[a_k, b_k]$, что

$$[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \emptyset \quad \text{при } i \neq j,$$

$$\mu^* \left(E \setminus \bigcup_k [a_k, b_k] \right) = 0,$$

где $\mu^*(A)$ означает внешнюю меру (в смысле Лебега) множества A .

1.2. Классические теоремы о среднем значении и их обобщения

В формулировках теорем этого параграфа подразумевается невырожденность отрезка $[a, b]$ (т. е. $b > a$).

Начнем с теоремы, доказанной Мишелем Роллем в 1691 г. в своей книге «Доказательство одного метода решения уравнений всех степеней ...» (*Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés*, Paris, 1691), см. подробности, например, в [7] или в [55].

Теорема 1.2.1 (теорема Ролля, 1691). *Пусть непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет производную на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.*

В авторском варианте теорема Ролля (равно как и теорема Ферма об обращении в ноль производной в точке экстремума [55, с. 196–197]) относилась лишь к полиномам (между двумя корнями полинома находится корень его производной) и была предназначена для оценки вещественных корней многочленов [55, с. 46–47]. Использование ее в более широком контексте началось лишь много лет спустя. Интересные подробности об истории этой теоремы можно найти в части 8.3 книги [134].

Обобщения теоремы Ролля, приводящие к различным вариантам других классических аналитических теорем о среднем значении можно найти в работах [97] и [115].

Известны также различные варианты обобщения теоремы Ролля на многомерный случай, см., например, работы [93, 105, 110, 145, 157] и библиографию в них.

Наиболее важным и известным обобщением теоремы Ролля является следующая теорема, доказанная в знаменитой работе Жозефа Луи Лагранжа [112].

Теорема 1.2.2 (теорема Лагранжа, 1797). *Пусть непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет производную на интервале (a, b) . Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Понятно, что при $f(a) = f(b)$ получается утверждение теоремы Ролля. Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа такова: касательная к графику функции $y = f(x)$ (на декартовой плоскости Oxy) в точке ξ параллельна секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (см. рис. 1.1).

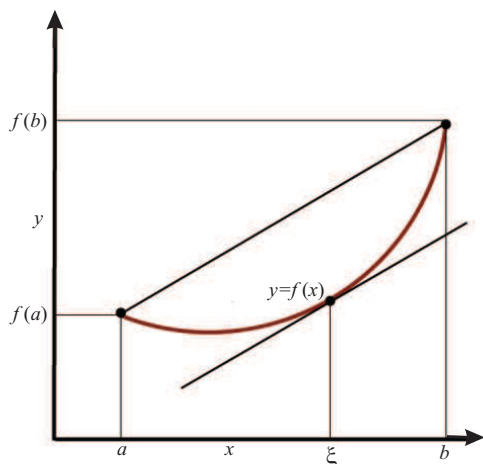


Рис. 1.1. Геометрический смысл теоремы Лагранжа.

Следует отметить, что привычное нам доказательство теоремы Лагранжа в максимальной общности (в частности, не использующее непрерывности производной) появилось лишь в 1868 г. в первом издании учебника по анализу Жозефа Альфреда Серре (см. с. 17–19 в более доступном пятом издании [151]) и принадлежит оно Пьеру Оссиану Бонне (Pierre Ossian Bonnet).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.1. Иногда теорему Лагранжа называют теоремой о конечном приращении или просто теоремой о среднем значении (“mean value theorem”, “égalité des accroissements finis” и “Mittelwertsatz” — соответственно в источниках на английском, французском и немецком языках).

Отметим, что теорему Лагранжа нельзя дословно перенести на комплекснозначные функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ (эквивалентно, на функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$).

ПРИМЕР 1.2.1 [8, гл. 3, пример 9]. Зададим функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ формулой $f(x) = \cos(x) + i \sin(x)$. Она бесконечно дифференцируема (и даже аналитична), при этом $f'(x) = -\sin(x) + i \cos(x)$. Допустим, что существует отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и точка $\xi \in (a, b)$ такие, что

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \cos(b) + i \sin(b) - \cos(a) - i \sin(a) = \\ &= (-\sin(\xi) + i \cos(\xi))(b - a) = f'(\xi)(b - a). \end{aligned}$$

Приравнивая квадраты модулей соответствующих комплексных чисел, получаем

$$\begin{aligned} (\cos(b) - \cos(a))^2 + (\sin(a) - \sin(b))^2 &= \\ = 4 \sin^2 \left(\frac{b-a}{2} \right) &= (b-a)^2. \end{aligned}$$

Но последнее равенство невозможно, поскольку $\sin(h) < h$ для любого положительного числа h (это очевидно для $h \geq \pi/2$, если же $h \in (0, \pi/2)$, то по теореме Лагранжа для некоторого $\xi^* \in (0, h)$ имеем $h - \sin(h) = (h - \sin(h)) - (0 - \sin(0)) = (1 - \cos(\xi^*))h > 0$).

Некоторую версию теоремы Лагранжа для голоморфных функций можно найти в работе [89]. Известно и много других вариантов обобщения теоремы Лагранжа на случай функций со значениями в многомерном пространстве, см., например, [18, 66, 92, 116]. Здесь мы приведем лишь одну теорему, полученную при дополнительных ограничениях в [116], а в максимальной общности — в [18].

Теорема 1.2.3 [18, 116]. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемая на интервале (a, b) , $m \geq 1$. Тогда отношение $(f(b) - f(a))/(b - a)$ есть выпуклая комбинация m значений производной f' , т. е. существуют числа $\xi_i \in (a, b)$ и p_i , $i = 1, \dots, m$, такие, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \sum_{i=1}^m p_i f'(\xi_i), \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

Естественным обобщением классической теоремы Лагранжа является теорема, доказанная Огюстеном Луи Коши в работе [78] (существует перевод этой книги на русский язык [19]).

Теорема 1.2.4 (теорема Коши, 1823). Пусть непрерывные функции $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеют производные на интервале (a, b) , $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$. Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Отметим, что условие $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$ в формулировке теореме Коши можно опустить, если переформулировать ее утверждение следующим образом: существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)). \quad (1.2.1)$$

Интегральный аналог теоремы 1.2.4 также получен в книге [78]. Здесь мы приведем нужный нам в дальнейшем вариант, поэтому снабдим его и коротким доказательством.

Теорема 1.2.5 (первая интегральная теорема о среднем). Пусть функция φ неотрицательна и суммируема, а функция h непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что выполнено равенство

$$\int_a^b \varphi(t)h(t) dt = h(\xi) \int_a^b \varphi(t) dt.$$

△ Пусть M и m — наибольшее и наименьшее значение функции h на отрезке $[a, b]$ соответственно. Если $\varphi(t) = 0$ почти всюду на $[a, b]$, то утверждение теоремы очевидно, поскольку в качестве ξ можно взять любое из чисел на интервале (a, b) . Предположим теперь, что множество $P = \{t \in (a, b) \mid \varphi(t) > 0\}$ имеет положительную меру. Для всех $t \in [a, b]$ в силу $\varphi(t) \geq 0$ имеем $m\varphi(t) \leq \varphi(t)h(t) \leq M\varphi(t)$ (в частности, из полученного неравенства следует суммируемость функции $\varphi \cdot h$). Интегрируя это неравенство, получаем

$$m \int_a^b \varphi(t) dt \leq \int_a^b \varphi(t)h(t) dt \leq M \int_a^b \varphi(t) dt,$$

поэтому

$$\int_a^b \varphi(t)h(t) dt = \lambda \int_a^b \varphi(t) dt$$

для некоторого $\lambda \in [m, M]$. Предположим теперь, что $h(t) \neq \lambda$ для всех $t \in (a, b)$. Тогда по теореме о промежуточном значении для непрерывной функции либо $h(t) < \lambda$, либо $h(t) > \lambda$ для всех $t \in (a, b)$. Умножая на $\varphi(t) \geq 0$ и интегрируя по (a, b) , мы получаем

$$\int_a^b \varphi(t)h(t) dt < (>) \lambda \int_a^b \varphi(t) dt,$$

поскольку $\varphi(t) > 0$ на множестве P ненулевой меры. Полученное противоречие и доказывает теорему. $\triangleright$

Продemonстрируем, что из теоремы 1.2.4 следует теорема 1.2.5 в предположении непрерывности функций φ и h и положительности φ . В условиях и обозначениях теоремы 1.2.5 положим

$$f(x) := \int_a^x \varphi(t)h(t) dt \quad \text{и} \quad g(x) := \int_a^x \varphi(t) dt.$$

Ясно, что $f'(x) = \varphi(x)h(x)$ и $g'(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда по теореме 1.2.4 существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$\begin{aligned} \varphi(\xi)h(\xi) \int_a^b \varphi(t) dt &= f'(\xi)(g(b) - g(a)) = \\ &= g'(\xi)(f(b) - f(a)) = \varphi(\xi) \int_a^b \varphi(t)h(t) dt, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Теперь покажем, что и из теоремы 1.2.5 следует теорема 1.2.4 в предположении непрерывности производных f' и g' . По условию непрерывные функции $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеют производные на интервале (a, b) , $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$. Отсюда следует, что функции f и g являются абсолютно непрерывными на отрезке $[a, b]$, т. е. восстанавливаются по своим производным (см. теорему 1.1.5):

$$f(x) = \int_a^x f'(t) dt \quad \text{и} \quad g(x) = \int_a^x g'(t) dt.$$

По теореме Дарбу (теорема 1.1.2) из условия $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$ следует, что g' сохраняет знак на рассматриваемом интервале. Меняя при необходимости g на $-g$, можно считать, что g' положительна. Из теоремы 1.2.5 (где $\varphi := g'$, $h := f'/g'$) следует существование такой точки $\xi \in (a, b)$, что

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \int_a^b f'(t) dt = \int_a^b \varphi(t)h(t) dt = \\ &= h(\xi) \int_a^b \varphi(t) dt = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} (g(b) - g(a)). \end{aligned}$$

Эти выкладки показывают, что утверждения теорем 1.2.5 и 1.2.4 весьма близки друг другу по смыслу.

При $\varphi \equiv 1$ теорема 1.2.5 становится аналогом теоремы Лагранжа (теоремы 1.2.2) и следует из последней, если положить $f(x) := \int_a^x h(t) dt$.

Приведем теперь вторую интегральную теорему о среднем значении в максимально общей формулировке.

Теорема 1.2.6 (вторая интегральная теорема о среднем [102]).

Пусть функция g монотонна, а функция f суммируема на интервале (a, b) , числа A и B выбраны так, что $A \leq g(a+0)$, $B \geq g(b-0)$ в случае неубывающей функции g и $A \geq g(a+0)$, $B \leq g(b-0)$ в случае невозрастающей функции g , где $g(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x)$, $g(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-} g(x)$. Тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что выполнено равенство

$$\int_a^b g(t)f(t) dt = A \int_a^\xi f(t) dt + B \int_\xi^b f(t) dt.$$

Если g определена и монотонна на отрезке $[a, b]$, то можно взять $A = g(a)$ и $B = g(b)$.

Доказательство этого результата можно также найти в [103, § 423] или в статье [23] (в более простых вариантах эта теорема доказана во многих источниках, см., например, [44] или [46]).

Приведенная формулировка второй теоремы о среднем значении иногда называют второй интегральной теоремой в форме Вейерштрасса и Дюбуа-Реймона (Du Bois-Reymond), исторический очерк

об установлении этой теоремы в различных формах общности можно найти в [103, § 422]. В качестве следствия из нее легко получить вторую интегральную теорему в форме Бонне. Следует отметить, что последнюю получил Пьер Оссиан Бонне (Pierre Ossian Bonne) в 1849 г. в работе [71], и она стала исторически первым вариантом второй интегральной теоремы о среднем.

Теорема 1.2.7 (теорема Бонне, 1849). Пусть функция f суммируема на интервале (a, b) , а функция g неотрицательна и не возрастает (не убывает) на отрезке $[a, b]$, тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что выполнено равенство

$$\int_a^b g(t)f(t) dt = g(a) \int_a^\xi f(t) dt \quad \left(\int_a^b g(t)f(t) dt = g(b) \int_\xi^b f(t) dt \right).$$

Обсуждение возможностей обобщения второй интегральной теоремы о среднем и смежных вопросов можно найти, например, в статьях [23, 84, 96, 102, 165]. О применении этой теоремы к решению различных задач можно узнать из работы [153] и процитированных в ней источниках.

Многомерные аналоги второй интегральной теоремы о среднем получены Г. Харди [98], В. Юнгом [167] (см. также [103, § 426]) и Ф. А. Талаляном [45].

1.3. Вокруг формулы Тейлора

В этом параграфе мы обсудим различные варианты формулы Тейлора и некоторые ее обобщения.

Следует отметить, что разложение некоторых функций в ряд, который принято называть сейчас рядом Тейлора, было известно математикам Южной Индии еще в XV–XVI вв. (см. [54, с. 201–203]). В семнадцатом веке в Европе некоторые степенные разложения использовали Г. В. Лейбниц, И. Ньютон и И. Бернулли, но наибольшее продвижение в направлении общего результата, видимо, получил Дж. Грегори (см. [36] и [55, с. 149–152]). Тем не менее общий метод разложения функции по степеням переменной был указан Бруком Тейлором, занимавшим в то время пост секретаря Лондонского королевского общества. Впервые этот метод описан в работе “Methodus

incrementorum directa et inversa” («Метода приращений прямая и обратная»), изданной Б. Тейлором в 1715 г. Более подробное изложение истории открытия ряда Тейлора можно найти, например, в книге [56, с. 294–300]. Значение этого ряда (лишь много позже названного рядом Тейлора) было недооценено вплоть до работ по анализу Жозефа Луи Лагранжа. Его фундаментальный труд [112], имеющий полное название «Теория аналитических функций, содержащая начала дифференциального исчисления, освобожденные от всякого рассмотрения бесконечно малых, исчезающих, пределов и флюксий и сведенные к алгебраическому анализу конечных величин», содержит вывод членов ряда Тейлора. Одно из важных мест в этой книге занимает глава VI первой части, в которой Лагранж (впервые!) поставил вопрос об оценке в общей форме точности приближений, доставляемых суммой конечного числа членов ряда Тейлора, и вывел формулу Тейлора с остаточным членом (в форме Лагранжа), в частности, получив теорему Лагранжа [56, с. 289, 294–300]. Приведем по [56] перевод высказывания Лагранжа из [112] о найденной им форме остаточного члена в формуле Тейлора: «Совершенство методов приближения, в которых применяются ряды, зависит не только от сходимости рядов, но еще от возможности оценить ошибку, происходящую от членов, которыми пренебрегают; и можно сказать, что в этом отношении почти все приближенные методы, употребляемые в геометрических и механических задачах, еще очень несовершенны. Предыдущая теорема во многих случаях сможет сообщить этим методам недостающее им совершенство, без чего их часто бывает опасно применять». Интересное исследование труда Лагранжа [112] можно также найти в более свежей работе [90].

Абсолютно строгий с современной точки зрения вывод формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа был получен Огюстеном Луи Коши в работе [78]. Там же была получена остаточный член формулы Тейлора другого вида, которую принято называть остаточным членом в форме Коши.

Важное значение имеет

Теорема 1.3.1 (локальная формула Тейлора). Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема $n - 1$ раз ($n \geq 1$) в окрестности точки $x_0 \in (a, b)$ и существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad \text{при } x \rightarrow x_0.$$

Отметим, что при $n = 1$ теорема дает лишь переформулировку определения производной функции f в точке x_0 . Выражение

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (1.3.1)$$

называется многочленом Тейлора степени n (для функции f в точке x_0). Мы будем использовать выражение $T_{n,f,x_0}(x)$ для его обозначения (см. рис. 1.2, поясняющий аппроксимационные свойства многочленов Тейлора). Выражение

$$R_{n,f,x_0}(x) := f(x) - T_{n,f,x_0}(x) \quad (1.3.2)$$

называется остаточным членом в формуле Тейлора. Теорема 1.3.1 утверждает, что

$$R_{n,f,x_0}(x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \rightarrow x_0.$$

Записанный таким образом остаточный член традиционно называется *остаточным членом в форме Пеано*.

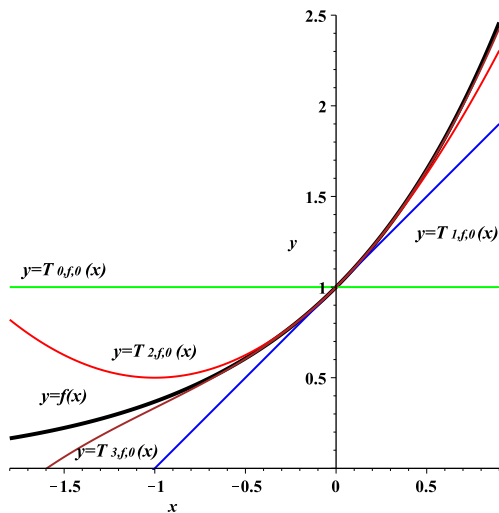


Рис. 1.2. Графики многочленов Тейлора $x \mapsto T_{n,f,x_0}(x)$ при $n = 0, 1, 2, 3$ для функции $f(x) = \exp(x)$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.1. Любопытно, что теорема 1.3.1 изначально появилась в аннотации Джузеппе Пеано к книге Анжело Геноччи “Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale” (см. [95, с. xix] или [125, с. 60]). Лишь спустя пять лет доказательство этого результата появилось в научных журналах (см. [123] или [125, с. 95–96]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.2. Отметим также, что теорема 1.3.1 естественным образом приводит к определению *производных Пеано* (см. [124] и [125, с. 204–209]). Напомним, что n -я производная Пеано $f_n(x)$ функции f в точке x определяется (в предположении, что предыдущие производные уже определены) асимптотическим равенством

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f_k(x)}{k!} h^k + o(h^n) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Ясно, что $f_0(x) = f(x)$ и $f_1(x) = f'(x)$, но уже вторая производная Пеано $f_2(x)$ является более общим понятием по сравнению с обычной второй производной $f''(x)$ (хотя эти производные и совпадают, если $f''(x)$ существует). Более подробную информацию о производных Пеано можно найти, например, в [88].

В работе А. Ф. Морсунда (А. F. Moursund) [118] получен следующий результат, уточняющий теорему 1.3.1.

Теорема 1.3.2 [118]. Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема $n-1$ раз ($n \geq 1$) в окрестности точки $x_0 \in (a, b)$ и существует $f^{(n)}(x_0)$. Пусть $h = x - x_0$, тогда остаточный член $w(x_0, h) := R_{n, f, x_0}(x_0 + h)$ таков, что для достаточно малых значений $|h|$ и для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$ выполнено неравенство

$$\left| \frac{d^i}{dh^i} w(x_0, h) \right| \leq \frac{|h^{n-i}|}{(n-i)!} v(x_0, h),$$

где

$$v(x_0, h) = \sup \left\{ \left| \frac{f^{(n-1)}(x_0+t) - f^{(n-1)}(x_0)}{t} - f^{(n)}(x_0) \right|; 0 < |t| < |h| \right\}.$$

◁ Поскольку

$$\frac{d^i}{dt^i} f(x_0+t) \equiv \frac{d^i}{dt^i} f(x) \Big|_{x=x_0+t} \equiv f^{(i)}(x_0+t)$$

и

$$w(x_0, h) = f(x_0 + h) - \left(f(x_0) + f'(x_0)h + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n \right),$$

мы легко получаем, что для достаточно малых $|h|$ и $0 < |t| < |h|$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} w(x_0, t) \right| &= \left| t \left(\frac{f^{(n-1)}(x_0 + t) - f^{(n-1)}(x_0)}{t} - f^{(n)}(x_0) \right) \right| \leq \\ &\leq |t|v(x_0, t) \end{aligned}$$

и что $\frac{d^i}{dt^i} w(x_0, t) = o(t)$ при $t \rightarrow 0$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Отсюда следует, что

$$\int_0^t \frac{d^i}{dt^i} w(x_0, t) dt = \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} w(x_0, t).$$

Следовательно, для достаточно малых $|h|$ мы имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^i}{dh^i} w(x_0, h) \right| &= \left| \int_0^h dt_{n-i-2} \int_0^{t_{n-i-2}} dt_{n-i-3} \dots \int_0^{t_1} \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} w(x_0, t) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^h dt_{n-i-2} \int_0^{t_{n-i-2}} dt_{n-i-3} \dots \int_0^{t_1} \left| \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} w(x_0, t) \right| dt \right| \leq \\ &\leq \frac{|h^{n-i}|}{(n-i)!} v(x_0, h), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\triangleright$

Из теоремы 1.3.2 следует, что для $i = 0, 1, \dots, n-1$ выполнено асимптотическое равенство

$$\frac{d^i}{dh^i} w(x_0, h) = o(h^{n-i}) \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

При $i = 0$ это утверждение эквивалентно утверждению теоремы 1.3.1.

При некоторых дополнительных условиях можно получить более информативное выражение для остаточного члена. Следующая теорема дает выражение остаточного члена в форме Шлемильха — Роша.

Теорема 1.3.3. Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема n раз, $x_0 \in (a, b)$ и существует $f^{(n+1)}(x)$ для всех $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$. Тогда для любого положительного числа α существует такая точка $\theta \in (0, 1)$, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{n+1}{\alpha} (1-\theta)^{n+1-\alpha} \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

◁ Разберем только случай $x > x_0$, поскольку случай $x < x_0$ разбирается аналогично. Рассмотрим на отрезке $[x_0, x]$ функции

$$F(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k \quad \text{и} \quad G(t) = (x - t)^\alpha.$$

Ясно, что эти функции непрерывны на отрезке $[x_0, x]$ и дифференцируемы на интервале (x_0, x) , причем

$$F'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n \quad \text{и} \quad G'(t) = -\alpha(x - t)^{\alpha-1},$$

в частности, $G'(t) \neq 0$ при $t \in (x_0, x)$. По теореме Коши существует такое число $\xi \in (x_0, x)$, что

$$\frac{f(x) - T_{n,f,x_0}(x)}{-(x - x_0)^\alpha} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n}{-n!\alpha(x - \xi)^{\alpha-1}}.$$

Полагая $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, получаем нужное утверждение. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.3. Отметим, что в доказательстве этой теоремы вместо функции $t \mapsto (x - t)^\alpha$ можно рассмотреть произвольную непрерывную на отрезке $[x_0, x]$ функцию G с не обращающейся

в нуль на интервале (x_0, x) производной. Этот несколько более общий вариант теоремы и был доказан впервые Оскаром Шлемильхом в 1847 г. в его книге [146]. В 1858 г. теорема 1.3.3 была передоказана Эдуардом Рошем в работе [135], опубликованной в журнале “Journal de Mathématiques Pures et Appliquées”, известном также как «Журнал Ж. Лиувилля» (см. также более подробное изложение в [136]). Объясняет сложившуюся ситуацию письмо О. Шлемильха в редакцию журнала [147].

При $\alpha = 1$ получается выражение для остаточного члена в форме Коши:

$$R_{n,f,x_0}(x) = (1 - \theta)^n \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (1.3.3)$$

При $\alpha = n+1$ мы получаем выражение для остаточного члена в форме Лагранжа. Для удобства ссылок мы приведем его в отдельном утверждении.

Теорема 1.3.4. Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема n раз, $x_0 \in (a, b)$ и существует $f^{(n+1)}(x)$ для всех $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$. Тогда существует точка $\theta \in (0, 1)$ такая, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Отметим, что при $n = 0$ эта теорема превращается в теорему Лагранжа 1.2.2. Известно обобщение Пеано вышеприведенной теоремы на случай нескольких функций (см. [95, с. xxii] или [126, с. 45]).

Теорема 1.3.5. Пусть функции $f_0, f_1, \dots, f_{n+1} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемы n раз. Тогда для любых точек $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in (a, b)$ существует точка $\eta \in [m, M]$, где $m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ и $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$, такая, что

$$\det \begin{pmatrix} f_0^{(n)}(\eta) & f_1^{(n)}(\eta) & \cdots & f_{n+1}^{(n)}(\eta) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \cdots & f_{n+1}(x_1) \\ f_0(x_2) & f_1(x_2) & \cdots & f_{n+1}(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0(x_{n+1}) & f_1(x_{n+1}) & \cdots & f_{n+1}(x_{n+1}) \end{pmatrix} = 0.$$

◁ Функция $\varphi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая равенством

$$\varphi(x) = \det \begin{pmatrix} f_0(x) & f_1(x) & \cdots & f_{n+1}(x) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \cdots & f_{n+1}(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0(x_{n+1}) & f_1(x_{n+1}) & \cdots & f_{n+1}(x_{n+1}) \end{pmatrix},$$

имеет $n+1$ корень (корни считаются с соответствующей кратностью) $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$. Из теоремы Ролля теперь легко следует существование точки $\eta \in [m, M]$ такой, что $\varphi^{(n)}(\eta) = 0$. Ясно также, что при $M \neq m$ можно взять $\eta \in (m, M)$. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.4. Полагая в приведенной теореме $f_0(x) = f(x)$ и $f_i(x) = x^{i-1}$ при $i = 1, 2, \dots, n+1$, мы получаем теорему Шварца 6.2.1 для разделенных разностей при попарно различных x_i .

С другой стороны, теорема 1.3.5 верна также и для определителя матрицы, строки которой составлены из следующих чисел ($i = 0, 1, \dots, n+1$):

$$f_i^{(n)}(\eta), f_i(p_1), f_i'(p_1), \dots, f_i^{(\alpha_1)}(p_1), f_i(p_2), f_i'(p_2), \dots, \\ f_i^{(\alpha_2)}(p_2), \dots, f_i(p_l), f_i'(p_l), \dots, f_i^{(\alpha_l)}(p_l),$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l = n - l + 1$. Здесь все точки $p_1, p_2, \dots, p_l$ предполагаются попарно различными. В таком варианте мы получаем теорему Шварца в общем виде, полагая $f_0(x) = f(x)$ и $f_i(x) = x^{i-1}$ при $i = 1, 2, \dots, n+1$. Затем, полагая $l = 2$, $p_1 = x$, $p_2 = x_0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = n - 1$, приходим к формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Еще один вариант записи остаточного члена в формуле Тейлора получен в работе Д'Оканя [85] (см. также [5]).

Теорема 1.3.6 [85]. Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема n раз, $x_0, x_0 + h \in (a, b)$. Если на интервале между x_0 и $x_0 + h$ существует не обращающаяся в нуль производная $f^{(n+1)}$, то существует число $\tau \in (0, 1)$ такое, что

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{\tau^n h^n}{n!} (f^{(n)}(x_0 + h) - f^{(n)}(x_0)).$$

◁ По теореме Дарбу производная $f^{(n+1)}$ сохраняет знак между точками x_0 и x_0+h , поэтому (по теореме Лагранжа) производная $f^{(n)}$ или возрастает или убывает на этом интервале. В любом случае для произвольного числа $\theta \in (0, 1)$ выполнено неравенство

$$0 < \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h) - f^{(n)}(x_0)}{f^{(n)}(x_0 + h) - f^{(n)}(x_0)} < 1.$$

По теореме 1.3.4 существует такое $\theta \in (0, 1)$, что

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{n!} h^n. \quad (1.3.4)$$

Пусть $\tau \in (0, 1)$ таково, что

$$\tau^n = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h) - f^{(n)}(x_0)}{f^{(n)}(x_0 + h) - f^{(n)}(x_0)}$$

(рассуждения выше показывают корректность такого определения). Тогда

$$f^{(n)}(x_0 + \theta h) = f^{(n)}(x_0) + \tau^n (f^{(n)}(x_0 + h) - f^{(n)}(x_0)).$$

Подставляя это выражение в формулу (1.3.4), получаем нужное утверждение. ▷

Приведем теперь вариант формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Теорема 1.3.7. Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет $n + 1$ непрерывную производную, $x_0 \in (a, b)$. Тогда для каждого $x \in (a, b)$ имеет место формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x - t)^n dt.$$

Делая замену $t = x_0 + (x - x_0)s$, получаем несколько иную формулу для остаточного члена в интегральной форме:

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - s)^n f^{(n+1)}(x_0 + (x - x_0)s) ds. \quad (1.3.5)$$

Отметим, что в предыдущей теореме вместо существования у функции f непрерывных производных до порядка $n + 1$ включительно достаточно потребовать от f наличия этих же производных с дополнительным требованием, что последняя из них интегрируема (в смысле Лебега) на (a, b) . Еще более серьезное ослабление заключается в требовании наличия у f производных до порядка n включительно, причем последняя, n -я, производная должна быть абсолютно непрерывна на каждом отрезке, содержащемся в интервале (a, b) . Важное достаточное условие абсолютной непрерывности функции f на отрезке $[c, d]$ заключается в том, что функция f в каждой точке отрезка имеет (конечную) производную, и f' интегрируема по Лебегу на этом отрезке [24, гл. IX, § 8, теорема 1]. См. также работы [86] и [156] на эту тему.

Обобщением формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа также является теорема Шварца о разделенных разностях (теорема 6.2.1), исследованию асимптотики точек среднего значения в которой посвящен параграф 6.2 настоящей книги.

Теоремы о среднем, обобщающие формулу Тейлора, были получены в разных работах. Классическими в этом направлении являются работы Н. В. Бугаева [6], Дж. Д. Биркхофа [69], Г. Поля [128] и Д. В. Уиддера [164]. Интересные варианты формулы Тейлора и смежные вопросы обсуждаются в §§ 142–145 книги [104]. Среди более свежих публикаций отметим работы [11, 49, 68, 83, 87, 106, 108, 121, 127, 154, 161].

Существуют различные многомерные варианты теоремы Тейлора, описанные как в специальных книгах (см., например, [133]), так и в различных статьях (см., например, [41] или [65]).

1.4. Обзор других теорем о среднем значении

Здесь мы рассмотрим несколько теорем о среднем значении, полученных относительно недавно.

Сначала приведем один результат, уточняющий теорему Коши (теорему 1.2.4) о среднем значении.

Теорема 1.4.1 (топологическая теорема о среднем [137]). Пусть дифференцируемое отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ инъективно и $\gamma'(t) \neq 0$ при $t \in (a, b)$. Тогда существуют числа $M > 0$ и $t_0 \in (a, b)$ такие, что $\gamma'(t_0) = M(\gamma(b) - \gamma(a))$.

Нетрудно понять, что условия инъективности отображения и незануления производного вектора являются существенными и не могут быть опущены в формулировке теоремы. Отметим, что теорема Коши (см. (1.2.1)) в указанной ситуации не дает информации о знаке числа M . Доказательство теоремы 1.4.1 опирается на теорему Жордана о простой замкнутой кривой на плоскости (см. подробности в [137]). Вариации на тему приведенного результата можно найти в работе [60].

Теорема 1.4.2 (теорема Помпею [129, 144]). *Предположим, что функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет производную в каждой точке отрезка и при этом отрезок $[a, b]$ не содержит точку 0. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что*

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - cf'(c).$$

Теорема 1.4.3 (теорема Флетта [91]). *Предположим, что функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет производную в каждой точке отрезка и при этом $f'(a) = f'(b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что*

$$f(c) - f(a) = f'(c)(c - a).$$

Несколько более общую версию этой теоремы (в терминах производных чисел) можно найти в работе [113]. Приведем еще несколько обобщений теоремы Флетта.

Теорема 1.4.4 [81]. *Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет производную в каждой точке отрезка. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что*

$$f(c) - f(a) = f'(c)(c - a) - \frac{1}{2} \frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} (c - a)^2.$$

Ясно, что при $f'(b) = f'(a)$ получается предыдущая теорема. Теорема Флетта допускает и интегральный вариант.

Теорема 1.4.5 [163]. *Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что*

$$f(c)(c - a) = \int_a^c f(s) ds.$$

Этот результат в свою очередь также обобщается.

Теорема 1.4.6 [141]. Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\int_a^c f(s) ds = f(c)(c-a) - \frac{1}{2} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (c-a)^2.$$

Понятно, что при $f(b) = f(a)$ получается предыдущая теорема. Еще одно обобщение теоремы Флетта получено в работе [122].

Теорема 1.4.7 [122]. Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет n производных в каждой точке отрезка, причем $f^{(n)}(a) = f^{(n)}(b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(c) - f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!} (c-a)^k f^{(k)}(c).$$

В работе [162] получен вариант теоремы Флетта, напоминающий теорему Коши.

Теорема 1.4.8 [162]. Пусть функции $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемы на $[a, b]$. Предположим, что $g'(x) \neq 0$ при $x \in [a, b]$, тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(c) - f(a)}{g(c) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} - \left(\frac{f'(b)}{g'(b)} - \frac{f'(a)}{g'(a)} \right) \frac{g(c) - g(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Обобщения этих теорем и некоторые оценки асимптотики точек среднего значения в них можно найти в работах [82, 114, 132, 141, 142, 144, 158, 159].

Приведем в заключение один «многомерный» вариант первой интегральной теоремы о среднем (без веса).

Теорема 1.4.9 [152]. Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольные непрерывные функции. Тогда на отрезке $[0, 1]$ существует конечное число точек $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ таких, что для всех $k = 1, 2, \dots, n$ выполнены равенства

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_k(t_i) = \int_0^1 f_k(t) dt.$$

В этой теореме не дается оценки снизу на величину числа N в зависимости от n , и соответствующий круг вопросов может служить источником новых исследований. Приведенная теорема является лишь одним из следствий основного результата работы [152], описывающем усредняющие множества точек в довольно общих линейно связных пространствах с мерой (мы не приводим его полную версию в силу некоторой ее громоздкости). Изящное топологическое доказательство теоремы 1.4.9 можно также найти в работе [64].

ГЛАВА 2

АСИМПТОТИКА ТОЧЕК СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ

2.1. Гипотеза В. К. Ионина

В этом параграфе исследуется вопрос о месторасположении точки среднего значения непрерывной функции. Основой этих исследований является предположение относительно асимптотики точек среднего значения вблизи нуля, выдвинутое В. К. Иониным.

Рассмотрим непрерывную функцию $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. По первой интегральной теореме о среднем значении для каждого $x \in [0, 1]$ существует $\tau \in [0, x]$ такое, что

$$\int_0^x f(t) dt = xf(\tau).$$

Для убывающей или возрастающей функции f такое τ единственно, но в общем случае таких значений может быть несколько (и даже все точки из $[0, x]$ для постоянной функции f). Поэтому мы для каждого $x \in [0, 1]$ рассмотрим $\xi(x)$ — максимальное (оно существует, как нетрудно заметить) из таких чисел τ на отрезке $[0, x]$ (см. рис. 2.1). Другими словами,

$$\xi(x) = \max \left\{ \tau \in [0, x] \left| \int_0^x f(t) dt = xf(\tau) \right. \right\}. \quad (2.1.1)$$

Ясно, что $0 \leq \xi(x) \leq x$, и естественно исследовать асимптотику величины $\frac{\xi(x)}{x}$ при $x \rightarrow 0$.

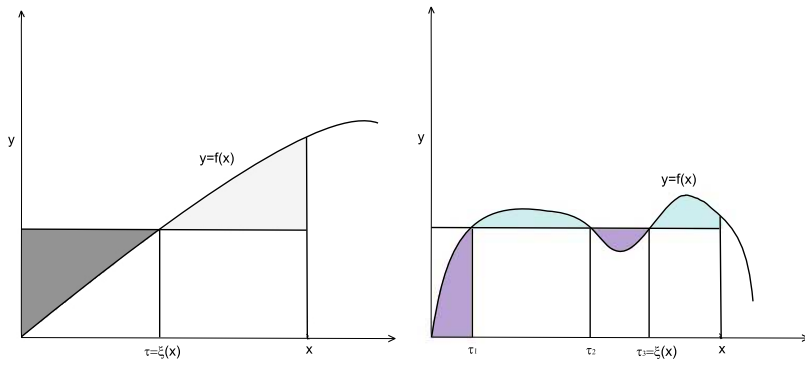


Рис. 2.1. Определение величины $\xi(x)$ для различных функций.

Предложение 2.1.1. Если $s \in [1/e, 1]$, где $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$, то существует такая непрерывная функция $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} = s. \quad (2.1.2)$$

◁ Доказательство состоит в прямом вычислении интересующего нас предела. Рассмотрим величину $\xi(x)$ для функции $f(x) = x^\alpha$ при $\alpha > 0$:

$$\int_0^x t^\alpha dt = x(\xi(x))^\alpha, \quad \left(\frac{\xi(x)}{x} \right)^\alpha = \frac{1}{1 + \alpha},$$

т. е. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} = (1 + \alpha)^{-1/\alpha}$ для $\alpha > 0$. Отметим теперь, что для любого наперед взятого $s \in (1/e, 1)$ существует $\alpha > 0$ такое, что $s = (1 + \alpha)^{-1/\alpha}$ (функция $\alpha \mapsto (1 + \alpha)^{-1/\alpha}$ отображает интервал $(0, \infty)$ на интервал $(1/e, 1)$, см. чуть более общее утверждение в лемме 3.3.2).

Если $s = 1/e$, то равенство (2.1.2) выполняется для функции f , задаваемой следующими условиями: $f(0) = 0$, $f(x) = (-\ln(x/2))^{-1}$ при $x \in (0, 1]$. Если же $s = 1$, то равенство (2.1.2) выполняется для функции $f(x) \equiv \text{const}$. Тем же свойством обладает возрастающая функция $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, которая определяется равенствами $g(0) = 0$ и $g(x) = e^{-1/x}$ при $x > 0$. ▷

Следует отметить, что приведенное предложение весьма просто и вряд ли возможно установить его авторство. В то же время оно приводит к некоторым нетривиальным соображениям. В. К. Ионин высказал следующую гипотезу:

Для каждой непрерывной функции f верхний предел отношения $\frac{\xi(x)}{x}$ при $x \rightarrow 0$ не может быть меньше $1/e$, где $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

Доказательство данного утверждения, являющееся одним из первых результатов в исследовании асимптотики промежуточных точек, было опубликовано в [27].

Теорема 2.1.1. Для произвольной непрерывной функции имеет место неравенство

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq \frac{1}{e}. \quad (2.1.3)$$

◁ Допустим, что неравенство (2.1.3) не выполнено. Тогда существует число $q \in (0, 1/e)$ такое, что $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} < q$. Поскольку функция f непрерывна, можно подобрать такое число $a \in (0, 1)$, что выражение $\int_0^x f(t) dt - xf(px)$ не меняет знака при $(x, p) \in (0, a] \times [q, 1]$. Без ограничения общности (заменяя при необходимости f на $-f$) можно считать, что выполнено неравенство

$$\int_0^x f(t) dt < xf(px), \quad x \in (0, a], \quad p \in [q, 1]. \quad (2.1.4)$$

Рассмотрим теперь функцию $g : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, определяемую равенствами

$$g(0) = f(0), \quad g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad x > 0.$$

Ясно, что эта функция непрерывна на отрезке $[0, a]$ и имеет производную на $(0, a]$, причем $g'(x)x + g(x) = f(x)$. Неравенство (2.1.4) при $p = 1$ принимает вид $g(x) < f(x) = g'(x)x + g(x)$, поэтому $g'(x) > 0$ при $x \in (0, a]$, и функция g возрастает на отрезке $[0, a]$. Далее, при $p = q$ неравенство (2.1.4) принимает вид

$$g(x) < f(qx) = qxg'(qx) + g(qx),$$

но неравенство $g(x) - g(qx) < qxg'(qx)$ невозможно при $q \in (0, 1/e)$ в силу приведенной ниже леммы 2.2.1, что и завершает доказательство теоремы. ▷

Лемма 2.1.1. Пусть непрерывная функция $g : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ обладает на интервале $(0, a)$ положительной непрерывной производной

и для некоторого числа $q \in (0, 1)$ удовлетворяет неравенству

$$g(x) - g(qx) < qxg'(qx), \quad x \in (0, a/q].$$

Тогда $q \geq 1/e$.

◁ Данная лемма является довольно простой по сравнению с результатами из других разделов, но ярко демонстрирует идеи, которые будут использованы в дальнейшем, поэтому мы приведем для нее три различных доказательства.

ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (см. [27]). Предположим, что $q < 1/e$. Непрерывная функция $\alpha \mapsto (1 + \alpha)^{-1/\alpha}$ возрастает от 0 до $1/e$ на интервале $(-1, 0)$. Следовательно, существует такое $\alpha < 0$, что $(1 + \alpha)^{-1/\alpha} = q$. Определим функцию $h : (0, g(a)] \rightarrow \mathbb{R}$ равенством $h(g(x)) = x^\alpha$. Поскольку $g'(x) > 0$ для $x \in (0, a)$, то функция h непрерывна и непрерывно дифференцируема на интервале $(0, g(a))$, причем $h'(g(x))g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Ясно, что $h'(x) < 0$ для всех $x \in (0, g(a))$.

Поскольку $(x/q)^\alpha - x^\alpha = x\alpha x^{\alpha-1}$ и $h(g(x/q)) = (x/q)^\alpha$, то (из равенства $h'(g(x))g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$) получаем $h(g(x/q)) - h(g(x)) = xg'(x)h'(g(x))$ для всех $x \in (0, qa)$. Это равенство эквивалентно следующему:

$$h'(g(x)) = \frac{g(x/q) - g(x)}{xg'(x)} \frac{h(g(x/q)) - h(g(x))}{g(x/q) - g(x)}.$$

По теореме Лагранжа существует $\tau = \tau(x) \in (g(x), g(x/q))$ такое, что $h(g(x/q)) - h(g(x)) = h'(\tau)(g(x/q) - g(x))$. Поскольку производная h' отрицательна и $0 < \frac{g(x/q) - g(x)}{xg'(x)} < 1$ по условию леммы, мы получаем $h'(g(x)) > h'(\tau(x))$.

Положим $C = \min\{h'(t) \mid t \in [g(qa), g(a)]\}$ и убедимся в том, что $h'(t) \geq C$ для всех $t \in (0, g(a)]$. Допустим противное. Тогда существуют такие $\gamma > 0$ и $t_0 \in (0, g(qa))$, что $h'(t_0) = C - \gamma$ и $h'(t) > C - \gamma$ для всех $t \in (t_0, g(a)]$. Пусть x_0 определяется равенством $g(x_0) = t_0$. Ясно, что $x_0 < qa$. Как было показано выше, существует число $\tau(x_0) \in (g(x_0), g(x_0/q)) \subset (t_0, g(a))$, удовлетворяющее условию $h'(t_0) = h'(g(x_0)) > h'(\tau(x_0))$; таким образом, $h'(\tau(x_0)) < C - \gamma$, что невозможно. Это противоречие доказывает неравенство $h'(t) \geq C$ для всех $t \in (0, g(a)]$.

Поскольку $h'(g(x))g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, должно выполняться неравенство

$$\alpha x^{\alpha-1} \geq Cg'(x), \quad x \in (0, a].$$

Интегрируя его по некоторому отрезку $[p, q] \subset (0, a]$, получаем

$$q^\alpha - Cg(q) \geq p^\alpha - Cg(p).$$

Устремляя p к нулю и учитывая, что $\lim_{p \rightarrow 0} g(p) = 0$ и $\alpha < 0$, приходим к неверному неравенству $q^\alpha - Cg(q) \geq +\infty$. Полученное противоречие доказывает, что $q \geq 1/e$.

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (его идея принадлежит В. В. Иванову, см. [14]). Этим методом удастся доказать немного больше: $q > 1/e$. Проинтегрируем по x неравенство

$$qg'(qx) > \frac{1}{x} (g(x) - g(qx)) = \frac{1}{x} \int_{qx}^x g'(t) dt,$$

а затем уменьшим область интегрирования двойного интеграла (см. рис. 2.2), пользуясь тем, что $g'(t) > 0$:

$$\begin{aligned} g(qa) - g(0) &= \int_0^a qg'(qx) dx > \int_0^a \frac{1}{x} \left(\int_{qx}^x g'(t) dt \right) dx \geq \\ &\geq \int_0^{qa} g'(t) \left(\int_t^{t/q} \frac{dx}{x} \right) dt = \int_0^a qg'(qx) dx \ln \frac{1}{q} = (g(qa) - g(0)) \ln \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

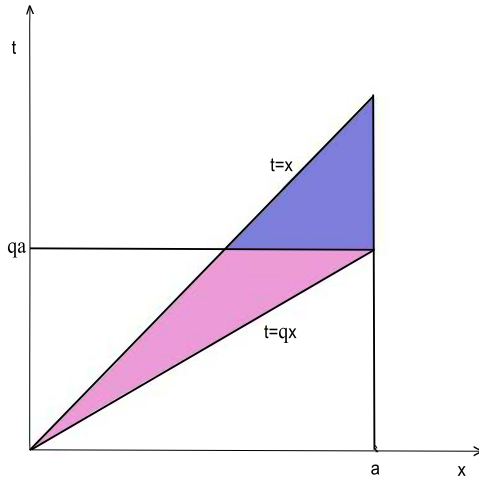


Рис. 2.2. Уменьшение области интегрирования.

В силу возрастания функции g , получаем $\ln(1/q) < 1$ или $q > 1/e$, что и требовалось.

ТРЕТЬЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (наиболее наглядное и простое). Предположим, что $q < 1/e$. Рассмотрим некоторую точку $x_0 \in (0, qa)$. Поскольку функция g возрастает, мы имеем неравенство

$$g(x_0) < \min \{g(x) \mid x \in [qa, a]\} = g(qa).$$

Как уже отмечалось (см. первое доказательство), существует такое $\alpha < 0$, что $(1+\alpha)^{-1/\alpha} = q$. Зафиксируем это значение и положим $\varphi(x) = x^\alpha$ ($x \in (0, a]$), тогда

$$\varphi(x) - \varphi(qx) \equiv qx\varphi'(qx). \quad (2.1.5)$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию $g_\varepsilon(x) = g(x) + \varepsilon\varphi(x)$. Согласно неравенству в условии леммы и тождеству (2.1.5), имеем

$$g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(qx) < qxg'_\varepsilon(qx), \quad x \in (0, a/q]. \quad (2.1.6)$$

Выберем теперь $\varepsilon > 0$ настолько малым, что выполнено неравенство (при $\varepsilon = 0$ оно выполнено)

$$g_\varepsilon(x_0) < \min \{g_\varepsilon(x) \mid x \in [qa, a]\}.$$

Поскольку в определении функции $\varphi(x) = x^\alpha$ число α отрицательно, то $\lim_{x \rightarrow 0} g_\varepsilon(x) = +\infty$. Так как g_ε непрерывна на промежутке $(0, a]$, то два предыдущих вывода гарантируют то, что эта функция достигает своего абсолютного минимума в некоторой точке $\tilde{x} \in (0, qa)$.

Полагая теперь $x = \tilde{x}/q \in (0, a)$ в неравенстве (2.1.6), получаем противоречие, поскольку $g'_\varepsilon(\tilde{x}) = 0$ и $g_\varepsilon(\tilde{x}/q) > g_\varepsilon(\tilde{x})$. Полученное противоречие и доказывает, что $q \geq 1/e$. $\triangleright$

Приведенные доказательства показывают, что результат этой леммы может быть усилен (см., например, окончание доказательства теоремы 2.1.3), но мы не стремились к максимальной общности в формулировке, а старались показать возможные варианты исследования подобных задач. Отметим также, что мы еще неоднократно в дальнейшем получим результат теоремы 2.1.1 в качестве следствий более общих утверждений.

Уточнение и обобщение результата теоремы 2.1.1 для класса функций $f \in C(0, 1]$, удовлетворяющих для фиксированного

$\alpha \in (-1, \infty)$ асимптотическому равенству $f(x) = O(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$, приведено в следствии 3.3.3.

Отметим, что при некоторых дополнительных (довольно ограничительных) условиях на поведение функции f в окрестности нуля теорема 2.1.1 может быть усилена, например, можно утверждать, что при определенных условиях существует обычный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x}$. Следующее утверждение получено в различных источниках (см., например, [5, 107, 169, 150]).

Теорема 2.1.2. *Предположим, что функция f непрерывна и k раз дифференцируема в некоторой окрестности точки 0 ($k \geq 1$), причем $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0$ и $f^{(k)}(0) \neq 0$. Если $\xi(x)$ задается формулой $\int_0^x f(t) dt = f(\xi(x))x$ (легко видеть, что она корректно определяет $\xi(x)$ при достаточно малых по модулю $x \neq 0$), то справедливо равенство*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} = (1+k)^{-1/k}. \quad (2.1.7)$$

◁ По условию теоремы мы имеем асимптотическое равенство $f(x) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^k)$ при $x \rightarrow 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1} + o(x^{k+1}), \\ f(\xi(x)) &= \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(\xi(x))^k + o((\xi(x))^k) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(\xi(x))^k + o(x^k), \\ \frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1} &= \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(\xi(x))^k \cdot x + o(x^{k+1}), \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение теоремы. ▷

Отметим также, что теорема 2.1.2 (после переформулировки в терминах производных) следует из более общей оценки для точек Лагранжа в формуле Тейлора (см. теорему 2.2.2).

Рассмотрим теперь переформулировку соответствующей задачи в терминах теоремы Лагранжа. Пусть функция $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна в области определения и дифференцируема на интервале $(0, 1)$. Для каждого x через $\xi(x)$ обозначим верхнюю грань таких чисел $\tau \in [0, x]$, что

$$f'(\tau) = \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Гипотезу В. К. Ионина можно переформулировать следующим образом:

Верхний предел отношения $\xi(x)/x$ при $x \rightarrow 0$ не может быть меньше $1/e$, если у функции f существует (правая) производная в точке 0.

Очевидно, что теорема Лагранжа обобщает вышеприведенный вариант интегральной теоремы о среднем значении. Кроме того, она является наиболее простой и наглядной из известных теорем о среднем значении. Мы рассмотрим ее в максимально общем виде.

Пусть f — непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция. Для точек x из области определения f через $\underline{df}(x)$ и $\overline{df}(x)$ будем обозначать соответственно наименьшее и наибольшее производные числа (возможно, бесконечные), а через $Df(x)$ — отрезок $[\underline{df}(x), \overline{df}(x)]$. В случае, когда функция f дифференцируема в точке x , то, очевидно, $Df(x)$ состоит из единственного числа $f'(x)$.

В описанной ситуации справедливы следующие утверждения.

Предложение 2.1.2 (обобщенная теорема Лагранжа). *Для любого $0 < x \leq 1$ найдется точка $\tau \in (0, x)$ такая, что*

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \in Df(\tau).$$

Предложение 2.1.3 (обобщенная теорема Дарбу). *Пусть число A таково, что $\underline{df}(b) > A > \overline{df}(a)$, где $a < b$. Тогда на интервале (a, b) найдется точка η , для которой*

$$A \in Df(\eta).$$

Доказательство этих утверждений несущественно отличается от доказательств соответствующих классических теорем, которые, очевидно, получаются из приведенных при рассмотрении всюду дифференцируемых функций.

Для каждого $x \in (0, 1]$ обозначим через $\eta(x)$ верхнюю грань $\tau \in (0, x)$ из предложения 2.1.2. Далее мы приводим результат, подтверждающий дифференциальный вариант гипотезы В. К. Ионина в максимально возможной общности.

Теорема 2.1.3 [29]. *Допустим, что в условиях, указанных выше, выполнено асимптотическое равенство $f(x) - f(0) = O(x)$ при $x \rightarrow 0$. Тогда*

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\eta(x)}{x} \geq \frac{1}{e}.$$

◁ Здесь мы приведем доказательство отличное от первоначального и использующее принадлежащую В. В. Иванову идею повторного интегрирования (см. доказательство леммы 2.1.1).

Если $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\eta(x)}{x} = 1$, то доказывать нечего. В противном случае рассмотрим некоторое q со свойством $1 > q > \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\eta(x)}{x}$ и покажем, что справедливо неравенство $q > 1/e$.

Без ограничения общности будем считать, что $f(0) = 0$ (добавляя к функции f константу, мы не меняем величину $\eta(x)$). Очевидно, что в силу обобщенной теоремы Дарбу (предложение 2.1.3) мы можем подобрать некоторое $a > 0$ так, что для всех x из промежутка $(0, a]$ будет выполнено неравенство (возможно, f придется заменить на $-f$, что не влияет на функцию $\eta(x)$)

$$\underline{d}f(y) > \frac{f(x)}{x}, \quad qx \leq y \leq x. \quad (2.1.8)$$

Перепишем неравенство (2.1.8) в интегральной форме. Для этого введем функцию $\varphi : (0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, полагая $\varphi(x) = f(x)/x$. Эта функция непрерывна на области определения и имеет нижнюю производную

$$\underline{d}\varphi(x) = \frac{1}{x} (\underline{d}f(x) - \varphi(x)).$$

Из неравенства (2.1.8) при $y = x$ получаем, что функция φ возрастает, так как $\underline{d}\varphi(x) > 0$, и, в частности, почти всюду имеет обычную производную (теорема 1.1.4). Из всего сказанного следует (почти всюду на $[0, a]$)

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} (f'(x) - \varphi(x)) > 0.$$

Так как $\varphi(x) = f(x)/x = O(1)$, то в силу монотонности $\varphi(x)$ существует конечный предел $\varphi(x)$ при $x \rightarrow 0$, значение которого мы и примем за $\varphi(0)$.

В силу теоремы об интегрировании производной монотонной функции (см. теорему 1.1.4) при $y = qx$ условие (2.1.8) позволяет получить неравенство, выполняющееся почти всюду:

$$\varphi'(qx) = \frac{1}{qx} (f'(qx) - \varphi(qx)) > \frac{1}{qx} (\varphi(x) - \varphi(qx)) \geq \frac{1}{qx} \int_{qx}^x \varphi'(t) dt,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Для завершения доказательства теоремы достаточно проинтегрировать полученное неравенство и затем уменьшить область интегрирования двойного интеграла (см. рис. 2.2), пользуясь тем, что $\varphi'(t) \geq 0$ почти всюду на $[0, a]$:

$$\begin{aligned} \int_0^a \varphi'(qx) dx &> \int_0^a \frac{1}{qx} \left(\int_{qx}^x \varphi'(t) dt \right) dx \geq \\ &\geq \int_0^{qa} \frac{\varphi'(t)}{q} \left(\int_t^{t/q} \frac{dx}{x} \right) dt = \int_0^a \varphi'(qx) dx \cdot \ln \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

В силу положительности (почти всюду) производной φ' , получаем $\ln(1/q) < 1$ или $q > 1/e$, что и требовалось. $\triangleright$

Следует заметить, что равенство в доказанной теореме достигается, например, для функции $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t/2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.1. Подтверждение исходной гипотезы В. К. Ионина (утверждение теоремы 2.1.1) легко выводится из теоремы 2.1.3. Действительно, достаточно применить последнюю теорему к функции $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$, поскольку $\eta(x)$ для этой функции очевидно совпадает с $\xi(x)$ для функции $x \mapsto f(x)$.

Представленные выше результаты могут быть обобщены разными способами. В последующих разделах можно познакомиться с некоторыми из такого рода обобщений. А сейчас мы рассмотрим несколько следствий из теоремы 2.1.1.

Теорема 2.1.4 [28]. Пусть функция $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ возрастает, непрерывна и $g(0) = 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g\left(x - \frac{\int_0^x g(t) dt}{g(x)}\right)}{g(x)} \geq \frac{1}{e}.$$

$\triangleleft$ Обозначим через f функцию, обратную к функции g . Понятно, что она также возрастает и $f(0) = 0$. Пусть $y = f(x)$ для некоторого фиксированного $x \in (0, 1]$. Точка среднего значения $\xi(y)$ для функции f на отрезке $[0, y]$ единственна в силу возрастания f и определяется равенством $\int_0^y f(t) dt = f(\xi(y))y$. Из геометрических соображений (подсчет площади прямоугольника двумя способами) следует,

что

$$f(\xi(y))y = \int_0^y f(t) dt = yx - \int_0^x g(t) dt.$$

Поскольку $y = g(x)$ и функция f является обратной к функции g , получаем

$$\xi(y) = g\left(x - \frac{\int_0^x g(t) dt}{g(x)}\right).$$

Осталось применить теорему 2.1.1 для функции $y \mapsto f(y)$. $\triangleright$

Приведенное в теореме 2.1.4 неравенство точное, поскольку равенство в нем достигается, например, для функции g , заданной формулами $g(0) = 0$, $g(x) = e^{-1/x}$ при $x \in (0, 1]$.

Теорема 2.1.5 [28]. Рассмотрим произвольную функцию f , непрерывную на отрезке $[0, 1]$. Тогда для любых $a > e$ и $\delta > 0$ существуют последовательность попарно непересекающихся отрезков $[a_n, b_n] \in [0, 1]$ и последовательность $c_n \in [a_n, b_n]$, для которых выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} |b_n - a_n| = 1; & 2) \quad & |b_n - a_n| < \delta \text{ для каждого } n; \\ 3) \quad & \frac{c_n - a_n}{b_n - a_n} > \frac{1}{a}; & 4) \quad & \int_{a_n}^{b_n} f(t) dt = f(c_n)(b_n - a_n). \end{aligned}$$

$\triangleleft$ Для каждого $x \in [0, 1)$ выберем последовательности точек $x_n \in (x, 1]$ и $y_n \in [x, x_n]$ такие, что

$$\begin{aligned} x_n - x &< \delta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \\ \frac{y_n - x}{x_n - x} &> \frac{1}{a}, \quad \int_x^{x_n} f(t) dt = f(y_n)(x_n - x). \end{aligned}$$

Такой выбор можно произвести в силу теоремы 2.1.1. Но в таком случае система отрезков $[x, x_n]$, взятых по всем $x \in [0, 1)$, образует *покрытие Витали* полуинтервала $[0, 1)$. По теореме Витали (теорема 1.1.6) существует последовательность попарно непересекающихся

сегментов $[a_n, b_n]$, являющаяся подсистемой системы отрезков $[x, x_n]$, в совокупности покрывающая почти весь полуинтервал $[0, 1)$, что и требовалось доказать. $\triangleright$

Для почти всюду дифференцируемой функции f утверждение теоремы 2.1.5 может быть усилено, см. следствие 3.3.4 на с. 67.

В заключение этого параграфа обратим внимание на другую естественную асимптотическую величину $\varliminf_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x}$. Ниже мы покажем, что эта характеристика не столь интересна, как $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x}$.

Теорема 2.1.6. *Существует непрерывная возрастающая функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что*

$$\varliminf_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} = 0,$$

где $\xi(x)$ определяется формулой (2.1.1).

$\triangleleft$ Мы построим пример (точнее, множество примеров) нужной функции с дополнительным условием $f(0) = 0$. Идея построения следующая. Определим две убывающие к нулю последовательности положительных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, со следующими свойствами: $a_0 = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$,

$$b_{n+1}(a_n - a_{n+1}) < a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_{n+2} < b_n(a_n - a_{n+1}) \quad \text{при } n \geq 0,$$

причем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, где $c_n = a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_{n+2}$, сходится.

Предположим, что такие последовательности уже заданы, и построим нужную функцию. Сначала для всех индексов положим $f(a_n) = b_n$. Теперь на каждом интервале (a_{n+1}, a_n) , $n \geq 0$, определяем функцию f так, чтобы она оказалась непрерывной и возрастающей на отрезке $[a_{n+1}, a_n]$, а, кроме того, было выполнено равенство $c_n = \int_{a_{n+1}}^{a_n} f(t) dt$. Понятно, что сделать это с большой степенью свободы позволяет неравенство $b_{n+1}(a_n - a_{n+1}) < c_n < b_n(a_n - a_{n+1})$. Отметим теперь, что

$$a_n f(a_{n+1}) = a_n b_{n+1} = \sum_{k=n}^{\infty} c_k = \sum_{k=n}^{\infty} \int_{a_{k+1}}^{a_k} f(t) dt = \int_0^{a_n} f(t) dt.$$

Поскольку функция f возрастает, то $\xi(a_n) = a_{n+1}$. Поскольку же $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, то и $\varliminf_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} = 0$.

Осталось теперь указать подходящие последовательности положительных чисел. В качестве таковых можно взять $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$ и $b_n = q^{n+1}$, где q — некоторое число из интервала $(0, 1)$. Тогда $c_n = \frac{q^{n+2}(n+2-q)}{(n+2)!}$, и все необходимые нам свойства последовательностей выполнены, что несложно проверить. $\triangleright$

2.2. Вторая гипотеза В. К. Ионина и точки Лагранжа в формуле Тейлора

Этот параграф посвящен результатам, тесно связанным с гипотезой В. К. Ионина о точках среднего значения в формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. В изложении этих вопросов мы следуем работе [14].

Рассмотрим функцию $f : (b, c) \rightarrow \mathbb{R}$, где $b < 0 < c$, имеющую непрерывные производные вплоть до $(n-1)$ -го порядка в области определения. Пусть к тому же f имеет производную порядка n всюду кроме, быть может, точки 0. Тогда для любого $x \neq 0$ из области определения справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n, \quad (2.2.1)$$

где $0 < \theta \leq 1$. Мы в соответствии с названием остаточного члена будем называть такие точки θ *точками Лагранжа*. Основным объектом исследования в этом параграфе является следующая величина, являющаяся простейшей асимптотической характеристикой расположения этих точек:

$$L_n(f) = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \theta_n(x), \quad (2.2.2)$$

где $\theta_n(x)$ для любого $x \neq 0$ обозначает верхнюю грань чисел θ из формулы (2.2.1).

Легко заметить, что без дополнительных предположений о поведении функции f величина $L_n(f)$ может быть любым числом из отрезка $[0, 1]$. В. К. Ионин предположил, что если функция f имеет n -ю производную в нуле, то выполняется неравенство

$$L_n(f) \geq e^{-(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}.$$

Этой гипотезе для $n = 1$ посвящен параграф 2.1, где она рассматривалась и доказывалась в нескольких различных формах. Для произвольного n это утверждение впервые доказал В. В. Иванов (его оригинальное доказательство, полученное в 1994 г., не опубликовано).

Теорема 2.2.1. *Если у функции f производная порядка n существует и в нуле, то*

$$L_n(f) \geq e^{-(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}.$$

Оценка в этой теореме неулучшаема, ниже мы рассмотрим примеры функций, на которых достигается равенство. Если L_n — минимальное значение из тех, что величина $L_n(f)$ может принимать в классе n раз дифференцируемых функций f , то при $n \rightarrow \infty$ имеет место примечательная асимптотическая формула

$$nL_n \sim e^{-\gamma},$$

где $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/2 + \dots + 1/n - \ln n)$ — постоянная Эйлера (см. интересный обзор [111] о постоянной Эйлера).

◁ Доказательство теоремы 2.2.1. Здесь мы приведем наиболее простое (на наш взгляд) из известных доказательств (по сути оно содержится в работе [14]). Отметим, что для доказательства используется информация о поведении функции f в точках лишь по одну сторону от точки 0.

Легко понять, что вычитая из функции f произвольный многочлен степени $\leq n$, мы не меняем функцию θ_n , поскольку неизменными остаются точки Лагранжа. Таким образом, вычитая из функции f ее многочлен Тейлора порядка n в нуле, мы без ограничения общности можем считать, что $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$. В частности, мы можем считать, что $f(x) = o(x^n)$ при $x \rightarrow 0$.

Предположим, что теорема неверна. Тогда найдется такое число $q > 0$, что $q < \exp(-(1 + 1/2 + \dots + 1/n))$ и $L_n(f) < q$.

Далее, найдется такое число $a \in (0, c)$, что на промежутке $(0, a]$ выполняется неравенство $\theta_n(x) < q$. В силу теоремы Дарбу (теорема 1.1.2) можно сделать вывод, что функция f удовлетворяет следующему неравенству (возможно, придется перейти от рассмотрения функции f к функции $-f$):

$$f^{(n)}(px) > \frac{n!}{x^n} f(x), \quad 0 < x \leq a, \quad (2.2.3)$$

где $p \in [q, 1]$.

Мы сведем исследование этого дифференциального неравенства к исследованию некоторого интегрального неравенства с отклоняющимся аргументом.

Рассмотрим непрерывную функцию $\varphi : (0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, определяемую равенством $\varphi(x) = f(x)/x^n$. Поскольку $f(x) = o(x^n)$ при $x \rightarrow 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$. Теперь рассмотрим функцию

$$g(x) = f(px) - np^n \int_0^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt.$$

Ясно, что $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0$ и $g^{(n)}(x) > 0$ (согласно неравенству (2.2.3)) на промежутке $(0, a]$. Таким образом, на этом же промежутке $g(x) > 0$, т. е.

$$f(px) > np^n \int_0^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt.$$

После замены переменной интегрирования $t = x\tau$ мы получаем неравенство

$$\int_0^1 n(1-t)^{n-1} \varphi(xt) dt < \varphi(y), \quad qx \leq y \leq x. \quad (2.2.4)$$

Ясно, что левая часть этого неравенства является значением оператора n -кратного интегрирования на функции φ . Отметим также, что $\int_0^1 n(1-t)^{n-1} dt = 1$.

Покажем, что функция φ не может принимать своего абсолютного минимума на промежутке $(0, a]$. Действительно, если бы φ достигала своего абсолютного минимума в некоторой точке $x^* \in (0, a]$, то для всех $t \in (0, a]$ выполнялось бы неравенство $\varphi(t) \geq \varphi(x^*)$ и, значит,

$$\int_0^1 n(1-t)^{n-1} \varphi(x^*t) dt \geq \int_0^1 n(1-t)^{n-1} \varphi(x^*) dt = \varphi(x^*),$$

что противоречит неравенству (2.2.4) при $y = x = x^*$. Далее, поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$, то $\varphi(x) > 0$ при $x \in (0, a]$ (иначе φ принимала бы свой (неположительный) абсолютный минимум на промежутке $(0, a]$).

Нетрудно проверить, что функция

$$\alpha \mapsto ((1+\alpha)(1+\alpha/2)\dots(1+\alpha/n))^{-1/\alpha},$$

возрастая на интервале $(-1, 0)$, принимает все значения между нулем и $\exp(-(1+1/2+\dots+1/n))$. Поэтому мы можем выбрать такое $\alpha < 0$, что $q = ((1+\alpha)(1+\alpha/2)\dots(1+\alpha/n))^{-1/\alpha}$. Отметим, что

$$\int_0^1 n(1-t)^{n-1}(xt)^\alpha dt = (qx)^\alpha, \quad x \geq 0. \quad (2.2.5)$$

Это легко следует из того, что мы имеем дело с оператором n -кратного интегрирования.

Пусть $C = \min\{\varphi(x) \mid x \in [qa, a]\}$. Понятно, что $C > 0$ в силу положительности функции φ на интервале $(0, a]$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$, то существует такое число $x_0 \in (0, qa)$, что $\varphi(x_0) < C$.

Из неравенства (2.2.4) и равенства (2.2.5) следует, что функция $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + \varepsilon x^\alpha$ для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$\int_0^1 n(1-t)^{n-1}\tilde{\varphi}(xt) dt < \tilde{\varphi}(qx), \quad x \in (0, a]. \quad (2.2.6)$$

Выберем теперь $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $\tilde{\varphi}(x_0)$ было меньше числа $\min\{\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + \varepsilon x^\alpha \mid x \in [qa, a]\}$, что нетрудно сделать, так как при $\varepsilon = 0$ это условие уже выполнено. Но тогда $\tilde{\varphi}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, поскольку $\alpha < 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$. Это означает, что функция $\tilde{\varphi}$ достигает своего абсолютного минимума в некоторой точке $x^{**} \in (0, qa)$. В частности, $\tilde{\varphi}(xt) \geq \tilde{\varphi}(x^{**})$ при $t \in (0, x^{**}/q]$ и, как следствие,

$$\int_0^1 n(1-t)^{n-1}\tilde{\varphi}(x_1 t) dt \geq \tilde{\varphi}(x^{**}) = \tilde{\varphi}(qx_1),$$

где $x_1 = x^{**}/q \in (0, a]$, что противоречит неравенству (2.2.6) при $x = x_1$. Полученное противоречие и доказывает теорему. $\triangleright$

В качестве примера, доказывающего точность неравенства в теореме 2.2.1, можно рассмотреть при $n = 1$ интегральный логарифм, а при $n > 1$ его $(n - 1)$ -кратную первообразную. Определим функцию f на промежутке $0 \leq x < 1$ как решение уравнения $f^{(n)}(x) = 1/\ln x$, удовлетворяющее начальным условиям $f^{(k)} = 0$, где $0 \leq k \leq n - 1$. Число θ определяется однозначно из формулы

$$\frac{1}{\ln \theta x} = \frac{n}{x^n} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{\ln t} dt = n \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{\ln tx} dt.$$

После простых преобразований получаем асимптотическое равенство

$$\frac{1}{\ln \theta + \ln x} = \frac{1}{\ln x} \left(1 - \frac{I_n}{\ln x} + O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right) \right)$$

при $x \rightarrow 0+$, где

$$I_n = n \int_0^1 (1-t)^{n-1} \ln t dt. \quad (2.2.7)$$

Теперь легко представить $\ln \theta$ как сумму I_n и бесконечно малой величины, так что $\theta = \theta_n(x)$ имеет пределом число e^{I_n} при $x \rightarrow 0+$. Нетрудно также показать, что

$$I_n = - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right). \quad (2.2.8)$$

Отметим, что при некоторых дополнительных (довольно ограничительных) условиях на поведение функции f в окрестности нуля теорема 2.2.1 может быть усилена, например, можно утверждать, что при определенных условиях существует обычный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \theta_n(x)$. Следующее утверждение получено в различных источниках (см., например, [5, 59, 67, 117]).

Теорема 2.2.2. *Предположим, что функция f имеет $n+m$ производных на интервале (b, c) , содержащем точку 0, причем $f^{(n+1)}(0) = f^{(n+2)}(0) = \dots = f^{(n+m-1)}(0) = 0$ тогда как $f^{(n+m)}(0) \neq 0$. Рассмотрим величину $\theta_n(x)$, задаваемую равенством*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\theta_n(x) x)}{n!} x^n \quad (2.2.9)$$

(легко видеть, что она корректно определяется для достаточно близких к нулю x). Тогда справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta_n(x) = \left(\frac{n! m!}{(n+m)!} \right)^{1/m}. \quad (2.2.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.1. При фиксированном n положим $a_m = \left(\frac{n! m!}{(n+m)!} \right)^{1/m}$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Тогда при $n = 0$ имеем $a_m = 1$ для всех m , в то время как при $n \geq 1$ последовательность $\{a_m\}$ возрастает, причем $a_1 = \frac{1}{n+1}$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 1$.

◁ Без ограничения общности можем считать, что $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ (вычитая из функции f ее многочлен Тейлора порядка n в точке 0, мы не изменяем точки Лагранжа). Используя формулу Тейлора в нуле с остаточным членом в форме Пеано для функций f (порядка $n+m$) и $f^{(n)}$ (порядка m), получаем

$$\frac{f^{(n)}(\theta_n(x)x)}{n!} x^n = f(x) = \frac{f^{(n+m)}(0)}{(n+m)!} x^{n+m} + o(x^{n+m}),$$

$$f^{(n)}(\theta_n(x)x) = \frac{f^{(n+m)}(0)}{(m)!} (\theta_n(x)x)^m + o(x^m).$$

Из этих двух равенств с учетом $f^{(n+m)}(0) \neq 0$, легко следует

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta_n(x) = \left(\frac{n! m!}{(n+m)!} \right)^{1/m}. \quad \triangleright$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.2. Отметим, что в теореме 1 работы [57] найдено также асимптотическое разложение (при некоторых дополнительных условиях на функцию f) вида

$$\theta_n(x) = \sum_{k=1}^{q+1} \frac{c_k}{k!} x^{k-1} + o(x^q), \quad x \rightarrow 0,$$

где q — некоторое натуральное число. Мы не будем приводить здесь явные выражения для коэффициентов c_k (они довольно громоздки), уточним лишь, что коэффициент c_1 согласуется с формулой (2.2.10).

Обобщение теоремы 2.2.2 на случай произвольных разделенных разностей содержится в теореме 6.3.1.

2.3. Некоторые функциональные уравнения

Довольно популярными являются исследование функциональных уравнений, связанных с классическими теоремами о среднем значении. Этой тематике посвящена интересная книга П. К. Саху (P. K. Sahoo) и Т. Ридела (T. Riedel) [144], в которой можно найти также и обширную библиографию. Кроме того, для ознакомления с методами решения функциональных уравнений можно посоветовать книги [25] и [143].

В работе [131] изучено поведение точек θ в формуле Лагранжа

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h), \quad \theta \in (0,1), \quad (2.3.1)$$

при фиксированном x и доказана следующая

Теорема 2.3.1 [131]. *Предположим, что существует такое $a > 0$, что для всех $h \in (0, a]$ точка $\theta \in (0, 1)$ в вышеприведенном равенстве находится однозначно. Тогда функция $h \mapsto \theta(h)$ является непрерывной, но не обязана быть дифференцируемой для всех значений h .*

В работе [10] изучены несколько вопросов о функциях $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что точка $\theta \in (0, 1)$ из формулы Лагранжа (2.3.1) находится однозначно, т. е. корректно определена функция от двух переменных $\theta = \theta(x, h)$. Интересной проблемой является выяснение того, когда такая функция не зависит от одной из этих переменных. Предположим дополнительно, что при $h = 0$ существуют конечные производные $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial h}$, $\frac{\partial^2 \theta}{\partial h^2}$ и $\frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}$, а функция f дифференцируема по крайней мере 4 раза. Из [10] следует, что при выполнении перечисленных условий функции f и θ обязаны удовлетворять уравнению $f'''(x) = 24\left(\frac{\partial \theta}{\partial h}\right)\big|_{h=0} f''(x)$. Кроме того, справедлива следующая

Теорема 2.3.2 [10]. *Функция $\theta(x, h)$ зависит только от x тогда и только тогда, когда $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$), при этом $\theta \equiv \frac{1}{2}$ (неявно подразумевается, что $a \neq 0$, поскольку при $a = 0$ точка θ не находится однозначно). Функция $\theta(x, h)$ зависит только от h тогда и только тогда, когда $f(x) = a + bx + ce^{kx}$ ($a, b, c, k \in \mathbb{R}$), при этом $\theta = \frac{1}{kh} \ln \frac{e^{kh} - 1}{h}$ (неявно подразумевается, что $c \neq 0$, поскольку при $c = 0$ точка θ не находится однозначно).*

Возможно, что требования на регулярность функций f и θ в вышеприведенной теореме можно ослабить.

Исследование точек среднего значения в теореме Лагранжа для выпуклых функций и некоторые смежные вопросы рассматриваются в работе [160].

Известно множество работ (см. библиографию в [144]), посвященных исследованию функциональных уравнений, связанных с теоремой Лагранжа. Например, в работе [109] (в качестве частного случая одного гораздо более общего, но громоздкого утверждения) был установлен следующий факт.

Теорема 2.3.3 [109, 144]. Пусть t и s — некоторые фиксированные действительные числа. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(sx + ty)$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{при } s = t = \frac{1}{2}, \\ bx + c & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где a, b, c — произвольные вещественные постоянные.

Отметим, что в книге [144] изучаются и другие (близкие к уравнению из теоремы 2.3.3) функциональные уравнения. Большое количество информации по функциональным уравнениям, связанным с классическими теоремами анализа можно найти в книге [143] и приведенной в ней библиографии. Изучение свойств решений некоторых функциональных уравнений, связанных с формулой Тейлора, можно найти в работе [140].

ГЛАВА 3

ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

3.1. Теорема о среднем для абстрактных операторов

Пусть A — связное топологическое пространство, через $C(A)$ будем обозначать пространство непрерывных функций $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $C(A)'$ — некоторое линейное подпространство в $C(A)$, содержащее функцию $\mathbf{1}$, тождественно равную единице на A .

Рассмотрим линейный функционал $\mathcal{F} : C(A)' \rightarrow \mathbb{R}$, обладающий следующим свойством: если $f(t) > g(t)$, $t \in A$, для $f, g \in C(A)'$, то $\mathcal{F}(f) > \mathcal{F}(g)$.

Предложение 3.1.1. *В условиях, приведенных выше, для каждой функции $f \in C(A)'$ существует $\tau \in A$ такое, что*

$$\mathcal{F}(f) = f(\tau)\mathcal{F}(\mathbf{1}).$$

◁ Допустим противное, тогда функция $g \in C(A)'$, определяемая формулой $g(t) = \mathcal{F}(f) - f(t)\mathcal{F}(\mathbf{1})$ не меняет знака (в силу связности A и непрерывности g). Но тогда и выражение $\mathcal{F}(g)$ должно иметь тот же самый знак в силу свойств функционала $\mathcal{F}$. С другой стороны, в силу линейности имеем

$$\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f) \cdot \mathbf{1} - \mathcal{F}(\mathbf{1}) \cdot f) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(\mathbf{1}) - \mathcal{F}(\mathbf{1})\mathcal{F}(f) = 0.$$

Полученное противоречие доказывает нужный результат. ▷

Полученное утверждение представляет собой *абстрактный вариант первой интегральной теоремы о среднем*. Приведем его важный частный случай.

Рассмотрим связное и измеримое в смысле Лебега множество A в $\mathbb{R}^n$. Пусть функция $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ неотрицательна и суммируема, причем $\int_A a(x) dx > 0$, и пусть подпространство $C(A)'$ составлено из тех

непрерывных функций f , для которых произведение $a \cdot f$ является суммируемой функцией. Тогда мы имеем линейный функционал $\mathcal{F} : C(A)' \rightarrow \mathbb{R}$, определяемый формулой $\mathcal{F}(f) = \int_A a(x)f(x) dx$. Ясно, что этот функционал переводит положительные функции в положительные числа, поэтому к нему применимо предложение 3.1.1. Таким образом, мы сразу получаем усиленный вариант первой интегральной теоремы о среднем.

Предложение 3.1.2. Пусть A — связное и измеримое в смысле Лебега множество в $\mathbb{R}^n$ и пусть функция $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ неотрицательна и суммируема. Если непрерывная функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $a \cdot f$ — суммируемая функция, то существует точка $\tau \in A$ со свойством

$$\int_A a(x)f(x) dx = f(\tau) \int_A a(x) dx.$$

◁ Если $\int_A a(x) dx = 0$, то функция a равна нулю на A почти всюду, и утверждение предложения становится тривиальным, поскольку в качестве τ можно взять любую точку из A . Если же $\int_A a(x) dx > 0$, все сразу следует из предложения 3.1.1, примененного к функционалу $\mathcal{F}(f) = \int_A a(x)f(x) dx$. ▷

Отметим, что непрерывная функция на множестве A в общем не обязана быть ограниченной, если только это множество не является компактным. Понятно также, что точка среднего значения τ не обязана быть единственной. Типично, когда эти точки в совокупности образуют гиперповерхность в $A \subset \mathbb{R}^n$.

3.2. Задача об асимптотике точек среднего значения для операторов

Сейчас мы рассмотрим некоторый вариант общей задачи об исследовании асимптотики точек среднего значения. Через $C(0, 1]$, как обычно, мы обозначаем линейное пространство вещественнозначных непрерывных функций на промежутке $(0, 1]$, рассмотрим также $A(0, 1]$ — некоторое его подпространство, содержащее постоянные функции. Если у функции $f \in C(0, 1]$ существует предел $f(x)$ при $x \rightarrow 0$ (возможно, бесконечный), то мы будем считать, что функция f доопределена в нуле значением этого предела.

Рассмотрим линейный непрерывный оператор

$$\mathcal{L} : A(0, 1] \rightarrow C(0, 1], \quad (3.2.1)$$

обладающий следующим свойством: если $f(t) > g(t)$ при $0 < t \leq x$, то

$$\mathcal{L}(f)(x) > \mathcal{L}(g)(x).$$

Легко понять, что при выполнении неравенства $f(t) \geq g(t)$ (при $0 < t \leq x$) будет выполнено также и $\mathcal{L}(f)(x) \geq \mathcal{L}(g)(x)$ (поскольку в описанных условиях $f(t) + \varepsilon > g(t)$ при любом $\varepsilon > 0$). Поэтому речь здесь идет о *положительном операторе* L , отображающем пространство $A(0, 1]$ с конусом положительных элементов на другое пространство $C(0, 1]$ с конусом положительных элементов (конусы положительных элементов в обоих пространствах состоят из неотрицательных функций). Подробнее о свойствах таких операторов можно узнать из специализированной литературы, см., например, книгу [20] или главу 3 в монографии [22].

При фиксированном $x \in (0, 1]$ мы получаем линейный функционал $\mathcal{F}^x : A(0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, определяемый равенством $\mathcal{F}^x(f) = \mathcal{L}(f)(x)$. С учетом предложения 3.1.1 для произвольной функции $f \in A(0, 1]$ корректно определяется функция $\xi : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ по следующей формуле (через $\mathbf{1}$ обозначена функция, тождественно равная единице):

$$\xi(x) = \max \{ \tau \mid \mathcal{L}(f)(x) = f(\tau) \mathcal{L}(\mathbf{1})(x) \}.$$

Очевидно, что функция $\xi(x)$, построенная по f , несет некоторую информацию о поведении f в окрестности нуля. Мы конкретизируем это наблюдение, исследуя поведение довольно простой (но, как оказывается, содержательной) асимптотической характеристики функции f — величины

$$L(f) = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x}. \quad (3.2.2)$$

Интересующая нас задача в наиболее общей формулировке такова: исследовать зависимость между значением $L(f)$ и поведением функции f в окрестности нуля. Как будет в дальнейшем показано, такая зависимость существует.

ПРИМЕР 3.2.1. В качестве примера оператора $\mathcal{L}$ можно рассмотреть интегральный оператор, заданный с помощью ядра — неотрицательной непрерывной функции $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Соответствующий оператор отображает пространство $C[0, 1]$ ($\subset C(0, 1]$) в себя:

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^x K(x, t) f(t) dt.$$

Можно рассмотреть и операторы с другими ядрами. В применении к конкретным операторам рассуждения, следующие ниже, приводят к красивым и неожиданным результатам.

Заметим, что функция ξ не меняется при переходе от f к $-f$ или к $f + C$, где C — произвольная константа, поэтому $L(-f) = L(f)$ и $L(f + C) = L(f)$. Очевидно также, что $0 \leq L(f) \leq 1$ для любой функции $f \in A(0, 1]$. Ничего более конкретного без дополнительных предположений относительно поведения f в окрестности нуля сказать нельзя.

Сейчас мы рассмотрим, к чему приводит предположение о том, что $L(f) < q$, где q — некоторое число из интервала $(0, 1)$. В силу непрерывности f функция $f(px)\mathcal{L}(\mathbf{1})(x) - \mathcal{L}(f)(x)$ не меняет знака на некотором промежутке $(0, a] \subset (0, 1]$ для любого $q \leq p \leq 1$. Переходя при необходимости от f к $-f$, получаем, что f на промежутке $(0, a]$ является решением неравенства

$$\mathcal{L}(f)(x) < f(px)\mathcal{L}(\mathbf{1})(x), \quad q \leq p \leq 1. \quad (3.2.3)$$

Если в рассматриваемом нами пространстве $A(0, 1]$ нет решений такого неравенства, то можно сделать вывод о том, что $L(f) \geq q$ для всех $f \in A(0, 1]$. Можно исследовать решения указанного неравенства при некоторых дополнительных ограничениях, что тоже представляет определенный интерес.

Основными неравенствами из тех, которыми мы будем заниматься, являются следующие:

$$\mathcal{L}(f)(x) < f(x)\mathcal{L}(\mathbf{1})(x), \quad (3.2.4)$$

$$\mathcal{L}(f)(x) < f(qx)\mathcal{L}(\mathbf{1})(x), \quad (3.2.5)$$

$$\mathcal{L}(f)(x) \leq f(qx)\mathcal{L}(\mathbf{1})(x). \quad (3.2.6)$$

Мы рассматриваем их на некотором промежутке $(0, a]$ при фиксированном $q \in (0, 1)$.

Далее в этом параграфе мы предполагаем, что $f \in A(0, 1]$ для некоторого зафиксированного оператора $\mathcal{L}$ (см. (3.2.1)).

Докажем серию простых лемм.

Лемма 3.2.1. Пусть f удовлетворяет неравенству (3.2.4) и $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, тогда $f(x) > 0$ на промежутке $(0, a]$.

◁ Допустим, что f принимает неположительные значения на рассматриваемом промежутке, тогда существует точка $x^* \in (0, a]$, в которой f достигает минимального значения, но тогда $f(t) \geq f(x^*)$ при $0 < t \leq x^*$, и $\mathcal{L}(f)(x^*) \geq f(x^*)\mathcal{L}(\mathbf{1})(x^*)$, что противоречит неравенству (3.2.4). ▷

Лемма 3.2.2. Пусть f удовлетворяет неравенству (3.2.4), тогда на интервале $(0, qa)$ найдется точка x^* , значение f в которой меньше любого ее значения на отрезке $[qa, a]$.

◁ Пусть такой точки нет, тогда минимум f на промежутке $(0, a]$ достигается в одной из точек отрезка $[qa, a]$. Используя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 3.2.1, приходим к противоречию с неравенством (3.2.4). ▷

Лемма 3.2.3. Если функция f достигает минимума на промежутке $(0, a]$ в некоторой точке интервала $(0, qa)$, то она не удовлетворяет неравенству (3.2.5).

◁ Если $f(t) \geq f(qx)$ для $0 < t \leq x$, то $\mathcal{L}(f)(x) \geq f(qx)\mathcal{L}(\mathbf{1})(x)$, что противоречит неравенству (3.2.5). ▷

Теперь перейдем к изложению основных результатов параграфа.

Теорема 3.2.1. Пусть функция $g \in A(0, 1]$ является решением неравенства (3.2.6) и $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$. Тогда не существует функции $f \in A(0, 1]$, удовлетворяющей одновременно неравенству (3.2.3) и условию $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow 0$.

◁ Допустим, что f — решение неравенства (3.2.3) при указанном условии. Тогда по лемме 3.2.2 существует точка $x^* \in (0, qa)$ такая, что $f(x^*) < f(x)$, где $qa \leq x \leq a$. При любом $\varepsilon > 0$ функция $f_0 = f + \varepsilon g$ является решением неравенства (3.2.5). Если ε достаточно мало, то значение f_0 в точке x^* меньше, чем все значения на отрезке $[qa, a]$. Так как $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow 0$, а $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$, то и $\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = +\infty$. Таким образом, минимум функции f_0 на промежутке $(0, a]$ достигается в некоторой точке интервала $(0, qa)$, чего не может быть согласно лемме 3.2.3. ▷

Теорема 3.2.2. Пусть функция $g \in A(0, 1]$ является решением неравенства (3.2.6) и $\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, а f удовлетворяет неравенствам (3.2.4) и (3.2.5), причем $\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $f(x) + \varepsilon g(x) > 0$ при $0 < x \leq a$.

◁ Согласно лемме 3.2.1, $f(x) > 0$ на отрезке $[qa, a]$. Можно подобрать такое $\varepsilon > 0$, что $f + \varepsilon g$ также будет больше нуля на $[qa, a]$. Но

функция $f_0 = f + \varepsilon g$ удовлетворяет неравенству (3.2.5), и, значит, по лемме 3.2.3 не может достигать минимума на интервале $(0, qa)$, а так как $\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = 0$, то f_0 не может обратиться в нуль на промежутке $(0, a]$, что и доказывает теорему. $\triangleright$

Теорема 3.2.3. Пусть семейство функций g_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, равномерно ограничено на отрезке $[qa, a]$, каждая функция g_α является решением неравенства (3.2.5) и $\lim_{x \rightarrow 0} g_\alpha(x) = 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$. Предположим, что функция f удовлетворяет системе неравенств (3.2.4) и (3.2.6), причем $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $f(x) + \varepsilon g_\alpha(x) > 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$ и $x \in (0, a]$.

$\triangleleft$ Согласно лемме 3.2.1, $f(x) > 0$ на отрезке $[qa, a]$. Так как функции g_α на этом отрезке равномерно ограничены, то можно подобрать такое $\varepsilon > 0$, что все $f + \varepsilon g_\alpha$ будут больше нуля на $[qa, a]$. Но любая функция $f_\alpha := f + \varepsilon g_\alpha$ удовлетворяет неравенству (3.2.5), и, значит, по лемме 3.2.3 не может достигать минимума на интервале $(0, qa)$, а так как $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = 0$, то f_α не может обратиться в нуль на промежутке $(0, a]$, что и доказывает теорему. $\triangleright$

Теорема 3.2.4. Пусть для всех $\alpha > 0$ функции $x \mapsto -x^\alpha$ принадлежат $A(0, 1]$ и удовлетворяют неравенству (3.2.5), а $f(x) = O(1)$ при $x \rightarrow 0$. Тогда на промежутке $(0, a]$ существует точка x_0 , в которой $\xi(x_0) > qx_0$.

$\triangleleft$ Допустим противное, т. е. $\xi(x) \leq qx$ для $0 < x \leq a$. Не ограничивая общности, можно считать, что f удовлетворяет неравенствам (3.2.4) и (3.2.6), и $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (при необходимости к функции f можно прибавить подходящую константу). Согласно теореме 3.2.3, существует такое $\varepsilon > 0$, что $f(x) > \varepsilon x^\alpha$ для всех $\alpha > 0$ и $x \in (0, a]$. Но тогда $f(x) \geq \varepsilon$ при $x > 0$, и условие $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ не может выполняться. Полученное противоречие доказывает теорему. $\triangleright$

Следствие 3.2.1. В условиях теоремы 3.2.4 существует последовательность $x_n \rightarrow 0$, для которой $\xi(x_n) > qx_n$. В частности, справедливо неравенство $L(f) \geq q$.

$\triangleleft$ Промежуток $(0, a]$ в теореме 3.2.4 может быть выбран сколь угодно малым. $\triangleright$

Основные результаты этого параграфа были получены впервые в работе [29]. В следующих параграфах мы рассмотрим применение доказанных выше теорем к конкретным операторам.

3.3. Асимптотические оценки в первой интегральной теореме о среднем значении

В этом параграфе мы исследуем вопрос об асимптотике точек среднего значения непрерывной функции для первой интегральной теоремы о среднем значении. Основные результаты были опубликованы в [28] и [29].

Условимся о некоторых обозначениях. Через $L[0, 1]$, $L^+[0, 1]$ и $C[0, 1]$ будем обозначать соответственно пространства суммируемых функций, неотрицательных суммируемых функций и непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$. Через ess sup и ess inf мы обозначаем соответственно существенные верхнюю и нижнюю грани подмножеств в $\mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.1. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. *Существенным верхним пределом* функции f в точке a (обозначающимся $\overline{\lim} \text{ess}_{x \rightarrow a} f(x)$) называется точная нижняя грань таких $t \in \mathbb{R}$, для которых $f(x) \leq t$ почти всюду на некотором отрезке $[a, \delta] \subset [a, b]$. Аналогично, *существенным нижним пределом* функции f в точке a (обозначающимся $\underline{\lim} \text{ess}_{x \rightarrow a} f(x)$) называется точная верхняя грань таких $t \in \mathbb{R}$, для которых $f(x) \geq t$ почти всюду на некотором отрезке $[a, \delta] \subset [a, b]$. Если $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \text{ess} f(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow a} \text{ess} f(x)$, то их общее значение называется *существенным пределом* f в точке a и обозначается $\lim \text{ess}_{x \rightarrow a} f(x)$.

Далее нам понадобится специальная асимптотическая характеристика неотрицательных суммируемых функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.2. Для каждой функции $a \in L^+[0, 1]$ определяем величину $D(a)$ как нижнюю грань чисел $\alpha \in \mathbb{R}$ таких, что функция $x \mapsto x^\alpha \cdot a(x)$ суммируема на $[0, 1]$.

Очевидно, что $D(a) \leq 0$ для всех $a \in L^+[0, 1]$.

Из предложения 3.1.2, если положить $A = (0, x]$, $x \in (0, 1]$, легко получаем следующее

Предложение 3.3.1. Пусть $a \in L^+[0, 1]$, $f \in C(0, 1]$, причем $f(x) = o(x^\alpha)$, где $\alpha = D(a)$ (см. определение 3.3.2). Тогда существует единственная функция $\xi : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям для всех $x \in (0, 1]$:

- 1) $0 \leq \xi(x) \leq x$;
- 2) $\int_0^x a(t)f(t) dt = f(\xi(x)) \int_0^x a(t) dt$;
- 3) если $\xi(x) < \tau \leq x$, то $\int_0^x a(t)f(t) dt \neq f(\tau) \int_0^x a(t) dt$.

Отметим, что, что интегральный оператор с неотрицательным ядром a попадает в класс операторов, рассмотренных в предыдущем параграфе. Далее мы определим несколько естественных числовых характеристик таких ядер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.3. Функционал $T : L^+[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ определяется следующим образом: для произвольной функции $a \in L^+[0, 1]$ полагаем $T(a)$ равным максимальному из таких чисел t , что для произвольной функции $f \in C[0, 1]$ выполняется неравенство $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq t$, где $\xi(x)$ определяется по функциям a и f как в предложении 3.3.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.4. Для $a \in L^+[0, 1]$ и $\alpha \in (D(a), \infty)$ (см. определение 3.3.2) полагаем $T_\alpha(a)$ равным максимальному из таких чисел t , что для произвольной функции $f \in C(0, 1]$ с асимптотикой $f(x) = O(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$ выполняется неравенство $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq t$, где $\xi(x)$ определяется по функциям a и f как в предложении 3.3.1.

Очевидно, что $T(a) \in [0, 1]$ и $T_\alpha(a) \in [0, 1]$ для всех $\alpha \in (D(a), \infty)$. Понятно, что функционал T_α определен в точности для тех функций $a \in L^+[0, 1]$, для которых функция $x \mapsto x^\alpha \cdot a(x)$ суммируема на $[0, 1]$. В частности, при $\alpha \geq 0$ область определения функционала T_α совпадает с $L^+[0, 1]$. Понятно, что при $\alpha > 0$ этот функционал естественно может быть распространен на более обширный класс функций.

Заметим, что если $a(x) = 0$ почти всюду на некотором отрезке $[0, \delta]$, где $\delta \in (0, 1]$, то для $x \in (0, \delta]$ в предложении 3.3.1 выполняется равенство $\xi(x) = x$ для любой функции f . Таким образом, для таких ядер a получаем равенство $T(a) = T_\alpha(a) = 1$. Чтобы исключить этот тривиальный случай мы далее в этом параграфе считаем, что функция $x \mapsto a(x)$ ни на каком отрезке $[0, \delta]$, где $\delta \in (0, 1]$, не совпадает почти всюду с тождественно нулевой функцией. Это условие эквивалентно тому, что функция $x \mapsto \int_0^x a(t) dt$ является положительной на промежутке $(0, 1]$.

Сформулируем теперь основные результаты параграфа.

Теорема 3.3.1. Для функции $a \in L^+[0, 1]$ положим

$$c := \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)} \quad \text{и} \quad C := \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)}.$$

Тогда выполнено неравенство $e^{-C} \leq T(a) \leq e^{-c}$.

Теорема 3.3.2. Для функции $a \in L^+[0, 1]$ положим

$$c := \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)} \quad \text{и} \quad C := \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)}.$$

Тогда для каждого ненулевого $\alpha \in (D(a), \infty)$ справедливо неравенство

$$(1 + C\alpha)^{-1/\alpha} \leq T_\alpha(a) \leq (1 + c\alpha)^{-1/\alpha},$$

в то время как при $\alpha = 0$ выполнено неравенство $e^{-C} \leq T_0(a) \leq e^{-c}$.

Теорема 3.3.3. Функционалы T и T_α принимают все значения из отрезка $[0, 1]$.

Сначала докажем две простые леммы.

Лемма 3.3.1. Для всех $t \in (-1, 0) \cap (0, \infty)$ выполнено неравенство $\ln(1+t) > \frac{t}{1+t}$.

◁ Рассмотрим функцию $h(t) = (1+t)\ln(1+t) - t$ на интервале $(-1, \infty)$. Поскольку $h'(t) = \ln(1+t)$, то h достигает своего абсолютного минимума в точке $t = 0$, но $h(0) = 0$, поэтому $h(t) > 0$ для всех $t \in (-1, 0) \cap (0, \infty)$. ▷

Следующая лемма поясняет оценки в теоремах 3.3.1 и 3.3.2.

Лемма 3.3.2. Для любого числа $d > 0$ функция $f_d: (-1/d, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая равенствами $f_d(0) = e^{-d}$ и $f_d(x) = (1+dx)^{-1/x}$ при $x \neq 0$, непрерывна, возрастает и принимает все значения из интервала $(0, 1)$.

◁ Ясно, что $\lim_{x \rightarrow 0} f_d(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+dx)^{-1/x} = e^{-d} = f_d(0)$. Непрерывность и положительность функции f_d в ненулевых точках интервала $(-1/d, \infty)$ очевидна. Кроме того, $\lim_{x \rightarrow -1/d} f_d(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f_d(x) = 1$. Для доказательства возрастания достаточно проверить положительность производной функции $x \mapsto \ln(f_d(x))$ в точках $x \neq 0$. Но по лемме 3.3.1 имеем

$$\frac{d}{dx} \ln(f_d(x)) = \frac{1}{x^2} \left(\ln(1+dx) - \frac{dx}{1+dx} \right) > 0$$

при $x \in (-1/d, 0) \cap (0, \infty)$, что и требовалось. ▷

Прежде чем приступить к доказательству теорем, рассмотрим еще три вспомогательных утверждения.

Лемма 3.3.3. Пусть $a, b \in L[0, 1]$, $b(x) > 0$ почти всюду на $[0, 1]$, тогда

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) dt}{\int_0^x b(t) dt} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{a(x)}{b(x)} \quad \text{и} \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) dt}{\int_0^x b(t) dt} \geq \underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{a(x)}{b(x)}.$$

◁ Ограничимся доказательством первого из неравенств, второе неравенство следует из первого после подстановки $a(x) \mapsto -a(x)$. Допустим, что существует константа M такая, что

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) dt}{\int_0^x b(t) dt} > M > \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{a(x)}{b(x)}.$$

По определению величины $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{a(x)}{b(x)}$ существует такое $\delta \in (0, 1]$, что почти всюду на $[0, \delta]$ выполнено неравенство $a(x) \leq M b(x)$, вследствие чего $\int_0^x a(t) dt \leq M \int_0^x b(t) dt$ при $x \in [0, \delta]$. Таким образом, $\frac{\int_0^x a(t) dt}{\int_0^x b(t) dt} \leq M$ при $x \in [0, \delta]$, чего не может быть. Полученное противоречие и доказывает лемму. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3.1. Утверждение леммы 3.3.3 можно следующим образом переформулировать в терминах абсолютно непрерывных функций (в таком виде она представляет собой некий обобщенный вариант правила Лопиталя):

Если функции f и g абсолютно непрерывны на отрезке $[0, \delta]$, при этом g возрастает на нем и $f(0) = g(0) = 0$, то

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \geq \underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

В частности, если существует предел $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство следующей леммы следует непосредственно из определений.

Лемма 3.3.4. Пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ почти всюду на $[0, 1]$, тогда

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} f(x)} \quad \text{и} \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} f(x)}.$$

Лемма 3.3.5. Для функции $a \in L^+[0, 1]$ положим

$$c = \underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)} \quad \text{и} \quad C = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)}.$$

Если $\alpha \in (D(a), \infty) \setminus \{0\}$, то

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \leq (1 + c\alpha)^{-1/\alpha} \quad \text{и} \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq (1 + C\alpha)^{-1/\alpha}$$

для функции $x \mapsto x^\alpha$.

◁ По определению функции ξ имеем равенства

$$\int_0^x a(t) t^\alpha dt = (\xi(x))^\alpha \int_0^x a(t) dt, \quad \left(\frac{\xi(x)}{x} \right)^\alpha = \frac{\int_0^x a(t) t^\alpha dt}{x^\alpha \int_0^x a(t) dt}.$$

Пусть $\alpha > 0$. По леммам 3.3.3 и 3.3.4 получаем, что

$$\begin{aligned} & \left(\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \right)^\alpha = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\xi(x)}{x} \right)^\alpha = \\ & = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) t^\alpha dt}{x^\alpha \int_0^x a(t) dt} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{a(x) x^\alpha}{a(x) x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1} \int_0^x a(t) dt} = \\ & = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{1}{1 + \alpha \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)}} = \frac{1}{1 + \alpha \underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)}} = \frac{1}{1 + c\alpha}, \end{aligned}$$

т. е. $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \leq (1 + c\alpha)^{-1/\alpha}$. Совершенно аналогично,

$$\begin{aligned} & \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \right)^\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\xi(x)}{x} \right)^\alpha = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) t^\alpha dt}{x^\alpha \int_0^x a(t) dt} \geq \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{a(x) x^\alpha}{a(x) x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1} \int_0^x a(t) dt} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{1}{1 + \alpha \frac{\int_0^x a(t) dt}{x a(x)}} = \frac{1}{1 + \alpha \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) dt}{x a(x)}} = \frac{1}{1 + C\alpha}. \end{aligned}$$

При $\alpha < 0$ требуются лишь небольшие изменения в рассуждениях. По тем же леммам 3.3.3 и 3.3.4 получаем, что

$$\begin{aligned} & \left(\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \right)^\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\xi(x)}{x} \right)^\alpha = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) t^\alpha dt}{x^\alpha \int_0^x a(t) dt} \geq \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{a(x) x^\alpha}{a(x) x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1} \int_0^x a(t) dt} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{1}{1 + \alpha \frac{\int_0^x a(t) dt}{x a(x)}} = \frac{1}{1 + \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{\int_0^x a(t) dt}{x a(x)}} = \frac{1}{1 + c\alpha}, \end{aligned}$$

т. е. $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \leq (1 + c\alpha)^{-1/\alpha}$. По аналогии с предыдущим, получа-

ем (напомним, что $\alpha < 0$)

$$\begin{aligned} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \right)^\alpha &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\xi(x)}{x} \right)^\alpha = \\ &= \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) t^\alpha dt}{x^\alpha \int_0^x a(t) dt} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{a(x) x^\alpha}{a(x) x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1} \int_0^x a(t) dt} = \\ \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{1}{1 + \alpha \frac{\int_0^x a(t) dt}{x a(x)}} &= \frac{1}{1 + \alpha \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{\int_0^x a(t) dt}{x a(x)}} = \frac{1}{1 + C\alpha}, \end{aligned}$$

т. е. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq (1 + C\alpha)^{-1/\alpha}$, что и требовалось доказать. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3.1. Докажем сначала неравенство $T(a) \leq e^{-c}$. Рассмотрим функцию $\xi(x)$ для $f(x) = x^\alpha$ при некотором $\alpha > 0$. Из леммы 3.3.5 следует, что $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \leq (1 + c\alpha)^{-1/\alpha}$. Так как $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + c\alpha)^{-1/\alpha} = e^{-c}$, то $T(a) \leq e^{-c}$, что и требовалось.

Переходим к доказательству неравенства $T(a) \geq e^{-C}$. Для этого зафиксируем некоторую функцию f и докажем для нее неравенство $L(f) = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq e^{-C}$. Отметим, что мы вправе применить теорему 3.2.4 к интегральному оператору $\mathcal{L} : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, заданному равенством $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^x a(t) f(t) dt$.

Пусть для некоторой константы D почти всюду на промежутке $(0, \delta]$ выполнено неравенство $D \geq \frac{\int_0^x a(t) dt}{x a(x)}$, тогда для всех $\alpha > 0$ имеем

$$\frac{a(x) x^\alpha}{a(x) x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1} \int_0^x a(t) dt} = \frac{1}{1 + \alpha \frac{\int_0^x a(t) dt}{x a(x)}} \geq \frac{1}{1 + \alpha D} > e^{-D}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\xi(x)}{x} \right)^\alpha = \frac{\int_0^x a(t) t^\alpha dt}{x^\alpha \int_0^x a(t) dt} > e^{-D},$$

где $\xi(x)$ — точка среднего значения для функции x^α , другими словами, для всех $\alpha > 0$ и $x \in (0, \delta]$ выполняется неравенство

$$\int_0^x a(t)t^\alpha dt > (e^{-D}x)^\alpha \int_0^x a(t) dt,$$

т. е. каждая функция $x \mapsto -x^\alpha$, $\alpha > 0$, удовлетворяет неравенству (3.2.5) для нашего оператора при $q = e^{-D}$. Поскольку $f(x) = O(x)$ при $x \rightarrow 0$, то по следствию 3.2.1 из теоремы 3.2.4 мы сразу получаем неравенство $L(f) = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq q = e^{-D}$. Так как D может быть выбрано сколь угодно близким к C , то $L(f) \geq e^{-C}$. А поскольку функция $f \in C[0, 1]$ выбрана произвольно, то $T(a) \geq e^{-C}$. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3.2. Легко видеть, что неравенство $T_\alpha(a) \leq (1 + C\alpha)^{-1/\alpha}$ следует из леммы 3.3.5.

Докажем теперь неравенство $T_\alpha(a) \geq (1 + C\alpha)^{-1/\alpha}$. При $\alpha = 0$ можно просто повторить соответствующее рассуждение из доказательства теоремы 3.3.1 (поскольку вместо условия $f \in C[0, 1]$ там использовалось лишь то, что $f \in C(0, 1]$ и $f(x) = O(1)$ при $x \rightarrow 0$).

Разберем теперь случай $\alpha > 0$. Достаточно установить, что $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq q$ для любого числа $q \in (0, (1 + C\alpha)^{-1/\alpha})$ и для любой функции f такой, что $f(x) = o(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$. Зафиксируем такие q и f . По лемме 3.3.5 для $g(x) = x^\alpha$ имеем $\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq (1 + C\alpha)^{-1/\alpha}$. Следовательно, на некотором промежутке $(0, \delta]$ имеем

$$\int_0^x a(t)t^\alpha dt > (qx)^\alpha \int_0^x a(t) dt,$$

т. е. для функции $x \mapsto -x^\alpha$ выполнено неравенство (3.2.6), если рассмотреть оператор $\mathcal{L} : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, заданный равенством $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^x a(t)f(t) dt$.

Используя утверждение теоремы 3.2.2, получаем, что никакая функция $f \in C[0, 1]$ с условием $f = o(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$, не может одновременно удовлетворять неравенствам (3.2.4) и (3.2.5) для вышеуказанного оператора. Это означает, что для любой такой функции выполнено неравенство $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq q$, что и требовалось.

Осталось разобрать случай $\alpha < 0$. Зафиксируем некоторую функцию $f \in C(0, 1]$, удовлетворяющую условию $f(x) = o(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$.

По лемме 3.3.5 для функции $g(x) = x^\alpha$ имеем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq (1 + C\alpha)^{-1/\alpha}$. Выберем теперь положительное число q такое, что $q < (1 + C\alpha)^{-1/\alpha}$. Ясно, что на некотором промежутке $(0, \delta]$ выполнено неравенство (напомним, что функция $x \mapsto x^\alpha$ убывает при $\alpha < 0$)

$$\int_0^x a(t)t^\alpha dt < (qx)^\alpha \int_0^x a(t) dt,$$

другими словами, для функции $x \mapsto x^\alpha$ выполнено неравенство (3.2.6), если рассмотреть оператор $\mathcal{L} : A(0, 1] \rightarrow C(0, 1]$, заданный равенством $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^x a(t)f(t)dt$ (подпространство $A(0, 1] \subset C(0, 1]$ состоит в точности из тех функций $f \in C(0, 1]$, для которых функция $x \mapsto a(x) \cdot f(x)$ суммируема на $[0, 1]$).

По теореме 3.2.1 (где надо взять $g(x) = x^\alpha$) функция f не может удовлетворять неравенству (3.2.3), следовательно, для этой функции мы имеем неравенство $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq q$, что и требовалось. Теорема полностью доказана. $\triangleright$

Рассмотрим теперь несколько следствий из только что доказанных теорем.

Следствие 3.3.1. Допустим, что для функции $a \in L^+[0, 1]$ существует предел $c = \lim \operatorname{ess}_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)}$, тогда

$$T(a) = e^{-c}, \quad T_\alpha(a) = (1 + c\alpha)^{-1/\alpha}, \quad \alpha \in (D(a) = -1/c, \infty).$$

$\triangleleft$ Так как $c = \overline{\lim} \operatorname{ess}_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)} = \underline{\lim} \operatorname{ess}_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)}$, то это следствие очевидно. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.5. Назовем функции $a \in L^+[0, 1]$ и $b \in L^+[0, 1]$ существенно эквивалентными при $x \rightarrow 0$, если $\lim \operatorname{ess}_{x \rightarrow 0} \frac{a(x)}{b(x)} = M$ для некоторого числа $M \in (0, \infty)$.

Следствие 3.3.2. Пусть функции $a \in L^+[0, 1]$ и $x \mapsto x^\beta$ ($\beta > -1$) существенно эквивалентны при $x \rightarrow 0$, тогда

$$T(a) = e^{-\frac{1}{1+\beta}}, \quad T_\alpha(a) = \left(1 + \frac{\alpha}{1+\beta}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha \in (D(a) = -(1+\beta), \infty).$$

◁ Легко проверить, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) dt}{x^{\beta+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{a(x)}{(\beta+1)x^\beta} = \frac{M}{\beta+1},$$

где $M = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{a(x)}{x^\beta}$. Далее имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) dt}{x^{\beta+1}}}{\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{a(x)}{x^{\beta+1}}} = \frac{M}{(\beta+1)M} = \frac{1}{\beta+1}.$$

Теперь достаточно применить следствие 3.3.1. ▷

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3.3. В силу следствия 3.3.2 для любого $\gamma \in (0, 1)$ существует функция $a \in L^+[0, 1]$ такая, что $T(a) = \gamma$, а также для любого α существует функция $a \in L^+[0, 1]$, такая что $T_\alpha(a) = \gamma$.

Докажем, что функционалы T и T_α принимают значение 0. В силу теорем 3.3.1 и 3.3.2 достаточно подобрать функцию $a \in L^+[0, 1]$, для которой выполняется равенство $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)} = \infty$. Рассмотрим функцию, заданную формулой $a(x) = \frac{1}{x \ln^2(x/2)}$. Согласно правилу Лопиталя, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{dt}{t \ln^2(t/2)}}{\frac{1}{\ln^2(x/2)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x \ln^2(x/2)}}{\frac{-2}{x \ln^3(x/2)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(x/2)}{2} = \infty,$$

следовательно, и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)} = \infty,$$

что и требовалось.

Докажем теперь, что функционалы T и T_α принимают значение 1. В силу теорем 3.3.1 и 3.3.2 достаточно подобрать такую функцию $a \in L^+[0, 1]$, что выполняется равенство $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)} = 0$.

Рассмотрим функцию, заданную формулами $a(0) = 0$ и $a(x) = e^{-1/x}$ при $x > 0$. Применяя правило Лопиталя, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{-1/t} dt}{xe^{-1/x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x}}{e^{-1/x} + \frac{1}{x} e^{-1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+x} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x a(t) dt}{xa(x)} = 0,$$

что и требовалось. Теорема полностью доказана. $\triangleright$

Рассмотрим теперь еще два следствия из доказанных выше теорем.

Следствие 3.3.3. Пусть $\alpha \in (-1, \infty)$ и пусть функция $f \in C(0, 1]$ такова, что $f(x) = O(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$. Для каждого $x \in (0, 1]$ определим $\xi(x)$ как максимальное из чисел $\tau \in [0, x]$, для которых выполняется равенство $\int_0^x f(t) dt = xf(\tau)$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq \frac{1}{e} \quad \text{при} \quad \alpha = 0$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq (1 + \alpha)^{-1/\alpha} \quad \text{при} \quad \alpha \neq 0.$$

Утверждение этого следствия является частным случаем следствия 3.3.2 (при $a(x) \equiv 1$).

Следующее следствие дополняет теорему 2.1.5.

Следствие 3.3.4. Рассмотрим произвольную непрерывную на отрезке $[0, 1]$ функцию f , которая почти всюду дифференцируема на нем. Тогда для любых чисел $a > 2$ и $\delta > 0$ существуют последовательность попарно непересекающихся отрезков $[a_n, b_n] \in [0, 1]$ и последовательность $c_n \in [a_n, b_n]$, для которых выполняются следующие

щие соотношения:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} |b_n - a_n| = 1; \quad 2) \quad |b_n - a_n| < \delta \quad \text{для каждого } n; \\ 3) \quad & \frac{c_n - a_n}{b_n - a_n} > \frac{1}{a}; \quad 4) \quad \int_{a_n}^{b_n} f(t) dt = f(c_n)(b_n - a_n). \end{aligned}$$

◁ Согласно следствию 3.3.3 для функций $f \in C[0, 1]$ с условием $f(x) = O(x)$ при $x \rightarrow 0$ выполняется неравенство $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq \frac{1}{2}$. Пусть $P \subset [0, 1]$ — множество точек, в которых функция f имеет производную. Понятно, что $\mu(P) = 1$ (μ — мера Лебега) и $f(x+y) - f(x) = O(y)$ при $y \rightarrow 0$ для любого $x \in P$. Значит, для каждого $x \in P$ можно выбрать последовательности чисел $x_n \in (x, 1]$ и $y_n \in [x, x_n]$ такие, что

$$\begin{aligned} x_n - x < \delta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \\ \frac{y_n - x}{x_n - x} > \frac{1}{a}, \quad \int_x^{x_n} f(t) dt = f(y_n)(x_n - x). \end{aligned}$$

Такой выбор можно произвести в силу следствия 3.3.3. Но в таком случае система отрезков $[x, x_n]$, взятых по всем $x \in [0, 1)$, образует *покрытие Витали* полуинтервала $[0, 1)$; по теореме Витали (теорема 1.1.6) существует последовательность попарно непересекающихся сегментов $[a_n, b_n]$, являющаяся подсистемой системы отрезков $[x, x_n]$, и покрывающая в совокупности почти весь полуинтервал $[0, 1)$, что и требовалось доказать. ▷

Необходимо отметить, что число 2 в неравенстве $a > 2$ следствия 3.3.4 нельзя заменить на меньшее. Это легко понять, рассмотрев функцию $f(x) \equiv x$. Заметим также, что в формулировке этого следствия достаточно вместо дифференцируемости функции f почти всюду потребовать конечности почти всюду правой верхней и правой нижней производных функции f . Но по теореме Данжуа — Юнга — Сакса (см., например, [42, с. 28]) такая функция является почти всюду дифференцируемой, поэтому усилить таким образом следствие 3.3.4 невозможно.

ГЛАВА 4

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С УСРЕДНЯЮЩИМ ЯДРОМ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

В этой главе приводятся результаты об асимптотике точки среднего значения для интегральных операторов специального вида. В частности, к операторам такого вида относятся операторы Тейлора, позволяющие записать формулу Тейлора в интегральной форме. Основная часть представленных здесь результатов впервые опубликована в работе [29].

4.1. Определение вспомогательной шкалы

Рассмотрим некоторую неотрицательную суммируемую функцию $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $\int_0^1 a(t) dt = 1$, и число α_0 — нижнюю грань всех $\alpha \in \mathbb{R}$, для которых функция $t \mapsto a(t)t^\alpha$ суммируема на промежутке $[0, 1]$. Отметим, что последнее условие заведомо выполнено, если $a(t)t^\alpha = o(t^{-1})$ при $t \rightarrow 0$. Понятно, что $\alpha_0 \leq 0$ для любой функции a с указанными условиями.

Сейчас мы исследуем свойства одной вспомогательной функции $q : (\alpha_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, построенной по функции a , и играющей роль своеобразной шкалы в ряде вопросов, которые изучаются в этой книге.

Определим функцию $q : (\alpha_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$q(0) = \exp \left(\int_0^1 a(t) \ln(t) dt \right) \quad (4.1.1)$$

и

$$q(\alpha) = \left(\int_0^1 a(t) t^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4.1.2)$$

при $\alpha \neq 0$. Определенная таким образом функция обладает рядом свойств, которые мы докажем в следующей лемме.

Лемма 4.1.1. *Функция $q : (\alpha_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной и возрастающей на интервале (α_0, ∞) , принимает значения из интервала $(0, 1)$, причем $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} q(\alpha) = 1$. Если к тому же функция $t \mapsto a(t)t^{\alpha_0}$ не является суммируемой на $[0, 1]$, то $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} q(\alpha) = 0$.*

◁ Непрерывность функции q в точках $\alpha \neq 0$ очевидна. Осталось показать, что $q(\alpha) \rightarrow q(0)$ при $\alpha \rightarrow 0$. Нетрудно понять, что

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 a(t)t^\beta dt - 1}{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\int_0^1 a(t)t^\beta dt \right)'_{\beta} = \int_0^1 a(t) \ln t dt.$$

Следовательно,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\int_0^1 a(t)t^\beta dt \right)^{\frac{1}{\beta}} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(1 + \beta \frac{\int_0^1 a(t)t^\beta dt - 1}{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} = e^{\int_0^1 a(t) \ln t dt},$$

что и доказывает непрерывность функции q в точке 0.

Покажем теперь, что функция $\alpha \mapsto q(\alpha)$ возрастает. Если выполнено неравенство $0 < \alpha < \beta$, то, используя неравенство Гёльдера (см. теорему 1.1.3 для показателей $p = \beta/\alpha$ и $q = \beta/(\beta - \alpha)$), получаем:

$$\begin{aligned} (q(\alpha))^\alpha &= \int_0^1 a(t)t^\alpha dt = \int_0^1 (a(t))^{\frac{\alpha}{\beta}} t^\alpha \cdot (a(t))^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}} dt \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 \left((a(t))^{\frac{\alpha}{\beta}} t^\alpha \right)^{\frac{\beta}{\alpha}} dt \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \left(\int_0^1 \left((a(t))^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}} \right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} dt \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}} = \\ &= \left(\int_0^1 a(t)t^\beta dt \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} = (q(\beta))^\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому $q(\alpha) \leq q(\beta)$. Легко убедиться в том, что равенство $q(\alpha) = q(\beta)$ невозможно, поэтому $q(\alpha) < q(\beta)$.

При $\beta < \alpha < 0$ можно записать ту же цепочку неравенств, но так как $\alpha < 0$, то в этом случае $q(\beta) < q(\alpha)$. Учитывая непрерывность рассматриваемой функции в нуле, мы получаем, что она возрастает на всей области определения.

Неравенство $q(\alpha) \geq 0$ очевидно. При этом равенство $q(\alpha) = 0$ невозможно, поскольку из него следует, что $a(t) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$. При положительных α на промежутке $[0, 1)$ справедливо неравенство $t^\alpha < 1$, поэтому

$$q(\alpha) = \left(\int_0^1 a(t) t^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\int_0^1 a(t) dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} = 1.$$

Зафиксируем число $\delta \in (0, 1)$ такое, что $M_\delta := \int_{1-\delta}^1 a(t) dt > 0$. Ясно, что

$$g(\alpha) \geq \left(\int_{1-\delta}^1 a(t) t^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\int_{1-\delta}^1 a(t) (1-\delta)^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} = (1-\delta)(M_\delta)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Используя предельный переход в этом неравенстве, получаем $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} q(\alpha) \geq 1 - \delta$. А так как $\delta \in (0, 1)$ можно выбрать сколь угодно малым, то $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} q(\alpha) \geq 1$. С учетом неравенства $q(\alpha) < 1$ получаем $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} q(\alpha) = 1$.

Если функция $t \mapsto a(t)t^{\alpha_0}$ не является суммируемой на $[0, 1]$, то получаем

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0 +} \int_0^1 a(t) t^\alpha dt \rightarrow \infty$$

в силу теоремы Б. Леви [42, с. 46]. Поскольку по условию функция $t \mapsto a(t)$ суммируема на $[0, 1]$, то $\alpha_0 \neq 0$ и неравенство $\alpha_0 > 0$ невозможно (по определению α_0). Следовательно, $\alpha_0 < 0$ и

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0 +} q(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0 +} \left(\int_0^1 a(t) t^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} = 0.$$

Лемма полностью доказана. $\triangleright$

Необходимо отметить, что лемма 4.1.1 может быть также выведена из общих свойств интегральных средних значений для функций, рассмотренных в главе 6 книги [52].

4.2. Операторы с усредняющим ядром

В. В. Ивановым были детально исследованы операторы $\overline{\mathcal{L}}$ вида

$$\overline{\mathcal{L}}(f)(x) = \int_0^1 a(t)f(tx) dt, \quad 0 < x \leq 1,$$

где a — неотрицательная интегрируемая и существенно ограниченная функция на отрезке $[0, 1]$, $\int_0^1 a(t) dt = 1$, а в качестве f рассматриваются непрерывные и суммируемые на промежутке $(0, 1]$ функции. Для такого оператора нетрудно найти решения уравнения

$$\overline{\mathcal{L}}(f)(x) = f(qx)\overline{\mathcal{L}}(\mathbf{1})(x) = f(qx)$$

при фиксированном $q \in (0, 1)$. Действительно, попытаемся подобрать решение вида $f(x) = x^\alpha$ при $\alpha > -1$. Тогда

$$\overline{\mathcal{L}}(f)(x) = \int_0^1 a(t)(tx)^\alpha dt = (qx)^\alpha = f(qx)\overline{\mathcal{L}}(\mathbf{1})(x),$$

т. е. $q = (\int_0^1 a(t)t^\alpha dt)^{1/\alpha}$. Обозначим q , соответствующее показателю α , через $q(\alpha)$ при $\alpha \neq 0$ и положим $q(0) = \exp(\int_0^1 a(t) \ln t dt)$, определяя тем самым функцию $\alpha \mapsto q(\alpha)$ на интервале $(-1, \infty)$. Нетрудно проверить, что функция $x \mapsto \ln x$ удовлетворяет уравнению

$$\overline{\mathcal{L}}(\ln)(x) = \ln(q(0)x)\overline{\mathcal{L}}(\mathbf{1})(x).$$

Согласно лемме 4.4.1, функция $q : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной и возрастающей. Кроме того, $q(\alpha) \rightarrow 1$ при $\alpha \rightarrow +\infty$ и $q(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow -1$, если $a(t) \geq \text{const} > 0$ на некотором отрезке $[0, \varepsilon]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2.1. Заметим, что для некоторых функций $a(t)$ оператор $\overline{\mathcal{L}}$ может быть определен и на функциях $x \mapsto x^\alpha$, где $\alpha \leq -1$, тогда естественно увеличивается область определения функции $q(\alpha)$, но очевидно, тем не менее, что она все равно будет непрерывной и строго возрастающей (см. лемму 4.4.1). Например, если $a(x) = O(x^\beta)$ при $x \rightarrow 0$ для $\beta > 0$, то область определения оператора $\overline{\mathcal{L}}$ можно расширить, например, до множества функций f из $C(0, 1]$, удовлетворяющих асимптотическому равенству $f(x) = o(x^{-(1+\gamma)})$ при $x \rightarrow 0$ для некоторого $\gamma \in (0, \beta)$.

В. В. Иванов в 1994 г. получил оценку снизу для величины $L(f)$ (см. формулу (3.2.2)), определенную для операторов вида $\mathcal{L}$. В этом случае $L(f)$ определяется равенством $L(f) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x}$, где функция $\xi : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ задается формулой

$$\xi(x) = \max \left\{ \tau \in (0, x] \left| f(\tau) = f(\tau) \int_0^1 a(t) dt = \int_0^1 a(t) f(tx) dt \right. \right\}.$$

Напомним, что функция $q : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ определяется равенствами $q(\alpha) = \left(\int_0^1 a(t) t^\alpha dt \right)^{1/\alpha}$ при $\alpha \neq 0$ и $q(0) = \exp \left(\int_0^1 a(t) \ln t dt \right)$. Основная теорема, доказанная В. В. Ивановым относительно операторов вида $\mathcal{L}$, выглядит следующим образом (не опубликовано).

Теорема 4.2.1. Если $f(x) = O(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$ для некоторого числа $\alpha \in (-1, \infty)$, то $L(f) \geq q(\alpha)$, если же $f(x) = o(\ln x)$ при $x \rightarrow 0$, то $L(f) \geq q(0)$.

Оценки в этой теореме неулучшаемы, что видно из рассмотрения степенных функций. В. В. Иванов использовал эту теорему для исследования условий разрешимости дифференциальных неравенств с отклоняющимся аргументом, порожденными операторами класса Эйлера (не опубликовано).

Далее мы приводим результаты, полученные в [29] и обобщающие теорему 4.2.1. Следует отметить, что при доказательстве некоторых из результатов существенно используются идеи, предложенные В. В. Ивановым.

Основным объектом нашего исследования в этом параграфе являются операторы специального вида:

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^1 A(t, x) f(tx) dt, \quad 0 < x \leq 1, \quad (4.2.1)$$

где для каждого $x \in (0, 1]$ функция $t \mapsto A(t, x)$ неотрицательна и суммируемая на отрезке $[0, 1]$ и существенно ограничена в некоторой окрестности нуля, причем эти функции (из $L_\infty[0, 1]$) непрерывно зависят от значения величины x , и $\int_0^1 A(t, x) dt = 1$.

Если в качестве $A(0, 1]$ рассмотреть множество непрерывных и суммируемых на промежутке $(0, 1]$ функций, то оператор (4.2.1) является частным случаем оператора (3.2.1).

Рассмотрим результаты параграфа 3.2 применительно к операторам вида (4.2.1). Напомним, что речь идет об оценке снизу величины $L(f)$ (см. формулу (3.2.2)), которая определяется равенством $L(f) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x}$, где $\xi : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ (в нашем случае) определяется по формуле

$$\xi(x) = \max \left\{ \tau \in (0, x] \left| f(\tau) = f(\tau) \int_0^1 A(t, x) dt = \int_0^1 A(t, x) f(tx) dt \right. \right\}.$$

Во всех оставшихся теоремах этого параграфа используются значения ранее определенной функции $\alpha \mapsto q(\alpha)$, см. с. 69.

Напомним, что последовательность функций $f_n \in L_p[0, 1]$ слабо сходится к функции $f \in L_p[0, 1]$, если $\int_0^1 f_n(t)g(t) dt \rightarrow \int_0^1 f(t)g(t) dt$ при $n \rightarrow \infty$ для всех функций g из $L_q[0, 1]$, где $p \in [1, \infty)$, $q = \frac{p}{p-1}$. При $p = 1$ подразумевается, что $q = \infty$, см., например, [15, с. 93]. Если $A(t, x)$ сходится при $x \rightarrow 0$ L_p -слабой топологии к некоторому ядру $a(t) \in L_p[0, 1]$, то это ядро почти всюду неотрицательно и $\int_0^1 a(t) dt = 1$.

Теорема 4.2.2. Пусть $\beta > 0$, $A(t, x) \rightarrow a(t)$ при $x \rightarrow 0$ относительно L_1 -слабой сходимости, и пусть $f(x) = O(x^\beta)$ при $x \rightarrow 0$, тогда $L(f) \geq q(\beta) = \left(\int_0^1 a(t)t^\beta dt \right)^{1/\beta}$.

< Выберите числа α и α_1 так, чтобы выполнялось неравенство $0 < \alpha < \alpha_1 < \beta$. Ясно, что $f(x) = o(x^{\alpha_1})$ при $x \rightarrow 0$. В силу непрерывности функции q достаточно доказать, что $L(f) \geq q(\alpha)$.

Допустим противное, тогда можно считать, что f удовлетворяет неравенствам (3.2.4) и (3.2.5) для оператора $\mathcal{L}$ вида (4.2.1) и $q = q(\alpha)$. Покажем, что функция $x \mapsto -x^{\alpha_1}$ удовлетворяет неравенству (3.2.6) для $\mathcal{L}$ и $q = q(\alpha)$. Действительно, по определению $q(\beta)$ имеем

$$-\int_0^1 a(t)(tx)^{\alpha_1} dt = -(q(\alpha_1)x)^{\alpha_1} < -(q(\alpha)x)^{\alpha_1}.$$

Так как $A(t, x) \rightarrow a(t)$ при $x \rightarrow 0$ относительно L_1 -слабой сходимости, то для всех x из некоторого промежутка $(0, \delta]$ верно неравенство

$$-\int_0^1 A(t, x)(tx)^{\alpha_1} dt < (q(\alpha)x)^{\alpha_1},$$

т. е. функция $-x^{\alpha_1}$ удовлетворяет неравенству (3.2.6). Теперь по теореме 3.2.2 существует $\varepsilon > 0$, для которого $f(x) - \varepsilon x^{\alpha_1} \geq 0$ на промежутке $(0, \delta]$, что не согласуется с тем, что $f(x) = o(x^{\alpha_1})$. Значит, $L(f) \geq q(\alpha)$, а так как α может быть выбрано сколь угодно близким к β , то $L(f) \geq q(\beta)$. $\triangleright$

Теорема 4.2.3. Пусть $\int_0^1 A(t, x) \ln t \, dt \rightarrow \int_0^1 a(t) \ln t \, dt$ при $x \rightarrow 0$, тогда если $f(x) = o(\ln x)$ при $x \rightarrow 0$, то

$$L(f) \geq q(0) = \exp \left(\int_0^1 a(t) \ln t \, dt \right).$$

$\triangleleft$ Докажем, что $L(f) > q(\alpha)$ для всех $\alpha < 0$. В противном случае без ограничения общности можно считать, что $f(x)$ удовлетворяет неравенству (3.2.3) при $q = q(\alpha)$ для функционала $\mathcal{L}$. Покажем, что $-\ln x$ удовлетворяет неравенству (3.2.6). Действительно,

$$-\int_0^1 a(t) \ln(tx) \, dt = -\ln(q(0)x) < -\ln(q(\alpha)x).$$

В силу условия теоремы для любого x на некотором промежутке $(0, \delta]$ выполняется неравенство

$$-\int_0^1 A(t, x) \ln(tx) \, dt < -\ln(q(\alpha)x).$$

т. е. $-\ln x$ удовлетворяет (3.2.6) для функционала $\mathcal{L}$. Но это противоречит теореме 3.2.1 (надо рассмотреть $g(x) = -\ln x$). $\triangleright$

Теорема 4.2.4. Пусть $\beta < 0$, $A(t, x) \rightarrow a(t)$ при $x \rightarrow 0$ относительно L_p -слабой сходимости при $p > (1 + \beta)^{-1}$, и пусть $f(x) = O(x^\beta)$ при $x \rightarrow 0$, тогда $L(f) \geq q(\beta) = \left(\int_0^1 a(t) t^\beta \, dt \right)^{1/\beta}$.

$\triangleleft$ Выберем $\alpha < \alpha_1 < \beta$ с условием, что

$$\int_0^1 A(t, x) t^{\alpha_1} \, dt \rightarrow \int_0^1 a(t) t^{\alpha_1} \, dt$$

при $x \rightarrow 0$ (это возможно сделать в силу условия теоремы). В силу непрерывности функции q достаточно показать, что $L(f) \geq q(\alpha)$. Если утверждение теоремы неверно, то можно считать, что f удовлетворяет неравенству (3.2.3) для функционала $\mathcal{L}$ при $q = q(\alpha)$. Докажем, что функция $x \mapsto x^{\alpha_1}$ удовлетворяет неравенству (3.2.6) для $\mathcal{L}$ и $q = q(\alpha)$. По определению

$$\int_0^1 a(t)(tx)^{\alpha_1} dt = (q(\alpha_1)x)^{\alpha_1} < (q(\alpha)x)^{\alpha_1}, \quad \alpha_1 < 0.$$

По условию теоремы

$$\int_0^1 A(t, x)t^{\alpha_1} dt \rightarrow \int_0^1 a(t)t^{\alpha_1} dt$$

при $x \rightarrow 0$, значит, для всех x из некоторого промежутка $(0, \delta]$ выполняется неравенство

$$\int_0^1 A(t, x)(tx)^{\alpha_1} dt < (q(\alpha)x)^{\alpha_1}.$$

Это и означает, что интересующая нас функция x^{α_1} удовлетворяет неравенству (3.2.6). Но так как f удовлетворяет неравенству (3.2.3) и, кроме того, $f(x) = o(x^{\alpha_1})$ при $x \rightarrow 0$, то в силу теоремы 3.2.1 получаем противоречие. Следовательно, $L(f) \geq q(\alpha)$ и $L(f) \geq q(\beta)$, так как α может быть выбрано сколь угодно близким к β . $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2.1 очевидно следует из теорем 4.2.2, 4.2.3 и 4.2.4, примененных к ядру вида $A(t, x) \equiv a(t)$. $\triangleright$

Заметим, что если ядро $A(t, x)$ имеет некоторую регулярность в нуле, то функционал $\mathcal{L}$ может быть определен на более обширном множестве функций. Допустим, например, что $A(t, x) \equiv a(t) = O(t^\beta)$ при $t \rightarrow 0$ для некоторого $\beta > 0$. Тогда функционал (4.2.1) естественно распространяется на класс функций f , удовлетворяющих условию $f(x) = O(x^\gamma)$ при $x \rightarrow 0$ для некоторого $\gamma \in (-1 - \beta, -1)$. Для этого случая справедлива следующая

Теорема 4.2.5. Если $f(x) = O(x^\gamma)$ при $x \rightarrow 0$, где $\gamma > -1 - \beta$, то

$$L(f) \geq \left(\int_0^1 a(t)t^\gamma dt \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

◁ Доказательство можно провести тем же методом, что и в теореме 4.2.4. ▷

Неравенство в теореме 4.2.2 точное, что нетрудно показать. Для функций $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha > 0$) получаем $\xi(x) \equiv q(\alpha)x$, а $q(\alpha) \rightarrow q(0)$ при $\alpha \rightarrow 0$. Можно предложить и другой способ, основанный на особом асимптотическом разложении.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{\ln(x/2)}$. Она непрерывна на промежутке $[0, 1)$, если положить $f(0) = 0$. Покажем, что для этой функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} = q(0)$. В силу монотонности f точка среднего значения единственная, и функция $\xi(x)$ определяется равенством

$$\frac{1}{\ln(\xi(x)/2)} = \int_0^1 \frac{A(t, x)}{\ln(xt/2)} dt.$$

Учитывая, что $1 - b < (1 + b)^{-1} < 1 - b + b^2$ для всех $b > 0$ и $\frac{1}{\ln(xt/2)} = \frac{1}{\ln(x/2)} \left(1 + \frac{\ln t}{\ln(x/2)}\right)^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(\xi(x)/2)} &= \frac{1}{\ln(x/2)} \left(\int_0^1 A(t, x) dt - \frac{\int_0^1 A(t, x) \ln t dt}{\ln(x/2)} + O\left(\frac{1}{\ln^2(x/2)}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{\ln(x/2)} \left(1 - \frac{\int_0^1 A(t, x) \ln t dt}{\ln(x/2)} + O\left(\frac{1}{\ln^2(x/2)}\right) \right) \end{aligned}$$

при $x \rightarrow 0$. Из этой формулы видно, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x/2)}{\ln(\xi(x)/2)} = 1$ и

$$\begin{aligned} \ln q(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 A(t, x) \ln t dt = \lim_{x \rightarrow 0} \ln^2(x/2) \left(\frac{1}{\ln(x/2)} - \frac{1}{\ln(\xi(x)/2)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x/2)}{\ln(\xi(x)/2)} \ln \left(\frac{\xi(x)}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\xi(x)}{x} \right), \end{aligned}$$

следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} = q(0)$.

Неравенства в остальных теоремах 4.2.3, 4.2.4 и 4.2.5 также точные, в этом легко убедиться, рассматривая функции $f(x) = x^\alpha$ при $\alpha \neq 0$.

4.2.1. Операторы с регулярным ядром. В качестве приложения полученных теорем рассмотрим случай интегрального оператора с регулярным ядром. Точнее говоря, рассмотрим оператор

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^x K(t, x) f(t) dt \quad (4.2.2)$$

с неотрицательным ядром $K(t, x)$, принадлежащим классу C^n в окрестности точки $(0, 0)$ (это поясняет термин «регулярное ядро»). Будем (без ограничения общности) считать областью его определения множество непрерывных и суммируемых на промежутке $(0, 1]$ функций. Предположим также, что первый нетривиальный дифференциал $K(t, x)$ в точке $(0, 0)$ имеет порядок n . Тогда в окрестности нуля мы имеем следующее разложение функции $K(t, x)$ для некоторых констант p_i , $0 \leq i \leq n$:

$$K(t, x) = \sum_{i=0}^n p_i t^i x^{n-i} + o\left((t^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}\right).$$

После замены переменной интегрирования $t = x\tau$ получаем другое выражение для оператора (4.2.2):

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^1 K(x\tau, x) f(x\tau) x d\tau.$$

Обозначим $\sum_{i=0}^n p_i t^i$ через $g(t)$. Очевидно, что $g(t) \geq 0$, в противном случае число $K(x\tau, x)$ не было бы неотрицательным.

В результате нормирования ядра (это возможно всегда, если ограничиться достаточно малой окрестностью нуля) мы получим несколько измененный оператор, но это обстоятельство, как легко проверить, не влияет на точки среднего значения. Поскольку

$$K(x\tau, x) = x^n (g(\tau) + o(1)),$$

то в результате нормирования мы получаем оператор

$$\mathcal{L}_1(f)(x) = \int_0^1 A(t, x) f(xt) dt,$$

где

$$A(t, x) = \frac{g(t) + o(1)}{\int_0^1 g(t) dt + o(1)}.$$

Здесь $o(1)$ означает величину, зависящую от x и стремящуюся к нулю равномерно по t при $x \rightarrow 0$. Так как $g(t) \geq 0$, то

$$\int_0^1 g(t) dt > 0$$

и

$$A(t, x) \rightarrow g(t) \left(\int_0^1 g(t) dt \right)^{-1}$$

при $x \rightarrow 0$ относительно равномерной нормы. Рассматривая теперь $g(t) \left(\int_0^1 g(t) dt \right)^{-1}$ в качестве ядра $a(t)$, мы вправе применить к соответствующему оператору (а, следовательно, и к оператору $\mathcal{L}$) полученные ранее теоремы.

Пусть

$$q_{reg}(\alpha) = \left(\int_0^1 g(t) t^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_0^1 g(t) dt \right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad \text{при } \alpha \neq 0,$$

и

$$q_{reg}(0) = \exp \left(\int_0^1 g(t) \ln t dt \left(\int_0^1 g(t) dt \right)^{-1} \right).$$

Понятно, что $\alpha \mapsto q_{reg}(\alpha)$ является функцией $\alpha \mapsto q(\alpha)$ (см. лемму 4.1.1) для ядра $a(t) = g(t) \left(\int_0^1 g(t) dt \right)^{-1}$. Из теорем 4.2.2, 4.2.3 и 4.2.4 немедленно следует

Теорема 4.2.6. Оператор (4.2.2) таков, что справедливы оценки

$$L(f) \geq q_{reg}(\alpha) \quad \text{и} \quad L(f) \geq q_{reg}(0)$$

для функций, удовлетворяющих условиям $f(x) = O(x^\alpha)$ и $f(x) = o(\ln x)$ при $x \rightarrow 0$ соответственно.

Оценки в этой теореме неумлучшаемы также как и в предыдущих теоремах.

4.2.2. Операторы с простым усредняющим ядром. Далее мы ограничимся исследованием операторов (4.2.1) с такими усредняющими ядрами, что $A(t, x) \equiv a(t) > 0$ почти всюду на отрезке $[0, 1]$. Для таких операторов справедлива следующая

Лемма 4.2.1. Пусть функция f удовлетворяет неравенству (3.2.6) на промежутке $(0, a]$ и имеет на нем минимум, который достигается в какой-нибудь из точек промежутка $(0, qa]$. Тогда функция f постоянна.

◁ Пусть точка qb — точка минимума функции f на промежутке $(0, a]$, $0 < b \leq a$. Если f на этом промежутке не является постоянной, то в силу положительности ядра выполняется неравенство

$$\int_0^1 a(t)f(tb) dt > \int_0^1 a(t)f(qx) dt = f(qb),$$

что противоречит неравенству (3.2.6). Следовательно, f на промежутке $(0, b]$ постоянна. Аналогично можно показать, что она постоянна на любом промежутке вида $(0, b/q^s]$ ($b/q^s \leq a$). Если же $b/q^s < a < b/q^{s+1}$, то точка qa является точкой минимума функции на промежутке $(0, a]$, и, применяя то же рассуждение, мы доказываем лемму. ▷

Теорема 4.2.7. Нижние границы тех значений q , при которых система неравенств (3.2.4) и (3.2.6) имеет решение f , определяются свойствами этого решения в соответствии со следующими тремя утверждениями:

- (а) если $f(x) = o(\ln x)$ при $x \rightarrow 0$, то $q > q(0)$;
- (б) если $-1 < \alpha < 0$ и $f(x) = o(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$, то $q > q(\alpha)$;
- (в) если $\alpha > 0$ и $f(x) = A + o(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$, где A — некоторая постоянная величина, то $q > q(\alpha)$.

◁ Для доказательства точности оценок в данной теореме достаточно рассмотреть степенные функции.

Доказательство пункта а) теоремы. Допустим, что $q \leq q(0)$. Рассмотрим функцию $g(x) = -\ln x$, удовлетворяющую неравенству

$$\mathcal{L}(-\ln)(x) = -\ln(q(0)x)\mathcal{L}(\mathbf{1})(x) < -\ln(qx)\mathcal{L}(\mathbf{1})(x).$$

Заметим, что функция $f(x) + c$ также удовлетворяет условиям теоремы. Подберем такую константу c , что наименьшее значение функции $f(x) + c$ на отрезке $[qa, a]$ равно нулю. Тогда на интервале $(0, qa)$

функция $f(x) + c$ тоже неотрицательна. В противном случае мы могли бы подобрать $\varepsilon > 0$ такое, что функция $f_0(x) = f(x) + \varepsilon g(x)$ принимала бы отрицательные значения. Но так как $f_0(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 0$ и $f_0(x) \geq 0$ при $x \in [qa, a]$, то по лемме 4.2.1 $f_0(x)$ — константа, чего не может быть. Если же $f(x) + c \geq 0$ при $x \in (0, a]$, то существует точка минимума x_0 , и из положительности ядра должно следовать

$$\int_0^1 a(t)f(tx_0) dt \geq \int_0^1 a(t)f(x_0) dt = f(x_0),$$

что противоречит неравенству (3.2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПУНКТА б) ТЕОРЕМЫ. Аналогично замечаем, что в случае $q \leq q(\alpha)$ функция $g_\alpha(x) = x^\alpha$ удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{L}(g)(x) = (q(\alpha)x)^\alpha \mathcal{L}(\mathbf{1})(x) < (qx)^\alpha \mathcal{L}(\mathbf{1})(x).$$

Далее достаточно повторить рассуждения предыдущего пункта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПУНКТА в) ТЕОРЕМЫ. Поскольку функция $f - A$, очевидно, удовлетворяет тем же неравенствам (3.2.4) и (3.2.6), как и функция f , без ограничения общности можно считать, что $A = 0$. Тогда, в соответствии с условием теоремы, $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ и, следовательно, по лемме 3.2.1 $f(x) > 0$, когда $0 < x \leq a$.

Здесь нам также пригодится вспомогательная функция f_0 , которая задается формулой $f_0 = f(x) - \varepsilon g_\alpha(x)$, где $\varepsilon > 0$, а $g_\alpha(x) = x^\alpha$. Если ε достаточно мало, то $f_0(x) > 0$ при $qa \leq x \leq a$. Кроме того, $f_0(0) = 0$. Поэтому, если бы функция f_0 еще где-нибудь принимала неположительные значения, то это могло бы быть лишь в точках интервала $(0, qa)$, среди которых у нее нашлась бы и точка минимума. Это невозможно в силу леммы 4.2.1 и того факта, что f_0 удовлетворяет неравенству (3.2.6). Следовательно, $f_0(x) > 0$ или $f(x) > \varepsilon x^\alpha$ всюду на промежутке $0 < x \leq a$, что не согласуется с условием теоремы. Теорема доказана полностью. $\triangleright$

Все утверждения, доказанные в данном параграфе, непосредственно применимы к оператору $\mathcal{L}$ с ядром $a(t) = \beta(1-t)^{\beta-1}$, где $\beta \geq 1$.

4.3. Еще раз о точках Лагранжа в формуле Тейлора

В этом параграфе мы продолжим исследования асимптотики точек Лагранжа в формуле Тейлора. В частности, мы покажем, что результат теоремы 2.2.1 может быть выведен из более общих утверждений. Излагаемые здесь результаты получены в [14].

Напомним, что мы рассматривали функцию $f : (b, c) \rightarrow \mathbb{R}$, где $b < 0 < c$, имеющую на области определения непрерывные производные вплоть до $(n-1)$ порядка. При этом f имеет производную порядка n всюду, кроме, быть может, точки 0. Тогда для любого $x \neq 0$ из области определения справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n,$$

где $0 < \theta \leq 1$. Ранее мы называли такие точки θ *точками Лагранжа*. Нас в первую очередь интересует величина $L_n(f) = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \theta_n(x)$, где $\theta_n(x)$ для любого $x \neq 0$ обозначает верхнюю грань чисел θ из вышеприведенной формулы.

Без ограничения общности будем считать, что

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0, \quad (4.3.1)$$

чего можно легко добиться, вычитая из функции f ее многочлен Тейлора порядка $(n-1)$. Очевидно, что точки Лагранжа при этом не изменятся. Таким образом, мы можем считать, что $f(x) = o(x^{n-1})$ при $x \rightarrow 0$. Далее мы покажем, что если на f наложить более сильное требование $f(x) = O(x^{n+\alpha})$ при $\alpha > -1$, то можно получить нетривиальную оценку снизу для величины $L_n(f)$. Введем необходимые обозначения. Для каждого $\alpha > -1$ положим

$$q_{T,n}(\alpha) = ((1+\alpha)(1+\alpha/2) \times \dots \times (1+\alpha/n))^{-1/\alpha}$$

при $\alpha \neq 0$ и

$$q_{T,n}(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} q_n(\alpha) = e^{-(1+1/2+\dots+1/n)}.$$

Легко показать, что функция $\alpha \mapsto q_{T,n}(\alpha)$ непрерывно возрастает на интервале $(-1, \infty)$ от 0 до 1. Действительно, нетрудно проверить, что

$q_{T,n}(\alpha) = \left(\int_0^1 n(1-t)^{n-1} t^\alpha dt \right)^{1/\alpha}$ при $\alpha \neq 0$ и $q_{T,n}(0) = \exp \left(\int_0^1 n(1-t)^{n-1} \ln t dt \right)$, т. е. функция $\alpha \mapsto q_{T,n}(\alpha)$ является частным случаем функции $\alpha \mapsto q(\alpha)$ из леммы 4.1.1. Из этой леммы мы и получаем нужное утверждение о поведении функции $\alpha \mapsto q_{T,n}(\alpha)$. В частности получаем, что

$$\int_0^1 n(1-t)^{n-1} \ln t dt = - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right),$$

в чем можно убедиться и непосредственным интегрированием по частям.

Теорема 4.3.1. *Если асимптотика $f(x)$ при $x \rightarrow 0$ описывается формулой $f(x) = O(x^{n+\alpha})$ для какого-либо $\alpha > -1$, то $L_n(f) \geq q_{T,n}(\alpha)$.*

Ясно, что теорема 4.3.1 является обобщением теоремы 2.2.1.

При любом $\alpha > -1$ оценка, указанная в теореме 4.3.1, точна. Действительно, при $\alpha \neq 0$ $L_n(f) = q_{T,n}(\alpha)$ для функции $f(x) = x^{n+\alpha}$, как нетрудно посчитать.

Для $\alpha = 0$ в качестве примера можно рассмотреть функцию f , удовлетворяющую условиям $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ и $f^{(n)}(x) = g(x)$ при $x \in (-1, 1)$, где (непрерывная) функция g определяется формулами $g(x) = 1/\ln|x|$ при $x \neq 0$ и $g(0) = 0$. Нетрудно понять (см. теорему 1.3.7), что

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{\ln t} dt = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{\ln tx} dt$$

при $x > 0$ (при $x < 0$ рассуждения аналогичны). Число θ в данном случае однозначно определяется точкой x и может быть найдено из следующего соотношения:

$$\frac{1}{\ln \theta x} = \frac{n}{x^n} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{\ln t} dt = n \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{\ln tx} dt.$$

Поскольку $1-b < (1+b)^{-1} < 1-b+b^2$ при $b > 0$ и $\frac{1}{\ln tx} = \frac{1}{\ln x} \left(1 + \frac{\ln t}{\ln x} \right)^{-1}$, из полученного равенства следует

$$\frac{1}{\ln \theta + \ln x} = \frac{1}{\ln x} \left(1 - \frac{I_n}{\ln x} + O \left(\frac{1}{\ln^2 x} \right) \right)$$

при $x \rightarrow 0$, где $I_n = n \int_0^1 (1-t)^{n-1} \ln t \, dt$. Ясно, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \theta + \ln x} = 1$. Учитывая это, нетрудно показать, что $\ln \theta = I_n + o(1)$ при $x \rightarrow 0$, таким образом, функция $\theta = \theta_n(x)$ имеет предел при $x \rightarrow 0$, равный $e^{I_n} = \exp(-(1 + 1/2 + \dots + 1/n)) = q_{T,n}(0)$.

Заслуживающим особого интереса является случай $\alpha = 1$, т. е. когда $f(x) = O(x^{n+1})$ при $x \rightarrow 0$. По теореме 4.3.1 в этом случае имеет место неравенство $L_n(f) \geq 1/(n+1)$. Эта оценка хорошо согласуется с известным утверждением, что если $f(x)$ имеет в нуле отличную от нуля $(n+1)$ -ю производную, то $\lim_{x \rightarrow 0} \theta_n(x) = 1/(n+1)$ (см. теорему 2.2.2).

Далее мы покажем, что утверждение теоремы 4.3.1 вытекает из одного более общего утверждения.

Наша ближайшая цель — сведение доказательства теоремы 4.3.1 к исследованию конкретных интегральных неравенств с отклоняющимся аргументом того вида, что были рассмотрены ранее.

Будем считать (это не ограничивает общности), что на промежутке $(0, a]$ выполняется неравенство $\theta_n(x) \leq q$ для некоторого $0 < q < 1$. В силу теоремы Дарбу (теорема 1.1.2) можно сделать вывод, что функция f удовлетворяет следующему неравенству (возможно, придется перейти к рассмотрению функции $-f$ вместо f):

$$f^{(n)}(px) > \frac{n!}{x^n} f(x), \quad 0 < x \leq a, \quad p \in (q, 1]. \quad (4.3.2)$$

Понятно, что при $p = q$ это неравенство может лишь перейти в равенство.

Теперь нам предстоит определить возможные значения q при некоторых предположениях о поведении функции f в окрестности точки 0. Имеет место следующая

Теорема 4.3.2. Допустимые значения q в неравенстве (4.3.2) определяются асимптотикой $f(x)$ при $x \rightarrow 0$ следующим образом:

- (а) если $f(x) = o(x^n \ln x)$, то $q > q_{T,n}(0)$;
- (б) если $-1 < \alpha < 0$ и $f(x) = o(x^{n+\alpha})$, то $q > q_{T,n}(\alpha)$;
- (в) если $\alpha > 0$ и $f(x) = Ax^n + o(x^{n+\alpha})$, где A — постоянная, то $q > q_{T,n}(\alpha)$.

Замечание 4.3.1. Ясно, что теорема 4.3.1 является простым следствием только что сформулированной теоремы 4.3.2. Кроме того, можно сделать некоторые дополнительные замечания относительно поведения функции $\theta_n(x)$. Например, если мы знаем, что

$q > q_{T,n}(\alpha)$, то в любой окрестности нуля должны существовать точки $x > 0$, в которых $\theta_n(x) > q_{T,n}(\alpha)$.

◁ Мы сведем исследование дифференциального неравенства (4.3.2) к исследованию некоторого интегрального неравенства с отклоняющимся аргументом. Предварительно мы рассмотрим интегральный оператор, попадающий в класс тех, что подробно изучены в параграфе 4.2:

$$\mathcal{L}(\varphi)(x) = n \int_0^1 (1-t)^{n-1} \varphi(tx) dt$$

для $0 < x \leq a$. Этот интегральный оператор имеет довольно специфичное ядро $x \mapsto n(1-x)^{n-1}$ (ядро Тейлора).

Из условий теоремы 4.3.2 следует, что функция $\varphi(x) = f(x)/x^n$ суммируема на промежутке $(0, a]$. Это позволяет проинтегрировать неравенство (4.3.2) n раз и получить нужное нам интегральное неравенство

$$f(px) > np^n \int_0^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt.$$

Точнее говоря, рассмотрим функцию

$$g(x) = f(px) - np^n \int_0^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt,$$

тогда $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0$ и $g^n(x) > 0$ (согласно неравенству (4.3.2)) на промежутке $(0, a]$, следовательно, $g(x) > 0$ на этом же промежутке, что и требовалось.

После замены переменной интегрирования $t = x\tau$ мы получаем неравенство

$$\mathcal{L}(\varphi)(x) < \varphi(y) \mathcal{L}(\mathbf{1})(x) = \varphi(y), \quad qx < y \leq x. \quad (4.3.3)$$

В этом случае оператор $\mathcal{L}$ переводит функции $\varphi \in C(0, a]$ с условием $\varphi(x) = o(x^{-1})$ при $x \rightarrow 0$ в функции

$$\mathcal{L}(\varphi)(x) = \int_0^1 n(1-t)^{n-1} \varphi(tx) dt$$

из класса $C[0, a]$. Таким образом, к этому оператору могут быть применены общие результаты параграфа 4.2.

Из неравенства (4.3.3) сразу получаем, что функция φ удовлетворяет неравенствам (3.2.4) и (3.2.6), рассматриваемым для данного оператора $\mathcal{L}$. Надо также отметить, что оценка $f(x) = o(x^n g(x))$ влечет оценку $\varphi(x) = o(g(x))$. Кроме того, как уже отмечалось, функция $\alpha \mapsto q_{T,n}(\alpha)$ совпадает с функцией $\alpha \mapsto q(\alpha)$, соответствующей данному конкретному оператору. В силу положительности ядра Тейлора на промежутке $[0, 1)$ мы вправе воспользоваться теоремой 4.2.7, которая и гарантирует указанные в условиях теоремы 4.3.2 оценки.

Таким образом, теорема 4.3.2, а вместе с ней и теорема 4.3.1, доказаны. $\triangleright$

ГЛАВА 5

НЕСКОЛЬКО ДОБАВЛЕНИЙ

Излагаемые в этой главе результаты были получены в работе [29] (см. также [30] и [31]). Они естественным образом дополняют результаты, приведенные в предыдущих трех главах, и могут служить основой дальнейших исследований.

5.1. Решения интегральных уравнений с отклоняющимся аргументом

В этом параграфе мы остановимся на исследовании свойств решений интегральных уравнений вида

$$\int_0^1 a(t)f(tx)dt = f(qx), \quad 0 < x \leq 1, \quad (5.1.1)$$

где $a(t)$ — неотрицательная, суммируемая и существенно ограниченная на отрезке $[0, 1]$ функция, причем $\int_0^1 a(t)dt = 1$, а q — некоторое число из интервала $(0, 1)$. Будем также предполагать, что не существует такой окрестности нуля, в которой $a(t) = 0$ почти всюду. В качестве f будем рассматривать функции, непрерывные на промежутке $(0, 1]$ и такие, что указанный в уравнении интеграл существует. Такие функции, очевидно, образуют линейное пространство.

Если рассмотреть самый простой случай $a(t) \equiv 1$, то доказанные прежде результаты позволяют заключить (см., например, следствие 3.3.3, что асимптотика $f(x) = O(1)$ при $x \rightarrow 0$ влечет неравенство $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq 1/e$, где $\xi(x)$ — крайняя правая точка среднего значения функции f на отрезке $[0, x]$. Таким образом, очевидно, что ограниченная строго монотонная функция f не может являться решением уравнения (5.1.1) при $a(x) \equiv 1$ и $1 > q > 1/e$. Но это рассуждение не распространяется на класс осциллирующих функций, и,

действительно, как будет ясно из дальнейшего, среди функций такого вида существует бесконечномерное подпространство решений указанного уравнения.

Непосредственной целью этого параграфа является некоторое описание структуры множества решений. Сначала мы остановимся на качественных утверждениях, потом обратимся к вопросам существования решений.

Нам понадобится функция $\alpha \mapsto q(\alpha)$, свойства которой доказаны в лемме 4.1.1. Напомним, что она определяется равенствами

$$q(0) = \exp \left(\int_0^1 a(t) \ln t dt \right), \quad q(\alpha) = \left(\int_0^1 a(t) t^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{при } \alpha \neq 0.$$

Как было показано в лемме 4.1.1, такая функция непрерывна, строго возрастает и принимает значения на интервале $(0, 1)$.

Далее в этом параграфе мы предполагаем, что $0 < q < 1$.

Лемма 5.1.1. Пусть функции $g(x)$ и $h(x)$ являются решениями неравенства $\int_0^1 a(t)f(tx)dt \leq f(qx)$ на некотором промежутке $(0, a]$, $h(x) = o(g(x))$ и $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$. Тогда если $h(x) \geq C$ на отрезке $[qa, a]$, то $h(x) \geq C$ и на всем промежутке $(0, a]$.

◁ Допустим противное, т. е. существует точка $x^* \in (0, qa)$, в которой $h(x) < C$, тогда можно подобрать такие $\varepsilon_0 > 0$ и затем $\varepsilon > 0$, что функция $h_0(x) = h(x) + \varepsilon g(x) + \varepsilon_0$ будет строго больше C на отрезке $[qa, a]$ и $h_0(x^*) < C$. Кроме того, очевидно, что $h_0(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 0$ и $h_0(x)$ удовлетворяет неравенству из условия леммы. Но тогда функция $h_0(x)$ достигает своего минимума на промежутке $(0, a]$ в некоторой точке qx_0 , где $x_0 \in (0, a]$, причем $h_0(x_0) < C$. Для всех $x \in (0, x_0)$ $h_0(x) \geq h_0(qx)$, а так как $h_0(x) \rightarrow \infty$, то в некоторой окрестности нуля это неравенство строгое. Пользуясь теперь тем, что $a(x)$ не равняется почти всюду нулю ни в какой окрестности нуля, легко получаем, что $\int_0^1 a(t)h_0(tx_0)dt > h_0(qx_0)$, чего не может быть. ▷

Теорема 5.1.1. Пусть $h(x)$ — решение уравнения (5.1.1), $g(x)$ — решение неравенства $\int_0^1 a(t)f(tx)dt \leq f(qx)$ с одним и тем же q , причем $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, а $h(x) = o(g(x))$. Тогда $g(x)$ — ограниченная функция.

◁ Очевидно, что $h(x)$ и $-h(x)$ удовлетворяют неравенству $\int_0^1 a(t)f(tx)dt \leq f(qx)$. Поэтому, если $m \leq h(x) \leq M$ на некотором отрезке вида $[qa, a]$, то по предыдущей лемме $m \leq h(x) \leq M$ и на всем промежутке $(0, a]$, что и доказывает теорему. ▷

Следующие лемма и теорема позволяют сравнивать некоторые решения уравнения (5.1.1) с уже известными.

Лемма 5.1.2. Пусть $q = q(\alpha)$, где $\alpha > 0$, и для некоторой функции f со свойством $f(x) = o(1)$ при $x \rightarrow 0$ выполняется неравенство $\int_0^1 a(t)f(tx)dt \leq f(qx)$. Тогда, если на некотором отрезке $[qa, a]$ верно неравенство $f(x) \geq Cx^\alpha$, то оно выполняется и на промежутке $(0, a]$.

◁ Допустим противное, т. е. существует точка $x^* \in (0, qa)$, в которой $f(x) < Cx^\alpha$. Можно подобрать $\varepsilon > 0$ такое, что функция $f_0(x) = f(x) - (C - \varepsilon)x^\alpha$ была бы больше нуля на отрезке $[qa, a]$ и $f_0(x^*) < 0$, но тогда функция $f_0(x)$ принимает свое минимальное значение в некоторой точке qx_0 , где $x_0 \in (0, a]$, причем $f_0(qx_0) < 0$, кроме того, $f_0(x)$ удовлетворяет тому же неравенству, что и функция $f(x)$. Но так как $f(x) \geq f(qx_0)$ при $x \in (0, x_0]$ и $f_0(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, то $\int_0^1 a(t)f_0(x_0t)dt > f(qx_0)$, чего не может быть. Заметим, что строгое неравенство вытекает из того, что $a(x)$ не равна почти всюду нулю ни в какой окрестности нуля. ▷

Теорема 5.1.2. Пусть $q = q(\alpha)$, где $\alpha > 0$, и функция $f(x)$ является решением уравнения (5.1.1). Тогда если $f(x) = o(1)$ в нуле, то существуют такие константы C_1 и C_2 , что $C_1x^\alpha \leq f(x) \leq C_2x^\alpha$ на промежутке $(0, 1]$.

◁ Достаточно заметить, что и функция f и функция $-f$ являются решениями неравенства $\int_0^1 a(t)f(tx)dt \leq f(qx)$, и применить лемму 5.1.2. ▷

Оставшаяся часть параграфа посвящена вопросам существования решений уравнения (5.1.1). По лемме 4.1.1 имеет место равенство $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} q(\alpha) = 1$. Рассмотрим также α_0 — нижнюю грань тех $\alpha \in \mathbb{R}$, для которых определен интеграл $\int_0^1 a(t)t^\alpha dt$, и пусть $q^* = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0+} q(\alpha)$. Ясно, что $q^* \in [0, 1)$, хотя в ряде случаев можно утверждать, что $q^* = 0$ (см. лемму 4.1.1).

Таким образом, для любого $q \in (q^*, 1)$ мы имеем решение уравнения (5.1.1) вида x^α , где α — вещественное число, или же $\ln x$ при $q = q(0)$. Заметим, что при $\alpha > 0$ решение ограничено, в противном случае — не ограничено. Отметим также, что для любого q функция $f(x) \equiv \text{const}$ является решением уравнения (5.1.1).

Возникает ряд естественных вопросов. Существуют ли другие решения уравнения (5.1.1)? Сколько их? Можно ли для заданного $q \leq q(0)$ найти ограниченные решения? Далее мы постараемся ответить на эти вопросы.

Заметим, что если для некоторого комплексного α выполняется равенство $\int_0^1 a(t)t^\alpha dt = q^\alpha$, то $f_1(x) = \operatorname{Re}(x^\alpha)$ и $f_2(x) = \operatorname{Im}(x^\alpha)$ будут вещественными решениями нашего уравнения. Для того, чтобы не было двусмысленности, отметим, что под выражением τ^α , где $\tau > 0$, а α — комплексное число, мы подразумеваем $e^{\alpha \ln \tau}$, где $\ln \tau$ — обычный вещественный логарифм.

Итак, можно попытаться найти решения нашего уравнения, решая в комплексной плоскости уравнение

$$\int_0^1 a(t)t^\alpha dt = q^\alpha. \quad (5.1.2)$$

Отметим, что тогда $f_1(x) = x^a \cos(b \ln x)$ и $f_2(x) = x^a \sin(b \ln x)$ будут осциллирующими функциями ($\alpha = a + ib$) при $b \neq 0$. При $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ они ограничены, а при $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ к тому же $f_i(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

Даже в простейшем случае $a(x) \equiv 1$ для уравнения (5.1.2) не удается найти явного вида решения. Задача принимает следующий вид. Найти решения уравнения

$$\frac{1}{1+\alpha} = q^\alpha = e^{\alpha \ln q},$$

если $\operatorname{Re}(\alpha) > -1$ или $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ в зависимости от условия.

Многие подобные задачи хорошо изучены. Классическим примером является исследование Л. С. Понтрягиным корней квазимногочлена [38]. Сложность нашей задачи состоит в задании левой части уравнения (5.1.2) через интеграл. На этом мы еще остановимся, а пока докажем следующий результат.

Теорема 5.1.3. Пусть $q = q(\beta)$ и $\beta \neq 0$. Тогда не существует решений уравнения $\int_0^1 a(t)t^\alpha dt = q^\alpha$ таких, что $\operatorname{Re}(\alpha)$ лежала бы строго между β и нулем.

◁ Разберем сначала случай $\beta < 0$. Тогда, если бы существовало α , удовлетворяющее условиям теоремы, то $g(x) = \operatorname{Re}(x^\alpha)$ было бы решением уравнения (5.1.1), но $h(x) = x^\beta$ также является решением этого уравнения, причем $h(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 0$, а $g(x) = o(h(x))$,

но тогда по теореме 5.1.1 $g(x)$ должно быть ограниченным, чего не может быть.

Пусть теперь $\beta > 0$ и существует $\alpha \in (0, \beta)$, удовлетворяющее уравнению

$$\int_0^1 a(t)t^\alpha dt = q^\alpha = q^\alpha \int_0^1 a(t) dt.$$

Ясно, что

$$\int_0^1 a(t)t^\alpha t^{-\alpha} dt = q^{-\alpha} \int_0^1 a(t)t^\alpha dt.$$

Пусть $\bar{a}(t) = a(t)t^\alpha (\int_0^1 a(t)t^\alpha dt)^{-1}$, тогда $\int_0^1 \bar{a}(t)t^{-\alpha} dt = q^{-\alpha}$. Точно также $\int_0^1 \bar{a}(t)t^{-\beta} dt = q^{-\beta}$, т. е. $-\alpha$ и $-\beta$ удовлетворяют аналогичному уравнению с другим ядром. Заметим, что $\bar{a}(x) = O(x^{-\alpha})$ при $x \rightarrow 0$, поэтому все преобразования законны. Далее остается сослаться на первую часть доказательства теоремы. Действительно, должно быть $-\beta < -\alpha < 0$, что невозможно. $\triangleright$

Теперь более пристально взглянем на левую часть уравнения (5.1.2). После замены переменной интегрирования $t = e^{-\tau}$, мы замечаем, что

$$F(\alpha) = \int_0^1 a(t)t^\alpha dt = \int_0^{+\infty} a(e^{-\tau})e^{-\tau(\alpha+1)} d\tau,$$

т. е. мы имеем дело с преобразованием Лапласа функции $\phi(\tau) = a(e^{-\tau})e^{-\tau}$. Теперь из известных свойств преобразования Лапласа легко сделать вывод о том, что в области $\operatorname{Re}(\alpha) > -1$ $F(\alpha)$ является аналитической функцией, и $f(a+ib) \rightarrow 0$ при $|b| \rightarrow \infty$ [42, с. 511].

Функция $E(\alpha) = q^\alpha = e^{\alpha \ln q}$ является также аналитической в этой области (и даже на всей плоскости). Поэтому к нашей задаче мы можем применить методы теории аналитических функций.

Далее мы будем работать с областями на комплексной плоскости специального вида:

$$D_c = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\alpha) > c, \operatorname{Im}(\alpha) > 0\},$$

где c — некоторое вещественное число.

Теорема 5.1.4. Пусть в области D_c преобразование Лапласа функции $a(e^{-\tau})$ имеет конечное число нулей. Тогда для любого $q \in (0, 1)$ уравнение (5.1.2) имеет бесконечное число решений в этой области.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится один важный факт из теории аналитических функций.

Пусть T — односвязная, уходящая на бесконечность область, ограниченная простой жордановой кривой. Пусть Γ_1 — ветвь границы T , уходящая в отрицательном относительно T направлении, а Γ_2 — ветвь границы, уходящая на бесконечность в положительном направлении, так что $-\Gamma_1 + \Gamma_2$ составляют границу T . Рассмотрим функцию $f(z)$, мероморфную во всех конечных точках области T и ее границы. Нам понадобится следующий результат.

Теорема 5.1.5 (теорема Иверсена [53, с. 82]). Предположим, что функция $f(z)$ вдоль Γ_1 и Γ_2 стремится к разным пределам при $z \rightarrow \infty$ или, стремясь к одному и тому же пределу, не стремится к этому пределу равномерно, когда z , оставаясь в T , стремится к ∞ . Тогда $f(z)$ принимает в T все значения (в том числе и ∞) бесчисленное число раз за исключением самое большее двух значений.

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1.4. Рассмотрим в качестве области T в теореме Иверсена $D_c = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\alpha) > c, \operatorname{Im}(\alpha) > 0\}$ с естественными ветвями границы $\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = c, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ и $\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq c, \operatorname{Im}(z) = 0\}$.

В качестве функции $f(z)$ возьмем $\frac{F(z)}{E(z)}$, она мероморфная, и даже аналитическая в D_c . Покажем, что при стремлении к бесконечно удаленной точке по Γ_1 $f(z)$ стремится к нулю, а при стремлении по Γ_2 $f(z)$ стремится к бесконечности.

Действительно, когда $z \in \Gamma_1$, то $|E(z)| = q^c$, а по свойству преобразования Лапласа $F(c + ib) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow \infty$. Следовательно, по кривой Γ_1 стремится к нулю. Рассмотрим теперь Γ_2 . Так как $q \in (0, 1)$, а $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\int_0^1 a(t)t^\alpha dt)^{1/\alpha} = 1$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^1 a(t)t^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}}}{q} > 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 a(t)t^\alpha dt}{q^\alpha} = +\infty,$$

но это и означает, что по кривой Γ_2 $f(z)$ стремится к бесконечности при $z \rightarrow \infty$. Теперь мы вправе воспользоваться теоремой Иверсе-

на 5.1.5. Заметим, что в области D_c $f(z)$ не принимает значения ∞ и принимает лишь конечное число раз значение 0. Следовательно, ∞ и 0 суть как раз особые значения в теореме Иверсена. Все остальные значения функция принимает бесчисленное число раз, в частности, существует бесконечное число решений уравнения $\frac{F(z)}{E(z)} = 1$ или $F(z) = E(z)$. Доказательство закончено. $\triangleright$

Из доказательства теоремы видно, что тот же результат справедлив и для области, симметричной D_c относительно вещественной оси. Заметим также, что с в определении D_c мы можем варьировать, поэтому существуют корни уравнения (5.1.2) со сколь угодно большой вещественной частью. Кроме того, из формулы Карлемана следует

Теорема 5.1.6 [53, с. 154]. *Если голоморфная в верхней полуплоскости функция $f(z)$ удовлетворяет при достаточно больших по модулю z условию $|f(z)| < e^{|z|^k}$, где $k < 1$, то сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{1}{a_i} \right) \right|$, где a_i — нули $f(z)$ в верхней полуплоскости.*

В нашем случае функция $F(z) - E(z)$, очевидно, ограничена в области $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, и, применяя вышеприведенную теорему к этой функции (вернее, к функции $F(e^{-\pi i/2} z) - E(e^{-\pi i/2} z)$), мы получим следующее утверждение: нули a_i функции $F(z) - E(z)$ таковы, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \left| \operatorname{Re} \left(\frac{1}{a_i} \right) \right|$ сходится.

Из теоремы 5.1.4 очевидно вытекает

Следствие 5.1.1. *Пространство решений уравнения (5.1.1) бесконечномерно.*

Заметим также, что новые решения могут быть построены из уже имеющихся с помощью равномерно сходящихся рядов.

Следствие 5.1.2. *Для любого $q \in (0, 1)$ существует ограниченное решение уравнения (5.1.2).*

Следствие 5.1.3. *Для любого $q \in (0, 1)$ и для любого натурального k существует решение уравнения (5.1.2) класса $C^k[0, 1]$.*

В следствии 5.1.2 достаточно рассмотреть решение вида $f(x) = \operatorname{Re}(x^\alpha)$, где α — решение уравнения (5.1.2) и $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$. В следствии 5.1.3 надо взять $f(x) = \operatorname{Re}(x^\alpha)$, где α — решение уравнения (5.1.2) и $\operatorname{Re}(\alpha) > k$. Тогда $f(x) = x^a \cos(b \ln x)$, где $a = \operatorname{Re}(\alpha)$. Легко показать, что $f(x) \in C^k[0, 1]$.

В качестве примера можно рассмотреть уравнение (5.1.1) для оператора с ядром Тейлора $a(x) = \gamma(1-x)^{\gamma-1}$, где $\gamma > 0$. Легко

показать, что для этого ядра $q^* = 0$, $\alpha_0 = -1$,

$$F(\alpha) = \int_0^1 \gamma(1-t)^{\gamma-1} t^\alpha dt = \gamma B(\gamma, \alpha+1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}.$$

Так как Γ -функция не имеет нулей, то и $F(\alpha)$ не обращается в ноль на области определения (или можно сказать, что преобразование Лапласа функции $(1-e^{-t})^{\gamma-1}$ не обращается в ноль). Следовательно, к таким ядрам применима теорема 5.1.4. При натуральных значениях γ мы получаем ядра тейлоровских операторов. В частности, справедлива следующая

Теорема 5.1.7. Для любых натуральных n и $k \geq n$ и для любого $0 < q < 1$ существует отличная от многочлена функция класса $C^k[0, 1]$, для которой справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m + \frac{f^{(n)}(qx)}{n!} x^n.$$

◁ Действительно, по следствию 5.1.3 для ядра $a(x) = n(1-x)^{n-1}$ (ядра Тейлора) существует функция класса $C^k[0, 1]$, удовлетворяющая уравнению

$$\int_0^1 n(1-t)^{n-1} g(xt) dt = g(qx).$$

Но тогда ее n -кратную первообразную можно взять в качестве $f(x)$. ▷

5.2. Многомерная теорема о среднем

В этом параграфе мы получим некоторые результаты для многомерного варианта первой интегральной теоремы о среднем значении (в пространстве $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 2$). Через O мы будем обозначать центр в $\mathbb{R}^n$ (т. е. точку со всеми нулевыми компонентами). Символом σ будем обозначать площадь поверхности единичного шара $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ (т. е. единичной сферы S^{n-1}). Если $x > 0$, то для любого множества $D \subset \mathbb{R}^n$ символ xD означает гомотетичное

ему множество с центром гомотетии O и коэффициентом x . В частности, через xB обозначается шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке O и радиусом x .

Рассмотрим единичный шар B , суммируемую неотрицательную функцию $K : B \rightarrow \mathbb{R}$ и функцию f , которая непрерывна на множестве $B \setminus \{O\}$, а функция $f \cdot K$ суммируема на B .

Для нас представляет интерес следующее утверждение, являющееся простым следствием из предложения 3.1.2.

Предложение 5.2.1. *В условиях, приведенных выше, для каждого $x \in (0, 1]$ существует $\tau \in xB \setminus \{O\}$ такое, что*

$$\int_B K(t)f(xt) dt = f(\tau) \int_B K(t) dt.$$

Рассмотрим теперь для каждого $x \in (0, 1]$ величину $\xi_n(x)$ — максимум норм таких τ на отрезке $[0, 1]$.

Как и в одномерном случае, нас будет интересовать характеристика $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi_n(x)}{x}$, а точнее, ее оценки снизу.

По аналогии с одномерным случаем здесь может быть построена теория, основанная на некоторых теоремах сравнения, но мы остановимся здесь лишь на достаточно простом, но содержательном случае, когда ядро $K(x)$ является сферически симметричной функцией, т. е.

$$K(x) = \alpha(\rho), \quad \text{где } \alpha : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

В этом случае, как будет показано далее, эффективной для решения задачи оказывается некоторая симметризация, которая редуцирует задачу к одномерной.

Мы исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда $K(x) = 0$ почти всюду на B (в этом случае $\xi_n(x) = x$ для всех $x \in (0, 1]$). Тогда $\int_B K(t) dt > 0$, и после умножения ядра на некоторую положительную постоянную можно (без ограничения общности) считать, что этот интеграл равен единице.

Определим функцию $\phi : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\phi(\rho) = \int_{|y|=\rho} f(y) d\sigma \cdot (\sigma \rho^{n-1})^{-1},$$

где σ — площадь поверхности $(n-1)$ -мерной сферы. Тогда

$$\int_B K(t)f(xt) dt = \int_0^1 \sigma\alpha(\rho)\rho^{n-1}\phi(\rho x) d\rho.$$

Из нормировки следует, что

$$\int_0^1 \sigma\alpha(\rho)\rho^{n-1} d\rho = \int_B K(t) dt = 1.$$

Таким образом, мы получили новую (одномерную) задачу, тесно связанную с исходной.

Пусть $\xi(x)$ — максимальное из чисел τ на отрезке $[0, x]$ таких, что

$$\int_0^1 \sigma\alpha(\rho)\rho^{n-1}\phi(\rho x) d\rho = \phi(\tau).$$

Требуется найти нетривиальную оценку снизу для $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x}$. В случае получения такой оценки, мы автоматически получим оценку для $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi_n(x)}{x}$. Действительно, справедлива следующая

Лемма 5.2.1. *Если $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq q$, то и $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi_n(x)}{x} \geq q$.*

◁ Мы можем выбрать последовательность $\{x_m\}$, $x_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ такую, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\xi(x_m)}{x_m} \geq q$. Для каждого x_m имеем равенство

$$\int_B a(t)f(x_mt) d\omega = \int_0^1 \sigma\alpha(\rho)\rho^{n-1}\phi(\rho x_m) d\rho = \phi(\xi(x_m)).$$

Докажем существование такого $\tau \in B$, что выполнены равенства $\|\tau\| = \xi(x_m)$ и $f(\tau) = \phi(\xi(x_m))$. Так как $\phi(\xi(x_m))$ — среднее значение функции f на сфере радиуса $\xi(x_m)$, а сфера в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$ есть связное множество, то такое τ обязательно найдется. Но тогда, опять же по определению $\xi_n(x_m) \geq \xi(x_m)$ и, значит,

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi_n(x)}{x} \geq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\xi_n(x_m)}{x_m} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\xi(x_m)}{x_m} \geq q,$$

что и требовалось. ▷

Для того, чтобы применить к редуцированной задаче доказанные ранее теоремы, предварительно выделим еще одно утверждение, доказательство которого очевидно.

Лемма 5.2.2. *Предположим, что $f(x) = o(g(\|x\|))$ ($f(x) = O(g(\|x\|))$) при $\|x\| \rightarrow 0$, тогда $\phi(\rho) = o(g(\rho))$ ($\phi(\rho) = O(g(\rho))$), соответственно при $\rho \rightarrow 0$.*

Особый интерес для нас представляют функции $\rho \mapsto \rho^\alpha$ и $\rho \mapsto \ln \rho$. Определим сначала вспомогательную функцию $q_{\mathbb{R}^n} : (-n, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$q_{\mathbb{R}^n}(\alpha) = \left(\int_0^1 \sigma \alpha(\rho) \rho^{n+\alpha-1} d\rho \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{при } \alpha \neq 0,$$

$$q_{\mathbb{R}^n}(0) = \exp \left(\int_0^1 \sigma \alpha(\rho) \rho^{n-1} \ln \rho d\rho \right).$$

Теперь мы можем сформулировать основную теорему этого параграфа.

Теорема 5.2.1. *Если $f(x) = o(\ln \|x\|)$ при $\|x\| \rightarrow 0$, то имеет место неравенство*

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi_n(x)}{x} \geq q_{\mathbb{R}^n}(0),$$

если же $f(x) = O(\|x\|^\alpha)$ при $\|x\| \rightarrow 0$ ($\alpha > -n$), то

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi_n(x)}{x} \geq q_{\mathbb{R}^n}(\alpha).$$

< Рассмотрим оператор (4.2.1) при $A(t, x) \equiv \sigma \alpha(t) t^{n-1}$. Для функции $x \mapsto \phi(x)$ рассмотрим величину $L(\phi) = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x}$, где функция $\xi : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ определяется по формуле

$$\xi(x) = \max \left\{ \tau \in (0, x] \mid \phi(\tau) = \int_0^1 \sigma \alpha(t) t^{n-1} \phi(tx) dt \right\}.$$

В силу леммы 5.2.1 достаточно показать, что если $\phi(\rho) = o(\ln \rho)$ при $\|x\| \rightarrow 0$, то $L(\phi) \geq q_{\mathbb{R}^n}(0)$, а если $\phi(\rho) = O(\rho^\alpha)$ при $\|x\| \rightarrow 0$,

то $L(\phi) \geq q_{\mathbb{R}^n}(\alpha)$. Но это очевидно следует из теорем 4.2.2–4.2.5, примененных к оператору с рассматриваемым ядром при $q = q_{\mathbb{R}^n}$.

Отметим лишь, что в нашей редуцированной задаче ядро удовлетворяет асимптотическому равенству $\sigma\alpha(t)t^{n-1} = O(t^{n-1})$ при $t \rightarrow 0$, и поэтому мы вправе получать оценки при $\alpha > -n$ (см. замечание 4.2.1 на с. 72). $\triangleright$

Интересным частным случаем является функционал, порождаемый $\alpha(\rho) \equiv \text{const}$, после нормировки которого и редукции к одномерному случаю мы получаем функционал

$$\mathcal{L}(\phi)(x) = \int_0^1 n\rho^{n-1}\phi(\rho x) d\rho.$$

Для этого функционала $q_{\mathbb{R}^n}(0) = e^{-1/n}$ и $q_{\mathbb{R}^n}(\alpha) = (1 + \alpha/n)^{-1/\alpha}$ при $\alpha \neq 0$. Поэтому из теоремы 5.2.1 мы получаем следующее утверждение.

Теорема 5.2.2. Пусть функция f непрерывна на шаре B , для каждого x из промежутка $(0, 1]$ положим

$$\xi_n(x) = \max \left\{ \|\tau\| \mid \tau \in xB, \int_{xB} f = f(\tau)x^n \mu(B) \right\},$$

где $\mu(B)$ — мера Лебега шара B . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi_n(x)}{x} \geq e^{-\frac{1}{n}}.$$

Нетрудно показать, что оценки в обеих теоремах 5.2.1 и 5.2.2 неулучшаемы. Следует отметить также, что теорема 5.2.2 перестает быть верной при $n = 1$. Для этого достаточно рассмотреть функцию $y(x) = x$ на отрезке $[-1, 1]$. Причина такого явления — несвязность сферы S^{n-1} при $n = 1$.

Аналогичным методом можно доказать теорему, обобщающую теорему 5.2.2. Рассмотрим единичный шар $B = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\}$ при $n \geq 1$ и непрерывную функцию f на B . Пусть A — какое-либо непустое связное замкнутое множество в $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| = 1\}$ и пусть $\Omega = \bigcup_{y \in (0,1]} yA$. Тогда для каждого $x \in (0, 1]$ существует $\tau \in x\Omega$ такое, что

$$\int_{x\Omega} f = f(\tau)\mu(x\Omega) = x^n \mu(\Omega),$$

где через μ обозначена мера Лебега. Обозначим через $\zeta_n(x)$ максимум норм таких точек τ . Тогда справедлива следующая

Теорема 5.2.3. *Для произвольной непрерывной на единичном шаре функции f*

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\zeta_n(x)}{x} \geq e^{-1/n}.$$

При $n = 1$ очевидно, что множество A должно быть одноточечным, а приведенная теорема эквивалентна теореме 2.1.1. При $n \geq 2$ доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 5.2.2.

Задача 5.2.1. Установить аналог теоремы 5.2.1 для случая интегрального оператора с неотрицательным ядром общего вида (не обязательно сферически симметричным) в предложении 5.2.1.

5.3. Операторы со знакопеременным ядром

Очевидно, что для интегрального оператора со знакопеременным ядром теорема о среднем значении вообще говоря не выполняется. Однако здесь есть и исключения, одному такому исключительному классу и посвящен настоящий параграф. Предварительно сформулировав теорему о среднем значении, мы найдем оценки для месторасположения точки среднего значения при $x \rightarrow 0$.

Рассмотрим функцию $a \in L_\infty[0, 1]$ такую, что

$$\int_0^\xi a(t) dt > 0, \quad \int_\xi^1 a(t) dt \geq 0, \quad \xi \in (0, 1]. \quad (5.3.1)$$

Очевидно, что функция $x \mapsto a(x)$ может быть знакопеременной.

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^1 a(t)f(tx) dt,$$

определенный на множестве непрерывных и суммируемых на промежутке $(0, 1]$ функций.

Нам понадобится следующая

Лемма 5.3.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует x_0 , $0 < x_0 < \varepsilon$, такой, что $\int_{x_0}^\xi a(t)dt > 0$ для каждого $\xi \in (x_0, 1]$.*

◁ Так как $F(\xi) = \int_0^\xi a(t) dt > 0$ для всех $\xi \in (0, 1]$, то, очевидно, можно подобрать такое $c > 0$, что $F^{-1}(c) \subset (0, \varepsilon)$, далее за x_0 можно взять $\max F^{-1}(c)$. ▷

Отметим, что для монотонных функций f справедлив аналог первой интегральной теоремы о среднем значении для ядер a со свойством (5.3.1).

Теорема 5.3.1. Пусть f — непрерывная и монотонная функция на промежутке $(0, 1]$. Тогда существует такое $\tau \in [0, 1]$, что

$$\int_0^1 a(t)f(t) dt = f(\tau) \int_0^1 a(t) dt,$$

где подразумевается, что $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$.

◁ Без ограничения общности можно считать, что f не убывает. Если $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) > -\infty$, то f непрерывна на отрезке $[0, 1]$, и по второй теореме о среднем значении (теорема 1.2.6)

$$\int_0^1 a(t)f(t) dt = f(0) \int_0^\xi a(t) dt + f(1) \int_\xi^1 a(t) dt$$

для некоторого $\xi \in [0, 1]$, т. е.

$$f(0) \int_0^1 a(t) dt \leq \int_0^1 a(t)f(t) dt \leq f(1) \int_0^1 a(t) dt$$

в силу условий (5.3.1). Из непрерывности функции f легко следует существование $\tau \in [0, 1]$ со свойством

$$\int_0^1 a(t)f(t) dt = f(\tau) \int_0^1 a(t) dt.$$

Если же $f(0) = -\infty$, то по лемме 5.3.1 мы можем выбрать последовательность $\{x_n\}$, $0 < x_n < 1/n$, такую, что $\int_{x_n}^\xi a(t) dt > 0$ для всех $\xi \in (x_n, 1]$. Тогда, проводя предыдущие рассуждения для отрезка $[x_n, 1]$, доказываем существование $\tau_n \in [x_n, 1]$ со свойством

$$\int_{x_n}^1 a(t)f(t) dt = f(\tau_n) \int_{x_n}^1 a(t) dt.$$

Устремляя n к бесконечности и выбирая из $\{\tau_n\}$ сходящуюся подпоследовательность, получим в пределе

$$\int_0^1 a(t)f(t) dt = f(\tau) \int_0^1 a(t) dt,$$

где τ — предел нашей подпоследовательности. Отметим, что в этом случае $\tau > 0$ при условии суммируемости функции $t \mapsto a(t)f(t)$ на промежутке $[0, 1]$, поскольку иначе вышеприведенное равенство невозможно. Теорема полностью доказана. $\triangleright$

Согласно этой теореме для монотонной и непрерывной функции f и для любого $x \in (0, 1]$ мы можем определить $\xi(x)$ — максимальное из чисел $\tau \in [0, x]$ таких, что

$$\int_0^1 a(t)f(tx) dt = f(\tau) \int_0^1 a(t) dt.$$

Как и прежде, нас интересует поведение функции $\xi(x)$ при $x \rightarrow 0$. Справедлива следующая

Теорема 5.3.2. Пусть функция $a \in L_\infty[0, 1]$ удовлетворяет условиям (5.3.1), а $f(x)$ — монотонная, непрерывная и суммируемая на промежутке $(0, 1]$ функция, тогда

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq \int_0^1 a(t) dt \left(\int_0^1 a(t)t^{-1} dt \right)^{-1}.$$

Оценка в этой теореме точная, для того, чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть функции $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha > -1$). Напомним, что $\int_0^1 a(t) dt > 0$ в соответствии с условиями (5.3.1). Заметим также, что $\int_0^1 a(t)t^{-1} dt \geq 0$ по теореме 5.3.1. Отметим также, что при $\int_0^1 a(t)t^{-1} dt = \infty$ (например, для ядер $t \mapsto a(t)$, удовлетворяющих неравенству $a(t) \geq \text{const} > 0$) утверждение теоремы становится тривиальным.

Для доказательства сформулированного результата нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Лемма 5.3.2. Пусть функция f не убывает, тогда справедливо неравенство

$$\int_0^1 a(t)f(tx) dt \leq f(x) \int_0^1 a(t) dt.$$

◁ Пусть $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$. По теореме 5.3.1 существует такое число $\tau \in [0, x]$, что

$$\int_0^1 a(t)f(tx) dt = f(\tau) \int_0^1 a(t) dt.$$

Утверждение леммы следует теперь из того, что $f(x) \geq f(\tau)$ (по условию леммы) и $\int_0^1 a(t) dt > 0$ (см. условия (5.3.1)). ▷

Лемма 5.3.3. Пусть функция f не возрастает на промежутке $(0, x^*]$ и не убывает на отрезке $[x^*, b]$, $b > 0$, тогда справедливо неравенство

$$\int_0^1 a(t)f(tb) dt \geq f(x^*) \int_0^1 a(t) dt.$$

◁ Без ограничения общности можно считать, что $f(x^*) = 0$ (для этого достаточно вместо функции f рассмотреть функцию $f + C$, где C — подходящая константа). Следовательно, $f(x) \geq 0$ на отрезке $[0, b]$. По второй теореме о среднем имеем

$$\int_{x^*/b}^1 a(t)f(tb) dt = f(x^*) \int_{x^*/b}^{\xi} a(t) dt + f(b) \int_{\xi}^1 a(t) dt = f(b) \int_{\xi}^1 a(t) dt$$

для некоторого $\xi \in [x^*/b, 1]$, таким образом,

$$\int_{x^*/b}^1 a(t)f(tb) dt \geq 0$$

(напомним, что $\int_{\xi}^1 a(t) dt \geq 0$ в силу условий (5.3.1)).

Теперь достаточно показать, что $\int_0^{x^*/b} a(t)f(tb)dt \geq 0$. По лемме 5.3.1 мы можем выбрать последовательность $\{x_n\}$, $0 < x_n < 1/n$,

такую, что $\int_{x_n}^{\xi} a(t)dt > 0$ для всех $\xi \in (x_n, 1]$. По второй интегральной теореме о среднем для некоторого $\xi \in [x_n, x^*/b]$ получаем

$$\int_{x_n}^{x^*/b} a(t)f(tb) dt = f(x_n) \int_{x_n}^{\xi} a(t) dt + f(x^*) \int_{\xi}^{x^*} a(t) dt = f(x_n) \int_{x_n}^{\xi} a(t) dt \geq 0.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ получаем, что $\int_0^{x^*/b} a(t)f(tb) dt \geq 0$. Лемма доказана. $\triangleright$

$\triangleleft$ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.3.2. Можно считать, что f ни в какой окрестности нуля не является постоянной, в противном случае все очевидно. Обозначим $(\int_0^1 a(t)t^{-1} dt)^{-1} \int_0^1 a(t) dt$ через q . Допустим, утверждение теоремы не выполняется. Заменяя при необходимости f на $-f$, можно считать, что функция f не убывает. Тогда, учитывая непрерывность функции и утверждение леммы 5.3.2, функция f для $x \in (0, a]$ должна удовлетворять неравенству

$$\int_0^1 a(t)f(tx) dt < f(qx) \int_0^1 a(t) dt.$$

Отметим, что для функции $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ выполняется аналогичное неравенство

$$\int_0^1 a(t)F(tx) dt < F(qx) \int_0^1 a(t) dt.$$

Как нетрудно заметить, оно получается из предыдущего интегрированием по переменной x . Поскольку $F'(x) = \frac{f(x)x - \int_0^x f(t)dt}{x^2} \geq 0$, функция F также не убывает.

Пусть $g(x) = f(x)x - \int_0^x f(t)dt$. Тогда $g(0) = 0$ и функция g не убывает. Действительно, надо доказать, что $\int_x^y f(t) dt \leq f(y)y - f(x)x$ при $0 < x < y$. Но это неравенство легко следует из того, что

$$f(y)(y-x) \leq f(y)y - f(x)x \quad \text{и} \quad \int_x^y f(t) dt \leq f(y)(y-x).$$

Если к тому же на некотором отрезке $[x, y]$ функция f не является постоянной, то, как нетрудно видеть, $g(x) < g(y)$.

Так как f (по нашему допущению) не является постоянной ни в какой окрестности нуля, то такова же и функция g . Выберем такое число C , что $g^{-1}(C)$ состоит из одной точки qx^* , где $x^* \in (0, a]$. Это можно сделать в силу того, что $g(0) = 0$, g не убывает и не является постоянной ни в какой окрестности нуля. Тогда $g(x) < C$ при $x < qx^*$ и $g(x) > C$ при $x > qx^*$. Рассмотрим теперь функцию

$$f_0(x) = F(x) + C/x.$$

Так как функция $y(x) = 1/x$ удовлетворяет уравнению (см. определение числа q выше)

$$\int_0^1 a(t)y(tx) dt = y(qx) \int_0^1 a(t) dt,$$

то при $x \in (0, a]$ функция f_0 должна удовлетворять неравенству

$$\int_0^1 a(t)f_0(tx) dt < f_0(qx) \int_0^1 a(t) dt.$$

Но с другой стороны, очевидно, что $f_0(x)$ убывает на промежутке $(0, qx^*]$ и возрастает на отрезке $[qx^*, x^*]$, так как $f'_0(x) = \frac{g(x)-C}{x^2}$. Тогда по лемме 5.3.3

$$\int_0^1 a(t)f_0(tx^*) dt \geq f_0(qx^*) \int_0^1 a(t) dt,$$

чего не может быть ввиду предыдущего неравенства. $\triangleright$

В доказательстве этой теоремы можно было заранее предполагать, что функция $x \mapsto a(x)/x$, а, следовательно, и $x \mapsto F(x)a(x)$ суммируема на отрезке $[0, 1]$, поскольку в противном случае оценка в теореме становится тривиальной.

Задача 5.3.1. Получить уточнение теоремы 5.3.2, учитывающее асимптотическое поведение функции $x \mapsto f(x)$ в точке $x = 0$.

ГЛАВА 6

АСИМПТОТИКА ТОЧЕК СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ

Изложение в этой главе основано главным образом на работах [32] и [34]. Полученные в этих работах новые результаты об асимптотике точек промежуточного значения в теореме Шварца для разделенных разностей сравниваются с некоторыми результатами работ [130] и [166].

6.1. Оценки в интегральных неравенствах

Приведем для удобства читателей одну лемму, являющуюся вариацией полученных ранее результатов (см. теорему 4.2.7).

Лемма 6.1.1. *Рассмотрим произвольную неотрицательную суммируемую функцию $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ и число $\alpha_0 \in (-\infty, -1]$ такие, что $\int_0^1 a(t) dt = 1$ и $a(t) = o(t^{-1-\alpha})$ при $t \rightarrow 0$ для всех $\alpha > \alpha_0$. Пусть непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция h удовлетворяет при $x \in (0, b)$ неравенству*

$$\int_0^1 a(t)h(xt) dt < h(px)$$

для всех $q_0 \leq p \leq 1$. Тогда, если $h(x) = o(x^\alpha)$ ($\alpha \neq 0$) при $x \rightarrow 0$, то

$$q_0 \geq q(\alpha) = \left(\int_0^1 a(t)t^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

(см. (4.1.2)).

◁ Доказательство будем вести от противного. Предположим, что $q_0 < q(\alpha)$. Тогда неравенство в условии леммы обязано выполняться при $p = q(\alpha)$ и $p = 1$. Разберем отдельно случаи $\alpha < 0$ и $\alpha > 0$.

Пусть $\alpha < 0$. Положим $\varepsilon_0 = \min h(x)$ на отрезке $[q(\alpha)b, b]$ и докажем, что найдется точка $x_0 \in (0, q(\alpha)b)$, в которой $h(x_0) < \varepsilon_0$. Действительно, если такой точки не существует, то, очевидно, найдется такая точка x_1 ($x_1 < b$), что для всех $t \in (0, x_1)$ выполняется неравенство $h(t) \geq h(x_1)$. Следовательно, для всех $t \in [0, 1]$ справедливо неравенство $h(x_1t) \geq h(x_1)$, интегрируя которое, мы получаем

$$\int_0^1 a(t)h(x_1t) dt \geq h(x_1),$$

чего не может быть. Выберем теперь ε_1 такое, что $h(x_0) < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$. После этого подберем такое $\varepsilon_2 > 0$, что выполняется неравенство $h(x_0) - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x_0^\alpha < 0$. Тогда функция, определяемая формулой

$$h_0(x) = h(x) - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x^\alpha,$$

положительна на отрезке $[q(\alpha)b, b]$ и $h_0(x_0) < 0$. Так как

$$\int_0^1 a(t)(xt)^\alpha dt \equiv (q(\alpha)x)^\alpha,$$

то для $x \in (0, b)$

$$\int_0^1 a(t)h_0(xt) dt < h_0(q(\alpha)x).$$

Отметим, что $h_0(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 0$. Это следует из того, что $h(x) = o(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$ и $\alpha < 0$. Поэтому функция h_0 достигает своего минимального значения на промежутке $(0, b]$ в некоторой точке вида $q(\alpha)x^*$ ($x^* < b$), так как h_0 положительна на отрезке $[q(\alpha)b, b]$ и принимает отрицательное значение в точке x_0 . Значит, для всех $t \in [0, 1]$ справедливо неравенство $h(x^*t) \geq h(q(\alpha)x^*)$, интегрируя которое, мы получаем

$$\int_0^1 a(t)h(x^*t) dt \geq h(q(\alpha)x^*),$$

что невозможно. Полученное противоречие и доказывает первую часть леммы.

Пусть теперь $\alpha > 0$. Так как $h(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, то функция h положительна на промежутке $(0, b]$. В противном случае существует точка x_1 ($x_1 < a$) такая, что для всех $t \in (0, x_1)$ справедливо неравенство $h(t) \geq h(x_1)$. Таким образом, как и в первой части доказательства, мы получаем неверное неравенство

$$\int_0^1 a(t)h(x_1 t) dt \geq h(x_1).$$

Выберем теперь такое $\varepsilon > 0$, что функция $h_0(x) = h(x) - \varepsilon x^\alpha$ положительна на отрезке $[q(\alpha)b, b]$. Так как

$$\int_0^1 \varphi(t)(xt)^\alpha dt \equiv (q(\alpha)x)^\alpha,$$

то для $x \in (0, b)$ имеем

$$\int_0^1 a(t)h_0(xt) dt < h_0(q(\alpha)x).$$

Если функция h_0 принимает отрицательные значения на промежутке $(0, b]$, то она достигает своего минимального значения на этом промежутке в некоторой точке вида $q(\alpha)x^*$ ($x^* < b$) в силу того, что h_0 положительна на отрезке $[q(\alpha)b, b]$. Значит, для всех $t \in [0, 1]$ справедливо неравенство $h(x^*t) \geq h(q(\alpha)x^*)$, проинтегрировав которое, мы получаем

$$\int_0^1 a(t)h(x^*t) dt \geq h(q(\alpha)x^*),$$

что невозможно. Таким образом, функция h_0 неотрицательна в некоторой окрестности нуля, т. е. $h(x) - \varepsilon x^\alpha \geq 0$. Это неравенство противоречит асимптотике $h(x) = o(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\triangleright$

Условие $\alpha \neq 0$ в приведенной лемме несущественно, более того, тем же способом, что был использован для случая $\alpha < 0$, можно показать, что асимптотика $h(x) = o(\ln x)$ при $x \rightarrow 0$ влечет неравенство

$$q_0 \geq q(0) = \exp \left(\int_0^1 a(t) \ln(t) dt \right)$$

(см. доказательство пункта (а) теоремы 4.2.7).

6.2. Разделенные разности

Подробное изложение теории разделенных разностей и смежных вопросов можно найти, например, в книге [9] и обзоре [72].

6.2.1. Основные свойства разделенных разностей. Рассмотрим некоторую функцию $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и выберем точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ на интервале (a, b) . Наша ближайшая цель — определить понятие разделенной разности $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]$ для этих объектов.

Это легко сделать для попарно различных чисел $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. В этом случае можно дать индуктивное определение. Для каждого i полагаем $[x_i; f] := f(x_i)$, для $i \neq j$ используем следующее определение: $[x_i, x_j; f] := \frac{[x_i; f] - [x_j; f]}{x_i - x_j}$. Аналогично полагаем

$$[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f] := \frac{[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; f] - [x_1, x_2, \dots, x_n; f]}{x_0 - x_1}$$

при условии, что выражения $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; f]$ и $[x_1, x_2, \dots, x_n; f]$ уже определены. Нетрудно понять, что

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f] &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} + \\ &+ \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)} + \dots + \\ &+ \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})}. \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Полезно рассмотреть функцию

$$\psi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n). \quad (6.2.2)$$

С ее помощью легко получить формулу

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)\psi(x)}{(x-x_i)\psi'(x_i)} + \psi(x)[x, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f], \quad (6.2.3)$$

которая по сути эквивалентна определению $[x, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]$. Отметим, что $P(x) := \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)\psi(x)}{(x-x_i)\psi'(x_i)}$ является многочленом степени не выше n , удовлетворяющим условию $P(x_i) = f(x_i)$ при $i = 0, 1, \dots, n$. Этот многочлен называется *многочленом Лагранжа* для функции f и (попарно различных) точек $x_0, x_1, \dots, x_n$, а формула (6.2.3) называется *интерполяционной формулой Лагранжа*. Эта формула по сути совпадает с *интерполяционной формулой Ньютона*

$$\begin{aligned} f(x) &= [x_0; f] + [x_0, x_1; f](x - x_0) + \dots + \\ &+ [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + \\ &+ [x, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]\psi(x). \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Следует отметить, что многочлен $[x_0; f] + [x_0, x_1; f](x - x_0) + \dots + [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$ (*многочлен Ньютона* для функции f и точек $x_0, x_1, \dots, x_n$) только формой записи отличается от многочлена Лагранжа.

Теперь мы обратимся к определению разделенной разности $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]$ для не обязательно различных значений $x_0, x_1, \dots, x_n$. Такого определения не существует для произвольных функций f , поскольку от функции необходимо потребовать наличия некоторого количества производных. Соответствующее определение заведомо корректно для функций f , обладающих на интервале (a, b) всеми производными до порядка n включительно. Но в ряде случаев такое требование излишне (см. замечание 6.2.3).

Пусть совокупность точек $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ совпадает с совокупностью попарно различных точек $\{z_0, z_1, \dots, z_l\}$, причем для $0 \leq i \leq l$ число z_i встречается в записи $x_0, x_1, \dots, x_n$ в точности p_i раз. Таким образом, $p_i \geq 1$ для всех $0 \leq i \leq l$ и $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_l = n + 1$. Пусть

$$q(z) = \prod_{i=0}^l (z - z_i)^{p_i}. \quad (6.2.5)$$

Приведем теперь общее определение для $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2.1. Разделенная разность для функции f определяется формулой

$$[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f] := \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{p_k-1} \frac{f^{(m)}(z_k)}{m!(p_k - m - 1)!} \frac{d^{p_k-m-1}}{dz^{p_k-m-1}} \left[\frac{(z - z_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \Big|_{z=z_k}.$$

Очевидна инвариантность выражения $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]$ относительно любых перестановок элементов $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Возможны и другие варианты определения величины $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]$, см. [9, 72].

Используя определение 6.2.1, можно обобщить интерполяционную формулу Лагранжа до *интерполяционной формулы Эрмита* (см. [101] или, например, [2, 9])

$$f(x) = P_H(x) + q(x)[x, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f], \quad (6.2.6)$$

где *многочлен Эрмита* P_H определяется формулой

$$P_H(x) = \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^{p_k-1} \sum_{s=0}^m \frac{f^{(m)}(z_k)}{(m-s)!(p_k - m - 1)!} \times \times \frac{d^{m-s}}{dz^{m-s}} \left[\frac{(z - z_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \Big|_{z=z_k} \frac{q(x)}{(x - z_k)^{s+1}} \quad (6.2.7)$$

и характеризуется (среди многочленов степени не выше n) тем, что выполнены равенства

$$P_H^{(s)}(z_k) = f^{(s)}(z_k), \quad 0 \leq s \leq p_k - 1, \quad k = 0, 1, \dots, l.$$

Чрезвычайно важную роль во всех вопросах, связанных с разделенными разностями, играет

Теорема 6.2.1 (теорема Шварца [9, 72, 148, 149]). Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет n -ю производную. Тогда для любых чисел $x_i \in (a, b)$, $1 \leq i \leq n$, справедлива формула

$$[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \quad (6.2.8)$$

для некоторого $\xi \in [m, M]$, где $m = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ и $M = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. При этом если $m < M$, то можно считать, что $\xi \in (m, M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.1. Отметим, что при $x_n = \dots = x_2 = x_1 = x_0$ (когда $m = M$) выполняется равенство $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ согласно формуле (6.2.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.2. Если в равенстве (6.2.8) положить $x_{n-1} = \dots = x_2 = x_1 = x_0$ и $x_n = x \neq x_0$, то получится формула Тейлора (порядка $n-1$) с остаточным членом в форме Лагранжа.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.3. Заметим, что если $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ и $x_0 \neq x_n$, то для корректного определения разделенной разности $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]$ достаточно наличия у функции f всех производных до порядка $n-1$ включительно (напомним, что в случае попарно различных точек производные вообще не нужны). Утверждение теоремы Шварца при этом выполнено, даже если f имеет производную порядка n лишь на интервале (x_0, x_n) .

Теорема 6.2.1 влечет

Следствие 6.2.1. Если f является многочленом степени не выше $n-1$, то $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f] = 0$ для любого набора $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Если $f(x) = x^n$, то $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f] = 1$ для произвольных $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Имеет место следующая

Теорема 6.2.2 (теорема Эрмита — Геноччи, [9, 72, 94, 101]).

Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет n -ю ограниченную производную. Тогда для любых чисел x_i , $1 \leq i \leq n$, справедлива формула

$$[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f] = \int_S f^{(n)} \left(x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + \dots + \right. \\ \left. + (x_{n-1} - x_0)t_{n-1} + (x_n - x_0)t_n \right) dt_1 \dots dt_n, \quad (6.2.9)$$

где $S = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid t_i \geq 0, i = 1, \dots, n, t_1 + t_2 + \dots + t_n \leq 1\}$.

Из этой теоремы легко получается

Следствие 6.2.2. Если производная $f^{(n)}$ является непрерывной на интервале (a, b) , то разделенная разность $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]$ инвариантна относительно любых перестановок элементов $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ и непрерывно зависит от них.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.4. Если производная $f^{(n)}$ является непрерывной, то из теоремы Эрмита — Геноччи 6.2.2 легко получается теорема Шварца 6.2.1. Действительно, в силу непрерывности $f^{(n)}$ существует число $\xi \in [m, M]$ такое, что

$$\int_S f^{(n)}(x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + \dots + (x_n - x_0)t_n) dt_1 \dots dt_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

поскольку $1/n! = \int_S \mathbf{1} dt_1 \dots dt_n$.

6.2.2. В-сплайны и ядра Пеано. Для вещественного числа α определим усеченную степенную функцию формулой

$$x \mapsto x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (6.2.10)$$

Допустим, что функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет n -ю непрерывную производную. Пусть отрезок $[c, d] \subset (a, b)$ содержит все точки x_i , $0 \leq i \leq n$. По теореме 1.3.7 для любого $x \in [c, d] \subset (a, b)$ имеет место формула

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_c^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-1} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_c^d (x-t)_+^{n-1} f^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

Применим теперь к левой и правой частям этого равенства операцию взятия разделенной разности по точкам $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ (среди которых есть попарно различные). Учитывая результат следствия 6.2.1, получаем

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{1}{n!} \int_c^d B(t) f^{(n)}(t) dt, \quad (6.2.11)$$

где

$$B(t) = B_{x_0, x_1, \dots, x_n}(t) = n \cdot [x_0, x_1, \dots, x_n; x \mapsto (x-t)_+^{n-1}]. \quad (6.2.12)$$

Функция (6.2.12) называется *ядром Пеано* или *В-сплайном степени $n-1$* для данных $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ (см., например,

[120, гл. 2, раздел 2]), а правая часть в формуле (6.2.11) называется *формой Пеано* для разделенной разности $[x_0, x_1, \dots, x_n; f]$. Более подробно об этом можно узнать из работ [72, 73, 76, 79, 120].

ПРИМЕР 6.2.1. При $n = 1$ и $x_0 < x_1$ получаем $B(t) = 0$ при $t < x_0$ и $t \geq x_1$, $B(t) = 1/(x_1 - x_0)$ при $t \in [x_0, x_1]$. При $x_1 = x_0$ (понимаемое в обычном смысле) равенство (6.2.11) не выполнено, но его можно проинтерпретировать в терминах обобщенных функций (функции $B = B_{x_0, x_1}$ сходятся в слабом смысле к δ_{x_0} -функции Дирака при $x_1 \rightarrow x_0$). При $n = 2$ и $x_0 < x_1 < x_2$ имеем

$$B(t) = \frac{(x_1 - x_0)(x_2 - t)_+ - (x_2 - x_0)(x_1 - t)_+ + (x_2 - x_1)(x_0 - t)_+}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}.$$

Для $n \geq 2$ при наличии попарно различных чисел среди $x_0, x_1, \dots, x_n$ формула (6.2.11) может быть также выведена из теоремы 6.2.2, при этом получается некоторая геометрическая интерпретация ядра Пеано. Действительно, произведем замену переменных $(s_1, \dots, s_n) = q(t_1, \dots, t_n)$ посредством собственного (т. е. сохраняющего ориентацию) аффинного преобразования q евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, являющегося композицией некоторого ортогонального преобразования и растяжения вдоль оси переменной s_n таких, что $s_n = x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + \dots + (x_{n-1} - x_0)t_{n-1} + (x_n - x_0)t_n$. Для каждого вещественного числа τ рассмотрим множество

$$U(\tau) = \{t \in S \mid x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + \dots + (x_n - x_0)t_n = \tau\},$$

где $S = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid t_i \geq 0, i = 1, \dots, n, t_1 + t_2 + \dots + t_n \leq 1\}$ (см. теорему 6.2.2).

Предложение 6.2.1. В вышеприведенных обозначениях функция

$$t \mapsto \frac{n!}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2}} \text{mes}(U(t)),$$

где $\text{mes}(U(t))$ — мера Лебега множества $U(t)$, совпадает с ядром Пеано B (6.2.12).

◁ Очевидно, что для $t \in S$ выполнено неравенство

$$m \leq x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + \dots + (x_{n-1} - x_0)t_{n-1} + (x_n - x_0)t_n = \tau \leq M,$$

где $m = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ и $M = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Поэтому $U(\tau) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\tau \in [m, M]$. По теореме 6.2.2

получаем

$$\begin{aligned}
 & [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f] = \\
 &= \int_S f^{(n)}(x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + \dots + (x_n - x_0)t_n) dt_1 \dots dt_n = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2}} \int_m^M f^{(n)}(s_n) \left(\int_{U(s_n)} 1 ds_1 \dots ds_{n-1} \right) ds_n = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2}} \int_m^M \text{mes}(U(z)) f^{(n)}(z) dz.
 \end{aligned}$$

Теперь уже нетрудно доказать необходимое нам утверждение. Действительно,

$$H(t) := \frac{n!}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2}} \text{mes}(U(t)) - B(t)$$

является непрерывной функцией от t на отрезке $[m, M]$ (непрерывность функция U следует из ее определения, а непрерывность функция B при $n \geq 2$ легко следует из формулы (6.2.12)). При этом для любой функции g , имеющей непрерывную n -ю производную, справедливо равенство $\int_m^M H(t) g^{(n)}(t) dt = 0$, что означает $H(t) \equiv 0$. $\triangleright$

Важное значение имеет следующее утверждение, полученное впервые Л. Н. Чакаловым в работе [76].

Предложение 6.2.2. Носитель ядра Пеано $B = B_{x_0, x_1, \dots, x_n}$ (6.2.12) совпадает с отрезком $[m, M]$, где $m = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ и $M = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Кроме того, $\int_m^M B(t) dt = 1$, $B(t) > 0$ при $t \in (m, M)$ и функция B непрерывна на $[m, M]$ при $n \geq 2$.

$\triangleleft$ Утверждение о носителе следует из определения усеченных степеней (6.2.10) и следствия 6.2.1. Равенство $\int_m^M B(t) dt = 1$ следует из формулы (6.2.11) при $f(x) = x^n$, поскольку в этом случае $[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = 1$ по следствию 6.2.1.

Непрерывность функция B на отрезке $[m, M]$ при $n \geq 2$ легко следует из предложения 6.2.1 и формулы (6.2.12).

Для $n = 1$ неравенство $B(t) > 0$ при $t \in (m, M)$ легко проверяется (см. пример 6.2.1). При $n \geq 2$ это неравенство можно получить с помощью предложения 6.2.1 Действительно, (в обозначениях этого предложения) в силу выпуклости симплекса S сразу получаем, что

$$\sqrt[n]{\sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 B(t)} = n! \cdot \text{mes}(U(t)) > 0$$

при $t \in (m, M)$. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.5. В работе [76] также доказано, что на каждом промежутке между соседними узлами из множества $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ядро Пеано B совпадает с некоторым многочленом степени не выше $n - 1$ (отсюда и термин «*B-сплайн степени $n - 1$* »).

Отметим, что конструкция с заменой переменных при интегрировании в доказательстве предложения 6.2.2 тесно связана с *симметризацией Шварца*.

Пусть в n -мерном евклидовом пространстве даны некоторая прямая l и некоторое компактное выпуклое тело A . Для каждой гиперплоскости π , перпендикулярной к прямой l , обозначим через B_π шар в π с центром в точке пересечения π с l такой, что его объем совпадает с мерой (Лебега) множества $A \cap \pi$. Объединение всех шаров B_π по всем гиперплоскостям π , перпендикулярным к l , называется симметризацией Шварца тела A относительно прямой l . Понятно, что тело $S(A)$, получающееся из A с помощью такой симметризации, имеет прямую l в качестве оси симметрии. Нетривиальным свойством тела $S(A)$ является то, что оно является выпуклым (при условии выпуклости исходного тела A). Это утверждение составляет суть известной *теоремы Г. Брунна* (см. подробности, например, в [4, § 9] или [51, гл. IV, § 5]).

Можно переформулировать это свойство следующим образом. Параметризуем точки прямой l (используя параметр t) с помощью некоторого изометрического отображения l на евклидову прямую $\mathbb{R}$. В силу компактности тела A существует отрезок $[m, M] \subset \mathbb{R}$ со следующим свойством: перпендикулярная к прямой l плоскость π пересекает тело A тогда и только тогда, когда π пересекает прямую l в точке с координатой $t \in [m, M]$. Определим теперь функ-

цию $\varphi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ таким образом, что $\varphi(t)$ равняется мере Лебега тела $A \cap \pi$. Теорема Г. Брунна эквивалентна тому, что функция $\Phi(t) := (\varphi(t))^{1/(n-1)}$ является вогнутой на отрезке $[m, M]$, т. е. для всех $x, y \in [m, M]$ и всех чисел $\lambda \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$\Phi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda \Phi(x) + (1 - \lambda)\Phi(y).$$

Из этого свойства и того факта, что $B(t)$ совпадает с $\frac{n!}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2}}$. $\text{mes}(U(t))$ при $t \in [m, M]$ (предложение 6.2.1), сразу получается

Предложение 6.2.3. Функция $\Phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая равенством $\Phi(t) := (B(t))^{1/(n-1)}$, где $m = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $M = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, а B — ядро Пеано (6.2.12), является вогнутой на отрезке $[m, M]$.

6.3. Асимптотика точек среднего значения в теореме Шварца для разделенных разностей

6.3.1. Постановка задачи об асимптотике точек среднего значения в теореме Шварца. Далее мы будем рассматривать разделенные разности $[x_0, x_1, \dots, x_n; f]$ при условии

$$m = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = M. \quad (6.3.1)$$

Заранее исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда $m = x_0 = x_n = M$.

Относительно функции f будем считать, что она n раз дифференцируема на промежутке $(m, M]$, а в точке m мы постараемся несколько ослабить условие регулярности. Далее нам понадобится число

$$n_0 = n_0(x_0, x_1, \dots, x_n), \quad (6.3.2)$$

определяемое из соотношений

$$x_0 = x_1 = \dots = x_{n_0}, \quad x_{n_0+1} \neq x_0. \quad (6.3.3)$$

Ясно, что $0 \leq n_0 \leq n - 1$ (в силу нашего соглашения о том, что $m = x_0 \neq x_n = M$). Имеет место следующая

Лемма 6.3.1. Для ядра Пеано B (6.2.12) выполнено асимптотическое равенство $B(t) \sim C(t - m)^{n-n_0-1}$ при $t \rightarrow m+$ для некоторой положительной константы C .

◁ Доказательство леммы легко получается из предложения 6.2.1 и элементарных геометрических оценок меры множеств (по сути выпуклых многогранников) $U(t)$, $t \in [m, M]$, из его формулировки. ▷

ПРИМЕР 6.3.1. При $n_0 = n - 1$ мы имеем $B(t) = n \frac{(M-t)^{n-1}}{(M-m)^n}$ при $t \in [m, M]$ (ядро Пеано для формулы Тейлора, см. теорему 1.3.7). Следовательно, $B(t) \sim \frac{n}{M-m}$ при $t \rightarrow m+$.

Пусть функция f определена и n раз дифференцируема на некотором интервале, содержащем отрезок $[a, b]$. Рассмотрим некоторое число $x \in (0, b - a)$ и числа

$$0 \leq m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n \leq 1, \quad m_0 \neq m_n, \quad (6.3.4)$$

тогда точки

$$x_0 = a + m_0 x, \quad x_1 = a + m_1 x, \quad \dots, \quad x_n = a + m_n x \quad (6.3.5)$$

лежат на отрезке $[a, a + x]$. Отметим, что $m := \min\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = a + m_0 x$ и $M := \max\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = a + m_n x$ в таком случае. Таким образом, для такого набора точек справедлива формула Шварца (см. теорему 6.2.1)

$$[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

для некоторого $\xi \in (m, M)$. Символом $\xi(x)$ (чтобы подчеркнуть и зависимость от x) будем обозначать верхнюю грань таких $\xi \in (m, M)$. Понятно, что в случае строго монотонной производной $f^{(n)}$ точка ξ с указанным свойством единственна. Наша цель — исследование асимптотики величины $\frac{\xi(x) - a}{x - a}$ при $x \rightarrow a$.

Отметим, что все приведенные выкладки (для достаточно малых x) корректны при условии, что функция f имеет в точке a все производные до порядка n_0 (где n_0 определяется формулой (6.3.2)) включительно (поскольку не исключена возможность $m_0 = 0$), а также имеет производную порядка n на некотором интервале (a, b) (см. определение 6.2.1).

6.3.2. Асимптотика для функций специального вида.

Нетривиальная оценка для асимптотики величины $\frac{\xi(x)-a}{x-a}$ при $x \rightarrow a$ при дополнительных ограничениях на f была получена в работе [130] в предположении, что все числа m_i в формуле (6.3.4) попарно различны. Позже соответствующий результат без последнего предположения был установлен в работе [166]. Приведем его в наших обозначениях.

Теорема 6.3.1 ([130], теорема 2.16 в [144], [166]). *Допустим, что функция f имеет n непрерывных производных на некотором интервале, содержащем точку a , и для некоторого натурального p существует $f^{(n+p)}(a)$. Если $f^{(n+j)}(a) = 0$ для всех j с условием $1 \leq j < p$ и $f^{(n+p)}(a) \neq 0$, то*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\xi(x) - a}{x - a} = \left(\frac{[m_0, m_1, \dots, m_n, x \mapsto x^{n+p}]}{C_{n+p}^n} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (6.3.6)$$

где $C_{n+p}^n = \binom{n+p}{n} = \frac{(n+p)(n+p-1) \dots (p+1)}{n!}$ — биномиальный коэффициент.

Замечание 6.3.1. Заметим, что прямые вычисления с использованием формулы Шварца (6.2.8) показывает, что имеет место тождество

$$\xi(x) \equiv \left(\frac{[m_0, m_1, \dots, m_n, x \mapsto x^{n+\beta}]}{C_{n+\beta}^n} \right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot x$$

для функции $x \mapsto x^{n+\beta}$ (в точке $a = 0$ и при $\beta \neq 0$), что показывает особую роль степенных функций при исследовании асимптотики величины $\frac{\xi(x)-a}{x-a}$ при $x \rightarrow a$.

Ниже мы приведем доказательство теоремы 6.3.1 с использованием следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 6.3.2. Пусть $u : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная суммируемая функция с $\int_0^l u(t) dt > 0$, $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция такая, что $f = At^q + o(t^q)$ при $t \rightarrow 0$ для некоторых вещественных чисел $A \neq 0$ и $q > 0$. Предположим, что величина $\eta(x) \in [0, x]$ удовлетворяет условию

$$\int_0^l u(t) f(xt) dt = f(\eta(x)) \int_0^l u(t) dt$$

для $x \in (0, 1]$. Тогда справедливо асимптотическое равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta(x)}{x} = \left(\int_0^l u(t) t^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^l u(t) dt \right)^{-\frac{1}{q}}.$$

◁ Сначала рассмотрим функцию $g(t) = f(t) - At^q$ и покажем, что

$$\int_0^l u(t) g(xt) dt = o(x^q) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

Действительно, в силу непрерывности функции g и равенства $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)/t^q = 0$ получаем, что

$$C(x) := \max_{t \in [0, l]} \left| \frac{g(xt)}{x^q t^q} \right| = \max_{t \in [0, l/x]} \left| \frac{g(t)}{t^q} \right| \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow 0$. Поэтому

$$\left| \int_0^l u(t) g(xt) dt \right| \leq \max_{t \in [0, l]} \left| \frac{g(xt)}{x^q t^q} \right| \int_0^l (xt)^q u(t) dt = C(x) x^q \int_0^l t^q u(t) dt,$$

что и влечет нужную асимптотику. Далее получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l u(t) f(xt) dt - f(\eta(x)) \int_0^l u(t) dt = Ax^q \int_0^l t^q u(t) dt + \\ &+ \int_0^l u(t) g(xt) dt - (A(\eta(x))^q + o((\eta(x))^q)) \int_0^l u(t) dt = \\ &= Ax^q \int_0^l t^q u(t) dt - A(\eta(x))^q \int_0^l u(t) dt + o(x^q) = 0, \end{aligned}$$

поскольку $\eta(x) \in [0, x]$ и $\int_0^l u(t) g(xt) dt = o(x^q)$ при $x \rightarrow 0$. Нужное утверждение следует из последнего полученного равенства после деления на Ax^q и перехода к пределу при $x \rightarrow 0$. ▷

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.3.1. Достаточно рассмотреть случай $a = 0$ (к которому общий случай сводится заменой переменной $x \mapsto x' + a$). Напомним, что по формуле (6.2.11) имеет место равенство

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{1}{n!} \int_0^x B(t) f^{(n)}(t) dt$$

для функции f класса C^n , где ядро Пеано $B(t)$ определяется формулой $B(t) = n \cdot [x_0, x_1, \dots, x_n; x \mapsto (x - t)_+^{n-1}]$.

Далее будем обозначать символом $B_x(t)$ ядро Пеано для набора точек (6.3.5), зависящего от x , а символом $[x_0, x_1, \dots, x_n; f]_x$ — выражение $[x_0, x_1, \dots, x_n; f]$ при $x_1 = m_0x, x_2 = m_1x, \dots, x_n = m_nx$. Поскольку $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]_x = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}$, то для всех $x \in (0, 1]$ выполнено равенство (напомним, что $\int_0^1 B_x(t) dt = 1$ согласно предложению 6.2.2)

$$\int_0^x B_x(t) f^{(n)}(t) dt = f^{(n)}(\xi(x)).$$

Легко убедиться в справедливости равенства $B_x(xt) = \frac{1}{x} B_1(t)$ при $t \in [0, x]$, поэтому

$$\int_0^1 B_1(t) f^{(n)}(xt) dt = f^{(n)}(\xi(x)).$$

Теперь, используя предложение 6.2.2 и лемму 6.3.2 (напомним, что по условию теоремы $f^{(n)}(t) = \frac{1}{p!} f^{(n+p)}(0) t^p + o(t^p)$ при $t \rightarrow 0$ и $f^{(n+p)}(0) \neq 0$), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} &= \left(\int_0^1 B_1(t) t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 B_1(t) dt \right)^{-\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\int_0^1 B_1(t) t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{[m_0, m_1, \dots, m_n, x \mapsto x^{n+p}]}{C_{n+p}^n} \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

что и требовалось. Последний переход использует равенство

$$[m_0, m_1, \dots, m_n; f] = \frac{1}{n!} \int_0^1 B_1(t) f^{(n)}(t) dt$$

для функции $f(t) = t^{n+p}$. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3.2. Отметим, что в теореме 1 работы [58] найдено также асимптотическое разложение (при некоторых дополнительных условиях на функцию f) вида

$$\xi(x) = a + \sum_{k=1}^q \frac{c_k}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^q), \quad x \rightarrow a,$$

где q — некоторое натуральное число. Мы не будем приводить здесь явные выражения для коэффициентов c_k (они довольно громоздки), уточним лишь, что коэффициент c_1 вычисляется по формуле (6.3.6). Отметим, что в теореме 2.1 работы [166] этот результат распространен и на случай, когда в формуле (6.3.4) встречаются и равные m_i .

6.3.3. Асимптотика для функций общего вида. Понятно, что при исследовании общего случая асимптотики точек среднего значения в разделенных разностях нет оснований рассчитывать на наличие обычного предела $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\xi(x)-a}{x-a}$. Поэтому естественно обратить внимание на верхний предел $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{\xi(x)-a}{x-a}$.

Пусть $\tilde{B}$ — ядро Пеано для разделенной разности

$$[m_0, m_1, \dots, m_n; f(t)] = \frac{1}{n!} \int_0^1 \tilde{B}(t) f^{(n)}(t) dt \quad (6.3.7)$$

при $0 \leq m_0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_n \leq 1$, $m_0 \neq m_n$. Напомним, что функция $\tilde{B}$ неотрицательна, ее носитель лежит на отрезке $[m_0, m_n]$ и $\int_0^1 \tilde{B}(t) dt = 1$.

Пусть $\tilde{\alpha}$ — нижняя грань всех α , для которых сходится интеграл $\int_0^1 \tilde{B}(t) t^\alpha dt$. Легко понять (см. лемму 6.3.1), что $\tilde{\alpha} = n_0 - n$, где n_0 задается формулой (6.3.2).

Определим функцию $q_{m_0, m_1, \dots, m_n} : (\tilde{\alpha}, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, положив

$$q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(0) = \exp \left(\int_0^1 \tilde{B}(t) \ln(t) dt \right) \quad (6.3.8)$$

и

$$q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\alpha) = \left(\int_0^1 \tilde{B}(t) t^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (6.3.9)$$

при $\alpha \neq 0$. Определенная таким образом функция $q_{m_0, m_1, \dots, m_n}$ обладает рядом свойств, которые мы докажем в следующей лемме.

Лемма 6.3.3. *Функция $q_{m_0, m_1, \dots, m_n} : (\tilde{\alpha}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной и возрастающей на своей области определения. Кроме того, выполняются следующие соотношения:*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}} q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\alpha) = 1.$$

◁ Первое утверждение леммы следует из леммы 4.1.1 при $\alpha_0 = \tilde{\alpha}$. Также из леммы 4.1.1 следует, что $0 < q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\alpha) < 1$ для всех $\alpha \in (\tilde{\alpha}, \infty)$ и что $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\alpha) = 1$. Осталось доказать, что $\lim_{\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}} q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\alpha) = 0$. Это следует из определения числа $\tilde{\alpha}$ и того, что функция $\tilde{B}$ в (правой) окрестности точки 0 совпадает с некоторым многочленом степени $n - 1$. Действительно, заведомо $\tilde{\alpha} \in (-\infty, -1]$. Поскольку же $\tilde{\alpha}$ — нижняя грань всех α , для которых сходится интеграл $\int_0^1 \tilde{B}(t) t^\alpha dt$, то

$$\int_0^1 \tilde{B}(t) t^{\tilde{\alpha}} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}} (q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\alpha))^\alpha = \infty$$

и (поскольку $\tilde{\alpha} < 0$) $\lim_{\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}} q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\alpha) = 0$. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3.3. По определению функции $q_{m_0, m_1, \dots, m_n}$ видно, что

$$q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(p) = \left(\frac{[m_0, m_1, \dots, m_n, x \mapsto x^{n+p}]}{C_{n+p}^n} \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $C_{n+p}^n = \frac{(n+p)!}{n!p!}$, при $p \in \mathbb{N}$, что позволяет переформулировать утверждение теоремы 6.3.1 в терминах функции $q_{m_0, m_1, \dots, m_n}$.

Напомним, что по формуле (6.2.11) имеет место равенство

$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{1}{n!} \int_a^{a+x} B(t) f^{(n)}(t) dt$$

для функции f класса C^n , где ядро Пеано $B(t)$ определяется формулой

$$B(t) = B_{x_0, x_1, \dots, x_n}(t) = n \cdot [x_0, x_1, \dots, x_n; x \mapsto (x - t)_+^{n-1}].$$

Далее будем обозначать символом $B_x(t)$ ядро Пеано для набора точек (6.3.5), зависящего от x , а символом $[x_0, x_1, \dots, x_n; f]_x$ — выражение $[x_0, x_1, \dots, x_n; f]$ при $x_0 = a + m_0 x, x_1 = a + m_1 x, \dots, x_n = a + m_n x$. Отметим, что число n_0 (см. формулу (6.3.2)) характеризуется в рассматриваемом случае тем, что $m_{n_0} = m_0$ и $m_{n_0+1} \neq m_0$. Легко убедиться в справедливости равенства

$$B_x(a + xt) = \frac{1}{x} B_1(a + t), \quad t \in [0, x].$$

Для фиксированного $x > 0$ рассмотрим величину $\xi(x)$ — верхнюю грань (совпадающую с максимумом при $f \in C^n$) всех $\xi \in [a, a + x]$ из теоремы Шварца 6.2.1. Тогда имеет место равенство

$$[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]_x = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}.$$

Сформулируем теперь наш основной результат относительно асимптотики точек среднего значения в разделенных разностях.

Теорема 6.3.2. Допустим, что функция f имеет n непрерывных производных на интервале (a, b) и n_0 производных (где n_0 определяется формулой (6.3.2)) в точке a , причем $f^{(n)}(x) = O((x - a)^\alpha)$ при $x \rightarrow a$ для некоторого $\alpha \in (\tilde{\alpha}, \infty)$. Тогда в приведенных выше обозначениях имеет место неравенство

$$\varliminf_{x \rightarrow a} \frac{\xi(x) - a}{x - a} \geq q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\alpha), \quad (6.3.10)$$

где величина $q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\alpha)$ определяется формулой (6.3.8) при $\alpha = 0$ и формулой (6.3.9) при $\alpha \neq 0$.

◁ Достаточно доказать теорему для частного случая $a = 0$ (к которому она сводится с помощью замены переменной $x \mapsto x' + a$).

Предположим, что теорема неверна. Тогда (поскольку функция $q_{m_0, m_1, \dots, m_n}$ непрерывна по лемме 6.3.3) найдутся такие $\tilde{x} > 0$ и $\beta \in (\tilde{\alpha}, \alpha)$, что $\frac{\xi(x)}{x} < q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\beta)$ для всех $x \in (0, \tilde{x})$.

Отметим, что в таком случае выражение

$$f^{(n)}(px) - [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]_x = f^{(n)}(px) - \int_0^1 \tilde{B}(t) f^{(n)}(xt) dt$$

не меняет знака при $(x, p) \in (0, \tilde{x}) \times [q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\beta), 1]$ (при $a = 0$ и $x = 1$ получаем, что $x_i = m_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) и $\tilde{B} = B_1$ в вышеприведенных обозначениях).

Значит, можно считать (заменяя при необходимости f на $-f$), что для всех $x \in (0, \tilde{x})$ и для всех $p \in [q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\beta), 1]$ выполнено неравенство

$$\int_0^1 \tilde{B}(t) f^{(n)}(xt) dt < f^{(n)}(px).$$

Теперь мы воспользуемся леммой 6.1.1 применительно к ядру $a(t) = \tilde{B}(t)$. В нашем случае непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция $h = f^{(n)}$ удовлетворяет на интервале $(0, \tilde{x})$ неравенству

$$\int_0^1 \tilde{B}(t) h(xt) dt < h(px)$$

для всех $q_0 \leq p \leq 1$, где $q_0 = q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\beta)$. Зафиксируем теперь некоторое число $\gamma \in (\beta, \alpha)$, $\gamma \neq 0$. Ясно, что $f^{(n)}(t) = o(x^\gamma)$ при $x \rightarrow 0$, поскольку $f^{(n)}(t) = O(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$ по условию теоремы. Применяя лемму 6.1.1, мы получаем неравенство $q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\beta) = q_0 \geq q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\gamma)$, чего не может быть, так как функция $q_{m_0, m_1, \dots, m_n}$ возрастает по лемме 6.3.3. Полученное противоречие и доказывает теорему. $\triangleright$

Следует отметить, что согласно замечанию 6.3.3 результат теоремы 6.3.2 хорошо согласуется с теоремой 6.3.1.

При $\alpha \in (-1, \infty)$ мы можем несколько усилить теорему 6.3.2. Напомним, что вычитание из функции f некоторого многочлена степени не выше n (например, ее многочлена Тейлора порядка, не превышающего n , в точке a) не влияет на значение $\xi(x)$ (см. следствие 6.2.1).

Теорема 6.3.3. Допустим, что функция f имеет n производных на интервале (a, b) и n_0 производных (где n_0 определяется формулой (6.3.2)) в точке a , причем $f(x) = P(x) + O((x-a)^{n+\alpha})$ при $x \rightarrow a$

для некоторого многочлена P степени $\leq n$, где $\alpha \in (-1, \infty)$. Тогда выполняется утверждение теоремы 6.3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3.4. Отметим, что в условиях теоремы исследуемые разделенные разности $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]_x$ корректно определены (см. определение 6.2.1). Но функция f не обязана иметь в точке a производные порядка, превышающего n_0 .

◁ Как и в случае предыдущей теоремы, будем проводить доказательство для частного случая $a = 0$. Вычитая из f многочлен P (что не влияет на функцию ξ), можно считать, что $f(x) = O((x - a)^{n+\alpha})$ при $x \rightarrow a = 0$.

Предположим, что теорема неверна. Тогда (поскольку функция $q_{m_0, m_1, \dots, m_n}$ непрерывна по лемме 6.3.3) найдутся такие $\tilde{x} > 0$ и $\beta \in (-1, \alpha)$, что $\frac{\xi(x)}{x} < q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\beta)$ для всех $x \in (0, \tilde{x})$.

Используя теорему Дарбу о промежуточных значениях производной (теорему 1.1.2) применительно к $f^{(n)}$ (согласно формулировке теоремы, мы не располагаем непрерывностью n -й производной $f^{(n)}$), получаем, что выражение

$$f^{(n)}(px) - [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]_x$$

не меняет знака при $(x, p) \in (0, \tilde{x}) \times [q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\beta), 1]$ (ср. с доказательством теоремы 6.3.2).

Значит, можно считать (заменяя при необходимости f на $-f$), что для всех $x \in (0, \tilde{x})$ и для всех $p \in [q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\beta), 1]$ выполнено неравенство

$$[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]_x < f^{(n)}(px). \quad (6.3.11)$$

К сожалению, мы не можем в данном случае сразу применить лемму 6.1.1, поскольку мы не имеем информации об асимптотике $f^{(n)}(x)$ при $x \rightarrow 0$ и не располагаем непрерывностью $f^{(n)}$. Вместо этого мы рассмотрим функцию $g : [0, \tilde{x}) \rightarrow \mathbb{R}$, корректно определяющуюся следующими условиями (здесь мы неявно используем условие $\alpha > -1$):

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0, \quad g^{(n)}(x) = \frac{f(x)}{x^n} \text{ при } x > 0.$$

Зафиксируем теперь произвольное $p \in [q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\beta), 1]$ и рассмот-

рим на интервале $(0, \tilde{x})$ вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(px)}{p^n} - x^n \cdot [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; g]_x = \\ &= \frac{f(px)}{p^n} - \int_0^1 \tilde{B}(t) t^{-n} f(xt) dt = x^n \left(g^{(n)}(px) - \int_0^1 \tilde{B}(t) g^{(n)}(xt) dt \right). \end{aligned}$$

Из равенства $f(x) = O(x^{n+\alpha})$ легко следует, что

$$h(x) = O(x^{n+\alpha}) \quad \text{при } x \rightarrow 0. \quad (6.3.12)$$

Ясно, что при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ и $x \in (0, \tilde{x})$ имеют место равенства

$$h^{(k)}(x) = p^{k-n} f^{(k)}(px) - \int_0^1 \tilde{B}(t) t^{k-n} f^{(k)}(xt) dt. \quad (6.3.13)$$

Прямыми вычислениями с использованием определения 6.2.1 легко проверяется равенство

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^n \cdot [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; g]_x) = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]_x.$$

Таким образом, (6.3.11) влечет для всех $x \in (0, \tilde{x})$ неравенство

$$h^{(n)}(x) = f^{(n)}(px) - [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f]_x > 0.$$

Из этого неравенства следует, что производная $h^{(n-1)}$ строго возрастает на интервале $(0, \tilde{x})$, а потому имеет определенный предел $A_{n-1} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h^{(n-1)}(\varepsilon) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ и сохраняет определенный знак на некотором интервале $(0, \delta_{n-1})$. Отсюда, в свою очередь, следует, что производная $h^{(n-2)}$ строго монотонна на $(0, \delta_{n-1})$, а потому корректно определена величина $A_{n-2} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h^{(n-2)}(\varepsilon) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Рассуждая аналогично, заключаем, что каждая производная $h^{(i)}$, $1 \leq i \leq n-1$, строго монотонна и знакоопределена на некотором интервале $(0, \delta_i)$, что (в частности) влечет существование предела $A_i := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h^{(i)}(\varepsilon) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Теперь из равенства (6.3.12) последовательно выводим, что $A_1 = 0, A_2 = 0, \dots$,

$A_{n-1} = 0$. Значит, каждая производная $h^{(i)}$, $1 \leq i \leq n-1$, положительна на интервале $(0, \delta_i)$, и в качестве δ_i можно взять $\tilde{x}$. Следовательно, функция h строго возрастает на отрезке $[0, \tilde{x}]$ и $h(x) > 0$ при $x \in (0, \tilde{x}]$. Таким образом,

$$\int_0^1 \tilde{B}(t) g^{(n)}(xt) dt < g^{(n)}(px)$$

для всех $x \in (0, \tilde{x})$ и для всех $p \in [q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\beta), 1]$.

Очевидно, что функция $g^{(n)}(x) = f(x)/x^n$ является непрерывной на промежутке $(a = 0, b)$ и $g^{(n)}(x) = O(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$ согласно условию теоремы. Теперь доказательство теоремы можно завершить также как и доказательство теоремы 6.3.2.

Применим лемму 6.1.1 к ядру $a(t) = \tilde{B}(t)$. Функция $h = g^{(n)}$ удовлетворяет на интервале $(0, \tilde{x})$ неравенству

$$\int_0^1 \tilde{B}(t) h(xt) dt < h(px)$$

для всех $q_0 \leq p \leq 1$, где $q_0 = q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\beta)$. Зафиксируем теперь некоторое число $\gamma \in (\beta, \alpha)$, $\gamma \neq 0$. Ясно, что $g^{(n)}(t) = o(x^\gamma)$ при $x \rightarrow 0$, поскольку $g^{(n)}(t) = O(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$ по условию теоремы. Применяя лемму 6.1.1, мы получаем неравенство $q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\beta) = q_0 \geq q_{m_0, m_1, \dots, m_n}(\gamma)$, чего не может быть, так как функция $q_{m_0, m_1, \dots, m_n}$ возрастает по лемме 6.3.3. Полученное противоречие и доказывает теорему. $\triangleright$

В качестве многочлена P в формулировке теоремы 6.3.3 можно рассмотреть, например, многочлен Тейлора порядка $n-1$ (при $\alpha \leq 0$) или n (при $\alpha > 0$) для функции f в точке a (если он определен).

6.4. Некоторые следствия

Здесь мы покажем, что полученные выше результаты об асимптотике точки среднего значения в разделенных разностях общего вида влекут известные результаты из работ [14] и [32].

Если в равенстве Шварца $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ (равенство (6.2.8)) положить $x_{n-1} = \dots = x_2 = x_1 = x_0$ и $x_n = x \neq x_0$, то

согласно определению 6.2.1 получаем

$$[x_0, x_0, \dots, x_0, x; f] = - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \frac{1}{(x-x_0)^{n-m}} + f(x) \frac{1}{(x-x_0)^n},$$

и, следовательно, равенство Шварца эквивалентно следующему:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x-x_0)^m + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^n, \quad (6.4.1)$$

т. е. формуле Тейлора (порядка $n-1$) с остаточным членом в форме Лагранжа. Отметим, что $n_0 = n-1$ и $\tilde{\alpha} = -1$ в этом случае в силу леммы 6.3.1.

Пусть теперь $m_{n-1} = \dots = m_1 = m_0 = 0$ и $m_n = 1$ (в этом случае $n_0 = n-1$, см. (6.3.2)), положим

$$q_{T,n}(\alpha) := q_{0,0,\dots,0,1}(\alpha), \quad \alpha \in (\tilde{\alpha} = -1, \infty). \quad (6.4.2)$$

Согласно формулам (6.3.8) и (6.3.9) имеем

$$q_{T,n}(0) = \exp \left(n \int_0^1 (1-t)^{n-1} \ln(t) dt \right)$$

и

$$q_{T,n}(\alpha) = \left(n \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

при $\alpha \neq 0$, поскольку $\tilde{B}(t) = n(1-t)^{n-1}$ для рассматриваемого случая.

Отметим, что при $n \geq 1$ справедливо равенство

$$I_n := n \int_0^1 (1-t)^{n-1} \ln(t) dt = - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right). \quad (6.4.3)$$

Действительно, $I_1 = \int_0^1 \ln(t) dt = -1$ и (как нетрудно показать, используя индукцию и интегрирование по частям) $I_n = I_{n-1} - 1/n$ при $n \geq 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4.1. Величину $q_{T,n}(\alpha)$ легко преобразовать с помощью В-функции и Γ -функции Эйлера. Действительно, при $\alpha \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} (q_{T,n}(\alpha))^\alpha &= n \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^\alpha dt = nB(n, \alpha+1) = n \frac{\Gamma(n)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)} = \\ &= \frac{n!\Gamma(1+\alpha)}{(n+\alpha) \times \dots \times (1+\alpha)\Gamma(1+\alpha)} = \frac{n!}{(n+\alpha) \times \dots \times (1+\alpha)}. \end{aligned}$$

В приведенных выкладках мы воспользовались классическими формулами $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ и $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ($x, y > 0$). Таким образом,

$$q_{T,n}(\alpha) = (1+\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \times \dots \times \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Из этой формулы сразу следует асимптотика

$$q_{T,n}(\alpha) \rightarrow e^{-(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})} = q_{T,n}(0)$$

при $\alpha \rightarrow 0$. Поэтому обозначение шкалы $q_{T,n}$ согласуются с обозначениями из параграфа 4.3.

Напомним, что $\lim_{\alpha \rightarrow -1} q_{T,n}(\alpha) = 0$ и $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} q_{T,n}(\alpha) = 1$. Из теоремы 6.3.3 немедленно получаем утверждение, совпадающее по сути с утверждением теоремы 4.3.1.

Следствие 6.4.1 [14]. Допустим, что функция f имеет n производных на интервале (a, b) и $n-1$ производную в точке a . Для произвольного $x \in (a, b)$ рассмотрим $\xi_n(x)$ — верхнюю грань чисел $\xi \in (a, x)$, удовлетворяющих равенству (6.4.1). Тогда, если для некоторого многочлена P степени $\leq n$ справедливо асимптотическое равенство $f(x) = P(x) + O((x-a)^{n+\alpha})$ при $x \rightarrow a$, где $\alpha \in (-1, \infty)$, то имеет место неравенство

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{\xi(x) - a}{x - a} \geq q_{T,n}(\alpha). \quad (6.4.4)$$

В частности, при $\alpha = 0$ получаем

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{\xi(x) - a}{x - a} \geq e^{-(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}. \quad (6.4.5)$$

В качестве многочлена P в формулировке приведенного следствия можно рассмотреть, например, многочлен Тейлора порядка $n - 1$ (при $\alpha \leq 0$) или n (при $\alpha > 0$) для функции f в точке a (если он определен). Напомним, что неравенство (6.4.5) является выражением одной из гипотез В. К. Ионина, которые послужили толчком для начала исследования асимптотики промежуточных точек.

Рассмотрим еще одно хорошо известное следствие из равенства Шварца.

Следствие 6.4.2. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и имеет n -ую непрерывную производную на интервале $(0, 1)$, тогда для любого $x \in (0, 1/n)$ существует $\xi \in (0, nx)$ такое, что

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(kx) = x^n f^{(n)}(\xi), \quad \text{где} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

◁ Полагая в равенстве (6.2.8) $x_i = ix$, $i = 0, \dots, n$, и учитывая равенство (6.2.1) для попарно различных $x_0, x_1, x_0, \dots, x_n$, немедленно получаем нужное утверждение. ▷

Заметим, что выражение

$$\frac{\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(kx)}{x^n}$$

можно интерпретировать как значение конечно-разностного оператора n -кратного дифференцирования на функции f .

Обозначим через $\theta(x)$ верхнюю грань чисел ξ из формулировки следствия 6.4.2 на интервале $(0, nx)$. Поставим перед собой задачу исследовать асимптотическое поведение полученной функции при условии на рост в точке 0 функции f .

Нас в первую очередь будет интересовать величина

$$T_n(f) = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\theta(x)}{x}. \quad (6.4.6)$$

В работе [32] доказано, что величина (6.4.6) имеет общую нетривиальную оценку снизу для всех функций, имеющих производную порядка n в точке 0, а также получены некоторые обобщения этого результата. Ниже мы получим соответствующие утверждения как следствия из теорем, доказанных в предыдущем параграфе.

Отметим, что функции θ , построенные по функциям f и $f + P$, где P — многочлен степени n , совпадают. Учитывая это замечание, мы можем считать, что все (существующие) производные функции f до порядка n в точке 0 равны нулю. Далее мы найдем точные оценки снизу величины (6.4.6) для классов функций, удовлетворяющих условиям $f^{(n)}(x) = O(x^\alpha)$, $\alpha \in (-n, \infty)$ при $x \rightarrow 0$.

Предварительно введем некоторую шкалу, которая будет полезна нам в дальнейшем. Через K_n мы будем обозначать стандартный единичный n -мерный куб $[0, 1]^n$, через $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — его элементы.

Определим функцию $q_{FD,n} : (-n, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, положив

$$q_{FD,n}(0) = \exp \left(\int_{K_n} \ln(y_1 + y_2 + \dots + y_n) dy \right) \quad (6.4.7)$$

и

$$q_{FD,n}(\alpha) = \left(\int_{K_n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)^\alpha dy \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (6.4.8)$$

при $\alpha \neq 0$.

Непосредственно вычисляя нужные интегралы, можно получить следующее выражение:

$$q_{FD,n}(\alpha) = \left(\frac{\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^{n+\alpha}}{(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+n)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (6.4.9)$$

Оно определено при $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots, -(n-1)$. Пользуясь же непрерывностью функции $q_{FD,n}$ в указанных особых точках, мы получаем следующие формулы:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^n = n!$$

и

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^l = 0 \quad \text{при } l = 1, \dots, n-1.$$

Устремляя α к нулю в формуле (6.4.9), получаем новое выражение для $q_{FD,n}(0)$:

$$q_{FD,n}(0) = \exp \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^n \ln k - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right). \quad (6.4.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4.2. Необходимо отметить, что функция θ , построенная для степенной функции f , постоянна. Действительно, пусть $f_\alpha(x) = x^{n+\alpha}$ ($\alpha \neq 0$), тогда, привлекая равенство (6.4.9), получаем, что $\xi = q_{FD,n}(\alpha)x$ удовлетворяет равенству из следствия 6.4.2, т. е. $\theta(x) = q_{FD,n}(\alpha)x$ (при $\alpha \in \{-1, -2, \dots, -(n-1)\}$ можно воспользоваться предельным переходом).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4.3. Определенный интерес представляет также функция

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{x^n}{n!} \left(\ln x - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^x n(x-t)^{n-1} \ln t \, dt = \frac{x^n}{n!} \int_0^1 n(1-\tau)^{n-1} \ln(x\tau) \, d\tau. \end{aligned}$$

Она является n -кратной первообразной функции $g(x) = \ln x$, причем $f_0(0) = f'_0(0) = \dots = f_0^{(n-1)}(0) = 0$. Можно проверить, что для нее $\theta(x) = q_{FD,n}(0)x$. Для этого достаточно заметить, что

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^n = n!, \quad \int_0^1 n(1-t)^{n-1} \ln t \, dt = -\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right),$$

и воспользоваться формулой (6.4.10).

Убедиться во всем вышесказанном можно и с более общей точки зрения. Рассмотрим набор $[m_0, m_1, m_2, \dots, m_n] = [0, 1/n, 2/n, \dots, n/n = 1]$ (в этом случае $n_0 = 0$ (см. (6.3.2)) и $\tilde{\alpha} = -n$ в силу леммы 6.3.1. Если мы рассмотрим для такого набора теоремы 6.3.1 и 6.3.2 (в силу того, что все точки набора попарно различны, разделенные разности определяются без помощи производных), то поймем, что $\xi(x)$ в этих теоремах в точности равно $\theta(x/n)$. Поэтому теорема 6.3.1 и замечание 6.3.1 доказывают особое значение

степенных функций в рассматриваемой здесь задаче. А теорема 6.3.2 в свою очередь влечет следующий результат.

Теорема 6.4.1 [32]. Пусть непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция f имеет на интервале $(0, 1)$ непрерывную производную порядка n , удовлетворяющую условию $f^{(n)}(x) = O(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$ ($\alpha > -n$), тогда

$$T_n(f) \geq q_{FD,n}(\alpha).$$

В частности, если функция f имеет n -ю производную на отрезке $[0, 1]$, тогда

$$T_n(f) \geq q_{FD,n}(0).$$

◁ Понятно, что

$$T_n(f) = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\theta(x)}{x} = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(nx)}{x} = n \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x}.$$

По теореме 6.3.2 получаем

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} \geq q_{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1}(\alpha).$$

Согласно замечанию 6.3.1, для функции $f_\alpha(x) = x^{n+\alpha}$ ($\alpha \neq 0$) выполнено равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x)}{x} = q_{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1}(\alpha),$$

и при этом, как было показано выше (см. замечание 6.4.2), $\xi(nx) = \theta(x) = q_{FD,n}(\alpha)x$ для этой функции. Таким образом, $q_{FD,n}(\alpha) = q_{0,1/n,2/n,\dots,1}(\alpha) \cdot n$, и следствие доказано (из соображений непрерывности легко получается и стоящее особняком равенство $q_{FD,n}(0) = q_{0,1/n,2/n,\dots,1}(0) \cdot n$). ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4.4. Отметим, что последние два (ключевых) равенства в доказательстве теоремы 6.4.1, которые означают равенства некоторых определенных интегралов, установлены обходным путем, через использование степенных функций. Естественно, что явные выражения для кратных интегралов, определяющих величину $q_{FD,n}(\alpha)$, могут быть получены и из явного выражения для величины $q_{0,1/n,2/n,\dots,1}(\alpha)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4.5. Из равенства $q_{FD,n}(\alpha) = q_{0,1/n,2/n,\dots,1}(\alpha) \cdot n$, полученного в доказательстве теоремы 6.4.1, и леммы 6.3.3 следует возрастание функции $\alpha \rightarrow q_{FD,n}(\alpha)$.

В случае $\alpha > -1$ теорему 6.4.1 можно усилить.

Теорема 6.4.2 [32]. Пусть функция f имеет $(n-1)$ -ю производную на отрезке $[0, 1]$ и n -ю производную на интервале $(0, 1)$, а также удовлетворяет условию $f(x) = O(x^{n+\alpha})$ при $x \rightarrow 0$ ($\alpha > -1$), тогда

$$T_n(f) \geq q_{FD,n}(\alpha).$$

◁ Теорема 6.4.2 легко следует из более общей теоремы 6.3.3. ▷

В заключение приведем примечательное асимптотическое равенство для $q_{FD,n}(\alpha)$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $\alpha \in (-n, \infty)$.

Теорема 6.4.3 [32]. Для каждого $\alpha > -n$ справедливо асимптотическое равенство

$$q_{FD,n}(\alpha) \sim \frac{n}{2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

◁ Учитывая монотонность функции $q_{FD,n}$ (см. замечание 6.4.5), достаточно доказать утверждение теоремы для отрицательных и для всех натуральных α . Найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} q_{FD,n}(-\alpha))$ при $\alpha > 0$. Пользуясь простейшими свойствами Γ -функции, нетрудно показать, что

$$\frac{1}{(y_1 + \dots + y_n)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-u(y_1 + \dots + y_n)} u^{\alpha-1} du.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (q_{FD,n}(-\alpha))^{-\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{K_n} \left(\int_0^\infty e^{-u(y_1 + \dots + y_n)} u^{\alpha-1} du \right) dy = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\int_{K_n} e^{-u(y_1 + \dots + y_n)} u^{\alpha-1} dy \right) du = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-u}}{u} \right)^n u^{\alpha-1} du. \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

Последнее равенство в этой цепочке получается из формулы

$$\int_{K_n} e^{-u(y_1+\dots+y_n)} dy = \left(\frac{1-e^{-u}}{u} \right)^n.$$

Обратим внимание на крайние члены равенства (6.4.11). После замены $u = 2v/n$ получим

$$(q_{FD,n}(-\alpha))^{-\alpha} = \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)n^\alpha} \int_0^\infty \left(\frac{1-e^{-2v/n}}{2v/n} \right)^n v^{\alpha-1} dv.$$

Заметим, что для фиксированного v имеет место равенство $e^{-2v/n} = 1 - 2v/n + 2v^2/n^2 + o(1/n^2)$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\left(\frac{1-e^{-2v/n}}{2v/n} \right)^n \rightarrow e^{-v} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{q_{FD,n}(-\alpha)}{n} \right)^{-\alpha} = \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-v} v^{\alpha-1} dv = 2^\alpha,$$

что и требовалось.

Пусть теперь α — натуральное число. Рассмотрим следующий интеграл, зависящий от параметра:

$$S(u) = \int_{K_n} e^{-u(y_1+\dots+y_n)} dy = \left(\frac{1-e^{-u}}{u} \right)^n.$$

Очевидно, что

$$S^{(\alpha)}(u) = (-1)^\alpha \int_{K_n} (y_1 + \dots + y_n)^\alpha e^{-u(y_1+\dots+y_n)} dy.$$

Поэтому

$$(q_{FD,n}(\alpha))^\alpha = (-1)^\alpha S^{(\alpha)}(0) = (-1)^\alpha \frac{d^\alpha}{du^\alpha} \left(\frac{1-e^{-u}}{u} \right)^n \Big|_{u=0}.$$

Так как $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1-e^{-u}}{u} = 1$, то α -я производная S в точке 0 является многочленом $P(n)$ от переменной n степени α , причем степень α появляется только в члене

$$n(n-1)\dots(n-\alpha+1)\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)^{n-\alpha}\left(\left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)'_u\right)^\alpha.$$

Нетрудно проверить, что $\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)' = -\frac{1}{2}$. Таким образом, многочлен $P(n)$ имеет вид $P(n) = \left(\frac{n}{2}\right)^\alpha + o(n^\alpha)$ при $n \rightarrow \infty$. Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{FD,n}(\alpha)}{n} = \frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать. $\triangleright$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4.6. Используя предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$, из равенства (6.4.11) можно получить новое выражение для $q_{FD,n}(0)$ (см. (6.4.7)), а именно:

$$q_{FD,n}(0) = \exp \left(\int_0^\infty \left(e^{-u} - \left(\frac{1-e^{-u}}{u} \right)^n \right) \frac{du}{u} \right).$$

ГЛАВА 7

АСИМПТОТИКА ОПОРНЫХ ТОЧЕК И ТОЧЕК КАСАНИЯ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Материал этой главы основан на работах [33] и [119]. Основной идеей является более внимательный анализ точек промежуточного значения для ряда классических теорем с точки зрения геометрии кривых. Наряду с довольно продвинутыми результатами в случае кривых на плоскости обсуждаются еще мало исследованные их аналоги для кривых в многомерных евклидовых пространствах. Сформулированные проблемы и гипотезы могут стать основой дальнейших исследований в этом направлении.

7.1. Постановка задачи на плоскости и основные результаты

Сначала мы уточним понятие опорных (относительно заданной хорды) точек непрерывной параметризованной кривой, несмотря на то, что это понятие естественно и интуитивно ясно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1.1. Пусть $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^2$ — непрерывная параметрическая кривая на евклидовой плоскости, $[c, d] \subset (a, b)$. Будем говорить, что точка $\gamma(\tau_0)$, $\tau_0 \in [c, d]$, является опорной точкой для хорды $[\gamma(c), \gamma(d)]$ (при $\gamma(c) \neq \gamma(d)$), если прямая l , проходящая через $\gamma(\tau_0)$ параллельно $[\gamma(c), \gamma(d)]$, такова, что для всех τ , достаточно близких к τ_0 , точки $\gamma(\tau)$ находятся в одной из замкнутых полуплоскостей определяемых прямой l . При $\gamma(c) = \gamma(d)$ будем считать, что любая точка $\gamma(\tau_0)$ при $\tau_0 \in [c, d]$ является опорной точкой для (вырождающейся в точку) хорды $[\gamma(c), \gamma(d)]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1.1. Отметим, что наше соглашение по поводу множества опорных точек при $\gamma(c) = \gamma(d)$ обуславливается универсальностью аналитического описания этого множества при таком определении (см. ниже). При желании его можно несколько видоизменить,

но в любом случае это не принципиально в силу того, что случай хорд нулевой длины тривиален (в определенном смысле) для рассматриваемых нами задач, см. замечание 7.1.2.

Введем на $\mathbb{E}^2$ прямоугольную декартову систему координат Oxy . Тогда $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, $t \in (a, b)$. Тот факт, что точка $\gamma(\tau_0)$, $\tau_0 \in [c, d]$, является опорной точкой для хорды $[\gamma(c), \gamma(d)]$ можно выразить следующим образом. Рассмотрим функцию $\Phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(\tau) = \det \begin{pmatrix} x(d) - x(c) & y(d) - y(c) \\ x(\tau) & y(\tau) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно понять, что точка $\gamma(\tau_0)$, $\tau_0 \in [c, d]$, является *опорной точкой* для хорды $[\gamma(c), \gamma(d)]$ тогда и только тогда, когда τ_0 является точкой локального экстремума функции Φ . Поскольку $\Phi(c) = \Phi(d)$, то найдется по крайней мере одна точка локального экстремума рассматриваемой функции на интервале (c, d) . Если к тому же кривая $\gamma(t)$ дифференцируема в точке τ_0 , то

$$\Phi'(\tau_0) = \det \begin{pmatrix} x(d) - x(c) & y(d) - y(c) \\ x'(\tau_0) & y'(\tau_0) \end{pmatrix} = 0,$$

что означает коллинеарность векторов $\gamma(d) - \gamma(c)$ и $\gamma'(\tau_0)$. Отметим также, что прямая l из определения 7.1.1 является касательной к кривой $\gamma(t)$ в точке $\gamma(\tau_0)$ при $\gamma(c) \neq \gamma(d)$ и $\gamma'(\tau_0) \neq 0$.

Теперь мы приступим к формулировке основных результатов данной работы.

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$, где $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, — непрерывная параметрическая кривая на евклидовой плоскости, не являющаяся постоянной ни в какой окрестности точки a .

Через $D(t)$ будем далее обозначать расстояние между точками $\gamma(a)$ и $\gamma(t)$.

Для каждого $t \in (a, b)$ через $S(t)$ будем обозначать множество таких $\tau \in (a, t]$, для которых точка $\gamma(\tau)$ является опорной точкой для хорды $[\gamma(a), \gamma(t)]$. Рассмотрим теперь (см. рис. 7.1)

$$DS(t) = \sup \{D(\tau) \mid \tau \in S(t)\}.$$

Основным объектом исследования в настоящей главе является *асимптотика отношения* $DS(t)/D(t)$ *при* $t \rightarrow a$. Для фиксированного t множество точек $S(t) \subset (a, t]$ может быть устроено довольно

сложно, что очевидно из геометрической интерпретации этого множества. Особым является случай, когда $D(t) = 0$. Согласно определению в этом случае $S(t) = (a, t]$. Очевидно, существует $\tau \in S(t) = (a, t]$ с условием $D(\tau) > 0$ (в противном случае кривая γ была бы постоянной на интервале (a, t)). Поэтому $DS(t) > 0$ для такого t , и мы полагаем, что $DS(t)/D(t) = \infty$ при $D(t) = 0$.

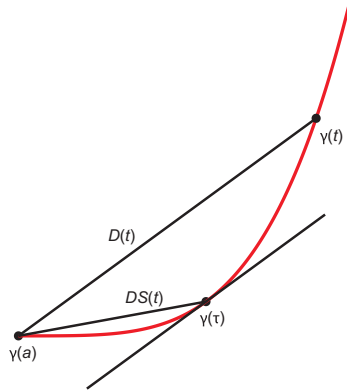


Рис. 7.1. Определение величин $D(t)$ и $DS(t)$ для кривой.

Для фиксированного значения t можно подобрать кривую, для которой отношение $DS(t)/D(t)$ равно наперед заданному положительному числу. С другой стороны, понятно, например, что это отношение не может быть больше единицы для всех значений параметра. Гораздо менее очевидный факт состоит в том, что отношение $DS(t)/D(t)$ не может быть *меньше* определенного положительного числа для всех значений параметра. Точное утверждение содержится в следующей теореме, являющейся основным результатом этой главы.

Теорема 7.1.1 [119]. Пусть $\gamma : [a, b) \rightarrow \mathbb{E}^2$ — произвольная непрерывная параметрическая кривая. Тогда справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow a} \frac{DS(t)}{D(t)} \geq \frac{1}{e}, \quad (7.1.1)$$

где, как обычно, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1.2. Поясним, почему наличие точек со свойством $D(t) = 0$ (а, значит, и со свойством $DS(t)/D(t) = \infty$) не играет принципиальной роли, т. е. то, почему их вообще можно не принимать в расчет. Пусть $\gamma : [a, b) \rightarrow \mathbb{E}^2$ — некоторая параметрическая непрерывная кривая. Если существует такое $b_0 \in (a, b]$, что $D(t) \neq 0$ при $t \in (a, b_0]$, то мы можем сузить область определения нашей кривой до промежутка $[a, b_0]$ (на утверждении теоремы 7.1.1 это никак не отразится). Если же такого b_0 не существует, то существуют последовательности чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такие, что $a_n \rightarrow a$ и $b_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, $a < a_n < b_n < b$ и $D(t) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и для всех $t \in (a_n, b_n]$. Действительно, в противном случае $\gamma(t) \equiv \gamma(a)$ для всех $t \in [a, a + \varepsilon)$ при подходящем $\varepsilon > 0$, что невозможно в соответствии с допущениями относительно кривой. Согласно теореме 7.1.1 для кривой γ , ограниченной на отрезок $[a_n, b_n]$, Существуют такие $t_n \in (a_n, b_n]$ и $\tau_n \in (a_n, t_n]$, что точка $\gamma(\tau_n)$ является опорной точкой для хорды $[\gamma(a_n), \gamma(t_n)]$ и $\frac{D(\tau_n)}{D(t_n)} > e^{-1} - \frac{1}{n}$. Поскольку $\gamma(a_n) = \gamma(a)$ для всех n , то $\gamma(\tau_n)$ является опорной точкой и для хорды $[\gamma(a), \gamma(t_n)]$, поэтому $\frac{DS(t_n)}{D(t_n)} \geq \frac{D(\tau_n)}{D(t_n)} > e^{-1} - \frac{1}{n}$, и соответственно $\overline{\lim}_{t \rightarrow a} \frac{DS(t)}{D(t)} \geq \frac{1}{e}$ для кривой $\gamma : [a, b) \rightarrow \mathbb{E}^2$ даже без учета тех точек t , в которых $D(t) = 0$.

Как отмечалось выше, для дифференцируемой кривой опорная точка является точкой касания. Поэтому из сформулированной теоремы нетрудно вывести и соответствующий результат для точек касания. Уточним постановку проблемы.

Пусть $\gamma : [a, b) \rightarrow \mathbb{E}^2$, где $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, — непрерывная параметрическая кривая на евклидовой плоскости такая, что для любого $t \in (a, b)$ существует ненулевой производный вектор $\gamma'(t)$. Отметим, что этот вектор задает направление касательной к рассматриваемой кривой в точке $\gamma(t)$. В случае непрерывно изменяющегося производного вектора такие кривые принято называть гладкими регулярными, но мы в дальнейшем (если не оговорено противное) не предполагаем непрерывности производного вектора.

Аналогично случаю общих непрерывных кривых для каждого $t \in (a, b)$ через $T(t)$ будем обозначать множество таких $\tau \in (a, t]$, что вектор $\gamma'(\tau)$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{\gamma(a)\gamma(t)}$. Ясно, что множество $T(t)$ является непустым для любого $t \in (a, b)$ (поскольку непустым является даже множество $S(t) \subset T(t)$).

Рассмотрим величину

$$DT(t) = \sup \{D(\tau) \mid \tau \in T(t)\}.$$

Нас будет интересовать *асимптотика отношения* $DT(t)/D(t)$ при $t \rightarrow a$. Для фиксированного t (по аналогии с $S(t)$) множество точек $T(t) \subset (a, t]$ может быть устроено довольно сложно, что следует из геометрической интерпретации этого множества как множества точек $\tau \in (a, t]$ таких, что касательная к кривой γ в точке $\gamma(\tau)$ параллельна хорде $[\gamma(a), \gamma(t)]$. Например, при $D(t) = 0$ имеет место равенство $T(t) = (a, t]$, и мы полагаем в этом случае $DT(t)/D(t) = \infty$. Это обусловлено тем, что для некоторого $\tau \in (a, t) \subset T(t)$ выполнено неравенство $D(\tau) > 0$ (в противном случае производный вектор γ' был бы тривиальным на интервале (a, t)) и, значит, $DT(t) > 0$ (см. аналогичное соглашение о значении $DS(t)/D(t)$ при $D(t) = 0$, а также замечания 7.1.1 и 7.1.2).

Ясно, что для какого-то конкретного значения t (и специально выбранной кривой) отношение $DT(t)/D(t)$ может быть произвольным положительным числом. Для дифференцируемой кривой γ мы очевидно имеем включение $S(t) \subset T(t)$ (но при этом $S(t) \neq \emptyset$) и, следовательно, неравенство $DS(t) \leq DT(t)$ для произвольного $t \in (a, b)$. Поэтому следующий результат (полученный ранее в [33]) является непосредственным следствием теоремы 7.1.1.

Теорема 7.1.2 [33]. Пусть $\gamma : [a, b) \rightarrow \mathbb{E}^2$ — произвольная непрерывная параметрическая кривая с ненулевым производным вектором $\gamma'(t)$ в каждой точке $t \in (a, b)$. Тогда справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow a} \frac{DT(t)}{D(t)} \geq \frac{1}{e}. \quad (7.1.2)$$

В следующем параграфе мы приведем ряд примеров, иллюстрирующих утверждение этой и предыдущей теорем. В частности, эти примеры показывают, что неравенства (7.1.1) и (7.1.2) неумлучшаемы.

Отметим также, что неравенства (7.1.1) и (7.1.2) имеют локальный характер, поэтому в формулировке теоремы 7.1.1 (соответственно, теоремы 7.1.2) мы можем заменить область определения $[a, b)$ кривой $\gamma(t)$ на любой промежуток $[a, b_1)$, где $b_1 \in (a, b)$. Также в условиях теоремы 7.1.1 мы можем рассмотреть вместо кривой $\gamma : [a, b) \rightarrow \mathbb{E}^2$ кривую $\gamma_1 : [a_1, b_1) \rightarrow \mathbb{E}^2$, если $\gamma_1(t) = \gamma(g(t))$ для некоторой непрерывной биективной функции $g : [a_1, b_1) \rightarrow [a, b)$ (в случае теоремы 7.1.2 необходимо еще потребовать существование у g положительной производной на интервале (a_1, b_1)). Другими словами, утверждения рассматриваемых теорем имеют отношение к геометрии кривой (как класса попарно эквивалентных параметризованных

кривых), а не к определенной выделенной параметризации. В дальнейшем (например, при доказательстве теорем 7.1.1 и 7.1.2) мы будем свободно пользоваться этими свойствами. С другой стороны, результаты теорем 7.1.1 и 7.1.2 могут быть использованы для исследования параметризаций некоторого специального вида, в этом случае мы получаем ряд результатов (частично известных) об асимптотике точек промежуточного значения в некоторых классических дифференциальных и интегральных теоремах (см. параграф 7.5).

Доказательства теорем 7.1.1 и 7.1.2 мы приведем в отдельных параграфах. Несмотря на то, что теорема 7.1.2 является простым следствием теоремы 7.1.1, приводится независимое ее доказательство. Оно более просто с технической точки зрения по сравнению с доказательством теоремы 7.1.1, и основные его идеи могут быть полезны при изучении близких вопросов. Но прежде чем приступить к изложению доказательств, мы рассмотрим несколько полезных примеров.

7.2. Некоторые примеры

Будем задавать кривые в полярных координатах на плоскости, совмещая при этом полюс с начальной точкой кривой. Более того, роль параметра во всех следующих примерах играет сам полярный угол t , $t \in [a, b]$.

Кривая $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, полностью определяется $t \mapsto \rho(t)$ — функцией расстояния от текущей точки кривой до полюса. Отметим выполнение равенства $D(t) = \rho(t)$ во всех приводимых примерах, в частности, $D(a) = \rho(a) = 0$. Точки $\tau \in T(t) \subset (a, t]$ определяются равенством

$$\rho(\tau) \cos(t - \tau) - \rho'(\tau) \sin(t - \tau) = 0. \quad (7.2.1)$$

Отметим также то, что во всех примерах этого параграфа справедливо равенство $T(t) = S(t)$ для всех возможных значений параметра t (в чем нетрудно убедиться), т. е. все точки касания заодно являются и опорными точками для соответствующих хорд кривых.

ПРИМЕР 7.2.1. Пусть кривая задается уравнением $\rho(t) = e^{\alpha t}$, где $\alpha > 0$, параметром является полярный угол, $t \in [-\infty, b]$. Понятно, что $t = \tau + \operatorname{arccot}(\alpha) + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$) для $\tau \in T(t) = S(t)$. Поэтому

$$DS(t) = DT(t) = e^{\alpha t - \alpha \cdot \operatorname{arccot}(\alpha)}, \quad D(t) = \rho(t) = e^{\alpha t},$$

$$\frac{DT(t)}{D(t)} = \frac{DS(t)}{D(t)} = e^{-\alpha \cdot \operatorname{arccot}(\alpha)}.$$

Осталось отметить, что $\alpha \cdot \operatorname{arccot}(\alpha) < 1$ при $\alpha > 0$ и, кроме того, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\alpha \cdot \operatorname{arccot}(\alpha)) = 1$. Таким образом, неравенства в теоремах 7.1.1 и 7.1.2 неулучшаемы.

ПРИМЕР 7.2.2. Пусть кривая задается уравнением $\rho(t) = t^\alpha$, где $\alpha > 0$, параметром является полярный угол, $t \in [0, b)$. Для нахождения $\tau \in T(t) = S(t)$ получаем равенство

$$\tau \cos(t - \tau) - \alpha \sin(t - \tau) = 0.$$

Понятно, что $t = \tau + \operatorname{arccot}(\frac{\alpha}{\tau}) + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$). Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{DT(t)}{D(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{DS(t)}{D(t)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\tau^\alpha}{(\tau + \operatorname{arccot}(\frac{\alpha}{\tau}))^\alpha} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\tau} \operatorname{arccot}(\frac{\alpha}{\tau})\right)^{-\alpha} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{-\alpha} > e^{-1}. \end{aligned}$$

Также отметим, что $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (1 + \alpha^{-1})^{-\alpha} = e^{-1}$.

ПРИМЕР 7.2.3. Пусть $l > 1$, $[a, b) = [-\infty, 0)$, $\rho(t) = e^{\phi(t)}$, где $\phi(t) = -|t|^l = -(-t)^l$, параметром опять является полярный угол, $t \in [-\infty, 0)$. Понятно, что $t = \tau + \operatorname{arccot}(\phi'(\tau)) + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$) для $\tau \in T(t) = S(t)$ (см. равенство (7.2.1)). Отсюда нетрудно вывести, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{DT(t)}{D(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{DS(t)}{D(t)} = e^L,$$

где $L = \lim_{s \rightarrow -\infty} (\phi(s) - \phi(s + \alpha(s)))$ и $\alpha(s) = \operatorname{arccot}(\phi'(s))$. Так как $\phi''(t) \leq 0$, то

$$\phi'(s)\alpha(s) \geq \phi(s + \alpha(s)) - \phi(s) \geq \phi'(s + \alpha(s))\alpha(s).$$

Поскольку

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} (\beta \cdot \operatorname{arccot}(\beta)) = 1, \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} \phi'(s) = \infty, \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\phi'(s + \alpha(s))}{\phi'(s)} = 1,$$

то $L = -1$ и

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{DT(t)}{D(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{DS(t)}{D(t)} = e^{-1}.$$

Этот пример помогает лучше уяснить некоторые шаги приведенных ниже доказательств теорем 7.1.1 и 7.1.2.

Отметим также, что множество других примеров доставляет нам теорема 7.5.2 и следствие 7.5.1 из параграфа 7.5 благодаря асимптотическому равенству (7.5.3), поскольку такие примеры приведены в предыдущих частях книги. Отметим, также что при некоторых дополнительных ограничениях на асимптотику кривой $t \rightarrow \gamma(t)$ в точке a существует обычный предел $\lim_{t \rightarrow a} \frac{DT(t)}{D(t)} (\geq e^{-1})$.

7.3. Доказательство теоремы 7.1.2

Мы начнем с технически более простого доказательства теоремы 7.1.2. Введем на $\mathbb{E}^2$ прямоугольную декартову систему координат Oxy . Тогда $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [a, b]$. Тот факт, что точка $\tau_0 \in (a, t]$ принадлежит множеству $T(t)$, можно выразить следующим образом. Рассмотрим функцию $\Phi : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(\tau) = \det \begin{pmatrix} x(t) - x(a) & y(t) - y(a) \\ x(\tau) - x(a) & y(\tau) - y(a) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно понять, что точка $\tau_0 \in T(t)$ тогда и только тогда, когда

$$\Phi'(\tau_0) = \det \begin{pmatrix} x(t) - x(a) & y(t) - y(a) \\ x'(\tau_0) & y'(\tau_0) \end{pmatrix} = 0.$$

Поскольку $\Phi(a) = \Phi(t)$, то $T(t) \neq \emptyset$ по теореме Ролля. Для доказательства теоремы 7.1.2 нам будет полезно одно вспомогательное утверждение.

Лемма 7.3.1. Пусть заданы вещественные числа $C > 0$, $q > 1$ и функция $\alpha : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, где $b > a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, со следующими свойствами:

- (а) $0 < \alpha(t) < C$ для всех $t \in (a, b]$;
- (б) либо $t + \alpha(t) > b$, либо существует $\xi = \xi(t) \in (t, t + \alpha(t))$ такое, что $\alpha(t) \geq q\alpha(\xi)$.

Тогда выполняется (по крайней мере) одно из следующих утверждений:

- 1) существует точка $t^* \in (a, b]$ и последовательность $\{t_n\}$, $t_n \in (a, b)$, такая, что $\alpha(t_n) \rightarrow 0$ и $t_n \rightarrow t^*$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $a > -\infty$ и существует $c > 0$ такое, что $\alpha(t) \geq c$ для всех $t \in (a, b]$.

◁ Предположим, что утверждение 1) из формулировки леммы не выполнено и докажем справедливость утверждения 2).

Пусть $b_0 \in (a, b)$ и пусть $c_1 \geq 0$ — нижняя грань значений функции $t \mapsto \alpha(t)$ на отрезке $[b_0, b]$. При $c_1 = 0$, пользуясь компактностью отрезка $[b_0, b]$, легко построить последовательность $\{t_n\}$, $t_n \in [b_0, b) \subset (a, b)$, сходящуюся к некоторому $t^* \in [b_0, b] \subset (a, b]$ и такую, что $\alpha(t_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но поскольку утверждение 1) из формулировки леммы не выполнено по нашему предположению, то справедливо неравенство $c_1 > 0$.

Пусть теперь $c = \min\{c_1, b - b_0\} > 0$. Покажем, что $\alpha(t) \geq c$ для всех $t \in (a, b]$. Предположим, что множество

$$S = \{t \in (a, b] \mid \alpha(t) < c\}$$

непусто. Очевидно, $S \subset (a, b_0]$. Отметим, что для всех $t \in S$ выполнено неравенство $t + \alpha(t) \leq b$ (иначе $\alpha(t) > b - t \geq b - b_0 \geq c$), поэтому по условию леммы для каждого $t \in S$ существует такое число $\xi = \xi(t) \in (t, t + \alpha(t)) \subset (t, b]$, что $\alpha(t) \geq q\alpha(\xi)$. Выберем некоторое $t_1 \in S$ и построим последовательность точек $\{t_n\}$ из S следующим образом: если t_i уже определен, то полагаем $t_{i+1} = \xi(t_i)$. По построению $t_i < t_{i+1}$, и, поскольку

$$c > \alpha(t_i) \geq q\alpha(\xi(t_i)) = q\alpha(t_{i+1}) > \alpha(t_{i+1}),$$

то $t_{i+1} \in S$. Поскольку построенная последовательность возрастает и ограничена сверху числом b_0 ($S \subset (a, b_0]$), она имеет некоторый конечный предел $t^* \in (a, b_0]$, а неравенство $\alpha(t_i) \geq q\alpha(t_{i+1})$ влечет, что $\alpha(t_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, выполняется условие 1) в формулировке леммы, что мы предположили невозможным. Следовательно, $S = \emptyset$, т. е. $\alpha(t) \geq c$ для всех $t \in (a, b]$.

Если $a > -\infty$, то выполнено утверждение 2) из формулировки леммы. Поэтому нам осталось разобрать случай $a = -\infty$.

Для всех $i \geq 1$ определим числа b_i рекуррентной формулой $b_i = b_{i-1} - q^i c$ (b_0 было выбрано нами ранее). Докажем по индукции, что

$$\alpha(t) \geq cq^i$$

для всех $t \in (-\infty, b_i]$. При $i = 0$ это неравенство мы уже доказали. Предположим, что оно доказано для всех $i < k$ и докажем его при $i = k$.

Пусть $t \in (-\infty, b_k]$. Если $t + \alpha(t) \geq b_{k-1}$, то

$$\alpha(t) > b_{k-1} - t \geq b_{k-1} - b_k = cq^k.$$

Если же $t + \alpha(t) \leq b_{k-1}$ (что делает невозможным неравенство $t + \alpha(t) > b > b_{k-1}$), то по условию леммы существует такое число $\xi = \xi(t) \in (t, t + \alpha(t)) \subset (t, b_{k-1})$, что $\alpha(t) \geq q\alpha(\xi)$. Поскольку $\xi < b_{k-1}$, то $\alpha(\xi) \geq cq^{k-1}$ по предположению индукции. Следовательно, $\alpha(t) \geq cq^k$ и в этом случае.

Теперь осталось заметить, что доказанное только что неравенство $\alpha(t) \geq cq^i$ противоречит неравенству $\alpha(t) < C$ из условия леммы. Действительно, для достаточно больших значений i выполняется неравенство $cq^i > C$. Это противоречие и заканчивает доказательство леммы. $\triangleright$

В оставшейся части этого параграфа мы доказываем теорему 7.1.2. Для этого мы получим противоречие, предполагая, что ее утверждение не выполняется.

Без ограничения общности можно считать (и мы будем делать это в дальнейшем), что $\gamma(t) \neq \gamma(a)$ для всех $t \in (a, b)$. Действительно, если существует последовательность точек $t_n \in (a, b)$ такая, что $t_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$ и $\gamma(t_n) = \gamma(a)$, то (поскольку в этом случае $D(t_n) = 0$ и $DT(t_n)/D(t_n) = \infty$ согласно договоренности, обсуждаемой перед формулировкой теоремы 7.1.2) $\overline{\lim}_{t \rightarrow a} \frac{DT(t)}{D(t)} = \infty > \frac{1}{e}$, что мы исключили. Таким образом, числа $t \in (a, b)$ со свойством $\gamma(t) = \gamma(a)$ не могут располагаться сколь угодно близко к точке a , и, уменьшая при необходимости число b , можно добиться того, что такие точки отсутствуют.

Пусть декартова система координат Oxy выбрана так, что $O = \gamma(a)$. Рассмотрим функции $\rho, \theta : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, определяемые следующим образом. Положим $\rho(t) = D(t)$ — расстояние от O до текущей точки кривой $\gamma(t)$. В качестве $\theta(t)$ мы рассмотрим число такое, что $x(t) = \rho(t) \cos(\theta(t))$ и $y(t) = \rho(t) \sin(\theta(t))$. Такое число (полярный угол) находится однозначно с точностью до слагаемого $2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Учитывая непрерывность $\gamma(t)$, нетрудно осуществить выбор такого угла для различных значений t так, чтобы функция $\theta(t)$ оказалась непрерывной. Из дифференцируемости $\gamma(t)$ и неравенства $\gamma(t) \neq O$ при $t \in (a, b)$ следует дифференцируемость функций $\rho(t)$ и $\theta(t)$ на интервале (a, b) .

Покажем, что функцию $\theta(t)$ можно считать строго возрастающей. Действительно, легко понять, что для точек $t \in (a, b)$, в ко-

торых $\theta'(t) = 0$ выполнено включение $t \in T(t)$. Для таких точек $DT(t) \geq D(t)$, поэтому (см. рассуждение выше) такие точки не могут находиться сколь угодно близко к точке a . Уменьшая (в случае надобности) число b , можно считать, что $\theta'(t)$ не меняет знака на интервале (a, b) . Заменяя при необходимости луч Oy на противоположный (тем самым изменяя ориентацию), можно считать, что $\theta'(t) > 0$ при $t \in (a, b)$.

Теперь (опять же без ограничения общности) мы можем произвести замену параметра t так, что $\theta(t) = t$ для всех $t \in (a, b)$, т. е. рассматривая нами кривая будет параметризована полярным углом. Далее нам также будет удобно рассмотреть функцию

$$\phi(t) = \ln(\rho(t)).$$

Поскольку $\rho(t) = e^{\phi(t)}$, то, согласно сделанным нами выводам и допущениям, функция $\phi : [a, b) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ непрерывна на области определения, принимает конечные значения и дифференцируема при $t \in (a, b)$, а $\phi(a) = -\infty$. Далее мы установим некоторые свойства этой функции.

Поскольку мы предположили теорему 7.1.2 неверной, то можем считать, что существует число $q > 1$ такое, что для всех $t \in (a, b)$ и всех $\tau \in T(t)$ выполнено неравенство

$$\frac{D(\tau)}{D(t)} \leq e^{-q}.$$

В наших обозначениях $D(t) = e^{\phi(t)}$, поэтому приведенное неравенство эквивалентно следующему:

$$\phi(t) - \phi(\tau) \geq q > 1 \quad (7.3.1)$$

для всех $t \in (a, b)$ и для всех $\tau \in T(t)$.

Поскольку теперь $x(t) = e^{\phi(t)} \cos(t)$ и $y(t) = e^{\phi(t)} \sin(t)$, то условие принадлежности $\tau \in (a, t]$ множеству $T(t)$ выражается равенством

$$\cos(t - \tau) = \phi'(\tau) \sin(t - \tau). \quad (7.3.2)$$

Это уравнение имеет решение $t = \tau + \operatorname{arccot}(\phi'(\tau)) + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). С учетом неравенства $t \geq \tau$ следует выбирать лишь неотрицательные значения n такие, что $\tau + \operatorname{arccot}(\phi'(\tau)) + \pi n < b$.

Далее мы рассмотрим функцию $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, задающуюся равенством

$$\alpha(t) = \operatorname{arccot}(\phi'(t)).$$

Ясно, что $\alpha(t) \in (0, \pi)$ для всех значений параметра. Зафиксируем теперь некоторое число $b^* \in (a, b)$. Сейчас мы установим одно примечательное свойство функции $\alpha(t)$ на промежутке $(a, b^*]$.

Покажем, что для любого $t \in (a, b^*]$ выполняется по крайней мере одно из следующих двух утверждений:

- i) $t + \alpha(t) > b^*$;
- ii) существует $\xi = \xi(t) \in (t, t + \alpha(t))$ такое, что $\alpha(t) > q\alpha(\xi)$.

Допустим, что утверждение i) не выполнено, т. е. $t + \alpha(t) \leq b^*$. Положим $s = t + \alpha(t)$, тогда $t < s < b^*$, и более того, $t \in T(s)$, как следует из равенства (7.3.2) и определения функции $\alpha(t)$. Согласно неравенству (7.3.1) мы получаем

$$1 < q \leq \phi(s) - \phi(t) = \phi'(\xi)(s - t) = \phi'(\xi)\alpha(t),$$

для некоторого числа $\xi \in (t, s)$, существующего по теореме Лагранжа. Ясно, что $\phi'(\xi) > 0$, поэтому $\alpha(\xi) = \operatorname{arccot}(\phi'(\xi)) \in (0, \pi/2)$. Далее,

$$\phi'(\xi) = \cot(\alpha(\xi)) = \frac{1}{\tan(\alpha(\xi))} < \frac{1}{\alpha(\xi)},$$

поскольку $\tan(x) > x$ при $x \in (0, \pi/2)$. Поэтому $q \leq \phi'(\xi)\alpha(t) < \frac{\alpha(t)}{\alpha(\xi)}$, и мы доказали утверждение ii).

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 7.1.2. В наших условиях применима лемма 7.3.1 (при этом $C = \pi$ и $b = b^*$). Поэтому выполнено либо утверждение 1), либо утверждение 2) из формулировки этой леммы (в обоих случаях нам достаточно прийти к противоречию).

Пусть выполнено утверждение 1), т. е. существуют точка $t^* \in (a, b^*]$ и последовательность $\{t_n\}$, $t_n \in [a, b^*)$, такая, что $\alpha(t_n) \rightarrow 0$ и $t_n \rightarrow t^*$ при $n \rightarrow \infty$. Положим $s_n = t_n + \alpha(t_n)$. Ясно, что $t_n \in T(s_n)$ для всех n , следовательно, $\phi(s_n) - \phi(t_n) \geq q > 1$ (см. неравенство (7.3.1)). Но это неравенство не может быть выполнено для больших значений n , поскольку $t_n \rightarrow t^*$, $s_n = t_n + \alpha(t_n) \rightarrow t^*$, а функция $t \mapsto \phi(t)$ непрерывна в точке t^* . Значит, в этом случае доказываемая теорема справедлива.

Пусть теперь выполнено утверждение 2), т. е. $a > -\infty$ и существует $c > 0$ такое, что $\alpha(t) \geq c$ для всех $t \in (a, b^*]$. Поскольку

$\alpha(t) = \operatorname{arccot}(\phi'(t))$, из равенства (7.3.2) следует, что $t \in (a, b^*)$ и для всех $\tau \in T(t)$ выполнено неравенство $t - \tau \geq c > 0$. С другой стороны, при $t - a \leq c$ мы получаем $t - \tau \leq t - a \leq c$ для всех $\tau \in T(t)$ (напомним, что множество $T(t)$ непусто всех t), поскольку $\tau \in (a, t)$, что противоречит предыдущему неравенству. Таким образом, в этом случае доказываемая теорема также справедлива.

7.4. Доказательство теоремы 7.1.1

Введем на $\mathbb{E}^2$ прямоугольную декартову систему координат Oxy так, что $O = \gamma(a)$. Тогда $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [a, b)$, и $\gamma(a) = (x(a), y(a)) = (0, 0)$. Тот факт, что точка $\tau_0 \in (a, t]$ принадлежит множеству $S(t)$, можно выразить следующим образом. Рассмотрим функцию $\Phi : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(\tau) = \det \begin{pmatrix} x(t) & y(t) \\ x(\tau) & y(\tau) \end{pmatrix}. \quad (7.4.1)$$

Тогда точка $\tau_0 \in (a, t]$ принадлежит множеству $S(t)$ тогда и только тогда, когда τ_0 является точкой локального экстремума функции $\tau \mapsto \Phi(\tau)$.

В оставшейся части этого параграфа мы доказываем теорему 7.1.1. Далее мы предположим, что утверждение теоремы 7.1.1 не выполняется, и придем к противоречию.

Без ограничения общности можно считать (и мы будем делать это в дальнейшем), что $\gamma(t) \neq \gamma(a)$ для всех $t \in (a, b)$. Действительно, если существует последовательность точек $t_n \in (a, b)$ такая, что $t_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$ и $\gamma(t_n) = \gamma(a)$, то (поскольку в этом случае $D(t_n) = 0$ и $DS(t_n)/D(t_n) = \infty$ согласно договоренности, обсуждаемой перед формулировкой теоремы 7.1.1) $\overline{\lim}_{t \rightarrow a} \frac{DT(t)}{D(t)} = \infty > \frac{1}{e}$, что мы исключили. Таким образом, числа $t \in (a, b)$ со свойством $\gamma(t) = \gamma(a)$ не могут располагаться сколь угодно близко к точке a , и, уменьшая при необходимости число b , можно добиться того, что такие точки отсутствуют.

Рассмотрим функции $\rho, \theta : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, определяемые следующим образом. Положим $\rho(t) = D(t)$ — расстояние от O до текущей точки кривой $\gamma(t)$. В качестве $\theta(t)$ мы рассмотрим число такое, что $x(t) = \rho(t) \cos(\theta(t))$ и $y(t) = \rho(t) \sin(\theta(t))$. Такое число (полярный угол) находится однозначно с точностью до слагаемого $2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Учитывая непрерывность $\gamma(t)$ нетрудно осуществить выбор такого угла для различных значений t так, чтобы функция $t \mapsto \theta(t)$ оказалась непрерывной.

Покажем, что функцию $\theta(t)$ можно считать строго возрастающей. В выбранных нами обозначениях функция Φ (см. равенство (7.4.1)) имеет следующий вид:

$$\Phi(\tau) = \rho(t)\rho(\tau) \sin(\theta(\tau) - \theta(t)).$$

Если точка t является точкой локального максимума (минимума) функции $\tau \mapsto \theta(\tau)$, то она также является точкой локального минимума (соответственно, максимума) функции $\tau \mapsto \Phi(\tau)$, при этом $t \in S(t)$ и $DS(t) \geq D(t)$. Поэтому (см. рассуждение выше) такие точки не могут находиться сколь угодно близко к точке a . Уменьшая (в случае надобности) число b , можно считать, что для всех $t \in (a, b)$ точка t не является точкой локального экстремума функции $\tau \mapsto \theta(\tau)$. В силу непрерывности этой функции это означает, что она либо строго убывает, либо строго возрастает на интервале (a, b) . Заменяя при необходимости луч Oy на противоположный (изменяя ориентацию), можно считать, что эта функция строго возрастает при $t \in (a, b)$.

Теперь (опять же без ограничения общности) мы можем произвести замену параметра t так, что $\theta(t) = t$ для всех $t \in (a, b)$, т. е. рассматривая нами кривая будет параметризована полярным углом. Далее нам также будет удобно рассмотреть функцию $\phi(t) = \ln(\rho(t))$. Поскольку $\rho(t) = e^{\phi(t)}$, то, согласно сделанным нами выводам и допущениям, функция $\phi : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на области определения, принимает конечные значения при $t \in (a, b)$, а $\phi(a) = -\infty$. Далее мы установим некоторые свойства этой функции.

Поскольку мы предположили теорему 7.1.1 неверной, то можем считать, что существует число $q > 1$ такое, что для всех $t \in (a, b)$ и всех $\tau \in S(t)$ выполнено неравенство

$$\frac{D(\tau)}{D(t)} \leq e^{-q}.$$

В наших обозначениях $D(t) = e^{\phi(t)}$, поэтому приведенное неравенство эквивалентно следующему:

$$\phi(t) - \phi(\tau) \geq q > 1 \quad (7.4.2)$$

для всех $t \in (a, b)$ и для всех $\tau \in S(t)$.

Поскольку теперь $x(t) = e^{\phi(t)} \cos(t)$ и $y(t) = e^{\phi(t)} \sin(t)$, то условие принадлежности $\tau \in (a, t]$ множеству $S(t)$ можно выразить следующим образом: точка τ является точкой локального экстремума функции

$$\tau \mapsto -(\rho(t))^{-1} \Phi(\tau) = \rho(\tau) \sin(t - \theta) = e^{\phi(\tau)} \sin(t - \tau).$$

Для фиксированного t рассмотрим отрезок $I(t) = [\max\{t - \pi, a\}, t]$. Понятно, что на концах этого отрезка функция $\tau \mapsto e^{\phi(\tau)} \sin(t - \tau)$ зануляется. Таким образом, внутри этого отрезка существует по крайней мере одна точка экстремума этой функции, т. е. точка из множества $S(t)$.

Далее рассмотрим функцию

$$\tau \mapsto \phi(\tau) + \ln(\sin(t - \tau)) = \ln(e^{\phi(\tau)} \sin(t - \tau)) =: F^t(\tau).$$

Предложение 7.4.1. *Для каждого $t \in (a, b)$ существует $\beta(t) > 0$ такое, что на отрезке $[t - \beta(t), t]$ функция $\tau \mapsto F^t(\tau)$ убывает.*

◁ Допустим, что это не так. Тогда существуют последовательности чисел $\{\tau_n\}$ и $\{\xi_n\}$ такие, что $\tau_n < \xi_n < t$ и $F^t(\tau_n) \leq F^t(\xi_n)$ для всех n , $\tau_n \rightarrow t$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $F^t(\tau) \rightarrow -\infty$ при $\tau \rightarrow t - 0$, то на промежутке $[\tau_n, t)$ существует точка η_n абсолютного максимума функции F^t . Понятно, что $\eta_n \in S(t)$ и $\eta_n \rightarrow t$ при $n \rightarrow \infty$. Но согласно нашему предположению для всех n должно выполняться неравенство $\phi(t) - \phi(\eta_n) > q$ (неравенство (7.4.2)), что невозможно (достаточно совершить предельный переход в последнем неравенстве). Тем самым мы доказали существование нужного $\beta(t) > 0$ (нетрудно также понять, что $\beta(t) < \pi$). ▷

Замечание 7.4.1. Напомним, что любая неубывающая функция $f : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является почти всюду дифференцируемой на области определения, при этом ее производная неотрицательна, суммируема, и $\int_{\alpha}^{\beta} f'(t) dt \leq f(\beta) - f(\alpha)$. Если к тому же f имеет производную в каждой точке отрезка $[\alpha, \beta]$, то приведенное неравенство обращается в равенство (в этом случае функция $x \mapsto f(x)$ является абсолютно непрерывной на отрезке $[\alpha, \beta]$), см. теоремы 1.1.4 и 1.1.5.

Предложение 7.4.2. *Для каждого $t \in (a, b)$ на произвольном отрезке $[c, d] \subset (t - \beta(t), t)$ функция ϕ почти всюду дифференцируе-*

ма, имеет суммируемую производную и

$$\phi(d) - \phi(c) \leq \int_c^d \phi'(\tau) d\tau.$$

◁ Согласно предложению 7.4.1 функция

$$\tau \mapsto F^t(\tau) = \phi(\tau) + \ln(\sin(t - \tau))$$

убывает на отрезке $[t - \beta(t), t]$. Таким образом, функция $-F^t$ возрастает на этом отрезке. Используя свойства возрастающих функций (см. замечание 7.4.1), дифференцируемость и абсолютную непрерывность функции $\tau \mapsto \ln(\sin(t - \tau))$ на отрезке $[c, d] \subset (t - \beta(t), t) \subset (t - \pi, t)$, легко получаем нужные свойства функции ϕ . ▷

Предложение 7.4.3. Функция ϕ дифференцируема почти всюду на интервале (a, b) . На любом отрезке $[c, d] \subset (a, b)$ ее производная ϕ' суммируема и удовлетворяет неравенству

$$\phi(d) - \phi(c) \leq \int_c^d \phi'(\tau) d\tau.$$

◁ Для каждого $t \in (a, b)$ рассмотрим интервал $I(t) := (t - \beta(t), t)$ (см. предложение 7.4.1). В совокупности эти интервалы покрывают отрезок $[c, d]$. В силу компактности этого отрезка он покрывается и некоторым конечным набором этих интервалов, скажем интервалами $I(t_0), I(t_1), \dots, I(t_l)$, $t_0 < t_1 < \dots < t_l$. Выберем теперь числа s_i , $i = 0, \dots, l$, так, что $c = s_0 < s_1 < \dots < s_{l-1} = d$ и $[s_i, s_{i+1}] \subset I(t_i)$. Согласно предложению 7.4.2 на каждом из отрезков $[s_i, s_{i+1}]$ функция ϕ почти всюду дифференцируема и удовлетворяет неравенству

$$\phi(s_{i+1}) - \phi(s_i) \leq \int_{s_i}^{s_{i+1}} \phi'(\tau) d\tau.$$

Значит, ϕ дифференцируема почти всюду на отрезке $[c, d]$. Суммируя же полученные неравенства по i от 0 до $s - 1$, мы получаем аналогичное неравенство на отрезке $[c, d]$. В силу произвольности выбора отрезка $[c, d] \subset (a, b)$ функция ϕ дифференцируема почти всюду на интервале (a, b) . ▷

Далее нам будет полезно использовать множество

$$Sm = \{t \in (a, b) \mid \text{существует } \phi'(t) \in \mathbb{R}\}.$$

Мы рассмотрим также функцию $\alpha : Sm \rightarrow \mathbb{R}$, задающуюся равенством

$$\alpha(t) = \operatorname{arccot}(\phi'(t)).$$

Ясно, что $\alpha(t) \in (0, \pi)$ для всех значений параметра.

Предложение 7.4.4. Для каждого $\tau \in Sm$ выполнено либо неравенство $\tau + \alpha(\tau) \geq b$, либо неравенство $\phi(\tau + \alpha(\tau)) - \phi(\tau) \geq q$.

◁ Зафиксируем некоторое $\tau_0 \in Sm$ и предположим, что выполнено неравенство $t_0 := \tau_0 + \alpha(\tau_0) < b$. Если точка τ_0 является точкой локального экстремума функции $\tau \mapsto e^{\phi(\tau)} \sin(t_0 - \tau)$, то тогда $\tau_0 \in S(t_0)$ и согласно нашим допущениям выполнено неравенство $\phi(t_0) - \phi(\tau_0) > q$ (неравенство (7.4.2)), и мы получаем нужный результат. Однако эта точка не обязана доставлять локальный экстремум указанной функции, но по определению $\alpha(\tau_0) = \operatorname{arccot}(\phi'(\tau_0))$ точка τ_0 является критической точкой функции $\tau \mapsto e^{\phi(\tau)} \sin(t_0 - \tau)$. Другими словами, касательная к кривой $\gamma(t)$ в точке $\gamma(\tau_0)$ параллельна хорде $[O = \gamma(a), \gamma(t_0)]$.

Выберем теперь последовательности чисел $\{\tau_n\}$ и $\{t_n\}$ такие, что $\tau_n \rightarrow \tau_0$ и $t_n \rightarrow t_0$ при $n \rightarrow \infty$, хорда $[O, \gamma(t_n)]$ параллельна хорде $[\gamma(\tau_0), \gamma(\tau_n)]$ для всех n . Поскольку $\tau_0 \in Sm$, то

$$\frac{1}{\tau_n - \tau_0} \overrightarrow{\gamma(\tau_n)\gamma(\tau_0)} \rightarrow \gamma'(\tau_0) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Покажем, что для каждого n существует число $\eta_n \in S(t_n)$, лежащее между числами τ_0 и τ_n . Такое число должно быть точкой локального экстремума функции $\tau \mapsto e^{\phi(\tau)} \sin(t_n - \tau)$. Для этого рассмотрим функцию

$$\Psi(\tau) = \det \begin{pmatrix} \gamma(\tau_n) - \gamma(\tau_0) \\ \gamma(\tau) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Psi(\tau_0) = \Psi(\tau_n)$, то между точками τ_0 и τ_n найдется точка η_n локального экстремума этой функции. Но эта же самая точка является и точкой локального экстремума функции

$$\begin{aligned} \tau \mapsto \det \begin{pmatrix} \gamma(t_n) \\ \gamma(\tau) \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} e^{\phi(t_n)} \cos(t_n) & e^{\phi(t_n)} \sin(t_n) \\ e^{\phi(\tau)} \cos(\tau) & e^{\phi(\tau)} \sin(\tau) \end{pmatrix} = \\ &= (-e^{\phi(t_n)}) e^{\phi(\tau)} \sin(t_n - \tau), \end{aligned}$$

т. е. $\eta_n \in S(t_n)$. Согласно неравенству (7.4.2) для всех n получаем $\phi(t_n) - \phi(\eta_n) > q$. Поскольку $\eta_n \rightarrow \tau_0$ и $t_n \rightarrow t_0$ при $n \rightarrow \infty$, переходя к пределу в этом неравенстве, получаем $\phi(t_0) - \phi(\tau_0) \geq q$, что и требовалось. $\triangleright$

Зафиксируем теперь некоторое число $b^* \in (a, b)$. Сейчас мы установим одно примечательное свойство функции $\alpha(t)$ на промежутке $(a, b^*]$.

Предложение 7.4.5. Для любого $t \in (a, b^*) \cap Sm$ выполняется по крайней мере одно из следующих двух утверждений:

- 1) $t + \alpha(t) \geq b^*$;
- 2) существует $\xi = \xi(t) \in (t, t + \alpha(t)) \cap Sm$ такое, что $\alpha(t) > q\alpha(\xi)$.

$\triangleleft$ Допустим, что утверждение 1) не выполнено, т. е. $t + \alpha(t) < b^*$. Положим $s = t + \alpha(t)$, тогда $t < s < b^*$. Согласно предложению 7.4.4 $\phi(s) - \phi(t) \geq q > 1$. Согласно предложению 7.4.3 функция ϕ дифференцируема почти всюду на отрезке $[t, s]$, производная ϕ' суммируема на этом отрезке и выполнено неравенство

$$1 < q \leq \phi(s) - \phi(t) \leq \int_t^s \phi'(\tau) d\tau.$$

Далее отметим, что для некоторого числа $\xi \in (t, s) \cap Sm$ выполнено неравенство $\int_t^s \phi'(\tau) d\tau \leq (s - t)\phi'(\xi)$. Действительно, множество $(t, s) \cap Sm$ является множеством полной меры на интервале (t, s) , и если для всех точек ξ этого множества выполнено неравенство $\int_t^s \phi'(\tau) d\tau > (s - t)\phi'(\xi)$, то интегрируя его по (t, s) , сразу получаем противоречие. Таким образом, нужная точка $\xi \in (t, s) \cap Sm$ действительно существует (такие точки даже образует множество ненулевой меры), и тогда

$$1 < q \leq \phi(s) - \phi(t) \leq \int_t^s \phi'(\tau) d\tau \leq (s - t)\phi'(\xi).$$

Ясно, что $\phi'(\xi) > 0$, поэтому $\alpha(\xi) = \operatorname{arccot}(\phi'(\xi)) \in (0, \pi/2)$. Далее,

$$\phi'(\xi) = \cot(\alpha(\xi)) = \frac{1}{\tan(\alpha(\xi))} < \frac{1}{\alpha(\xi)},$$

поскольку $\tan(x) > x$ при $x \in (0, \pi/2)$. Поэтому $q \leq \phi'(\xi)\alpha(t) < \frac{\alpha(t)}{\alpha(\xi)}$, и мы доказали утверждение 2). $\triangleright$

Рассмотрим теперь множество $S^* = Sm \cap (a, b^*]$. Оно является множеством полной меры на промежутке $(a, b^*]$. Мы установим еще несколько свойств функции $t \mapsto \alpha(t)$ на множестве S^* .

Предложение 7.4.6. *Выполняется (по крайней мере) одно из следующих утверждений:*

- 1) *существует точка $t^* \in (a, b^*]$ и последовательность $\{t_n\}$, $t_n \in S^*$, такая, что $\alpha(t_n) \rightarrow 0$ и $t_n \rightarrow t^*$ при $n \rightarrow \infty$;*
- 2) *$a > -\infty$ и существует $c > 0$ такое, что $\alpha(t) \geq c$ для всех $t \in S^*$.*

< Предположим, что утверждение 1) не выполнено и докажем справедливость утверждения 2).

Пусть $b_0 \in (a, b)$ и пусть $c_1 \geq 0$ — нижняя грань значений функции $t \mapsto \alpha(t)$ на множестве $S^* \cap [b_0, b]$. При $c_1 = 0$, пользуясь компактностью отрезка $[b_0, b]$, легко построить последовательность $\{t_n\}$, $t_n \in S^* \cap [b_0, b) \subset (a, b)$, сходящуюся к некоторому $t^* \in S^* \cap [b_0, b]$ и такую, что $\alpha(t_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но поскольку условие 1) из формулировки утверждения не выполнено по нашему предположению, то справедливо неравенство $c_1 > 0$.

Пусть теперь $c = \min\{c_1, b^* - b_0\} > 0$. Покажем, что $\alpha(t) \geq c$ для всех $t \in S^*$. Предположим, что множество

$$S = \{t \in S^* \mid \alpha(t) < c\}$$

непусто. Очевидно, $S \subset (a, b_0]$. Отметим, что для всех $t \in S$ выполнено неравенство $t + \alpha(t) < b^*$ (иначе $\alpha(t) \geq b^* - t \geq b^* - b_0 \geq c$), поэтому по утверждению 7.4.5 существует $\xi = \xi(t) \in (t, t + \alpha(t)) \cap Sm$ такое, что $\alpha(\xi) < \alpha(t)/q < \alpha(t) < c$, в частности, $\xi \in S$.

Выберем теперь некоторое $t_1 \in S$ и построим последовательность точек $\{t_n\}$ из S следующим образом: если t_i уже определен, то полагаем $t_{i+1} = \xi(t_i)$. По построению $t_i < t_{i+1}$, и, поскольку

$$c > \alpha(t_i) \geq q\alpha(\xi(t_i)) = q\alpha(t_{i+1}) > \alpha(t_{i+1}),$$

то $t_{i+1} \in S$. Поскольку построенная последовательность возрастает и ограничена сверху числом b_0 ($S \subset (a, b_0]$), она имеет некоторый конечный предел $t^* \in (a, b_0]$, а неравенство $\alpha(t_i) \geq q\alpha(t_{i+1})$ влечет, что $\alpha(t_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, выполняется утверждение 1) в формулировке леммы, что мы предположили невозможным. Следовательно, $S = \emptyset$, т. е. $\alpha(t) \geq c$ для всех $t \in (a, b]$.

Если $a > -\infty$, то выполнено утверждение 2) из формулировки предложения. Поэтому нам осталось разобрать случай $a = -\infty$.

Для всех $i \geq 1$ определим числа b_i рекуррентной формулой $b_i = b_{i-1} - q^i c$ (b_0 было выбрано нами ранее). Докажем по индукции, что

$$\alpha(t) \geq cq^i$$

для всех $t \in (-\infty, b_i] \cap Sm$. При $i = 0$ это неравенство мы уже доказали. Пусть оно доказано для всех $i < k$, докажем его при $i = k$.

Пусть $t \in (-\infty, b_k] \cap Sm$. Если $t + \alpha(t) \geq b_{k-1}$, то

$$\alpha(t) > b_{k-1} - t \geq b_{k-1} - b_k = cq^k.$$

Если же $t + \alpha(t) \leq b_{k-1}$ (что несовместимо с выполнением неравенства $t + \alpha(t) > b > b_{k-1}$), то по предложению 7.4.5 существует $\xi = \xi(t) \in (t, t + \alpha(t)) \cap Sm \subset (t, b_{k-1})$ такое, что $\alpha(t) \geq q\alpha(\xi)$. Поскольку $\xi < b_{k-1}$, то $\alpha(\xi) \geq cq^{k-1}$ по предположению индукции. Следовательно, $\alpha(t) \geq cq^k$ и в этом случае.

Теперь осталось заметить, что доказанное только что неравенство $\alpha(t) \geq cq^i$ противоречит неравенству $\alpha(t) = \operatorname{arccot}(\phi'(t)) < \pi$. Действительно, для достаточно больших i выполняется неравенство $cq^i > \pi$. Это противоречие и заканчивает доказательство предложения. $\triangleright$

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 7.1.1. Согласно уже доказанному выполнено либо утверждение 1), либо утверждение 2) из формулировки предложения 7.4.6, и в обоих случаях нам достаточно прийти к противоречию.

Пусть выполнено утверждение 1), т. е. существует точка $t^* \in (a, b^*]$ и последовательность $\{t_n\}$, $t_n \in S^* \subset Sm$, такая, что $\alpha(t_n) \rightarrow 0$ и $t_n \rightarrow t^*$ при $n \rightarrow \infty$. Положим $s_n = t_n + \alpha(t_n)$. Согласно предложению 7.4.4, для всех достаточно больших n выполнено неравенство $\phi(s_n) - \phi(t_n) \geq q$ (поскольку $s_n \rightarrow t^* < b$ при $n \rightarrow \infty$). Но это невозможно, поскольку $t_n \rightarrow t^*$, $s_n = t_n + \alpha(t_n) \rightarrow t^*$, а функция $t \mapsto \phi(t)$ непрерывна в точке t^* . Значит, в этом случае доказываемая теорема справедлива.

Пусть теперь выполнено утверждение 2), т. е. $a > -\infty$ и существует $c > 0$ такое, что $\alpha(t) \geq c$ для всех $t \in S^*$. Поскольку $\alpha(t) = \operatorname{arccot}(\phi'(t))$, то мы получаем неравенство $\phi'(t) \leq \cot(c) \in \mathbb{R}$ для всех $t \in S^*$. Согласно предложению 7.4.3, для любого $\eta \in (a, b^*)$ производная ϕ' суммируема на отрезке $[\eta, b^*] \subset (a, b)$ и удовлетворяет

неравенству

$$\phi(b^*) - \phi(\eta) \leq \int_{\eta}^{b^*} \phi'(\tau) d\tau \leq \cot(c)(b^* - \eta).$$

Устремляя η к a , получаем $\phi(b^*) - \phi(a) \leq \cot(c)(b^* - a) \in \mathbb{R}$, но последнее невозможно, поскольку $\phi(a) = -\infty$. Таким образом, в этом случае доказываемая теорема также справедлива.

7.5. Связь доказанных теорем с другими результатами

Сначала мы применим утверждение теоремы 7.1.1 для параметризаций специального вида. Рассмотрим две непрерывные функции $h, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и предположим, что функция h является неубывающей и не равна константе ни в какой окрестности точки a . Для каждого $x \in (a, b)$ рассмотрим множество чисел $\tau \in (a, x]$, являющихся точками локального экстремума функции

$$t \mapsto (g(x) - g(a))h(t) - (h(x) - h(a))g(t). \quad (7.5.1)$$

Пусть $\mu(x)$ — верхняя грань таких τ . Следующая теорема дает нетривиальную информацию о поведении $\mu(x)$ при $x \rightarrow a$.

Теорема 7.5.1. *Предположим дополнительно, что существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)}$, тогда справедливо следующее соотношение:*

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{h(\mu(x)) - h(a)}{h(x) - h(a)} \geq \frac{1}{e}. \quad (7.5.2)$$

◁ Мы воспользуемся результатом теоремы 7.1.1 для кривой $\gamma(t) = (g(t), h(t)) \in \mathbb{R}^2$. Ясно, что для этой кривой $\tau \in S(x)$ тогда и только тогда, когда τ — точка экстремума функции (7.5.1), $D(x) = \sqrt{(g(x) - g(a))^2 + (h(x) - h(a))^2}$. Поскольку по условию предел $P := \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)}$ существует и конечен, то легко понять, что

$$\begin{aligned} DS(x) &= \sup \{ D(\tau) \mid \tau \in S(x) \} \sim D(\mu(x)) = \\ &= \sqrt{(g(\mu(x)) - g(a))^2 + (h(\mu(x)) - h(a))^2} \quad \text{при } x \rightarrow a. \end{aligned}$$

Пусть $L(x) = \frac{h(\mu(x)) - h(a)}{h(x) - h(a)}$, тогда с учетом выписанного асимптотического равенства получаем

$$\left(\frac{DS(x)}{D(x)L(x)} \right)^2 \sim \frac{1 + \left(\frac{g(\mu(x)) - g(a)}{h(\mu(x)) - h(a)} \right)^2}{1 + \left(\frac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)} \right)^2} \rightarrow \frac{1 + P^2}{1 + P^2} = 1 \quad (7.5.3)$$

при $x \rightarrow a$. Следовательно, по теореме 7.1.1

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(\mu(x)) - h(a)}{h(x) - h(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{DS(x)}{D(x)} \geq \frac{1}{e},$$

что и требовалось. $\triangleright$

Пусть теперь функции $h, g : [a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеют производные на интервале (a, b) . Функция h дополнительно предполагается неубывающей и отличной от константы в любой окрестности точки a . Тогда согласно теореме Коши, для каждого $x \in (a, b)$ существует $\tau \in (a, x)$ со следующим свойством:

$$\frac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)} = \frac{g'(\tau)}{h'(\tau)}. \quad (7.5.4)$$

Пусть $\xi(x)$ — верхняя грань таких τ . Очевидно, что любая точка экстремума функции (7.5.1) τ удовлетворяет уравнению (7.5.4). Поэтому $\xi(x) \geq \mu(x)$ для всех x , и из теоремы 7.5.1 мы сразу получаем нетривиальную информацию о поведении $\xi(x)$ при $x \rightarrow a$.

Теорема 7.5.2. *Предположим дополнительно, что существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)}$, тогда справедливо следующее соотношение:*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(\xi(x)) - h(a)}{h(x) - h(a)} \geq \frac{1}{e}. \quad (7.5.5)$$

Замечание 7.5.1. Отметим, что для любой фиксированной функции h неравенство (7.5.5) (а вместе с ним и неравенство (7.5.2)) в целом неулучшаемо. Для проверки этого положим $g(x) = (h(x) - h(a))^{1+\alpha}$, где $\alpha > 0$. В силу монотонности функции h существует единственное число $\tau = \xi(x) \in (a, x)$, удовлетворяющее равенству (7.5.4). Простые вычисления показывают, что

$$\frac{h(\xi(x)) - h(a)}{h(x) - h(a)} = \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

для всех $x \in (a, b)$. Таким образом, и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(\xi(x)) - h(a)}{h(x) - h(a)} = \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{1/\alpha}$. Осталось заметить, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{-1/\alpha} = e^{-1}$. Эти же примеры и последняя формула в доказательстве теоремы 7.5.2 также обосновывают и неулучшаемость неравенства (7.1.2).

В случае $h(x) \equiv 1$ из теоремы 7.5.2 мы получаем утверждение об асимптотике точек среднего значения в теореме Лагранжа, которое по сути совпадает с утверждением теоремы 2.1.3.

Следствие 7.5.1. Пусть $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, обладающая производной на интервале (a, b) . Для каждого $x \in (a, b)$ обозначим через $\xi(x)$ верхнюю грань чисел $\tau \in (a, x]$ таких, что $g'(\tau)(x - a) = g(x) - g(a)$. Тогда, если функция g имеет (правую) производную в точке a , то выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{\xi(x) - a}{x - a} \geq \frac{1}{e}. \quad (7.5.6)$$

Неравенство (7.5.6) обращается в равенство, например, для функции $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, задающейся равенством $g(x) = -\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$.

В случае непрерывной производной $g' =: f$ полученное следствие может быть переформулировано в интегральной форме. Рассмотрим непрерывную функцию $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Для произвольного $x \in (a, b]$ существует $\tau \in [a, x]$ такое, что

$$\int_a^x f(t) dt = (x - a)f(\tau)$$

(частный случай первой интегральной теоремы о среднем значении). Такое τ единственно, если f возрастает или убывает. В общем случае положим

$$\eta(x) := \max \left\{ \tau \in [a, x] \mid \int_a^x f(t) dt = xf(\tau) \right\}.$$

Тогда (это эквивалентно утверждению следствия 7.5.1) выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{\eta(x) - a}{x - a} \geq \frac{1}{e}.$$

Таким образом, мы получаем еще одно обоснование гипотезы В. К. Ионина (см. параграф 2.1).

Теоремы 7.5.1 и 7.5.2 дают нам нетривиальную информацию о поведении функций $\mu(x)$ и $\xi(x)$ через оценку асимптотик $\frac{h(\mu(x)) - h(a)}{h(x) - h(a)}$ и $\frac{h(\xi(x)) - h(a)}{h(x) - h(a)}$ соответственно.

Хотелось бы однако иметь аналогичное утверждение и для величин $\frac{\mu(x) - a}{x - a}$ и $\frac{\xi(x) - a}{x - a}$ (в случае теоремы Лагранжа $h(x) \equiv x$ мы и так имеем нужные результаты). Следующие результаты позволяют получить некоторую информацию такого рода.

Далее нам понадобятся понятия существенного верхнего и существенного нижнего предела функции (см. определение 3.3.1).

Для функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ мы обозначим через $\overline{\lim} \operatorname{ess}_{x \rightarrow a} f(x)$ нижнюю грань чисел $t \in \mathbb{R}$ таких, что $f(x) \leq t$ почти всюду на некотором отрезке $[a, \delta] \subset [a, b]$ (существенный верхний предел). Аналогично, $\underline{\lim} \operatorname{ess}_{x \rightarrow a} f(x)$ означает верхнюю грань чисел $t \in \mathbb{R}$ таких, что $f(x) \geq t$ почти всюду на некотором отрезке $[a, \delta] \subset [a, b]$ (существенный нижний предел).

Лемма 7.5.1. Пусть функция $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ не убывает и пусть

$$C := \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \operatorname{ess} \frac{h(x) - h(a)}{(x - a)h'(x)} < \infty.$$

Тогда для произвольного числа $q \in (0, 1)$ выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{h(a + q(x - a)) - h(a)}{h(x) - h(a)} \leq q^{1/C}.$$

◁ Зафиксируем некоторое число $\varepsilon > 0$. Уменьшая при необходимости число b , можно считать, что для почти всех $t \in (a, b]$ выполнено неравенство

$$\frac{h(t) - h(a)}{(t - a)h'(t)} < C + \varepsilon,$$

которое можно переписать следующим образом:

$$\frac{h'(t)}{h(t) - h(a)} > \frac{1}{C + \varepsilon} \frac{1}{t - a}.$$

Интегрируя последнее неравенство от $t = x_q := a + q(x - a)$ до $t = x$, получаем

$$\frac{1}{C + \varepsilon} \ln \frac{1}{q} < \int_{x_q}^x \frac{h'(t) dt}{h(t) - h(a)} \leq \ln (h(t) - h(a)) \Big|_{t=x_q}^{t=x} = \ln \frac{h(x) - h(a)}{h(x_q) - h(a)}.$$

Здесь мы воспользовались свойствами неубывающей функции $x \mapsto \ln(h(x) - h(a))$ (ее приращение на отрезке не меньше интеграла от ее производной на этом же отрезке, см. теорему 1.1.4 или замечание 7.4.1). После простых преобразований получаем, что

$$\frac{h(x_q) - h(a)}{h(x) - h(a)} \leq q^{\frac{1}{C+\varepsilon}} \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{h(x_q) - h(a)}{h(x) - h(a)} \leq q^{\frac{1}{C+\varepsilon}}.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ лемма доказана. $\triangleright$

Теорема 7.5.3. Пусть $C = \overline{\lim} \operatorname{ess}_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{(x-a)h'(x)}$ в условиях и обозначениях теоремы 7.5.1. Тогда справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{\mu(x) - a}{x - a} \geq e^{-C}.$$

Если дополнительно выполнены условия теоремы 7.5.2, то справедливо также и неравенство

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{\xi(x) - a}{x - a} \geq e^{-C}.$$

$\triangleleft$ Докажем первое неравенство. При $C = \infty$ все очевидно. Далее считаем, что $C < \infty$. Предположим, что теорема неверна. Выберем некоторое число q между $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{\mu(x) - a}{x - a}$ и e^{-C} ($0 < q < e^{-C} < 1$ в частности). Без ограничения общности можно считать, что для всех $x \in (a, b)$ выполнено неравенство

$$\frac{\mu(x) - a}{x - a} < q,$$

эквивалентное неравенству $\mu(x) < x_q = a + q(x - a)$. Поскольку функция h возрастает, то $h(\mu(x)) < h(a + q(x - a))$. В силу результата теоремы 7.5.2 получаем

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{h(a + q(x - a)) - h(a)}{h(x) - h(a)} \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{h(\mu(x)) - h(a)}{h(x) - h(a)} \geq \frac{1}{e}.$$

Теперь из леммы 7.5.1 получаем, что $e^{-1} \leq q^{1/C}$, т. е. $e^{-C} \leq q$, что противоречит выбору числа q . Полученное противоречие и доказывает первое неравенство теоремы.

Второе неравенство очевидно следует из первого и того факта, что $\xi(x) \geq \mu(x)$ для всех x в условиях теоремы 7.5.2. $\triangleright$

Пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, а $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — суммируемая и неотрицательная. Определим функцию $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: для каждого $x \in (0, 1]$, $\eta(x)$ является максимальным из чисел $\tau \in (0, x]$, удовлетворяющих равенству

$$\int_0^x \varphi(t) f(t) dt = f(\tau) \int_0^x \varphi(t) dt$$

(такие $\tau \in (0, x]$ существуют согласно первой интегральной теореме о среднем значении). Из теоремы 7.5.3 мы получаем следующий результат, который эквивалентен «сложной» части теоремы 3.3.1.

Теорема 7.5.4. Пусть

$$C = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \operatorname{ess} \left(\int_0^x \varphi(t) dt (x\varphi(x))^{-1} \right),$$

тогда в вышеприведенных обозначениях справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\eta(x)}{x} \geq e^{-C}. \quad (7.5.7)$$

⟨ Можно считать, что функция $t \mapsto \varphi(t)$ не равна нулю почти всюду ни в какой окрестности точки 0 (в противном случае в такой окрестности выполнено равенство $\eta(x) = x$, и доказывать нечего). Точно также можно считать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ эта функция не равна нулю почти всюду ни на каком отрезке $[c, d] \subset (0, \varepsilon)$ ненулевой меры (иначе $C = \infty$, и доказывать нечего).

Определим теперь две функции $g, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ формулами

$$g(x) = \int_0^x \varphi(t) f(t) dt, \quad h(x) = \int_0^x \varphi(t) dt.$$

Понятно, что функция $x \mapsto h(x)$ не убывает и не равна константе ни в какой окрестности нуля, $g(0) = h(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{h(x) - h(0)} = f(0) \in \mathbb{R}$. Таким образом, мы вправе применить теорему 7.5.3 в части, касающейся функции $x \mapsto \mu(x)$ к этим двум функциям (в этом случае $a = 0$, $b = 1$). Теперь для доказательства необходимого нам результата достаточно убедиться в выполнении для всех x (достаточно близких к 0) неравенства

$$\eta(x) \geq \mu(x).$$

В свою очередь для этого достаточно понять, что любое $\tau \in (0, x]$, достаточно близкое к 0 и доставляющее локальный экстремум функции

$$\begin{aligned} t &\mapsto (g(x) - g(0))h(t) - (h(x) - h(0))g(t) = \\ &= \int_0^x \varphi(s)f(s) ds \int_0^t \varphi(s) ds - \int_0^x \varphi(s) ds \int_0^t \varphi(s)f(s) ds =: \Psi(t), \end{aligned}$$

удовлетворяет равенству

$$\int_0^x \varphi(s)f(s) ds = f(\tau) \int_0^x \varphi(s) ds.$$

Допустим противное. Тогда, используя первую интегральную теорему о среднем, получаем

$$\Psi(\tau + \Delta) - \Psi(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+\Delta} \varphi(s) ds \left(\int_0^x \varphi(s)f(s) ds - f(\nu) \int_0^x \varphi(s) ds \right),$$

где ν — некоторое число, лежащее между $\tau + \Delta$ и τ . При достаточно малых Δ знак выражения в скобках совпадает со знаком (ненулевого по предположению!) выражения $\int_0^x \varphi(s)f(s) ds - f(\tau) \int_0^x \varphi(s) ds$. В то же время знак $\int_{\tau}^{\tau+\Delta} \varphi(s) ds$ совпадает со знаком Δ (по крайней мере для всех $\tau \in (0, \varepsilon)$, где ε — то самое число, существование которого обсуждалось в начале доказательства). Это означает, что точка τ не может быть точкой локального экстремума функции $t \mapsto \Psi(t)$. Теорема доказана. $\triangleright$

Отметим, что аналогично может быть получена и теорема 3.3.2, являющаяся уточнением теоремы 3.3.1 для случая более узкого класса функций.

7.6. Дальнейшие направления исследований

В этом параграфе мы обсудим дальнейшие возможные направления исследования, связанные с асимптотикой промежуточных (в определенном смысле) точек на кривых в евклидовых пространствах. В первом пункте приводятся нерешенные задачи для плоских кривых (см. [119]). Остальные пункты основаны на работе [35]

и посвящены обсуждению нерешенных для кривых в многомерных пространствах. В этом случае имеется много вариантов для соответствующих постановок задач, при этом основное внимание уделено мотивировке для исследования некоторых из них (наряду с рассмотрением частных случаев).

7.6.1. Нерешенные задачи для кривых на плоскости. Можно выразить уверенность в том, что более детальное исследование асимптотики отношений $DS(t)/D(t)$ и $DT(t)/D(t)$ при $t \rightarrow a$ (см. теоремы 7.1.1 и 7.1.2) приведет к новым интересным результатам. Сформулируем несколько естественных задач, используя ранее введенные обозначения.

Существует еще одна, естественная с геометрической точки зрения, оценка близости точек кривой $\gamma(\tau)$, $\tau \in T(t)(S(t))$, к точке $\gamma(t)$. Предположим, что кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ непрерывна и спрямляема. Естественно, что такое предположение существенно сужает класс исследуемых кривых. Пусть $L : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ определяется так, что $L(t)$ — длина дуги кривой γ , соответствующей значениям параметра из отрезка $[a, t]$. Понятно, что для каждого $t \in (a, b)$ справедливо неравенство $0 \leq L(\tau) \leq L(t)$ для всех $\tau \in S(t)$ (для всех $\tau \in T(t)$ в случае дифференцируемой кривой), поэтому $0 \leq \sup\{L(\tau) \mid \tau \in S(t) \text{ (} \tau \in T(t) \text{)}\} \leq L(t)$. Вполне возможно, что справедлива следующая

Гипотеза 7.6.1. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ — произвольная непрерывная спрямляемая параметрическая кривая. Тогда справедливо неравенство

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{\sup\{L(\tau) \mid \tau \in S(t)\}}{L(t)} \geq \frac{1}{e}.$$

Несомненный интерес представляет и вариант этой гипотезы для дифференцируемых кривых.

Гипотеза 7.6.2. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ — произвольная непрерывная спрямляемая параметрическая кривая такая, что для всех $t \in (a, b)$ существует ненулевой производный вектор $\gamma'(t)$. Тогда справедливо неравенство

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{\sup\{L(\tau) \mid \tau \in T(t)\}}{L(t)} \geq \frac{1}{e}.$$

Естественно, что последняя гипотеза верна для всех кривых, для которых выполняется асимптотическое равенство

$$L(t) \sim D(t) \quad \text{при} \quad t \rightarrow a. \quad (7.6.1)$$

Но это равенство не универсально, поэтому для работы с гипотезой 7.6.2 недостаточно иметь результат теоремы 7.1.2, а требуются какие-то специальные подходы. Тем не менее хорошо известно, что в случае, когда кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ гладкая (т. е. имеет непрерывный производный вектор $\gamma'(t)$, $t \in [a, b]$), соотношение (7.6.1) имеет место. Поэтому из теоремы 7.1.2 мы немедленно получаем

Следствие 7.6.1. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ — произвольная регулярная гладкая параметрическая кривая. Тогда справедливо неравенство

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{\sup\{L(\tau) \mid \tau \in T(t)\}}{L(t)} \geq \frac{1}{e}.$$

Отметим, что отыскание удобного критерия выполнения асимптотического равенства (7.6.1) представляется самостоятельной интересной задачей.

Задача 7.6.1. Найти удобную характеристику спрямляемых кривых на плоскости, удовлетворяющих соотношению (7.6.1). Рассмотреть аналогичную проблему в многомерном евклидовом пространстве.

7.6.2. Теорема Пеано и точки компланарности. В этом пункте мы представим основной материал для исследования асимптотики точек промежуточного значения в классической теореме Пеано 1.3.5. Начнем обсуждение с несколько необычной формулировки этой теоремы.

Теорема 7.6.1 (обобщенная теорема Пеано). Пусть функции $f_0, f_1, \dots, f_{n+1} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемы k раз, где $1 \leq k \leq n$. Тогда для произвольно выбранных точек $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in (a, b)$ существует такая точка $\eta \in [m, M]$, где $m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ и $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$, что выполнено равенство

$$\det \begin{pmatrix} f_0^{(k)}(\eta) & f_1^{(k)}(\eta) & \dots & f_{n+1}^{(k)}(\eta) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \dots & f_{n+1}(x_1) \\ f_0(x_2) & f_1(x_2) & \dots & f_{n+1}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(x_{n+1}) & f_1(x_{n+1}) & \dots & f_{n+1}(x_{n+1}) \end{pmatrix} = 0.$$

В случае, когда $M \neq m$ можно без ограничения общности считать, что $\eta \in (m, M)$.

Доказательство этой теоремы легко получается последовательным применением теоремы Ролля к функции $\varphi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$, определяемой равенством

$$\varphi(x) = \det \begin{pmatrix} f_0(x) & f_1(x) & \dots & f_{n+1}(x) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \dots & f_{n+1}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(x_{n+1}) & f_1(x_{n+1}) & \dots & f_{n+1}(x_{n+1}) \end{pmatrix},$$

и ее производным вплоть до порядка $k - 1$. Ясно, что число точек η (удовлетворяющих утверждению теоремы 7.6.1) не меньше, чем $n - k + 1$. Отметим, что в оригинальной работе Пеано (см. [95, с. xxii] или [126, с. 45]) акцентируется внимание только на случае $k = n$.

Теперь мы рассмотрим отдельно случай, когда число n произвольно, $f_0(x) \equiv 1$, порядок производной k , $1 \leq k \leq n$, фиксирован, а точки $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ попарно различны. Используя простейшие свойства определителей, получаем из теоремы 7.6.1 следующее утверждение.

Теорема 7.6.2. Пусть функции $f_1, \dots, f_{n+1} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемы k раз, где $1 \leq k \leq n$. Тогда для произвольно выбранных точек $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ из интервала (a, b) существует такая точка $\eta \in (x_1, x_{n+1})$, что выполнено равенство

$$\det \begin{pmatrix} f_1^{(k)}(\eta) & f_2^{(k)}(\eta) & \dots & f_{n+1}^{(k)}(\eta) \\ f_1(x_2) - f_1(x_1) & f_2(x_2) - f_2(x_1) & \dots & f_{n+1}(x_2) - f_{n+1}(x_1) \\ f_1(x_3) - f_1(x_1) & f_2(x_3) - f_2(x_1) & \dots & f_{n+1}(x_3) - f_{n+1}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_{n+1}) - f_1(x_1) & f_2(x_{n+1}) - f_2(x_1) & \dots & f_{n+1}(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_1) \end{pmatrix} = 0.$$

Обозначим через $\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ верхнюю грань таких точек η на отрезке $[x_1, x_{n+1}] = [m, M]$. Очень общая постановка интересующего нас вопроса такова:

Что можно сказать про асимптотику величины $\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ при $|x_{n+1} - x_1| \rightarrow 0$?

Отметим, что формально можно поставить эту же задачу, используя общую формулировку теоремы Пеано при замене n на $n - 1$ (достаточно вместо функций $x \mapsto f_i(x)$ рассмотреть функции $x \mapsto f_i(x) - f_i(x_1)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$, в точках $x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$).

Ясно, что приведенная выше неформальная постановка нуждается в конкретизации. Дадим естественную геометрическую интерпретацию для случая $k = 1$. Евклидово пространство $\mathbb{E}^{n+1}$ отождествляется с $\mathbb{R}^{n+1}$ посредством выбора некоторой декартовой системы координат. По условию теоремы 7.6.2 имеется параметрическая дифференцируемая кривая $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$, где $\gamma(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_{n+1}(t))$ и $n+1$ точек $\gamma(x_1), \gamma(x_2), \dots, \gamma(x_{n+1})$ на ней. Число η характеризуется тем, что касательный вектор к кривой γ в точке $\gamma(\eta)$ параллелен (некоторой) гиперплоскости π , проходящей через точки $\gamma(x_i)$, $i = 1, \dots, n+1$ (поскольку эти точки не обязаны быть в общем положении, то через них может проходить несколько гиперплоскостей). Для наперед выбранных точек $\gamma(x_i)$ точку $\gamma(\eta)$ с указанным свойством будем называть *точкой компланарности*. Точка η заведомо годится, если $\gamma'(\eta)$ — нулевой вектор. Чтобы избежать таких тривиальных случаев, будем предполагать в дальнейшем, что $\gamma'(t) \neq 0$ при $t \in (x_1, x_{n+1})$.

Далее мы будем считать точку x_1 фиксированной и в этом предположении попытаемся получить нетривиальные асимптотические характеристики величины $\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ (верхней грани на отрезке $[x_1, x_{n+1}]$ точек η с указанным свойством) при $x_{n+1} \rightarrow x_1$.

Сразу следует отметить, что при $n \geq 2$ стремление x_{n+1} к x_1 можно организовать по-разному, поскольку можно наложить какие-то дополнительные ограничения на поведение промежуточных точек $x_2, \dots, x_n$.

Исходя из геометрической интерпретации, можно постараться найти геометрически обусловленную характеристику для описания асимптотики $\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ при $x_{n+1} \rightarrow x_1$. А именно, искомая характеристика должна описывать свойства кривой, а не отдельно выбранной ее параметризации, т. е. она должна сохраняться при гладкой и монотонной замене параметра. Укажем один из возможных вариантов выбора такой характеристики (другой вариант будет рассмотрен в пункте 7.6.4).

Через $D(t)$ будем далее (как и в случае кривых на плоскости) обозначать расстояние между точками $\gamma(x_1)$ и $\gamma(t)$, $t > x_1$. Положим также $DT(x_{n+1}) = D(\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}))$. Как и в плоском случае, одним из основных объектов исследования естественно сделать *асимптотику отношения* $DT(x_{n+1})/D(x_{n+1})$ при $x_{n+1} \rightarrow x_1$.

При $n = k = 1$ рассматриваемая задача подробно исследована в предыдущих параграфах (см. теорему 7.1.2), где для произвольной

дифференцируемой кривой доказано неравенство

$$\overline{\lim}_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{DT(x_2)}{D(x_2)} \geq \frac{1}{e}.$$

Вполне возможно, что аналогичное неравенство имеет место и для произвольного n при $k = 1$. Есть основания предполагать, что справедлива следующая

Гипотеза 7.6.3. Для любой дифференцируемой кривой $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ и любой точки $x_1 \in (a, b)$ в указанных выше обозначениях выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_{x_{n+1} \rightarrow x_1} \frac{DT(x_{n+1})}{D(x_{n+1})} \geq e^{-1/n} = \exp\left(-\frac{1}{n}\right). \quad (7.6.2)$$

В следующем пункте мы более подробно остановимся на случае $n = 2$ и $k = 1$ и рассмотрим примеры, подтверждающие сформулированную гипотезу.

В заключительном пункте мы применим теорему 7.6.2 при $k = n$ для естественного с геометрической точки зрения класса кривых и получим нетривиальные оценки для асимптотики точек компланарности в таком случае (в частности, в трехмерном пространстве при $k = n = 2$), что, в свою очередь, позволит сформулировать нескольких общих гипотез об асимптотике точек компланарности при $k = n$.

7.6.3. Серия примеров для $n = 2$ и $k = 1$. Рассмотрим серию показательных примеров для теоремы 7.6.2 при $n = 2$ и $k = 1$. Следует отметить, что построение этих примеров является несколько тяжеловесным в техническом плане в силу неизбежной сложности вспомогательных вычислений.

Понятно, что в этом случае существует по крайней мере две точки η , удовлетворяющих условию теоремы 7.6.2 (по одной на интервале (x_1, x_2) и на интервале (x_2, x_3)).

Далее будем считать, что точка x_1 фиксирована, $x_1 < x_2 < x_3$, $\xi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + (x_3 - x_1)\theta$, $x_2 = x_1 + \tau(x_3 - x_1)$. Ясно, что $\tau \in (0, 1)$ и $\theta \in (\tau, 1)$ по определению $\xi(x_1, x_2, x_3)$. При такой переформулировке нас интересует асимптотика величины θ при $x_3 \rightarrow x_1$.

Пусть

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^l, \quad f_3(x) = x^m, \quad l, m \in \mathbb{R}, \quad m > l > 1, \quad (7.6.3)$$

при этом полагаем, что $x_1 = 0$, $x_2 = \tau x_3$, $\xi(x_1, x_2, x_3) = x_3\theta$. В терминах τ и θ условие на точку $\xi(x_1, x_2, x_3) = \eta$ в теореме 7.6.2 приобретает следующий вид:

$$(m+1)(1-\tau^l)\theta^m - (l+1)(1-\tau^m)\theta^l + \tau^l - \tau^m = 0. \quad (7.6.4)$$

Напомним, что $\tau \in (0, 1)$ и нас интересует $\theta \in (\tau, 1)$. Мы проведем представляющее и самостоятельное исследование решений уравнения (7.6.4) для произвольных вещественных чисел $m > l > 0$.

Легко проверить, что при фиксированном $\tau \in (0, 1)$ уравнение (7.6.4) имеет по крайней мере 2 корня $\theta \in (0, 1)$: один на интервале $(0, \tau)$ и один на интервале $(\tau, 1)$. Как уже отмечалось выше, это следует из теоремы Ролля. В данном частном случае ее достаточно применить к функции

$$F(\theta) = (1 - \tau^l)\theta^{m+1} - (1 - \tau^m)\theta^{l+1} + (\tau^l - \tau^m)\theta$$

на отрезках $[0, \tau]$ и $[\tau, 1]$ ($F(0) = F(\tau) = F(1) = 1$). Напомним, что нас интересует главным образом верхняя грань $\theta \in [0, 1]$, удовлетворяющих уравнению (7.6.4). Сначала покажем, что таких θ всегда ровно два.

Лемма 7.6.1. *Для каждого $\tau \in (0, 1)$ уравнение (7.6.4) имеет в точности два корня $\theta \in (0, 1)$. Один из этих корней $\theta = \theta_{\min}$ лежит на интервале $(0, \tau)$, а второй корень $\theta = \theta_{\max}$ лежит на интервале $(\tau, 1)$.*

◁ Существование не менее двух корней доказано выше с помощью теоремы Ролля. Докажем, что этих корней ровно два. Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi_1(\theta) = (m+1)(1-\tau^l)\theta^m - (l+1)(1-\tau^m)\theta^l + \tau^l - \tau^m.$$

Прямыми вычислениями получаем, что $\varphi_1'(\theta) = \theta^{l-1}\varphi_2(\theta)$, где $\varphi_2(\theta) = m(m+1)(1-\tau^l)\theta^{m-l} - l(l+1)(1-\tau^m)$. Поскольку $\varphi_2'(\theta) = m(m+1)(m-l)(1-\tau^l)\theta^{m-l-1} > 0$ при $\theta \in (0, 1]$, φ_2 имеет не более одного нуля на интервале $(0, 1)$. Таким образом, φ_1' также имеет не более одного нуля на этом интервале, а φ_1 имеет (по теореме Ролля) не более двух нулей на интервале $(0, 1)$, что и требовалось. ▷

Согласно доказанной лемме, корректно определены функции $\theta_{\min}, \theta_{\max} : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, причем $0 < \theta_{\min}(\tau) < \theta_{\max}(\tau) < 1$ для всех $\tau \in (0, 1)$.

Теорема 7.6.3. *Определенные выше функции $\tau \mapsto \theta_{\min}(\tau)$ и $\tau \mapsto \theta_{\max}(\tau)$ являются бесконечно дифференцируемыми и возрастающими на интервале $(0, 1)$. При этом*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} \theta_{\min}(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 1-} \theta_{\max}(\tau) = 1,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} \theta_{\max}(\tau) = \left(\frac{1+l}{1+m} \right)^{\frac{1}{m-l}} > (1+m)^{-\frac{1}{m}} > (1+l)^{-\frac{1}{l}} > e^{-1},$$

где $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$, и для каждого $\gamma \in (e^{-1}, 1)$ существуют такие $m > l > 0$, что $\lim_{\tau \rightarrow 0+} \theta_{\max}(\tau) = \gamma$. Кроме того,

$$e^{-2} < \lim_{\tau \rightarrow 1-} \theta_{\min}(\tau) < (1+l)^{-\frac{1}{l}}$$

для всех $m > l > 0$, а для каждого $\gamma \in (e^{-2}, 1)$ существуют такие $m > l > 0$, что $\lim_{\tau \rightarrow 1-} \theta_{\min}(\tau) = \gamma$.

Иллюстрирует утверждение теоремы рис. 7.2.

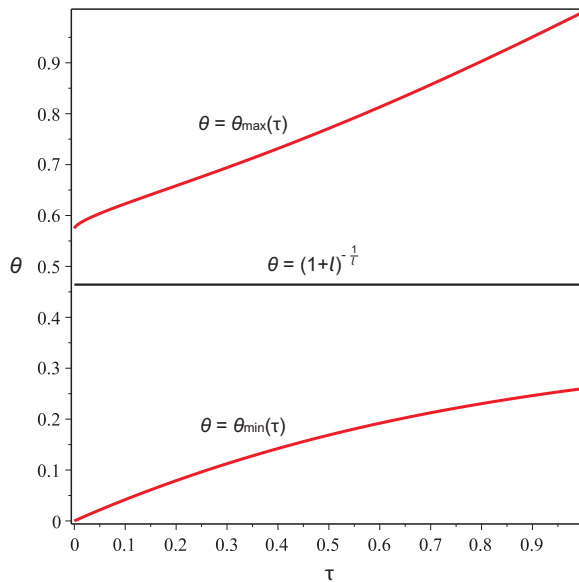


Рис. 7.2. Функции $\theta = \theta_{\max}(\tau)$ и $\theta = \theta_{\min}(\tau)$ для $l = 0.8$ и $m = 0.81$.

Предварительно мы докажем

Предложение 7.6.1. *Выполнены следующие утверждения:*

1) Функция $x \mapsto (1+x)^{-1/x}$ возрастает на интервале $(0, \infty)$ и $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-1/x} = 1/e$.

2) Для произвольных вещественных чисел $m > l > 0$ выполнено неравенство

$$\left(\frac{1+l}{1+m} \right)^{\frac{1}{m-l}} > (1+m)^{-\frac{1}{m}} > (1+l)^{-\frac{1}{l}} > e^{-1}$$

и, кроме того,

$$\inf \left\{ \left(\frac{1+l}{1+m} \right)^{\frac{1}{m-l}} \mid l, m \in \mathbb{R}, m > l > 1 \right\} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

3) Для всех $m > l > 0$ функция $x \mapsto \frac{1-x^l}{1-x^m}$ имеет отрицательную производную и, соответственно, убывает на интервале $(0, 1)$.

4) Для всех $m > l > 0$ функция $x \mapsto \frac{1-(1+l)x^l}{1-(1+m)x^m}$ имеет отрицательную производную и, соответственно, убывает на каждом из двух интервалов $(0, (1+m)^{-1/m})$ и $((1+m)^{-1/m}, \infty)$.

5) Функция $x \mapsto \frac{1+x}{x} (1 - e^{-2x})$ убывает на интервале $(0, \infty)$.

◁ Первое утверждение хорошо известно и может быть легко доказано (см. также лемму 3.3.2). Из него сразу же следует первая часть второго утверждения. Докажем теперь его вторую часть. Пусть $t = m-l$. При фиксированном $l > 1$ функция $t \mapsto \left(1 - \frac{t}{1+l+t}\right)^{1/t}$, как нетрудно убедиться, возрастает на промежутке $(0, \infty)$. Поэтому при всех $t > 0$ имеет место неувлучшаемое неравенство

$$\left(1 - \frac{t}{1+l+t}\right)^{\frac{1}{t}} > \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 - \frac{t}{1+l+t}\right)^{\frac{1}{t}} = \exp\left(-\frac{1}{l+1}\right).$$

Поскольку $l > 1$ может быть выбрано произвольно, то получаем также неувлучшаемое неравенство

$$\left(\frac{1+l}{1+m} \right)^{\frac{1}{m-l}} > \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{при } m > l > 1,$$

что и требовалось.

Перейдем к доказательству третьего утверждения. Положим $\psi_1(x) = \frac{1-x^l}{1-x^m}$, тогда имеем

$$\psi_1'(x) = \frac{x^{l-1}}{(1-x^m)^2} \psi_2(x),$$

где

$$\psi_2(x) = mx^{m-l} - (m-l)x^m - l.$$

Поскольку $\psi_2'(x) = m(m-l)x^{m-l-1}(1-x^l) > 0$ при $x \in (0, 1)$, функция ψ_2 возрастает на отрезке $[0, 1]$. А так как $\psi_2(1) = 0$, то $\psi_2(x) < 0$ при $x \in (0, 1)$. Таким образом, $\psi_1'(x) < 0$ при $x \in (0, 1)$, и нужное утверждение обосновано.

Докажем четвертое утверждение. Пусть $\psi_3(x) = \frac{1-(1+l)x^l}{1-(1+m)x^m}$, тогда имеем

$$\psi_3'(x) = \frac{x^{l-1}}{(1-(1+m)x^m)^2} \psi_4(x),$$

где

$$\psi_4(x) = -(1+l)(1+m)(m-l)x^m + m(1+m)x^{m-l} - l(1+l).$$

Поскольку $\psi_4'(x) = m(1+m)(m-l)x^{m-l-1}(1-(1+l)x^l)$, то функция ψ_4 возрастает на отрезке $[0, (1+l)^{-1/l}]$ и убывает на промежутке $[(1+l)^{-1/l}, \infty)$. Прямые вычисления показывают, что

$$\psi_4((1+l)^{-1/l}) = -l(1+l)(1-(1+m)(1+l)^{-m/l}).$$

Поскольку $(1+m)^{-1/m} > (1+l)^{-1/l}$, то $1-(1+m)(1+l)^{-m/l} > 0$ и $\psi_4((1+l)^{-1/l}) < 0$, а, значит, функция ψ_4 отрицательна на интервале $(0, \infty)$. Таким образом, функция ψ_3' отрицательна для всех $x \in (0, (1+m)^{-1/m}) \cup ((1+m)^{-1/m}, \infty)$, что и требовалось.

Осталось доказать последнее утверждение. Положим

$$\psi_5(x) = \frac{1+x}{x} (1 - e^{-2x}),$$

тогда

$$\psi_5'(x) = \frac{1}{x^2} (e^{-2x}(1+2x+2x^2) - 1).$$

Поскольку для положительного y выполнено неравенство $e^y > 1 + y + y^2/2$, то $e^{2x} > 1 + 2x + 2x^2$ при $x > 0$ и $\psi_5'(x) < 0$ при $x \in (0, \infty)$, что и доказывает убывание функции ψ_5 . $\triangleright$

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы 7.6.3.

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.6.3. Уравнение (7.6.4) при $\tau, \theta \in (0, 1)$ эквивалентно уравнению $\Phi(\tau, \theta) = 0$, где

$$\Phi(\tau, \theta) = \frac{1 - \tau^l}{1 - \tau^m} - \frac{1 - (1 + l)\theta^l}{1 - (1 + m)\theta^m}.$$

Отметим, что равенство $1 - (1 + m)\theta^m = 0$ несовместно с равенством (7.6.4), поскольку они в совокупности влекут равенство $1 - (1 + l)\theta^l = 0$, что невозможно при $m > l$.

Из утверждений 3) и 4) предложения 7.6.1 получаем, что $\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(\tau, \theta) < 0$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\tau, \theta) > 0$ при $\tau \in (0, 1)$ и $\theta \in (0, (1 + m)^{-1/m}) \cup ((1 + m)^{-1/m}, \infty)$. Поскольку функция Φ бесконечно дифференцируема, то из теоремы о неявной функции и леммы 7.6.1 получаем, что функции $\tau \mapsto \theta_{\min}(\tau)$ и $\tau \mapsto \theta_{\max}(\tau)$ являются бесконечно дифференцируемыми и возрастающими на интервале $(0, 1)$.

Из утверждения 3) предложения 7.6.1 и равенств $\lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{1 - \tau^l}{1 - \tau^m} = 1$ и $\lim_{\tau \rightarrow 1-} \frac{1 - \tau^l}{1 - \tau^m} = l/m$ получаем, что функция $\tau \mapsto \frac{1 - \tau^l}{1 - \tau^m}$ убывает на интервале $(0, 1)$ и принимает все значения из интервала $(l/m, 1)$.

Теперь вернемся к исследованию функции $\psi(\theta) = \frac{1 - (1 + l)\theta^l}{1 - (1 + m)\theta^m}$. Согласно утверждению 4) предложения 7.6.1, ψ убывает на каждом из интервалов $(0, (1 + m)^{-1/m})$ и $((1 + m)^{-1/m}, \infty)$. Понятно также, что $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = l/m$, $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0-} \psi(\theta) = -\infty$, $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0+} \psi(\theta) = \infty$, где $\theta_0 := (1 + m)^{-1/m}$ — точка, в которой функция ψ не определена. Нетрудно проверить, что $\theta_1 := \left(\frac{1 + l}{1 + m}\right)^{1/(m-l)}$ — в точности та точка на интервале $(\theta_0, 1)$, которая удовлетворяет уравнению $\psi(\theta_1) = 1$. В частности, на интервале $(\theta_1, 1)$ функция ψ принимает все значения из интервала $(l/m, 1)$. Поэтому

$$\lim_{\tau \rightarrow 1-} \theta_{\max}(\tau) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0+} \theta_{\max}(\tau) = \theta_1 = \left(\frac{1 + l}{1 + m}\right)^{\frac{1}{m-l}}.$$

По предложению 7.6.1 имеем также неравенство

$$\theta_1 > (1 + m)^{-1/m} > (1 + l)^{-1/l} > e^{-1}.$$

Пусть $\tilde{\theta}$ — единственный корень уравнения $\psi(\theta) = l/m$ на интервале $(0, \theta_0)$. Тогда на интервале $(0, \tilde{\theta})$ функция ψ принимает все

значения из интервала $(l/m, 1)$. В частности, $\lim_{\tau \rightarrow 0+} \theta_{\min}(\tau) = 0$ и $\lim_{\tau \rightarrow 1-} \theta_{\min}(\tau) = \tilde{\theta}$.

Докажем теперь, что $\tilde{\theta} > e^{-2}$. Для этого достаточно показать, что $\psi(e^{-2}) > l/m$, поскольку $e^{-2} < e^{-1} < \theta_0$. Согласно утверждению 5) предложения 7.6.1, функция $\phi(x) = \frac{1+x}{x}(1 - e^{-2x})$ убывает на интервале $(0, \infty)$, поэтому $\phi(m) < \phi(l)$, что, как нетрудно проверить, эквивалентно неравенству

$$\psi(e^{-2}) = \frac{1 - (1+l)e^{-2l}}{1 - (1+m)e^{-2m}} > \frac{l}{m},$$

которое в свою очередь эквивалентно неравенству $\tilde{\theta} > e^{-2}$ (в силу убывания функции ψ). Таким образом, всегда выполнено включение $\tilde{\theta} \in (e^{-2}, (1+l)^{-1/l})$.

Нам осталось доказать, что для каждого $\gamma \in (e^{-1}, 1)$ (для каждого $\gamma \in (e^{-2}, 1)$) существуют такие $m > l > 0$, для которых выполнено равенство $\lim_{\tau \rightarrow 0+} \theta_{\max}(\tau) = \gamma$ ($\lim_{\tau \rightarrow 1-} \theta_{\min}(\tau) = \gamma$, соответственно). Для этого рассмотрим частный случай, когда $m = 2l$. Тогда уравнение (7.6.4) приобретает вид

$$(1 - \tau^l)((2l+1)\theta^{2l} - (l+1)(1 + \tau^l)\theta^l + \tau^l) = 0. \quad (7.6.5)$$

Решения последнего уравнения легко находятся в явном виде:

$$\theta^l = \frac{(1+l)(1 + \tau^l) \pm \sqrt{(1+2l)(\tau^l - 1)^2 + l^2(\tau^l + 1)^2}}{2(1+2l)}.$$

Понятно, что

$$\theta_{\max}(\tau) = \left(\frac{(1+l)(1 + \tau^l) + \sqrt{(1+2l)(\tau^l - 1)^2 + l^2(\tau^l + 1)^2}}{2(1+2l)} \right)^{\frac{1}{l}}$$

и

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} \theta_{\max}(\tau) = \left(\frac{1+l}{1+2l} \right)^{\frac{1}{l}}.$$

Поскольку $\lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{1+l}{1+2l} \right)^{1/l} = e^{-1}$ и $\lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{1+l}{1+2l} \right)^{1/l} = 1$, то выражение $\left(\frac{1+l}{1+2l} \right)^{1/l}$ принимает любое наперед заданное значения из интервала $(e^{-1}, 1)$ при подходящем $l > 0$.

Ясно также, что

$$\theta_{\min}(\tau) = \left(\frac{(1+l)(1+\tau^l) - \sqrt{(1+2l)(\tau^l-1)^2 + l^2(\tau^l+1)^2}}{2(1+2l)} \right)^{1/l}$$

и

$$\lim_{\tau \rightarrow 1-0} \theta_{\min}(\tau) = \tilde{\theta} = (1+2l)^{-1/l}.$$

Поскольку $\lim_{l \rightarrow 0} (1+2l)^{-1/l} = e^{-2}$ и $\lim_{l \rightarrow \infty} (1+2l)^{-1/l} = 1$, то выражение $(1+2l)^{-1/l}$ принимает любое наперед заданное значения из интервала $(e^{-2}, 1)$ при подходящем $l > 0$. Теорема полностью доказана. $\triangleright$

Рассмотрим теперь кривую $\gamma(x) = (x, x^l, x^m)$ при $m > l > 1$ и при все тех же договоренностях об обозначениях: $x_1 = 0$, $x_2 = \tau x_3$, $\xi = \xi(x_1, x_2, x_3) = \theta x_3$. Понятно, что $D(x_3) = \sqrt{x_3^2 + x_3^{2l} + x_3^{2m}} = x_3 + o(x_3)$ при $x_3 \rightarrow 0$ (см. обсуждение в конце предыдущего пункта). Также ясно, что $\theta = \theta_{\max}(\tau) \in (\tau, 1)$ и

$$\begin{aligned} DT(x_3) &= D(\xi(x_1, x_2, x_3)) = \\ &= \theta x_3 \sqrt{1 + (\theta x_3)^{2l-2} + (\theta x_3)^{2m-2}} = \theta_{\max}(\tau) x_3 + o(x_3) \end{aligned}$$

при $x_3 \rightarrow 0$. Таким образом (см. теорему 7.6.3 и пункт 2) в предположении 7.6.1),

$$\overline{\lim}_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{DT(x_3)}{D(x_3)} = \theta_{\max}(\tau) \geq \left(\frac{1+l}{1+m} \right)^{\frac{1}{m-l}} \geq \exp\left(-\frac{1}{2}\right). \quad (7.6.6)$$

Используя замену параметра для кривой, можно перенести этот результат и на более общие (параметрические) кривые. Рассмотрим кривую $\gamma(x) = (x^\alpha, x^\beta, x^\gamma)$, где $0 < \alpha < \beta < \gamma$, $x_1 = 0$. Заменой параметра $x = t^{1/\alpha}$ эта кривая приводится к параметрической кривой уже изученного вида $\gamma_1(t) = (t, t^l, t^m)$, где $l = \beta/\alpha$ и $m = \gamma/\alpha$ ($m > l > 1$). Поэтому для этой кривой γ мы получаем следующий результат:

$$\overline{\lim}_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{DT(x_3)}{D(x_3)} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \gamma} \right)^{\frac{\alpha}{\gamma-\beta}} = \left(\frac{1 + \frac{\beta}{\alpha}}{1 + \frac{\gamma}{\alpha}} \right)^{\frac{1}{\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}}} \geq e^{-\frac{1}{2}}. \quad (7.6.7)$$

Рассмотренный пример с кривыми вида $\gamma(x) = (x^\alpha, x^\beta, x^\gamma)$ подтверждает гипотезу 7.6.3 при $n = 2$, он же показывает, что неравенство в формулировке этой гипотезы не может быть улучшено.

7.6.4. Исследование случая $k = n$. В этом пункте мы рассмотрим теорему 7.6.2 при $k = n$ для естественного класса кривых и получим нетривиальные оценки для асимптотики точек компланарности в этом случае, что, в свою очередь, приводит к формулировке нескольких новых гипотез об асимптотике точек компланарности. Отметим, что в этом случае мы будем использовать асимптотическую характеристику, отличную от использованной в предыдущем пункте.

Разберем сначала частный случай $n = k = 2$, поскольку уже здесь проявляется явная геометрическая составляющая нашей задачи. Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую кривую $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. По теореме 7.6.2 для любых точек $x_1 < x_2 < x_3$ из интервала (a, b) существует такая точка $\eta \in (x_1, x_3]$, что выполнено равенство

$$\det \begin{pmatrix} f_1^{(2)}(\eta) & f_2^{(2)}(\eta) & f_3^{(2)}(\eta) \\ f_1(x_2) - f_1(x_1) & f_2(x_2) - f_2(x_1) & f_3(x_2) - f_3(x_1) \\ f_1(x_3) - f_1(x_1) & f_2(x_3) - f_2(x_1) & f_3(x_3) - f_3(x_1) \end{pmatrix} = 0.$$

Поскольку точек η , удовлетворяющих этому равенству, на промежутке $(x_1, x_3]$ может быть несколько, мы рассмотрим $\xi(x_1, x_2, x_3)$ — максимальную из таких точек.

Предположим теперь дополнительно, что *параметризация кривой γ натуральна*, т. е. $\|\gamma'(x)\| = 1$ для $x \in (a, b)$. Заметим, что при натуральной параметризации длина дуги кривой между точками $\gamma(c)$ и $\gamma(d)$, $c < d$, равна $d - c$, а $\gamma^{(2)}(t) = \gamma''(t)$ является *вектором главной нормали* в точке $\gamma(t)$ рассматриваемой кривой (см., например, часть 3 в книге [37] или часть 1 в книге [47]). Таким образом, значения $\eta \in (x_1, x_3)$ характеризуются тем, что вектор главной нормали кривой γ в точке $\gamma(\eta)$ компланарен плоскости в $\mathbb{R}^3$, проходящей через точки $\gamma(x_1)$, $\gamma(x_2)$ и $\gamma(x_3)$.

Поскольку число $x_3 - x_1$ ($\xi - x_1 = \xi(x_1, x_2, x_3) - x_1$) является длиной дуги кривой γ между точкой $\gamma(x_1)$ и точкой $\gamma(x_3)$ (соответственно, между точкой $\gamma(x_1)$ и точкой $\gamma(\xi)$), то величина $\frac{\xi(x_1, x_2, x_3) - x_1}{x_3 - x_1}$ довольно естественно описывает положение точки компланарности в данном случае. Нас будет интересовать в первую очередь асимпто-

тическая характеристика $\overline{\lim}_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{\xi(x_1, x_2, x_3) - x_1}{x_3 - x_1}$ в двух вариантах: в предположении, что x_2 выбирается как функция от x_3 и так, чтобы $\lim_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \tau$ для некоторого наперед заданного числа $\tau \in (0, 1)$ (интересен уже частный случай, когда $x_2 \equiv x_1 + \tau(x_3 - x_1)$), и без каких-либо дополнительных предположений о поведении величины $x_2 \in (x_1, x_3)$.

Далее для упрощения формул будем считать, что $x_1 = 0$. Зададим некоторое число $\alpha > 0$. Пусть

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= Ax + Bx^2 + Cx^{2+\alpha} + o(x^{2+\alpha}), \\ \gamma^{(2)}(x) &= 2B + (1 + \alpha)(2 + \alpha)Cx^\alpha + o(x^\alpha)\end{aligned}$$

при $x \rightarrow 0$, где $A, B, C \in \mathbb{R}^3$. Тогда по теореме 7.6.2 получаем, что для всех $0 < x_1 < x_2$ выполнено равенство (в каждой строке матрицы записан вектор из $\mathbb{R}^3$)

$$\det \begin{pmatrix} \gamma^{(2)}(\eta) \\ \gamma(x_2) \\ \gamma(x_3) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2B + (1 + \alpha)(2 + \alpha)C\eta^\alpha + o(x_3^\alpha) \\ Ax_2 + Bx_2^2 + Cx_2^{2+\alpha} + o(x_2^{2+\alpha}) \\ Ax_3 + Bx_3^2 + Cx_3^{2+\alpha} + o(x_3^{2+\alpha}) \end{pmatrix} = 0$$

при $x_3 \rightarrow 0 = x_1$. Теперь дополнительно потребуем, чтобы определитель $D(A, B, C)$ матрицы, составленной из координат векторов A, B, C был отличен от нуля. Это дает возможность найти простую асимптотику $\eta = \xi(x_1, x_2, x_3)$. Действительно, последнее равенство для определителя эквивалентно следующему:

$$D(A, B, C)x_2x_3((x_3 - x_2)(1 + \alpha)(2 + \alpha)\eta^\alpha + 2x_2^{1+\alpha} - 2x_3^{1+\alpha}) = o(x_3^{3+\alpha})$$

при $x \rightarrow 0 = x_1$. Поэтому неравенство $D(A, B, C) \neq 0$ влечет равенство

$$(x_3 - x_2)(1 + \alpha)(2 + \alpha)\eta^\alpha = 2x_3^{1+\alpha} - 2x_2^{1+\alpha}.$$

Если мы выбираем x_2 как функцию от x_3 таким образом, что $\lim_{x_3 \rightarrow 0} x_2/x_3 = \tau \in (0, 1)$, то тогда

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0} \frac{x_3^{1+\alpha} - x_2^{1+\alpha}}{x_3^\alpha(x_3 - x_2)} = \frac{1 - \tau^{1+\alpha}}{1 - \tau} > 1$$

и

$$\begin{aligned}\lim_{x_3 \rightarrow 0} \frac{\eta}{x_3} &= (1 + \alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1 - \tau^{1+\alpha}}{1 - \tau}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} > \\ &> (1 + \alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

Заметим, что выбирая достаточно малое значение $\tau > 0$, можно сделать величину $\frac{1-\tau^{1+\alpha}}{1-\tau}$ сколь угодно близкой к единице. Поскольку для любого $d > 0$ функция $x \rightarrow (1+dx)^{-1/x}$ возрастает на $(0, \infty)$ и $\lim_{x \rightarrow 0} (1+dx)^{-1/x} = \exp(-d)$ (см. лемму 3.3.1), то

$$\overline{\lim}_{x_3 \rightarrow 0} \frac{\eta}{x_3} \geq (1+\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} > \exp\left(-1 - \frac{1}{2}\right)$$

для всех $\alpha > 0$. В частности, выбирая достаточно малое значение $\alpha > 0$, можно сделать величину $(1+\alpha)^{-1/\alpha}(1+\alpha/2)^{-1/\alpha}$ сколь угодно близкой к $\exp(-1 - 1/2)$. Рассмотренный пример приводит к следующему предположению.

Гипотеза 7.6.4. Для любой натурально параметризованной C^2 -гладкой кривой $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, любой точки $x_1 \in (a, b)$ и любого числа $\tau \in (0, 1)$ в указанных выше обозначениях выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{\xi(x_1, x_2, x_3) - x_1}{x_3 - x_1} \geq \exp\left(-1 - \frac{1}{2}\right) \quad (7.6.8)$$

при условии, что x_2 выбирается как функция от x_3 с дополнительным условием $\lim_{x_3 \rightarrow 0} x_2/x_3 = \tau$.

В случае, когда мы ничего не предполагаем о расположении точки $x_2 \in (0, x_3)$, можно, конечно, воспользоваться неравенством $x_3^{1+\alpha} - x_2^{1+\alpha} > x_3^\alpha(x_3 - x_2)$, справедливым для любых $\alpha > 0$ и $x_3 > x_2 > 0$, и получить

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{\xi(x_1, x_2, x_3) - x_1}{x_3 - x_1} &= \overline{\lim}_{x_3 \rightarrow 0} \frac{\eta}{x_3} \geq \\ &\geq (1+\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} > \exp\left(-1 - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Но справедливо и более сильное неравенство. Так как мы не обязаны следить за величиной $x_2/x_3 \in (0, 1)$, то выбирая $x_2 \equiv \tau x_3$ при фиксированном $\tau \in (0, 1)$, получаем неравенство (см. выше)

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{\xi(x_1, x_2, x_3) - x_1}{x_3 - x_1} &= \overline{\lim}_{x_3 \rightarrow 0} \frac{\eta}{x_3} \geq \\ &\geq (1+\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1 - \tau^{1+\alpha}}{1 - \tau}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{\tau \rightarrow 1-} \left(\frac{1-\tau^{1+\alpha}}{1-\tau} \right)^{1/\alpha} = (1+\alpha)^{1/\alpha}$ и можно выбрать число $\tau > 0$, сколь угодно близкое к 1, мы приходим к неравенству

$$\overline{\lim}_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{\xi(x_1, x_2, x_3) - x_1}{x_3 - x_1} = \overline{\lim}_{x_3 \rightarrow 0} \frac{\eta}{x_3} \geq \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} > \exp\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Рассмотренный пример естественным образом приводит к следующей гипотезе.

Гипотеза 7.6.5. Для любой натурально параметризованной C^2 -гладкой кривой $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ и любой точки $x_1 \in (a, b)$ в указанных выше обозначениях выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{\xi(x_1, x_2, x_3) - x_1}{x_3 - x_1} \geq \exp\left(-\frac{1}{2}\right). \quad (7.6.9)$$

Замечание 7.6.1. Если параметризация кривой γ не является натуральной, то рассматриваемую в этом пункте задачу надлежит переформулировать, сохраняя в первую очередь ее геометрический смысл, а не буквально следуя теореме 7.6.2. Действительно, напомним, что число $\eta \in (x_1, x_3)$ можно определить как число со следующим свойством: вектор главной нормали кривой γ в точке $\gamma(\eta)$ компланарен плоскости в $\mathbb{R}^3$, проходящей через точки $\gamma(x_1)$, $\gamma(x_2)$ и $\gamma(x_3)$. Такая переформулировка вполне годится для произвольно параметризованной C^2 -гладкой кривой. Следует отметить также, что при буквальном следовании теореме 7.6.2 при определении точек η для кривых с параметризацией, не являющейся натуральной, нет никаких оснований ожидать существования универсальной нетривиальной оценки снизу для величины $\overline{\lim}_{x_3 \rightarrow x_1} \frac{\xi(x_1, x_2, x_3) - x_1}{x_3 - x_1}$. Действительно, нетрудно понять, что уменьшить эту величину можно до сколь угодно малого положительного значения, просто изменяя подходящим образом параметризацию для какой-то фиксированной кривой (например, можно сохранить исходную параметризацию на дуге, содержащей точки $\gamma(x_1)$ и $\eta = \xi(x_1, x_2, x_3)$ и «гораздо медленнее» пройти дугу между точками η и x_3).

Вернемся теперь к рассмотрению общего случая $k = n$. Рассмотрим n раз непрерывно дифференцируемую кривую $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $\gamma(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_{n+1}(t))$, параметризованную натуральным параметром ($\|\gamma'(x)\| = 1$ для $x \in (a, b)$). Для произвольно выбранных точек $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ из интервала (a, b) существует по крайней мере одна точка $\eta \in (x_1, x_3]$, удовлетворяющая равенству

из теоремы 7.6.2. Поскольку же таких точек η (точек компланарности) на промежутке $(x_1, x_{n+1}]$ может быть несколько, мы рассмотрим $\xi = \xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ — максимальную из них.

Так как число $x_{n+1} - x_1$ ($\xi - x_1 = \xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - x_1$) является длиной дуги кривой γ между точкой $\gamma(x_1)$ и точкой $\gamma(x_{n+1})$ (соответственно, точкой $\gamma(\xi)$), то величина $\frac{\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - x_1}{x_{n+1} - x_1}$ дает естественное описание положения точки компланарности в данном случае.

Нас в первую очередь будет интересовать асимптотическая характеристика $\lim_{x_{n+1} \rightarrow x_1} \frac{\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - x_1}{x_{n+1} - x_1}$ в двух вариантах: в предположении, что все x_i , $2 \leq i \leq n$, выбираются как функции от x_{n+1} и так, чтобы $\lim_{x_{n+1} \rightarrow x_1} \frac{x_i - x_1}{x_{n+1} - x_1} = \tau_i$ для некоторых наперед заданных чисел $\tau_i \in (0, 1)$, $\tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_n$ (интересен уже частный случай, когда $x_i \equiv x_1 + \tau_i(x_{n+1} - x_1)$), и без каких-либо дополнительных предположений о поведении величин $x_i \in (x_1, x_{n+1})$ при $i = 2, 3, \dots, n$.

Зафиксируем некоторое число $\alpha > 0$. Предположим, что кривая $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ такова, что для некоторых $A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ выполнены асимптотические равенства

$$\gamma(x) = A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + A_{n+1} x^{n+\alpha} + o(x^{n+\alpha}), \quad (7.6.10)$$

$$\gamma^{(n)}(x) = n! A_n + (1 + \alpha) \times \dots \times (n + \alpha) A_{n+1} x^\alpha + o(x^\alpha) \quad (7.6.11)$$

при $x \rightarrow 0$. Для всех $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ существуют числа $\eta \in (x_1, x_{n+1}]$, удовлетворяющие равенству в теореме 7.6.2. Пусть $\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ — максимальное из таких чисел. Теперь мы сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 7.6.4. Пусть $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — C^n -гладкая кривая, удовлетворяющая условиям (7.6.10) и (7.6.11). Предположим, что определитель $D(A_1, A_2, \dots, A_{n+1})$ матрицы, составленной из координат векторов $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$, отличен от нуля, тогда справедливы следующие утверждения:

1) Если все x_i , $2 \leq i \leq n$, выбираются как функции от x_{n+1} с условием, чтобы $\lim_{x_{n+1} \rightarrow x_1} \frac{x_i - x_1}{x_{n+1} - x_1} = \tau_i$ для некоторых наперед заданных чисел $\tau_i \in (0, 1)$, $\tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_n$, то имеет место (неулучшаемое в целом) неравенство

$$\lim_{x_{n+1} \rightarrow x_1} \frac{\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - x_1}{x_{n+1} - x_1} \geq \prod_{l=1}^n \left(1 + \frac{\alpha}{l}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}. \quad (7.6.12)$$

2) Если не делается никаких предположений о поведении величин $x_i \in (x_1, x_{n+1})$ при $i = 2, 3, \dots, n$, то справедливо (неулучшаемое в целом) неравенство

$$\overline{\lim}_{x_{n+1} \rightarrow x_1} \frac{\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - x_1}{x_{n+1} - x_1} \geq \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}. \quad (7.6.13)$$

◁ Согласно свойствам кривой γ и теореме 7.6.2 получаем, что для любых $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ и точки $\eta = \xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ выполнено равенство (в каждой строке матрицы записан вектор из $\mathbb{R}^{n+1}$)

$$\det \begin{pmatrix} \gamma^{(n)}(\eta) \\ \gamma(x_2) \\ \gamma(x_3) \\ \dots \\ \gamma(x_{n+1}) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} n! A_n + (1 + \alpha) \dots (n + \alpha) A_{n+1} \eta^\alpha + o(x_{n+1}^\alpha) \\ A_1 x_2 + \dots + A_n x_2^n + A_{n+1} x_2^{n+\alpha} + o(x_{n+1}^{n+\alpha}) \\ A_1 x_3 + \dots + A_n x_3^n + A_{n+1} x_3^{n+\alpha} + o(x_{n+1}^{n+\alpha}) \\ \dots \\ A_1 x_{n+1} + \dots + A_n x_{n+1}^n + A_{n+1} x_{n+1}^{n+\alpha} + o(x_{n+1}^{n+\alpha}) \end{pmatrix} = 0$$

при $x_{n+1} \rightarrow 0 = x_1$.

Поскольку $D(A_1, A_2, \dots, A_{n+1}) \neq 0$, мы можем вывести из приведенного равенства асимптотику для величины $\eta = \xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$. Действительно, простыми преобразованиями (например, применяя правило вычисления определителя произведения двух матриц) приводим последнее равенство для определителя при $x_{n+1} \rightarrow 0 = x_1$ к следующему виду:

$$D(A_1, A_2, \dots, A_{n+1}) \prod_{i=2}^{n+1} x_i \left(\prod_{l=1}^n (l + \alpha) V_1 \eta^\alpha - n! V_2 \right) = o(x_{n+1}^{n(n+1)/2 + \alpha}),$$

где V_1 и V_2 являются соответственно определителем Вандермонда и обобщенным определителем Вандермонда следующего вида:

$$\begin{aligned} V_1 &= \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} & x_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = \\ &= \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) > 0, \\ V_2 &= \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1+\alpha} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} & x_3^{n-1+\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-2} & x_{n+1}^{n-1+\alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому неравенство $D(A_1, A_2, \dots, A_{n+1}) \neq 0$ влечет равенство

$$\prod_{l=1}^n (l + \alpha) V_1 \eta^\alpha = n! V_2. \quad (7.6.14)$$

Ясно, что при $\alpha = 0$ мы получаем $V_2 = V_1$. Можно получить следующее интегральное выражение для обобщенного определителя Вандермонда V_2 (см., например, [170, теорема 2]):

$$V_2 = V_1 \prod_{l=1}^{n-1} (l + \alpha) \int_E \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+2} t_i \right)^\alpha dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}, \quad (7.6.15)$$

где $t_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} t_i$ и

$$E = \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \mid t_i \geq 0, 1 \leq i \leq n-1, \sum_{i=1}^{n-1} t_i \leq 1 \right\}.$$

ДОКАЖЕМ УТВЕРЖДЕНИЕ 1) ТЕОРЕМЫ. Предположим, что все x_i , $2 \leq i \leq n$, выбираются как функции от x_{n+1} и так, чтобы $\lim_{x_{n+1} \rightarrow x_1} \frac{x_i - x_1}{x_{n+1} - x_1} = \tau_i$ для некоторых наперед заданных чисел $\tau_i \in (0, 1)$, $\tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_n$. Полагая $\tau_{n+1} = 1$ (что естественно с учетом определения других τ_i), из равенства (7.6.15) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x_{n+1} \rightarrow 0} \frac{V_2}{x_{n+1}^\alpha V_1} = \\ = \prod_{l=1}^{n-1} (l + \alpha) \int_E \left(\sum_{i=0}^{n-1} \tau_{i+2} t_i \right)^\alpha dt_1 \dots dt_{n-1} =: I(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n). \end{aligned} \quad (7.6.16)$$

Поэтому, учитывая равенство (7.6.14), приходим к следующему соотношению:

$$\lim_{x_{n+1} \rightarrow 0} \frac{\eta}{x_{n+1}} = \prod_{l=1}^n \left(1 + \frac{\alpha}{l} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} (I(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n))^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (7.6.17)$$

Определение функции $I(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n)$ посредством интеграла (7.6.16) позволяет распространить ее с сохранением непрерывности на все значения $\tau_i \in [0, 1]$ с условием $\tau_2 \leq \tau_3 \leq \dots \leq \tau_n$. Легко отыскать экстремумы этой функции. А именно, покажем, что

максимальное и минимальное значения функции $I(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n)$ при $\tau_i \in [0, 1]$, $\tau_2 \leq \tau_3 \leq \dots \leq \tau_n$, равны соответственно $\prod_{l=1}^{n-1} (1 + \alpha/l)$ и 1.

Понятно, что для любого вектора $(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \in E$ и произвольно выбранных $\tau_2 \leq \tau_3 \leq \dots \leq \tau_n$ из отрезка $[0, 1]$ выполнено неравенство (напомним, что $\tau_{n+1} = 1$ и $t_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} t_i$)

$$t_{n-1} \leq \sum_{i=0}^{n-2} \tau_{i+2} t_i + t_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_{i+2} t_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} t_i = 1.$$

Теперь осталось заметить, что (приводимые интегралы легко вычисляются с помощью повторного интегрирования)

$$\int_E dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} = \mu(E) = \frac{1}{(n-1)!}$$

и

$$\int_E t_{n-1}^\alpha dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} = \prod_{l=1}^{n-1} (l + \alpha)^{-1}.$$

Обратимся теперь опять к равенству (7.6.17). Как только что продемонстрировано, справедливо неравенство $I(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n) \geq 1$, причем величина $I(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n)$ сколь угодно близка к 1 для подходящих значений $\tau_i \in (0, 1)$, $\tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_n$. Поэтому имеет место неравенство (7.6.12) из пункта 1) доказываемой теоремы.

Теперь перейдем к доказательству утверждения 2) теоремы. Как отмечалось, имеет место неравенство

$$I(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n) \leq \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right),$$

причем для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать такие $\tau_i \in (0, 1)$, $\tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_n$, что

$$I(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n) \geq \prod_{l=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha}{l}\right) - \varepsilon.$$

Если рассматривать $x_i \equiv x_1 + \tau_i(x_{n+1} - x_1)$, $2 \leq i \leq n$, для выбранных таким образом τ_i , то, согласно равенству (7.6.17) получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{x_{n+1} \rightarrow x_1} \frac{\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - x_1}{x_{n+1} - x_1} = \\ &= \prod_{l=1}^n \left(1 + \frac{\alpha}{l}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} (I(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n))^{\frac{1}{\alpha}} \geq \\ &\geq \prod_{l=1}^n \left(1 + \frac{\alpha}{l}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\prod_{l=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha}{l}\right) - \varepsilon\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, мы отсюда легко получаем доказываемое неравенство (7.6.13). Понятно также, что оно не может быть улучшено (это легко доказывается от противного с учетом неравенства $I(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n) \leq \prod_{l=1}^{n-1} (1 + \alpha/l)$). $\triangleright$

Поскольку для любого $d > 0$ функция $x \rightarrow (1 + dx)^{-1/x}$ возрастает на $(0, \infty)$ и $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + dx)^{-1/x} = \exp(-d)$, то из неравенства (7.6.12) мы сразу получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \lim_{x_{n+1} \rightarrow x_1} \frac{\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - x_1}{x_{n+1} - x_1} > \\ &> \exp\left(-\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right), \end{aligned} \quad (7.6.18)$$

не содержащее величины α . Следует отметить, что рассмотрение близких к нулю значений $\alpha > 0$ доказывает неулучшаемость полученного неравенства.

Так как $(1 + \alpha/n)^{-1/\alpha} > \exp(-1/n)$, то из неравенства (7.6.13) мы аналогично получаем (неулучшаемое в целом) неравенство

$$\begin{aligned} & \lim_{x_{n+1} \rightarrow x_1} \frac{\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - x_1}{x_{n+1} - x_1} \geq \\ &\geq \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} > \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (7.6.19)$$

для всех $\alpha > 0$.

Полученные только что результаты приводят к двум следующим естественным предположениям.

Гипотеза 7.6.6. Для любой натурально параметризованной n раз непрерывно дифференцируемой кривой $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ и

любой точки $x_1 \in (a, b)$ в приведенных выше обозначениях выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x_{n+1} \rightarrow x_1} \frac{\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - x_1}{x_{n+1} - x_1} &\geq \\ &\geq \exp \left(- \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right) \end{aligned} \quad (7.6.20)$$

при условии, что все x_i , $2 \leq i \leq n$, выбираются как функции от x_{n+1} таким образом, что $\lim_{x_{n+1} \rightarrow x_1} \frac{x_i - x_1}{x_{n+1} - x_1} = \tau_i$ для некоторых наперед заданных чисел $\tau_i \in (0, 1)$, $\tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_n$.

Гипотеза 7.6.7. Для любой натурально параметризованной n раз непрерывно дифференцируемой кривой $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ и любой точки $x_1 \in (a, b)$ в приведенных выше обозначениях выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_{x_{n+1} \rightarrow x_1} \frac{\xi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - x_1}{x_{n+1} - x_1} \geq \exp \left(- \frac{1}{n} \right). \quad (7.6.21)$$

Понятно, что гипотезы 7.6.6 и 7.6.7 обобщают гипотезы 7.6.4 и 7.6.5 соответственно. Как следует из теоремы 7.6.4, неравенства в приведенных двух гипотезах не могут быть улучшены.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в этой книге результаты убедительно демонстрируют наличие интересных эффектов, связанных с асимптотикой точек среднего значения в различных аналитических дисциплинах, поэтому представленная тематика (по крайней мере, на взгляд автора) является весьма многогранной. При этом она обладает особой притягательностью благодаря своим связям с совершенно классическими, основополагающими результатами анализа, знакомыми всем нынешним и бывшим студентам-математикам, и не только им.

Совокупность изложенных в этой книге результатов естественно порождает новые проблемы и гипотезы. Решение соответствующих задач поможет уточнить множество классических аналитических результатов, а может привести и к открытию новых неожиданных эффектов. В этой связи мы в первую очередь напомним сформулированные выше гипотезы 7.6.1 и 7.6.2 (см. страницу 164), гипотезу 7.6.3 (см. страницу 168), гипотезы 7.6.4 и 7.6.5 (см. страницы 178 и 179), а также гипотезы 7.6.6 и 7.6.7 (см. страницу 184 и 185). Также несомненный интерес представляют задачи 5.2.1, 5.3.1 и 7.6.1 (см. страницы 99, 104 и 165 соответственно).

Автор будет признателен всем, кто сообщит ему информацию о каких-то продвижениях в решении указанных проблем, равно как и любых других задач, близких к тематике книги, в особенности тех, что не отмечены в тексте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу / Учеб. для вузов. Изд. 3-е, перераб. и доп.—М.: Дрофа, 2003.—640 с.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Том 1. Изд. 2-е.—М.: ГИФМЛ, 1962.—464 с.
3. Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Изд. 2-е, испр. и доп.—М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.—728 с.
4. Боннезен Т., Фенхель В. Теория выпуклых тел.— М.: ФАЗИС, 2002.—210 с.
5. Бритман М. С. Об остаточном члене формулы Тейлора // Мат. просвещение.—1936.—Вып. 6.—С. 44–45.
6. Бугаев Н. В. Способ последовательных приближений. Его приложение к выводу теорем Тейлора и Лагранжа в преобразованной форме // Мат. сб.—1896.—Т. 18, № 4.—С. 586–597.
7. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия.— М.: ГИФМЛ, 1960.—468 с.
8. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе.—М.: Мир, 1967.—251 с.
9. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Изд. 3-е.—М.: Наука, 1967.—376 с.
10. Гнеденко Б. В. О θ в формуле Лагранжа // Мат. просвещение.—1936.—Вып. 6.—С. 31–35.
11. Гринько А. П. Композиции операторов локального дробного интегродифференцирования в различных точках // Тр. Ин-та математики.—2009.—Т. 17, № 1.—С. 41–50.
12. Гурса Э. Курс математического анализа. Том 1. Часть 1. Производные и дифференциалы. Определенные интегралы.—М.—Л.: ГТТИ, 1933.—368 с.
13. Зорич В. А. Математический анализ. Часть 1 / Учеб. для мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов. Изд. 2-е, испр. и доп.—М.: ФАЗИС, 1997.—568 с.
14. Иванов В. В., Никоноров Ю. Г. Асимптотика точек Лагранжа в формуле Тейлора // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 1.—С. 86–92.
15. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. Изд. 2-е, перераб. и доп.—М.: Наука, 1988.—400 с.
16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 7-е.—М.: Физматлит, 2012.—572 с.
17. Коробков М. В. Об одном обобщении теоремы Дарбу на многомерный случай // Сиб. мат. журн.—2000.—Т. 41, № 1.—С. 118–133.
18. Коробков М. В. Обобщение теоремы Лагранжа о среднем для случая векторнозначных отображений // Сиб. мат. журн.—2001.—Т. 42, № 2.—С. 349–353.
19. Коши О. Л. Дифференциальное и интегральное исчисление. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении / Пер. с французского В. Я. Буняковского.—СПб.: Императорская академия наук, 1831.

20. Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы: метод положительных операторов.—М.: Наука, 1985.—254 с.
21. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 3 томах. Том 1 / Учеб. для вузов. Изд. 5-е, перераб. и доп.—М.: Дрофа, 2003.—704 с.
22. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
23. Маркушевич А. И. Вторая теорема о среднем значении // Мат. сб.—1935.—Т. 42, № 5.—С. 567–582.
24. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Изд. 3-е, испр.—СПб.: Лань, 1999.—560 с.
25. Нечепуренко М. И. Итерации вещественных функций и функциональные уравнения.—Новосибирск: Ин-т вычисл. математики и мат. геофизики, 1997.—227 с.
26. Никольский С. М. Курс математического анализа / Учеб. для вузов. Изд. 6-е.—М.: Физматлит, 2001.—592 с.
27. Никоноров Ю. Г. Об интегральной теореме о среднем // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 6.—С. 150–152.
28. Никоноров Ю. Г. О точных оценках в первой теореме о среднем // Докл. АН.—1994.—Т. 336, № 2.—С. 168–170.
29. Никоноров Ю. Г. Точные оценки в интегральных теоремах о среднем значении: дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 1995.—83 с.
30. Никоноров Ю. Г. О решениях некоторых интегральных уравнений с отклоняющимся аргументом // Актуальные проблемы современной математики.—Новосибирск: НИИ МИОО, 1997.—Т. 3.—С. 136–141.
31. Никоноров Ю. Г. Оценки в теоремах о среднем значении для операторов со знакопеременным ядром // Тр. Рубц. индустр. ин-та.—1997.—Т. 4.—С. 192–199.
32. Никоноров Ю. Г. Об асимптотике точек среднего значения для некоторых конечно-разностных операторов // Сиб. мат. журн.—2002.—Т. 43, № 3.—С. 644–651.
33. Никоноров Ю. Г. Асимптотика точек касания плоских кривых // Мат. тр.—2011.—Т. 14, № 1.—С. 141–157.
34. Никоноров Ю. Г. Асимптотика точек среднего значения в теореме Шварца для разделенных разностей // Мат. тр.—2014.—Т. 17, № 1.—С. 145–174.
35. Никоноров Ю. Г. Теорема Пеано и точки компланарности пространственных кривых // Мат. тр.—2014.—Т. 17, № 2.—С. 163–183.
36. Петрова С. С., Романовска Д. А. К истории открытия ряда Тейлора // Историко-математические исследования.—М.: Наука, 1980.—Вып. 25.—С. 10–24.
37. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. Изд. 6-е.—М.: Наука, 1974.—176 с.
38. Понтрягин Л. С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1942.—Т. 6, № 3.—С. 115–134.
39. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. Часть I. Книга 1. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999.—454 с.
40. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. Часть I. Книга 2. Интегральное исчисление функций одной переменной. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999.—512 с.

41. Решетняк Ю. Г. О формуле Тейлора для функций многих переменных // Сиб. мат. журн.—2013.—Т. 54, № 3.—С. 712–720.
42. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу.— М.: Мир, 1979.—587 с.
43. Рудин У. Основы математического анализа. Изд. 2-е, стереотип.— М.: Мир, 1976.—320 с.
44. Сакс С. Теория интеграла.— М.: Факториал, 2004.—496 с.
45. Талалян Ф. А. Монотонные функции нескольких переменных и многомерная теорема о среднем // Изв. АН Армении. Математика.—1992.—Т. 27, № 2.—С. 72–89.
46. Титчмарш Е. Теория функций. Изд. 2-е, перераб.— М.: Наука, 1980.—463 с.
47. Топоногов В. А. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей.—М.: Физматкнига, 2012.—223 с.
48. Федерер Г. Геометрическая теория меры.— М.: Наука, 1987.—760 с.
49. Филер З. Е. Об одном обобщении формулы Тейлора и ее применении к решению дифференциальных уравнений // Украин. мат. журн.—1981.—Т. 33, № 1.—С. 123–128.
50. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 томах. Том 1. Изд. 9-е.—СПб.: Лань, 2009.—608 с.
51. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.—М.: Наука, 1966.—416 с.
52. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства.—М.: ГИИЛ, 1948.—456 с.
53. Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н. Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. МИАН СССР.—М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1949.—Т. 26.—С. 3–331.
54. Юшкевич А. П. (ред.). История математики с древнейших времен до начала XIX века. В 3 томах. Том 1. С древнейших времен до начала нового времени.—М.: Наука, 1970.—352 с.
55. Юшкевич А. П. (ред.). История математики с древнейших времен до начала XIX века. В 3 томах. Том 2. Математика XVII столетия.—М.: Наука, 1970.—301 с.
56. Юшкевич А. П. (ред.). История математики с древнейших времен до начала XIX века. В 3 томах. Том 3. Математика XVIII столетия.—М.: Наука, 1972.—498 с.
57. Abel U. On the Lagrange remainder of the Taylor formula // Amer. Math. Monthly.—2003.—Vol. 110, № 7.—P. 627–633.
58. Abel U., Ivan M. The differential mean value of divided differences // J. Math. Anal. Appl.—2007.—Vol. 325, № 1.—P. 560–570.
59. Adikesavan A. S. A note on Taylor's theorem // Indian J. Pure Appl. Math.—1980.—Vol. 11, № 4.—P. 444–449.
60. Almira J. M., Del Toro N., Jiménez M. More on a topological mean value theorem // Elem. Math.—2004.—Vol. 59, № 1.—P. 19–22.
61. Anton H. Calculus. A New Horizon. Brief ed., 6th ed.—N. Y.: Wiley, 1998.—xxxi+879 p.
62. Apostol T. M. Calculus. Vol. I. One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra. 2nd ed.—Waltham, Mass.—Toronto, Ont.—London: Blaisdell Publ. Co. Ginn and Co., 1967.—xx+666 p.

63. *Apostol T. M.* Calculus. Vol. II. Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability. 2nd ed.—Waltham, Mass.—Toronto, Ont.—London: Blaisdell Publ. Co. Ginn and Co., 1969.—xxi+673 p.
64. *Arias de Reyna J.* A generalized mean-value theorem // *Monatsh. Math.*—1988.—Vol. 106, № 2.—P. 95–97.
65. *Ash J. M., Gatto A. E., Vági S.* A multidimensional Taylor's theorem with minimal hypothesis // *Colloq. Math.*—1960.—Vol. 60/61, № 1.—P. 245–252.
66. *Aziz A. K., Diaz J. B.* On a mean value theorem of the differential calculus of vector-valued functions, and uniqueness theorems for ordinary differential equations in a linear-normed space // *Contrib. Differential Equations.*—1963.—Vol. 1.—P. 251–269.
67. *Azpeitia A. G.* On the Lagrange remainder of the Taylor formula // *Amer. Math. Monthly.*—1982.—Vol. 89, № 5.—P. 311–312.
68. *Beesack P. R.* A general form of the remainder in Taylor's theorem // *Amer. Math. Monthly.*—1966.—Vol. 73, № 1.—P. 64–67.
69. *Birkhoff G. D.* General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and quadrature // *Trans. Amer. Math. Soc.*—1906.—Vol. 7, № 1.—P. 107–136.
70. *Bolzano B.* Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege.—Prague, 1817.
71. *Bonnet P. O.* Remarques sur quelques intégrales définies // *J. Math. Pures Appl. (1).*—1849.—Vol. 14.—P. 249–256.
72. *de Boor C.* Divided differences // *Surv. Approx. Theory.*—2005.—Vol. 1.—P. 46–69.
73. *de Boor C., Pinkus A.* The B-spline recurrence relations of Chakalov and of Popoviciu // *J. Approx. Theory.*—2003.—Vol. 124, № 1.—P. 115–123.
74. *Bradley R. E., Sandifer C. E.* Cauchy's Cours d'analyse. An Annotated Translation. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences.—N. Y.: Springer, 2009.—xx+411 p.
75. *Bruckner A. M., Bruckner J. B., Thomson B. S.* Real Analysis.—Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall International, 1997.—xiv+713 p.
76. *Chakalov L. N.* On a certain presentation of the Newton divided differences in interpolation theory and its applications // *Annuaire Univ. Sofia, Fiz. Mat. Fakultet.*—1938.—Vol. 34.—P. 353–394.
77. *Cauchy A.-L.* Cours d'analyse de l'École royale polytechnique.—Paris: de Bure, 1821. См. также: Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. Sér. 2. T. 3.—Paris: Gauthier-Villars, 1897.—476 p.
78. *Cauchy A.-L.* Résumés des Leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal.—Paris: de Bure, 1823. См. также C. 5–261: Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. Sér. 2. T. 4.—Paris: Gauthier-Villars, 1899.—615 p.
79. *Curry H. B., Schoenberg I. J.* On Pölya frequency functions IV: the fundamental spline functions and their limits // *J. Anal. Math.*—1966.—Vol 17.—P. 71–107.
80. *Darboux G.* Mémoire sur les fonctions discontinues // *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*—1875.—Vol. 4.—P. 57–112.
81. *Davitt R. M., Powers R. C., Riedel T., Sahoo P. K.* Flett's mean value theorem for holomorphic functions // *Math. Mag.*—1999.—Vol. 72, № 4.—P.304–307.

82. *Diaz J. B., Výborný R.* On some mean value theorems of the differential calculus // *Bull. Austral. Math. Soc.*—1971.—Vol. 5.—P. 227–238.
83. *Dinh The Luc.* Taylor's formula for $C^{k,1}$ functions // *SIAM J. Optim.*—1995.—Vol. 5, № 3.—P. 659–669.
84. *Dixon A. C.* The second mean value theorem in the integral calculus // *Proceedings Cambridge.*—1929.—Vol. 25.—P. 282–284.
85. *D'Ocagne M.* Le terme complémentaire de la série de Taylor // *Mathesis. Ser. 2.*—1891.—Vol. 1.—P. 19–20.
86. *Dragomir S. S., Thompson H. B.* A two points Taylor's formula for the generalised Riemann integral // *Demonstratio Math.*—2010.—Vol. 43, № 4.—P. 827–840.
87. *Einbeck J.* A simple unifying formula for Taylor's theorem and Cauchy's mean value theorem // *Int. J. Pure Appl. Math.*—2004.—Vol. 14, № 1.—P. 69–74.
88. *Evans M. J., Weil C. E.* Peano derivatives: a survey // *Real Anal. Exchange.*—1981/82.—Vol. 7, № 1.—P. 5–23.
89. *Evard J.-Cl., Jafari F.* A complex Rolle's theorem // *Amer. Math. Monthly.*—1992.—Vol. 99, № 9.—P. 858–861.
90. *Ferraro G., Panza M.* Lagrange's theory of analytical functions and his ideal of purity of method // *Arch. Hist. Exact Sci.*—2012.—Vol. 66, № 2.—P. 95–197.
91. *Flett T. M.* A mean value theorem // *Math. Gazette.*—1958.—Vol. 42, № 339.—P. 38–39.
92. *Flett T. M.* Mean value theorems for vector-valued functions // *Tôhoku Math. J.*—1972.—Vol. 24, № 2.—P. 141–151.
93. *Furi M., Martelli M.* A multidimensional version of Rolle's theorem // *Amer. Math. Monthly.*—1995.—Vol. 102, № 3.—P. 243–249.
94. *Genocchi A.* Relation entre la différence et la dérivée d'un même ordre quelconque // *Arch. Math. Phys. Ser. I.*—1869.—Vol. 49.—P. 342–345.
95. *Genocchi A.* *Calcolo Differenziale e Principii di Calcolo Integrale*, Pubblicato con aggiunte dal Dr. Giuseppe Peano.—Turin: Bocca, 1884.—xxxii+338 p.
96. *Gibson G. A.* The second integral theorem of mean value: a geometrical proof // *Proc. Edinburgh Math. Soc.*—1901.—Vol. 20.—P. 1–5.
97. *Glashan J. C.* Forms of Rolle's theorem // *Amer. J. Math.*—1881.—Vol. 4, № 1.—P. 282–292.
98. *Hardy G. H.* The second theorem of consistency for summable series // *Proc. London Math. Soc. (2).*—1916.—Vol. 15.—P. 72–88.
99. *Hardy G. H., Ingham A. E., Pólya G.* Theorems concerning mean values of analytic functions // *Proc. Royal Soc. London (A).*—1927.—Vol. 113.—P. 542–569.
100. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions // *Quarterly J. Math., Oxf. Ser.*—1941.—Vol. 12.—P. 221–256.
101. *Hermite Ch.* Sur la formule d'interpolation de Lagrange // *J. Reine Angew. Math.*—1877.—Vol. 84, № 1.—P. 70–79.
102. *Hobson E. W.* On the second mean-value theorem of the integral calculus // *Proc. London Math. Soc. (2).*—1909.—Vol. 7, № 1.—P. 14–23.
103. *Hobson E. W.* *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series*. Vol. 1. 2nd ed., revised and enlarged.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1921.—xv+671 p.
104. *Hobson E. W.* *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series*. Vol. 2. 2nd ed., revised and enlarged.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1926.—x+780 p.

105. *Holbrook J., Kim Sung Soo.* A very mean value theorem // *Math. Intelligencer.*—2003.—Vol. 25, № 1.—P. 42–47.
106. *Hummel P. M., Seebeck C. L. Jr.* A generalization of Taylor's expansion // *Amer. Math. Monthly.*—1949.—Vol. 56, № 4.—P. 243–247.
107. *Jacobson B.* On the mean value theorem for integrals // *Amer. Math. Monthly.*—1982.—Vol. 89, № 5.—P. 300–301. См. также: *Wong Jingcheng.* Errata: "On the mean value theorem for integrals" // *Amer. Math. Monthly.*—1990.—Vol. 97, № 5.—P. 412.
108. *Kalantari B.* Generalization of Taylor's theorem and Newton's method via a new family of determinantal interpolation formulas and its applications // *J. Comput. Appl. Math.*—2000.—Vol. 126, № 1–2.—P. 287–318.
109. *Kannappan Pl., Sahoo P. K., Jacobson M. S.* A characterization of low degree polynomials // *Demonstratio Math.*—1995.—Vol. 28, № 1.—P. 87–96.
110. *Khovanskii A., Yakovenko S.* Generalized Rolle theorem in $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{C}$ // *J. Dynam. Control Systems.*—1996.—Vol. 2, № 1.—P. 103–123.
111. *Lagarias J. C.* Euler's constant: Euler's work and modern developments // *Bull. Amer. Math. Soc., New Ser.*—2013.—Vol. 50, № 4.—P. 527–628.
112. *Lagrange J.-L.* *Théorie des Fonctions Analytiques.*—Paris: L'Imprimerie de la République, 1797.—277 p.
113. *Lakshminarasimhan T. V.* A Mean value theorem — an extension // *Amer. Math. Monthly.*—1966.—Vol. 73, № 8.—P. 862–863.
114. *Matkowski J., Pawlikowska I.* Homogeneous means generated by a mean-value theorem // *J. Math. Inequal.*—2010.—Vol. 4, № 4.—P. 467–479.
115. *McCulloch J. F.* Extension of Rolle's theorem // *Annals of Math.*—1888.—Vol. 4, № 1.—P. 5–8.
116. *McLeod R. M.* Mean value theorems for vector valued functions // *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2).*—1965.—Vol. 14.—P. 197–209.
117. *Mera R.* On the determination of the intermediate point in Taylor's theorem // *Amer. Math. Monthly.*—1992.—Vol. 99, № 1.—P. 56–58.
118. *Moursund, A. F.* A note on Taylor's theorem // *Bull. Amer. Math. Soc.*—1935.—Vol. 41, № 4.—P. 231–232.
119. *Nikonov Yu. G.* Asymptotic behavior of support points for planar curves // *J. Math. Anal. Appl.*—2012.—Vol. 391, № 1.—P. 147–158.
120. *Nürnberg G.* *Approximation by Spline Functions.*—Berlin: Springer-Verlag, 1989.—xii+243 p.
121. *Odibat Z. M., Shawagfeh N. T.* Generalized Taylor's formula // *Appl. Math. Comput.*—2007.—Vol. 186, № 1.—P. 286–293.
122. *Pawlikowska I.* An extension of a theorem of Flett // *Demonstratio Math.*—1999.—Vol. 32, № 2.—P. 281–286.
123. *Peano G.* Une nouvelle forme du reste dans la formule de Taylor // *Mathesis.*—1889.—Vol. 9.—P. 182–183.
124. *Peano G.* Sulla formula di Taylor // *Atti Accad. Sci. Torino.*—1891–1892.—Vol. 27.—P. 40–46.
125. *Peano G.* *Opere Scelte. Vol. I. Analisi Matematica. Calcolo Numerico.*—Roma: Edizioni Cremonese VII, 1957.—530 p.
126. *Peano G., Kennedy H. C.* *Selected Works of Giuseppe Peano* / Transl. from the Italian and ed., with a biographical sketch and bibliography, by Hubert C. Kennedy.—Toronto, Ont.—Buffalo, N. Y.: Univ. of Toronto Press, 1973.—xi+249 p.
127. *Poffald E. I.* The remainder in Taylor's formula // *Amer. Math. Monthly.*—1990.—Vol. 97, № 3.—P. 205–213.

128. *Polya G.* On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation // *Trans. Amer. Math. Soc.*—1922.—Vol. 24, № 4.—P. 312–324.
129. *Pompeiu D.* Sur une proposition analogue au théorème des accroissements finis // *Mathematica, Timișoara*.—1946.—Vol. 22.—P. 143–146.
130. *Powers R. C., Riedel T., Sahoo P. K.* Limit properties of differential mean values // *J. Math. Anal. Appl.*—1998.—Vol. 227, № 1.—P. 216–226.
131. *Prasad G.* On the nature of θ in the mean-value theorem of the differential calculus // *Bull. Amer. Math. Soc.*—1930.—Vol. 36, № 4.—P. 289–291.
132. *Riedel T., Sablik M.* A different version of Flett's mean value theorem and an associated functional equation // *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*—2004.—Vol. 20, № 6.—P. 1073–1078.
133. *Riestra J.-A.* A Generalized Taylor's Formula for Functions of Several Variables and Certain of its Applications.—N. Y.: Scientific & Technical, Harlow; Copublished with John Wiley & Sons, Inc., 1995.—x+125 p.—(Pitman Research Notes in Mathematics Series, 329).
134. *Robson E. (ed.), Stedall J. (ed.).* The Oxford Handbook of the History of Mathematics.—Oxford: Oxford Univ. Press, 2009.—viii+918 p.
135. *Roche É.* Note sur la formule de Taylor // *J. Math. Pures Appl. Ser. 2.*—1858.—Vol. 3.—P. 271–272.
136. *Roche É.* Nouvelle somme du reste de la série de Taylor (voir p. 308) // *Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, Ser. 1.*—1860.—Vol. 19.—P. 311–315.
137. *Rosenholtz I.* A topological mean value theorem for the plane // *Amer. Math. Monthly*.—1991.—Vol. 98, № 2.—P. 149–154.
138. *Royden H., Fitzpatrick P. M.* Real Analysis. 4th ed.—N. Y.: Prentice Hall, 2010.—xii+505 p.
139. *Russ S. B.* A translation of Bolzano's paper on the intermediate value theorem // *Historia Math.*—1980.—Vol. 7, № 2.—P. 156–185.
140. *Sablik M.* Taylor's theorem and functional equations // *Aequationes Math.*—2000.—Vol. 60, № 3.—P. 258–267.
141. *Sahoo P. K.* Some results related to the integral mean value theorem // *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.*—2007.—Vol. 38, № 6.—P. 818–822.
142. *Sahoo P. K.* Quasi-mean value theorems for symmetrically differentiable functions // *Tamsui Oxf. J. Inf. Math. Sci.*—2011.—Vol. 27, № 3.—P. 279–301.
143. *Sahoo P. K., Kannappan P.* Introduction to Functional Equations.—Boca Raton: CRC Press — Taylor and Francis Group, 2011.—xviii+447 p.
144. *Sahoo P. K., Riedel T.* Mean Value Theorems and Functional Equations.—River Edge, New Jersey: World Sci. Publ. Co., 1998.—xii+245 p.
145. *Sanderson D. E.* A versatile vector mean value theorem // *Amer. Math. Monthly*.—1972.—Vol. 79, № 4.—P. 381–383.
146. *Schlömilch O.* Handbuch der Differentialrechnung, etc.—Greisswald, 1847–1848.
147. *Schlömilch O.* Extrait d'une lettre à M. Liouville // *J. Math. Pures Appl. Ser. 2.*—1858.—Vol. 3.—P. 384–385.
148. *Schwarz H. A.* Démonstration élémentaire d'une propriété fondamentale des fonctions interpolaires // *Atti Accad. Sci. Torino*.—1882.—Vol. 17.—P. 740–743.
149. *Schwarz H. A.* Gesammelte mathematische Abhandlungen. 2 Bände.—Berlin: Springer, 1890.—XI+338 p., VII+370 p.
150. *Schwind W. J., Ji Jun, Koditschek D. E.* A physically motivated further note on

- the mean value theorem for integrals // Amer. Math. Monthly.—1999.—Vol. 106, № 6.—P. 559–564.
151. Serret J. A. Cours de calcul différentiel et intégral. Cinquième édition. Augmentée d'une note sur la théorie des fonctions elliptiques, par Ch. Hermite. Tome premier. Calcul différentiel, Tome second. Calcul intégral.—Paris: Gauthier-Villars, 1900.—xiii+617 p., xiii+904 p.
 152. Seymour P. D., Zaslavsky T. Averaging sets: a generalization of mean values and spherical designs // Adv. Math.—1984.—Vol. 52.—P. 213–240.
 153. Stark E. L. Application of a mean value theorem for integrals to series summation // Amer. Math. Monthly.—1978.—Vol. 85, № 6.—P. 481–483.
 154. Talvila E. Estimates of the remainder in Taylor's theorem using the Henstock-Kurzweil integral // Czech. Math. J.—2005.—Vol. 55, № 4.—P. 933–940.
 155. Thomson B. S., Bruckner A. M., Bruckner J. B. Elementary Real Analysis.—Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall International, 2001.—xv+735 p.
 156. Thomson H. B. Taylor's theorem with the integral remainder under very weak differentiability assumptions // Austral. Math. Soc. Gazette.—1985.—Vol. 12.—P. 1–6.
 157. Tineo A. A generalization of Rolle's theorem and an application to a nonlinear equation // J. Austral. Math. Soc. Ser. A.—1989.—Vol. 46, № 3.—P. 395–401.
 158. Tiriyaki A., Çakmak D. Sahoo- and Wayment-type integral mean value theorems // Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.—2010.—Vol. 41, № 4.—P. 565–573.
 159. Trif T. Asymptotic behavior of intermediate points in certain mean value theorems // J. Math. Inequal.—2008.—Vol. 2, № 2.—P. 151–161.
 160. Trokhimchuk Yu. Yu. To the mean-value theorem // J. Math. Sci.—New York, 2013.—Vol. 188, № 2.—P. 128–145.
 161. Trujillo J. J., Rivero M., Bonilla B. On a Riemann-Liouville generalized Taylor's formula // J. Math. Anal. Appl.—1999.—Vol. 231, № 1.—P. 255–265.
 162. Wachnicki E. Une variante du théorème de Cauchy de la valeur moyenne // Demonstratio Math.—2000.—Vol. 33, № 4.—P. 737–740.
 163. Wayment S. G. An integral mean value theorem // Math. Gazette.—1970.—Vol. 54, № 389.—P. 300–301.
 164. Widder D. V. A general mean-value theorem // Trans. Amer. Math. Soc.—1924.—Vol. 26, № 3.—P. 385–394.
 165. Witula R., Hetmaniok E., Słota D. A stronger version of the second mean value theorem for integrals // Comput. Math. Appl.—2012.—Vol. 64, № 6.—P. 1612–1615.
 166. Xu Aimin, Cui Feng, Hu Zhicheng. Asymptotic behavior of intermediate points in the differential mean value theorem of divided differences with repetitions // J. Math. Anal. Appl.—2010.—Vol. 365, № 1.—P. 358–362.
 167. Young W. H. On multiple integration by parts and the second theorem of the mean // Proc. London Math. Soc. (2).—1917.—Vol. 16.—P. 273–293.
 168. Zalcman L. Mean values and differential equations // Israel J. Math.—1973.—Vol. 14.—P. 339–352.
 169. Zhang Bao-lin. A note on the mean value theorem for integrals // Amer. Math. Monthly.—1997.—Vol. 104, № 6.—P. 561–562.
 170. Zhang Zhi-Hua, Wu Yu-Dong, Srivastava H. M. Generalized Vandermonde determinants and mean values // Appl. Math. Comput.—2008.—Vol. 202, № 1.—P. 300–310.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Гипотеза В. К. Ионина, 31, 33, 38, 40

— вторая, 43

Интегральное неравенство с отклоняющимся аргументом, 85

Интегральное уравнение с отклоняющимся аргументом, 87

Многочлен,

— Лагранжа, 109

— Ньютона, 109

— Эрмита, 110

Неравенство Гёльдера, 10, 70

Оператор,

— со знакопеременным ядром, 99

— с простым усредняющим ядром, 80

— с регулярным ядром, 78

— с усредняющим ядром, 72

Остаточный член в формуле Тейлора, 20

— в интегральной форме, 26

— в форме Д'Оканя, 25

— в форме Коши, 24

— в форме Лагранжа, 24, 128

— в форме Пеано, 20

— в форме Шлемильха — Роша, 23

Параметризация кривой,

— натуральная, 176, 178, 179, 184

Предел,

— существенный, 57

— — верхний, 57

— — нижний, 57

Производные Пеано, 21

Разделенная разность, 105, 108, 121, 123

Симметризация Шварца, 115

Теорема,

— Б. Леви, 71

— Больцано — Коши, 9

— Бонне, 18

— Витали, 11, 41, 68

— вторая интегральная о среднем, 17

-
- Г. Брунна, 115
 - Данжуа — Юнга — Сакса, 68
 - Дарбу, 10, 17, 26, 44, 84, 125
 - — обобщенная, 38, 39
 - Иверсена, 92, 93
 - Коши, 15, 23, 27, 158
 - Лагранжа, 12–14, 17, 19, 24, 26, 34, 37, 50, 159
 - — обобщенная, 38
 - о среднем,
 - — многомерная, 94
 - — топологическая, 27
 - Пеано, 24
 - — обобщенная, 165
 - первая интегральная о среднем, 15, 57, 159
 - Помпею, 28
 - Ролля, 12, 13, 25, 144, 166, 169
 - Ферма, 12
 - Флетта, 28
 - Шварца, 25, 110, 116, 123
 - Эрмита — Геноччи, 111
 - Точка,
 - касания, 140, 142
 - компланарности, 167
 - Лагранжа, 43, 48, 82
 - опорная, 137, 138, 142
 - Форма Пеано для разделенной разности**, 113
 - Формула**,
 - интерполяционная,
 - — Лагранжа, 109, 110
 - — Ньютона, 109
 - — Эрмита, 110
 - Тейлора, 18, 82, 128
 - — локальная, 19
 - Функция**,
 - абсолютно непрерывная, 11
 - степенная усеченная, 112
 - Ядро Пеано**, 112–114, 116, 120, 121
 - B*-сплайн, 112, 115

СПИСОК ИЛЛЮСТРАЦИЙ

1.1.	Геометрический смысл теоремы Лагранжа	13
1.2.	Графики многочленов Тейлора $x \mapsto T_{n,f,x_0}(x)$ при $n = 0, 1, 2, 3$ для функции $f(x) = \exp(x)$ в окрестности точки $x_0 = 0$	20
2.1.	Определение величины $\xi(x)$ для различных функций ...	32
2.2.	Уменьшение области интегрирования	35
7.1.	Определение величин $D(t)$ и $DS(t)$ для кривой	139
7.2.	Функции $\theta = \theta_{\max}(\tau)$ и $\theta = \theta_{\min}(\tau)$ для $l = 0, 8$ и $m = 0, 81$	170

Научное издание

Серия

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОНОГРАФИЯ

Выпуск 9

Никоноров Юрий Геннадьевич

**АСИМПТОТИКА ТОЧЕК
СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ**

Ответственный редактор *А. В. Абанин*

Редакторы серии: *Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев*

*Утверждено к печати Ученым советом
Южного математического института
Владикавказского научного центра
Российской академии наук*

Компьютерная верстка: *М. У. Вазагаева*

Зав. редакцией: *В. В. Кибизова*

Подписано в печать 15.05.2015.
Формат бумаги $60 \times 84^{1/16}$. Усл. п. л. 11,63.
Тираж 200 экз. Заказ № 112.

Южный математический институт ВНЦ РАН
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано в ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

ISBN 978-5-904695-33-0



9 785904 695330