УДК 517.98 Дата поступления 11 января 2009 г.

Басаева Е. К., Кусраев А. Г., Плиев М. А., Табуев С. Н. Некоторые классы нелинейных операторов в векторных решетках.—Владикавказ, 2009.—47 с. — (Препринт / ЮМИ ВНЦ РАН РСО-А; № 2).

Работа посвящена исследованию порядковых свойств и построению аналитического представления некоторых классов нелинейных (билинейных, ортогонально аддитивных, сублинейных, квазилинейных и т.п.) мажорируемых операторов в функциональных пространствах, а также их субдифференциалов, с приложениями к анализу многоцелевых экстремальных задач.

В первой главе изучаются порядковые свойства билинейных операторов в векторных решетках. Построено аналитическое представление трех классов билинейных операторов: 1) орторегулярных операторов, определенных на декартовом произведении решеток непрерывных функций на компакте, 2) порядково ограниченных билинейных операторов, сохраняющих дизъюнктность, и 3) операторов, абсолютно непрерывных относительно билинейного оператора Магарам. Получены новые результаты о продолжении положительных билинейных операторов и найдена характеризация крайних точек в множестве всех положительных продолжений положительного билинейного оператора. Доказано, что порядково ограниченный ортосимметричный билинейный оператор симметричен и имеет ограниченную векторную вариацию. Установлены аналоги теоремы Радона — Никодима и теоремы Хана о разложении для орторегулярных билинейных операторов. Найдены также формулы проектирования положительного билинейного оператора на различные полосы.

Во второй главе изучаются сублинейные операторы и их субдифференциалы. Для сублинейных операторов со значениями в упорядоченном векторном пространстве, содержащем булеву алгебру несобственных элементов, получены основные формулы субдифференциального исчисления. При помощи векторной теоремы о биполяре получены необходимые условия экстремума в векторнозначной квазидифференцируемой задаче с ограничениями типа неравенства при выполнении ослабленного условия квазирегулярности. Найдено аналитическое описание субдифференциала сублинейного интегрального оператора, определенного на пространстве сечений измеримого банахова расслоения.

Третья глава посвящена изучению мажорируемых ортогонально аддитивных операторов. Получены различные формулы порядкового проектирования мажорируемых и положительных операторов Урысона. Установлена непрерывность по норме слабого интегрального оператора Урысона. Даны достаточные условия различных типов компактности мажорируемого оператора Урысона, формулируемые в смешанных терминах порядка и нормы. Построены формулы порядкового исчисления для биоператоров Урысона.

Библиогр. 88.

Received January 11, 2009

Basaeva E. K., Kusraev A. G., Pliev M. A., Tabuev S. N. Some Classes Nonlinear Operators in Vector Lattices.—Vladikavkaz, 2009.—47 p. — (Preprint / SMI VSC RAS & RSO-A; № 2).

This work is devoted to order properties and analytic representation of some classes of nonlinear operators (bilinear, orthogonally additive, sublinear etc.) in vector lattices, as well as subdifferentials with applications to multicriteria optimization problems.

In Chapter 2 some structural properties of bilinear operators in vector lattices are considered. An analytic representation for the following three classes of bilinear operators is found: 1) orthoregular bilinear operators defined on Cartesian product of lattices of continuous functions on compact spaces, 2) disjointness preserving bilinear operators, and 3) operators absolutely continuous with respect to bilinear Maharam operator. Some new results about extension of positive bilinear operators are also obtained and a characterization of extreme points of the convex set of all positive extensions of a positive bilinear operator is established. It is proved that on order bounded orthosymmetric bilinear operator is symmetric and is of order bounded variation. A Radon–Nikodým type theorem and Hahn decomposition theorem for orthosymmetric bilinear operators are established. Explicit formulas for projections of a positive bilinear operator onto different bands are also derived.

Chapter 2 deals with sublinear operators and their subdifferentials. In convex analysis we are often driven with necessity to studying convex operators that act into Dedekind complete vector lattice with a Boolean algebra of improper elements. In this class of operators explicit rules for calculation of the Young-Fenchel transform or the subdifferential of a composite mapping are established. An explicit description of subdifferential of a sublinear operator defined on a spaces of measurable sections of a measurable Banach bundle is also found. Vector valued bipolar theorem is applied to obtain necessary optimality conditions in multicriteria constraint optimization problem with quasidifferentiable date under the week quasi-regularity condition.

In Chapter 4 general properties of dominated orthogonally additive operators are studied. Different projection formulas for a majorizable Uryson operator are obtained. It is proved that a week integral Uryson operator is norm continuous. Sufficient conditions under which an abstract Uryson operator is compact in different mixed terms of order and topology are formulated. Order calculus for abstract Uryson bioperators is also developed.

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ[1]

Е. К. Басаева, А. Г. Кусраев, М. А. Плиев, С. Н. Табуев

Введение

Работа посвящена исследованию порядковых свойств некоторых классов нелинейных мажорируемых операторов в векторных решетках. Основное внимание сосредоточено на трех темах: строение и аналитическое представление положительных билинейных операторов; субдифференциалы выпуклых операторов с приложениями к анализу многоцелевых экстремальных задач; непрерывность, компактность и интегральная представимость ортогонально аддитивных операторов.

Цель публикации — дать обзор основных результатов, полученных авторским коллективом в последние три-четыре года. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00622.

Первая глава посвящена изучению порядковых свойств билинейных операторов в векторных решетках. Это направление возникло более полувека тому назад. Первая публикация появилась в 1953 году и принадлежала Х. Накано [77]. Однако эта работа не привлекала внимания специалистов и новые продвижения были достигнуты лишь в 1970-х годах в работах Д. Фремлина [60, 61], Г. Виттстока [87, 88], Р. Кристеску [57] и А. Г. Кусраева [9]. Затем вновь в течение почти двадцати лет билинейные операторы как самостоятельный объект исследования выпали из круга активно разрабатываемых разделов теории операторов в векторных решетках. Впрочем, стоит отметить, что различные частные случаи (как, например, билинейные функционалы, умножение в решеточно упорядоченной алгебре, различные тензорные произведения) время от времени изучались разными авторами, см., например, [79, 80]. Подробнее история этого вопроса и состояние предмета отражены в обзорах [19, 26, 46].

С начала 2000-х годов наблюдается возрастающий интерес к порядковым свойствам билинейных операторов. В этот период появились новые мотивации, новые объекты и методы исследования, новые взаимосвязи с другими разделами теории векторных решеток и положительных операторов. Этот всплеск начался с серии работ Х. Баскеса и А. ван Ройя [49, 51, 52, 53, 54] и продолжается по сей день [14, 17, 23, 24, 26, 37, 41, 42, 43, 46, 47, 62, 66, 67, 68, 69, 78].

В первой главе представлены следующие результаты. Доказаны новые теоремы о продолжении положительных билинейных операторов и найдена характеризация крайних точек в множестве всех положительных продолжений положительного билинейного оператора (1.2). Показано, что в классе ортосимметричных билинейных операторов свойство ограниченности порядковой вариации равносильно порядковой ограниченности и, в случае порядковой полноты решетки образов, построено удобное порядковое исчисление для орторегулярных билинейных операторов (1.3). Исследован класс билинейных операторов, для которых имеют место варианты теорем Радона — Никодима, Накано и Хана (1.4). Изучены билинейные операторы, сохраняющие дизъюнктность, и найдены условия их мультипликативной представимости (1.5). Найдены формулы проектирования положительного билинейного оператора на полосы, порожденные семейством положительных билинейных операторов, решеточным биморфизмом на полосу порядково непрерывных билинейных операторов (1.6).

Во второй главе изучаются выпуклые и сублинейные операторы и их субдифференциалы. В различных вопросах выпуклого анализа естественно появляются операторы, действующие

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00622.

в упорядоченные векторные пространства, см. [20]. Среди возникающих при этом проблем центральное место занимает задача нахождения явных правил для вычисления преобразований Юнга — Фенхеля или субдифференциалов сложных отображений. Решение такой задачи и составляет основной предмет субдифференциального исчисления.

Важнейший случай выпуклых операторов представляется разработанным уже столь тщательно, что можно говорить о завершении определенного этапа теории субдифференциалов. Исследования настоящего времени ведутся главным образом в направлениях, связанных с поиском подходящих локальных аппроксимаций к произвольному не обязательно выпуклому оператору. При этом стоит отметить, что основные технические приемы здесь также существенно опираются на субдифференциалы выпуклых операторов.

Во второй главе представлены следующие результаты. Для выпуклых операторов со значениями в упорядоченном векторном пространстве, содержащем булеву алгебру несобственных элементов, получены основные формулы субдифференциального исчисления (2.1). При помощи векторной теоремы о биполяре получены необходимые условия экстремума в векторнозначной квазидифференцируемой задаче с ограничениями типа неравенства при выполнении ослабленного условия квазирегулярности (2.2). Найдено аналитическое описание субдифференциала сублинейного интегрального оператора, определенного на пространстве сечений измеримого банахова расслоения (2.3).

Третья глава посвящена изучению мажорируемых ортогонально аддитивных операторов. Несмотря на то, что теория линейных мажорируемых операторов достаточно хорошо разработана и имеет большой круг приложений (см. [11]), порядковые свойства ортогонально аддитивных операторов изучены совершенно недостаточно.

В конце 1960-х годов Л. Древновским и В. Орличем был найден критерий интегральной представимости нелинейного, ортогонально аддитивного функционала, заданного на идеальном функциональном пространстве [58, 59]. В дальнейшем С. де Леоном и Ж. Мазоном этот результат был распространен на операторы, действующие в идеальных пространствах [75, 76, 83]. Привлекая технику мажорации, А. Г. Кусраев и М. А. Плиев получили критерий интегральной представимости для мажорируемых ортогонально аддитивных операторов, действующих в пространствах измеримых вектор-функций и, тем самым, обобщили результаты Древновского, Орлича и Мазона, де Леона [58, 59, 75, 76].

Вместе с тем детальное изучение структуры пространства мажорируемых ортогонально аддитивных операторов до сих пор не проведено. Это касается общего вида различных полос в пространстве операторов, формул проектирования на полосы, порожденные тем или иным семейством операторов и т. п. Отметим также, что возникающие в приложениях функциональные пространства, как правило, наделены смешанными порядковыми и топологическими свойствами случае и в этом случае необходимо изучать такие свойства оператора, как непрерывность, компактность и т. д. Некоторые интегральные уравнения, возникающие в приложениях не сводятся к классическим операторам Урысона и Гаммерштейна и требуют привлечения аппарата ортогонально аддитивных операторов, зависящих от нескольких переменных. Общая теория таких операторов в настоящее время также отсутствует.

В третьей главе представлены следующие результаты. Получены различные формулы порядкового проектирования мажорируемых и положительных операторов Урысона (3.2). Установлена непрерывность по норме слабого интегрального оператора Урысона и найден критерий смешанной непрерывности мажорируемого оператора Урысона (3.3). Даны достаточные условия различных типов компактности мажорируемого оператора Урысона (3.4). Построены формулы порядкового исчисления для биоператоров Урысона (3.5). Результаты, представленные в последнем параграфе публикуются впервые.

Необходимые сведения из теории векторных решеток и положительных операторов, а также из теории измеримых банаховых расслоений можно найти в книгах [11] и [38]. Все рассматриваемые в этой работе векторные решетки предполагаются вещественными и архимедовыми. Символ $:=$ используется в тех случаях, когда равенство понимается как определение; $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ обозначаем множества натуральных и вещественных чисел соответственно. Векторную решетку, полную относительно сходимости с регулятором, будем назвать для краткости *равномерно полной*.

Глава 1. Билинейные операторы

1.1. Вспомогательные сведения

В этом параграфе вводятся классы билинейных операторов, выделяемые разными порядковыми свойствами и формулируются некоторые полезные в дальнейшем факты. Подробнее этот предмет представлен в обзорах [26, 46].

1.1.1. Пусть E, F и G — векторные решетки. Билинейный оператор $b : E \times F \to G$ называют *положительным,* если $b(x,y) \geqslant 0$ для всех $x \in E_+$ и $y \in F_+$ и *регулярным,* если его можно представить в виде разности двух положительных билинейных операторов. Обозначим символами $BL_r(E,F;G)$ и $BL_+(E,F;G)$ соответственно множества всех регулярных и положительных билинейных операторов из $E \times F$ в G. Для произвольного положительного оператора b выполняется $|b(x,y)| \leqslant b(|x|,|y|)$ $(x \in E,\, y \in F)$.

1.1.2. Обозначим символом $\mathrm{Prt}(x)$ множество всех *разбиений* элемента $x \in E_+$, т. е. множество всех конечных последовательностей $(x_1,\dots,x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, элементов E_+ таких, что $x_1 + \dots + x_n = x$. Будем говорить, что $b : E \times F \to G$ — билинейный оператор *порядково ограниченной вариации,* если для любых $x \in E_+$ и $y \in F_+$ множество $\Sigma b[x;y]$ всех сумм вида $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{m}|b(x_k,y_l)|$, где $(x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{Prt}(x)$ и $(y_1,\dots,y_m) \in \mathrm{Prt}(y)$, порядково ограничено в G. Множество всех билинейных операторов порядково ограниченной вариации из $E \times F$ в G, обозначаемое символом $BL_{bv}(E,F;G)$, представляет собой упорядоченное векторное пространство с положительным конусом $BL_+(E,F;G)$, т. е. $b_1 \geqslant b_2$ означает, что оператор $b_1 - b_2$ положителен. Очевидно, что $BL_r(E,F;G) \subset BL_{bv}(E,F;G)$, но обратное включение может нарушаться. Пространство $BL_r(E,F;G)$ всегда рассматривается с индуцированным порядком. Билинейные операторы порядково ограниченной вариации были введены в [77], а затем исследованы в [54], см. также обзор [46].

Если G — пространство Канторовича, то $BL_r(E,F;G) = BL_{bv}(E,F;G)$ и это упорядоченное векторное пространство также есть пространство Канторовича [54]. В частности, каждый регулярный билинейный оператор $b \in BL_r(E,F;G)$ имеет модуль $|b|$, причем

$$|b|(x,y) = \sup \Sigma b[x;y] \quad (0 \leqslant x \in E,\, 0 \leqslant y \in F),$$
$$|b(x,y)| \leqslant |b|(|x|,|y|) \quad (x \in E,\, y \in F).$$

В случае функционалов ($G = \mathbb{R}$) эта формула приведена в [61, 1I]. Другие формулы *порядкового исчисления* регулярных билинейных операторов см. в [23].

1.1.3. Билинейный оператор $b : E \times F \to G$ называют *решеточным биморфизмом,* если операторы $b(e,\cdot) : y \mapsto b(e,y)$ $(y \in F)$ и $b(\cdot,f) : x \mapsto b(x,f)$ $(x \in E)$ являются решеточными гомоморфизмами для любых $e \in E_+$ и $f \in F_+$ [60]. Очевидно, что решеточный биморфизм положителен. Следующая характеризация решеточных биморфизмов получена в [79].

Для положительного билинейного оператора b равносильны утверждения:
(1) *b — решеточный биморфизм;*
(2) *$|b(x,y)| = b(|x|,|y|)$ для всех $x \in E$ и $y \in F$;*
(3) *если для $x,u \in E$ и $y,v \in F$ выполняется $x \wedge u = 0$ и $y \wedge v = 0$, то $b(x,y) \wedge b(u,v) = 0$.*

1.1.4. Д. Фремлин построил тензорное произведение $E \,\bar{\otimes}\, F$ двух архимедовых векторных решеток E и F в [60, теорема 4.2]. Различные подходы к этой конструкции см. [63, 79]. Если E_0 и F_0 — векторные подрешетки E и F соответственно, то тензорное произведение $E_0 \,\bar{\otimes}\, F_0$ изоморфно векторной подрешетке в $E \,\bar{\otimes}\, F$, порожденной множеством $E_0 \otimes F_0$. Тем самым $E_0 \,\bar{\otimes}\, F_0$ можно считать векторной подрешеткой в $E \,\bar{\otimes}\, F$ [60, следствия 4.4 и 4.5].

Д. Фремлин [55, теорема 5.3] доказал также следующее важное универсальное свойство тензорного произведения $E \,\bar{\otimes}\, F$: *если G — равномерно полная векторная решетка, то для любого положительного билинейного оператора $b : E \times F \to G$ существует единственный положительный линейный оператор $T : E \,\bar{\otimes}\, F \to G$ такой, что $b = T\otimes$.*

Пусть $L_r(H,G)$ и $L^{\sim}(H,G)$ обозначают пространства соответственно всех линейных регулярных операторов и всех линейных порядково ограниченных операторов из H в G.

1.1.5. Теорема. *Пусть E, F и G — векторные решетки, причем G равномерно полно. Тогда отображение $T \mapsto T\otimes$ представляет собой изоморфизм следующих упорядоченных векторных пространств:*

(1) $L_r(E \bar{\otimes} F, G)$ *и* $BL_r(E,F;G)$*;*

(2) $L^{\sim}(E \bar{\otimes} F, G)$ *и* $BL_{bv}(E,F;G)$.

Первое утверждение немедленно следует из упомянутого в 1.1.4 универсального свойства тензорного произведения; второе утверждение было установлено в [54].

Итак, фремлиновское тензорное произведение векторных решеток позволяет некоторые известные результаты о регулярных или порядково ограниченных линейных операторах переводить в новые результаты о регулярных билинейных операторах или же билинейных операторах порядково ограниченной вариации соответственно. Этот и некоторые другие аспекты теории билинейных операторов в векторных решетках см. в [46]. Относительно мажорируемых билинейных операторов в решеточно нормированных пространствах, а также подходящей конструкции тензорного произведения см. [26].

1.1.6. Несмотря на упомянутое выше универсальное свойство, тензорное произведение по Фремлину имеет существенный недостаток: изоморфизмы из 1.1.5 не сохраняют, вообще говоря, порядковую непрерывность. Для порядково непрерывного $T \in L_r(E \bar{\otimes} F, G)$ билинейный оператор $T\otimes \in BL_r(E,F;G)$ будет, разумеется, порядково непрерывным, но обратное утверждение неверно. Соответствующий контрпример можно извлечь из [61], см. [68].

1.1.7. Билинейный оператор $b : E \times E \to G$ называют *ортосимметричным,* если $x \wedge y = 0$ влечет $b(x,y) = 0$, каковы бы ни были $x, y \in E$ [49]. Разность двух положительных ортосимметричных билинейных операторов называют *орторегуярным* [17, 47]. Обозначим символом $BL_{or}(E;G)$ пространство всех орторегулярных билинейных операторов из $E \times E$ в G, упорядоченное конусом положительных ортосимметричных билинейных операторов. Напомним, что оператор b называют *симметричным* (*антисимметричным*), если $b(x,y) = b(y,x)$ ($b(x,y) = -b(y,x)$) для всех $x, y \in E$, *положительно полуопределенным,* если $b(x,x) \geqslant 0$ для любого $x \in E$ и *положительно определенным,* если он положительно полуопределен и $b(x,x) = 0$ влечет $x = 0$.

В качестве примера ортосимметричного билинейного оператора укажем умножение $(x,y) \mapsto xy$ $(x, y \in A)$ почти f-алгебры A, так как по определению *почти f-алгебра* — решеточно упорядоченная алгебра, в которой операция умножения представляет собой ортосимметричный билинейный оператор [6, 39]. Обзор различных аспектов теории f-алгебр [44, 45].

1.1.8. Обозначим символом $BL_o^{\sim}(E;G)$ упорядоченное векторное пространство всех ортосимметричных порядково ограниченных билинейных операторов из $E \times E$ в G с порядком, индуцированным конусом положительных ортосимметричных билинейных операторов. Положим $BL_{obv}(E;G) := BL_{bv}(E;G) \cap BL_o^{\sim}(E;G)$. Тогда $BL_{or}(E;G) \subset BL_{obv}(E;G) \subset BL_o^{\sim}(E;G)$. Если G порядково полна, то эти три пространства совпадают и служат полосой в $BL_r(E,E;G)$. Тем самым, каждый положительный билинейный оператор $b : E \times E \to G$ допускает единственное разложение $b = c + d$, где c ортосимметричен и нет ненулевого ортосимметричного положительного билинейного оператора, мажорируемого оператором d. В случае билинейных функционалов (т. е. $G = \mathbb{R}$) формула для вычисления ортосимметричного осколка c оператора b была получена в [62, теорема 3.2]; та же формула сохраняется и в общем случае [24].

Отметим следующее важное свойство ортосимметричных билинейных операторов.

1.1.9. Теорема [49]**.** *Пусть E и F — векторные решетки. Любой ортосимметричный положительный билинейный оператор из $E \times E$ в F является симметричным.*

В частности, всякая архимедова почти f-алгебра коммутативна [49]. Легко видеть, что ортосимметричный положительный билинейный оператор положительно полуопределен [62]. Для решеточных биморфизмов верно также и обратное [47]. Сформулируем теперь важное структурное свойство орторегулярных операторов.

1.1.10. Теорема [3, 17]**.** *Пусть E, F и G — векторные решетки, причем G равномерно полна. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to F$ — положительно определенный решеточный биморфизм и F_0 — векторная подрешетка в F, порожденная множеством $\{\langle x,y \rangle : x, y \in E\}$. Тогда для* *любого орторегулярного билинейного оператора* $b : E \times E \to G$ *существует единственный регулярный линейный оператор* $\Phi_b : F_0 \to G$ *такой, что*

$$b(x, y) = \Phi_b(\langle x, y\rangle) \quad (x, y \in E).$$

Соответствие $b \mapsto \Phi_b$ *осуществляет изоморфизм упорядоченных векторных пространств* $BL_{or}(E, G)$ *и* $L_r(F_0, G)$.

1.1.11. Пусть E — векторная решетка. Пару $(E^{\odot}, \odot)$ (или же $E^{\odot}$ для краткости) называют *квадратом* E, если $E^{\odot}$ — векторная решетка, $\odot : E \times E \to E^{\odot}$ — симметричный решеточный биморфизм (называемый *каноническим биморфизмом* квадрата) и для любого симметричного решеточного биморфизма $\phi : E \times E \to F$ со значениями в произвольной векторной решетке F существует единственный решеточный гомоморфизм $\Phi_\phi : E^{\odot} \to F$ такой, что $\Phi_\phi \circ \odot = \phi$. Это определение введено в [51]. Там же установлен следующий результат.

1.1.12. Теорема [51]**.** *Для произвольной векторной решетки* E *существует квадрат* $(E^{\odot}, \odot)$, *который единственен с точностью до изоморфизма в следующем смысле: если для некоторой векторной решетки* $E^{\circledcirc}$ *и симметричного решеточного биморфизма* $\circledcirc : E \times E \to E^{\circledcirc}$ *пара* $(E^{\circledcirc}, \circledcirc)$ *служит квадратом* E, *то существует решеточный изоморфизм* i *из* $E^{\odot}$ *на* $E^{\circledcirc}$ *такой, что* $i\odot = \circledcirc$ (*и, разумеется,* $i^{-1}\circledcirc = \odot$).

Нетрудно видеть, что канонический биморфизм является положительно определенным [47, теорема 2.1 (3)]. Поэтому можно в 1.1.10 взять $\langle \cdot, \cdot \rangle := \odot$, откуда получим следующий результат.

1.1.13. Теорема [47, 51]**.** *Пусть* E *и* G *— те же, что и в 1.1.12. Тогда для любого орторегулярного билинейного оператора* $b : E \times E \to G$ *существует единственный регулярный линейный оператор* $\Phi_b : E^{\odot} \to G$ *такой, что*

$$b(x, y) = \Phi_b(x \odot y) \quad (x, y \in E).$$

При этом соответствие $b \mapsto \Phi_b$ (*называемое линеаризацией посредством квадрата*) *осуществляет изоморфизм упорядоченных векторных пространств* $BL_{or}(E, G)$ *и* $L_r(E^{\odot}, G)$.

1.1.14. По аналогии с 1.1.11 можно ввести понятие s-той степени векторной решетки, используя решеточные s-морфизмы вместо решеточных биморфизмов (2-морфизмов), см. [42]. При этом имеют место варианты теорем 1.1.12 и 1.1.13 для s-линейных операторов [41, 42, 46].

1.2. Продолжение билинейных операторов

Здесь приведем некоторые результаты из работ [25] и [47].

1.2.1. Положительный билинейный оператор, определенный на декартовом произведении мажорируемых подрешеток двух векторных решеток и принимающий значения из пространства Канторовича, допускает продолжение до положительного билинейного оператора, определенного на декартовом произведении объемлющих векторных решеток. Этот факт впервые был получен в [9, теорема 3], а затем в [63] (см. также [26, 46]). Если же данный оператор ортосимметричен, то возникает вопрос о возможности его продолжения до положительного ортосимметричного билинейного оператора.

Положительное решение было получено в [47]. Достаточно применить теорему 1.1.12 и следующее простое следствие теоремы 1.1.10: *Если* E_0 *— подрешетка* E, *то ее квадрат* $E_0^{\odot}$ *и канонический биморфизм* $\circledcirc$ *можно рассматривать соответственно как подрешетку* $E^{\odot}$ *и ограничение* $\odot$ *на* $E_0 \times E_0$; *более того, если* E_0 *— мажорируемая подрешетка* E, *то и* $E_0^{\odot}$ *— мажорируемая подрешетка* $E^{\odot}$.

1.2.2. Теорема [47]**.** *Пусть* E_0 *— мажорируемая подрешетка в векторной решетке* E *и* G *— порядково полная векторная решетка. Тогда всякий положительный ортосимметричный билинейный оператор* $b_0 : E_0 \times E_0 \to G$ *допускает положительное ортосимметричное билинейное продолжение* $b : E \times E \to G$.

1.2.3. Для формулировки следующего результата нам необходимо следующее утверждение: *Если* E_0 *— мажорируемая подрешетка векторной решетки* E *и* G *— порядково полная векторная решетка, то существует порядково непрерывный решеточный гомоморфизм*

ε' из $L_r(E_0,G)$ в $L_r(E,G)$ такой, что $\varrho' \circ \varepsilon'$ — тождественный оператор на $L_r(E_0,G)$, где $\rho' : L_r(E,G) \to L_r(E_0,G)$ — оператор ограничения $S \mapsto S|_{E_0}$.

Этот факт, утверждающий существование порядково непрерывного «одновременного продолжения» линейных регулярных операторов с мажорируемой подрешетки на всю векторную решетку, был установлен в [9, теорема 3], см. также [11, теорема 3.4.11].

1.2.4. Теорема [14, 47]. *Пусть E_0, E и G — те же, что и в 1.2.1. Тогда существует «одновременное продолжение» орторегулярных билинейных операторов с E_0 на все E, т. е. существует порядково непрерывный решеточный гомоморфизм $\varepsilon : BL_{or}(E_0,G) \to BL_{or}(E,G)$ такой, что $\rho \circ \varepsilon$ — тождественный оператор на $BL_{or}(E_0,G)$, где $\rho : BL_{or}(E,G) \to BL_{or}(E_0,G)$ обозначает оператор ограничения $b \mapsto b|_{E_0 \times E_0}$.*

Справедливость этого утверждения сразу видна из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
L_r(E_0,G) \arrow[r, "\varepsilon'"] & L_r(E,G) \arrow[r, "\rho'"] \arrow[d, "\psi"'] & L_r(E_0,G) \arrow[d, "\psi_0"] \\
BL_{or}(E_0,G) \arrow[u, "\psi_0^{-1}"] \arrow[r, dashed, "\varepsilon"'] & BL_{or}(E,G) \arrow[r, "\rho"'] & BL_{or}(E_0,G)
\end{tikzcd}$$

где $\varepsilon' : L_r(E_0,G) \to L_r(E,G)$ — оператор одновременного продолжения из 1.13, $\psi_0 : S_0 \mapsto S_0 \odot$ $(S_0 \in L_r(E_0,G))$ и $\psi : S \mapsto S \odot$ $(S \in L_r(E,G))$. В самом деле, правый квадрат диаграммы коммутативен, а с оператором $\varepsilon := \psi \circ \varepsilon' \circ \psi_0^{-1}$ коммутативна вся диаграмма. В частности, $\rho \circ \varepsilon = Id$, где Id — тождественный оператор в $BL_{or}(E_0,G)$.

1.2.5. Обозначим символами $\epsilon^+(b)$ и $\epsilon^+(\Phi_b)$ соответственно множества всех положительных ортосимметричных билинейных продолжений b на все $E \times E$ и множество всех положительных линейных продолжений Φ_b на все $E^{\odot}$. Отображение $b \mapsto \Phi_b$ из 1.1.13 служит аффинной биекцией из $\epsilon^+(b)$ на $\epsilon^+(\Phi_b)$, следовательно, сохраняет крайние точки. Однако крайние точки множества $\epsilon^+(\Phi_b)$ являются решеточными гомоморфизмами [48], см. также [11, теорема 3.3.9 (3)], следовательно, крайние точки множества $\epsilon^+(b)$ — симметричные решеточные биморфизмы. Тем самым, приходим к такому результату.

1.2.6. Теорема [47]. *Если E_0 — мажорируемая подрешетка векторной решетки E и G — пространство Канторовича, то каждый симметричный решеточный биморфизм $b_0 : E_0 \times E_0 \to G$ допускает продолжение до симметричного решеточного биморфизма $b : E \times E \to G$.*

1.2.7. В [9, теорема 4] было установлено, что регулярный порядково непрерывный билинейный оператор b, определенный на декартовом произведении векторных решеток E и F, принимающий значения в пространстве Канторовича, допускает и притом единственное регулярное порядково непрерывное билинейное продолжение $\widehat{b}$ на декартово произведение порядковых пополнений $\widehat{E}$ и $\widehat{F}$ (см. также [68, приложение]). Легко понять, что если $E = F$ и b ортосимметричен, то и $\widehat{b}$ будет ортосимметричным.

1.2.8. Пусть E_1 и E_2 — подрешетки векторной решетки E. Билинейный оператор $b : E_1 \times E_2 \to E$ называют *раздельно сохраняющим полосы*, если $u \wedge b(x,y) = 0$ для $x \in E_1$, $y \in E_2$, $u \in E$, при условии, что либо $u \perp x$, либо $u \perp y$. Тем самым, b является раздельно сохраняющим полосы, если отображения $b(\cdot, e_2)$ и $b(e_1, \cdot)$ сохраняют полосы для всех $e_i \in E_i$ $(i = 1,2)$ или, эквивалентно, если $b((L \cap E_1) \times E) \subset L$ и $b(E \times (L \cap E_2)) \subset L$ для каждой полосы L в E.

Легко видеть, что b раздельно сохраняет полосы в том, и только в том случае, когда выполняется $b(x,y) \in \{x\}^{\perp\perp} \cap \{y\}^{\perp\perp}$ для всех $x \in E_1$ и $y \in E_2$. Следовательно, в случае $E_1 = E_2$ любой раздельно сохраняющий полосы билинейный оператор ортосимметричен, а порядково ограниченный раздельно сохраняющий полосы билинейный оператор симметричен. Нам потребуется следующий результат о продолжении, установленный Х. Баскесом и А. ван Ройем.

1.2.9. Теорема [55]. *Если E_0 — мажорирующая подрешетка равномерно полной векторной решетки E, то любой ортоморфизм $S_0 : E_0 \to E$ продолжается единственным образом до ортоморфизма $S : E \to E$.*

1.2.10. Теорема [25]. *Если E_1 и E_2 — мажорирующие подрешетки равномерно полной векторной решетки E, то каждый порядково ограниченный билинейный оператор $b_0 : E_1 \times E_2 \to E$, раздельно сохраняющий полосы, допускает единственное порядково ограниченное билинейное продолжение $b : E \times E \to E$, также раздельно сохраняющее полосы.*

1.2.11. Далее представим результат о продолжении порядково σ-непрерывных билинейных операторов. Векторная решетка F называется *слабо σ-дистрибутивной,* если для всякой порядково ограниченной двойной последовательности $(f_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ в F такой, что $(f_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ убывает и o-сходится к нулю для каждого $m \in \mathbb{N}$, выполняется

$$\inf\left\{\sup_{m\in\mathbb{N}} f_{m,\varphi(m)} :\ \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right\} = 0.$$

Множество $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ всех функций $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ рассматривается с естественным поточечным порядком: $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ \varphi_1(n) \leqslant \varphi_2(n)$. Напомним, что $\mathfrak{C}(f)$ обозначает булеву алгебру осколков элемента $f \in F_+$.

1.2.12. *Рассмотрим положительный билинейный оператор b из $E \times E$ в F, где E — подрешетка векторной решетки G. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$b(e,\cdot)$ и $b(\cdot,e)$ секвенциально G-непрерывны для всех $e \in E_+$;*

(2) *$\inf_{n\in\mathbb{N}} b(x_n, y_n) = 0$ в F для любых убывающих последовательностей $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в E, если только $\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0$ и $\inf_{n\in\mathbb{N}} y_n = 0$ в G;*

(3) *$\inf_n b(x_n, x_n) = 0$ для любой убывающей последовательности (x_n) в E такой, что $\inf_n x_n = 0$ в G.*

$\lhd$ Простое доказательство аналогично [37]. $\rhd$

Будем говорить, что b *секвенциально G-непрерывно*, если выполнено любое (а тогда и все) из свойств (1)–(3).

1.2.13. Теорема [25]. *Пусть F и G — порядково σ-полные векторные решетки, причем F слабо σ-дистрибутивна. Пусть E — мажорирующая подрешетка G и $b :\ E \times E \to F$ — положительный секвенциально G-непрерывный ортосимметричный билинейный оператор. Тогда b имеет единственное продолжение до порядково σ-непрерывного ортосимметрического билинейного оператора b^σ, действующего из $E^\sigma \times E^\sigma$ в F. Более того, для любого $x \in E^\sigma$ справедлива формула*

$$b^\sigma(x,|x|) = \sup\left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} b(x_n,|x_n|) :\ (x_n) \subset E,\ x_n{\downarrow},\ \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \leqslant x\right\}.$$

$\lhd$ Схема доказательства была намечена в [68, 10.4]. $\rhd$

1.2.14. Используя те же соображения, что и в [68], можно получить описание крайних продолжений положительного ортосимметричного билинейного оператора. Пусть F и G — векторные решетки, E — векторная подрешетка G и $b : E \times E \to F$ — положительный ортосимметричный билинейный оператор. Обозначим символом $\mathscr{E}(b)$ множество всех положительных ортосимметричных билинейных продолжений b на все $G\times G$. Известно, что если E — мажорирующая подрешетка в G, то множество $\mathscr{E}(b)$ непусто [47, теорема 4.1]. Крайние точки множества $\mathscr{E}(b)$ называют *крайними продолжениями* оператора b. Характеризация крайних продолжений линейного положительного оператора дается известной теоремой Липецкого — Плахки — Томсена [11, теорема 2.7]: *если F порядково полна и $S \in L_+(G,F)$ продолжает $T \in L_+(E,F)$ с E на G, то S будет крайним продолжением оператора T тогда и только тогда, когда $\inf_{e\in E} S(|x+e|) = 0$ для любого $x \in G$.* Аналогичный результат верен и для ортосимметричных билинейных операторов.

Напомним некоторые обозначения. Для $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ положим $\theta_\alpha(t) = \operatorname{sgn}(t)t^\alpha$. Ясно, что θ_α — строго возрастающая биекция $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. Функция $\sigma_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, определяемая формулой $\sigma_\alpha(s,t) := \theta_\alpha^{-1}(\theta_\alpha(s)+\theta_\alpha(t))$, положительно однородна и непрерывна. Следовательно, в равномерно полной векторной решетке E корректно определен элемент $\sigma_\alpha(x,y)$ для любых $x, y \in E$, см. [51, 85]. Часто используют более выразительное обозначение $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} := \sigma_\alpha(x,y)$.

1.2.15. Теорема [25]. *Пусть E, F и G — векторные решетки, причем F порядково полна, E и G равномерно полны и E — подрешетка в G. Предположим, что множество $\mathscr{E}(b)$ непусто* *для некоторого положительного ортосимметричного билинейного оператора* $b : E \times E \to F$. *Тогда оператор* $\widehat{b} \in \mathscr{E}(b)$ *является крайним продолжением оператора* b *в том и только в том случае, когда*

$$\inf\{\widehat{b}(u,u) : \ u = (x^2 + e^2)^{\frac{1}{2}},\, e \in E\} = 0 \quad (x \in G).$$

$\triangleleft$ Вновь воспользуемся представлением $b = \Phi_b \odot$ из [47, теорема 3.1]. Пусть $b : E \times E \to F$ — положительный ортосимметричный билинейный оператор и $\widehat{b} \in \mathscr{E}(b)$. В силу [47, теорема 3.1] соответствие $b' \leftrightarrow \Phi_{b'}$ служит изоморфизмом между векторными решетками $BL_{or}(E;F)$ и $L^{\sim}(E^{\odot}, F)$, а также $BL_{or}(G;F)$ и $L^{\sim}(G^{\odot}, F)$. Кроме того, $\widehat{d}$ — продолжение d в том и только в том случае, когда $\Phi_{\widehat{d}}$ — продолжение Φ_d. Отсюда видно, что указанное соответствие осуществляет аффинную биекцию между множествами $\mathscr{E}(b)$ и $\mathscr{E}(\Phi_b)$, в частности, сохраняет крайние точки. Тем самым, $\widehat{b}$ — крайнее продолжение b тогда и только тогда, когда $\widehat{\Phi} := \Phi_{\widehat{b}}$ — крайнее продолжение Φ_b. Применим теперь упомянутую в 1.2.14 теорему Липецкого — Плахки — Томсена: $\widehat{b}$ будет крайним продолжением b лишь в том случае, если $\inf\{\widehat{\Phi}(|\tilde{x} + \tilde{e}|) : \tilde{e} \in E^{\odot}\} = 0$ для любого $\tilde{x} \in G^{\odot}$. Учитывая, что ι есть биекция E на $E^{\odot}$ и G на $G^{\odot}$ (см. [27, теорема 6.4 (1)]), можем переписать последнее условие в виде: $\inf\{\widehat{\Phi}(|\iota x + \iota e|) : e \in E\} = 0$ для любого $x \in G$. Остается заметить, что $\iota^{-1}(\iota x + \iota e) = (x^2 + e^2)^{\frac{1}{2}}$ и $(\widehat{\Phi} \circ \iota)(|u|) := \widehat{b}(|u|, |u|) = \widehat{b}(u, u)$ $(u \in E)$, см. [68, 6.1 и 6.2]. $\triangleright$

1.3. Орторегулярные билинейные операторы

В этом параграфе строится порядковое исчисление порядково ограниченных ортосимметричных билинейных операторов и устанавливается их важное свойство: они симметричны и имеют порядково ограниченную вариацию. Подробное изложение см. в [25].

1.3.1. Теорема [25]**.** *Пусть Q — компакт, а G — порядково полная векторная решетка. Для любого орторегулярного билинейного оператора $b : C(Q) \times C(Q) \to G$ существует единственная порядково ограниченная счетно аддитивная квазирегулярная G-значная борелевская мера $\nu := \nu_b$ на Q такая, что имеет место представление*

$$b(x,y) = \int\limits_Q x(t)y(t)\, d\nu(t) \quad (x, y \in C(Q)).$$

Соответствие $b \mapsto \nu_b$ является изоморфизмом упорядоченных векторных пространств $BL_{or}(C(Q); G)$ и $\mathrm{qca}(Q, G)$.

1.3.2. Тот факт, что положительный билинейный оператор на $C(Q) \times C(Q)$ со значениями в порядково полной векторной решетке G представляется интегралом по G-значной квазирегулярной борелевской мере на $Q \times Q$, показан в [60, следствие 3.6] при $G = \mathbb{R}$ и в [23, предложение 1.7] для произвольного G. Для ортосимметричного билинейного оператора соответствующая мера сосредоточена на диагонали, см. [62, пример 2.3] при $G = \mathbb{R}$ и [14, лемма 2] в общем случае. В приведенной форме результат 1.3.1 опубликован впервые в [25].

1.3.3. Теорема [25]. Пусть E и G — векторные решетки и $b : E \times E \to G$ — порядково ограниченный ортосимметричный билинейный оператор. Тогда b симметричен и имеет порядково ограниченную вариацию.

Из 1.3.1 следует, в частности, что любой орторегулярный билинейный оператор, действующий из $C(Q) \times C(Q)$ в порядково полную векторную решетку, симметричен. В некоторых публикациях по умолчанию принималось, что такой же результат верен для произвольных порядково ограниченных ортосимметичных билинейных операторов в общих векторных решетках, см., например, [47, 49]. Доказательство этого утверждения опубликовано в [25].

1.3.4. В силу теоремы 1.3.3 любой порядково ограниченный билинейный оператор $b : E \times E \to F$ симметричен, а потому допускает представление

$$b(x,y) = \frac{1}{2}\big[b(x+y, x+y) - b(x,x) - b(y,y)\big] \quad (x, y \in E).$$

Более того, $b(x,x) = b(|x|, |x|)$ для любого $x \in E$ и, следовательно, b может быть полностью восстановлен, если известны значения $b(x,x)$ для всех $x \in E_+$. Учитывая это наблюдение, приведем вариант порядкового исчисления для орторегулярных билинейных операторов. Для $x, e \in E_+$ обозначим: $\mathrm{DPrt}(x) := \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathrm{Prt}(x) : x_i \perp x_j \ (i \neq j)\}$ — множество всех дизъюнктных разбиений элемента x и $\mathfrak{E}(e) := \{x \in E : e \wedge (e - x) - 0\}$ — множество всех осколков элемента e. Следующий результат установлен в [25].

1.3.5. *Пусть E — векторная решетка с сильным свойством Фрейденталя, а G — порядково полная векторная решетка. Тогда для орторегулярных билинейных операторов $b, b_1, \dots, b_l \in BL_{or}(E; G)$ и для любых $x \in E$ выполняется:*

(1) $(b_1 \vee \dots \vee b_n)(x, x) = \sup \big\{ \sum_{i=1}^n b_i(x_i, |x|) : \ (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{DPrt}(|x|)\big\}$;

(2) $(b_1 \wedge \dots \wedge b_n)(x, x) = \inf \big\{ \sum_{i=1}^n b_i(x_i, |x|) : \ (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{DPrt}(|x|)\big\}$;

(3) $b^+(x, x) = \sup\{b(e, |x|) : e \in \mathfrak{E}(|x|)\}$;

(4) $b^-(x, x) = -\inf\{b(e, |x|) : e \in \mathfrak{E}(|x|)\} = \sup\{b(e, |x|) : -e \in \mathfrak{E}(|x|)\}$;

(5) $|b|(x, x) = \sup\{|b(e, |x|)| : |e| \in \mathfrak{E}(|x|)\}\}$.

Если $\mathscr{B}$ — порядково ограниченное множество в $BL_{or}(E; G)$, то для каждого $x \in E$ имеем

(6) $(\sup \mathscr{B})(x, x) = \sup \big\{ \sum_{i=1}^n b_i(x_i, |x|)\big\}$;

(7) $(\inf \mathscr{B})(x, x) = \inf \big\{ \sum_{i=1}^n b_i(x_i, |x|)\big\}$,

где супремум и инфимум берутся по всем $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{DPrt}(|x|)$, $b_1, \dots, b_n \in \mathscr{B}$ и $n \in \mathbb{N}$.

1.3.6. Теорема [25]. *Пусть E и G — векторные решетки, $b : E \times E \to G$ — ортосимметричный положительный билинейный оператор и $x, y, u, v \in E_+$. Если существует $e_0 \in E_+$ такой, что $e_0 \geqslant x + y + u + v$ и $u \wedge v$ содержится в e_0-равномерном замыкании $e_0\text{-cl}(E_{x \wedge y})$ главного идеала, порожденного элементом $x \wedge y$, то из $b(x, y) = 0$ следует $b(u, v) = 0$.*

$\lhd$ Допустим $e, x, y, u, v \in E_+$ удовлетворяют предположениям теоремы. Пусть E_0 — порядковый идеал E, порожденный e_0. Ограничение b_0 оператора b на $E_0 \times E_0$ является положительным ортосимметричным билинейным оператором из $E_0 \times E_0$ в G. По теореме Крейнов — Какутани мы можем рассматривать E_0 как равномерно замкнутую подрешетку в $C(Q)$ для некоторого компакта Q. Более того, e_0 можно считать функцией, тождественно равной единице на Q. Воспользуемся теперь существованием квадрата векторной решетки, см. [47, предложение 2.5] и [51, теорема 8]. Подберем подрешетку $F \subset C(Q)$ такую, что F — квадрат E_0 с умножением $C(Q)$ в качестве канонического биморфизма. Очевидно, $e_0 \in F$. По теореме [47, теорема 3.1] существует положительный линейный оператор $\Phi : F \to G$ такой, что $b_0(a, b) = \Phi(ab)$ $(a, b \in F)$.

Обозначим через $\overline{U}$ замыкание U в $C(Q)$. Тогда $\overline{E_a} = \{f \in C(Q) : (\forall\, t \in Q_a)\, f(t) = 0\}$, где $a \in E_+$, $Q_a := Q \setminus \{a > 0\}$ и $\underline{\{a > 0\}} := \{t \in Q : a(t) > 0\}$. Так как $\{x \wedge y > 0\} = \{xy > 0\}$, имеем $u \wedge v \in e_0\text{-cl}(E_{x \wedge y}) \subset \overline{E_{x \wedge y}} = \overline{E_{xy}}$, следовательно, $\mathrm{supp}(uv) = \mathrm{supp}(u \wedge v) \subset \mathrm{supp}(xy)$.

Отсюда вытекает, что последовательность (a_n), где $a_n := (uv - nxy)^+$ убывает и поточечно сходится к нулю. По теореме Дини $uv - nxy \leqslant a_n \leqslant \lambda_n e_0$ для некоторого $\lambda_n \downarrow 0$. Таким образом, если $b_0(x, y) = b(x, y) = 0$, то

$$0 \leqslant b(u, v) = b_0(u, v) = \Phi(uv) \leqslant n\Phi(xy) + \lambda_n \Phi(e_0) = \lambda_n \Phi(e_0).$$

Отсюда вытекает требуемое равенство $b(u, v) = 0$. $\rhd$

В заключение этого параграфа рассмотрим несколько интересных следствий из теоремы 1.3.6.

1.3.7. Следствие [25]. *Пусть E, G и b — те же что и в 1.3.6. Тогда следующие эквивалентности имеют место:*

(1) $b(x, y \wedge z) = 0 \Leftrightarrow b(x \wedge y, z) = 0$ *для всех* $x, y, z \in E_+$;

(2) $b(x \wedge y, x \wedge y) = 0 \Leftrightarrow b(x, y) = 0$ *для всех* $x, y \in E_+$;

(3) $b(x, x) = 0 \Leftrightarrow (\forall\, y \in E)\, b(x, y) = 0$ *для всех* $x \in E$.

1.3.8. Следствие [25]. *Пусть E и G — векторные решетки и $b : E \times E \to G$ — ортосимметричный положительный билинейный оператор. Положим $J := \{x \in E : b(x, x) = 0\}$. Тогда J — равномерно замкнутый порядковый идеал в E и*

$$b(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x \wedge y \in J \quad (x, y \in E_+).$$

Если $\tilde{E} := E/J$ и $\phi : E \to \tilde{E}$ обозначает фактор-отображение, то существует положительно определенный ортосимметричный положительный билинейный оператор $\tilde{b} : \tilde{E} \times \tilde{E} \to G$ такой, что $b = \tilde{b} \circ (\phi \times \phi)$, т. е. $b(x, y) = \tilde{b}(\phi(x), \phi(y))$ $(x, y \in E)$.

1.3.9. Следствие [25]. *Пусть $(E, \bullet)$ — архимедова почти f-алгебра. Положим $J := \{x \in E : x \bullet E = \{0\}\}$. Тогда J — равномерно замкнутый порядковый идеал в E и E/J — f-алгебра.* (*Фактор-множество E/J снабжается структурой решеточно упорядоченной алгебры так, что каноническое фактор-отображение из E на E/J служит алгебраическим и решеточным гомоморфизмом.*)

1.3.10. Замечания. (1) Следствие 1.3.7 (1) установлено в работе Х. Баскеса и А. ван Ройя [49, теорема 5]. Там же получены 1.3.7 (2, 3) для специального билинейного оператора — оператора умножения в почти f-алгебре. Доказательство теоремы 1.3.6 основано на той же идее, что и в [49, теорема 5]. Следствие 1.3.9 получено в другой работе Х. Баскеса и А. ван Ройя [50, теорема 7].

(2) В [39, пример 3.3] показано, что множество нильпотентных элементов $N(E)$ почти f-алгебры E не совпадает, вообще говоря, с J, поэтому f-алгебра E/J из 1.3.9 может и не быть полупростой. Фактически, $N(E) = \{x \in E : x^3 = 0\}$ для архимедовой почти f-алгебры E, см. [40, 82]. В то же время, если $J = \{0\}$, то в силу 1.3.7 (3) $N(E) = \{0\}$ и почти f-алгебра E будет полупростой, см. [49, следствие 7].

1.4. Билинейные операторы, сохраняющие порядковые отрезки

В этом параграфе представлены некоторые результаты из [68] и [69] об ортосимметричных билинейных операторах, обладающих свойством Магарам или, другими словами, сохраняющих порядковые отрезки. Основные результаты — теорема Радона — Никодима и теорема Хана о разложении для билинейных операторов. Как вспомогательный инструмент используется конструкция квадрата векторной решетки.

1.4.1. Применим процедуру p-овыпукления к равномерно полной векторной решетке E с $p = 1/2$, см. [68] ($p = 2$ и обозначениях [70, 85]). Обозначим $\sigma := \sigma_1$, $\theta := \theta_1$ и $J(s, t) := \theta_2^{-1}(st)$ $(s, t \in \mathbb{R})$, см. 1.2.14.

Введем сложение $\tilde{+}$ и умножение на скаляры $*$ в E формулами

$$x \tilde{+} y := \sigma(x, y), \quad \lambda * x := \theta^{-1}(\lambda)x \quad (\lambda \in \mathbb{R};\ x, y \in E)$$

и положим $E^\bullet := (E, \tilde{+}, *, \leqslant)$, где $\leqslant$ — исходный порядок на E. Как показано в [51, теорема 9 (iii)], положительно однородная непрерывная функция J является симметричным решеточным биморфизмом из $E \times E$ в $E^\bullet$, а пара $(E^\bullet, J)$ служит квадратом E. Согласно 1.1.12 квадрат $(E^\odot, \odot)$ единственен с точностью до изоморфизма, стало быть, $j \circ J = \odot$ для некоторого решеточного изоморфизма $j : E^\bullet \to E^\odot$. Обозначим буквой ι решеточный гомоморфизм j, рассматриваемый как биекция между E и $E^\odot$. Легко видеть, что $x \perp y$ влечет $x + y = x \tilde{+} y$ и, следовательно, $\iota(x + y) = j(x \tilde{+} y) = j(x) + j(y) = \iota(x) + \iota(y)$; поэтому приходим к заключению об ортогональной аддитивности ι. Поскольку J — ортосимметричный биморфизм, имеем $J(x, |x|) = J(x^+, x^+) - J(x^-, x^-) = (x^+ - x^-)J(1, 1) = x$ и, значит, $\iota(x) = x \odot |x|$. Далее, если билинейный оператор $b : E \times E \to F$ порядково ограничен и ортосимметричен, то в соответствии с [51, теорема 9], $x \mapsto \Phi_b^\bullet(x) := b(x, |x|)$ $(x \in E^\bullet)$ есть порядково ограниченный линейный оператор и $b = \Phi_b^\bullet \circ J$. Как видно, $\Phi_b := \Phi_b^\bullet \circ \iota^{-1}$ — линейный порядково непрерывный оператор и $(\Phi_b \circ \iota)(x) := b(x, |x|)$ для любого $x \in E$. Следующая теорема является перефразировкой [51, теорема 9].

1.4.2. Теорема [68, 69]. *Пусть E — равномерно полная векторная решетка. Тогда отображение $\iota : x \mapsto x \odot |x|$ представляет собой ортогонально аддитивный порядковый изоморфизм E на $E^\odot$, сохраняющий модуль. Более того, для любого порядково ограниченного ортосимметричного билинейного оператора b из $E \times E$ в какую-либо векторную решетку F формула*

$$(\Phi_b \circ \iota)(x) := b(x, |x|) \quad (x \in E)$$

определяет единственный порядково ограниченный линейный оператор Φ_b из $E^\odot$ в F такой, что $b = \Phi_b \circ \odot$.

1.4.3. Итак, $E^\bullet$ представляет квадрат E с каноническим биморфизмом J. Более того, E и $E^\bullet$ совпадают как упорядоченные множества и структура векторной решетки на $E^\bullet$ переносится из $E^\odot$ с помощью ι. Модуль элемента, противоположный элемент и отношение дизъюнктности имеют один и тот же смысл в E и $E^\bullet$, поскольку $(-1) * x = (-1)x$ для каждого $x \in E$. Из-за ортогональной аддитивности отображения ι сумма двух дизъюнктных элементов имеет одно и то же значение в E и $E^\bullet$. Так как операция сложения $\tilde{+}$ непрерывна относительно r-сходимости, то r-сходящиеся сети и последовательности одни и те же в E и $E^\bullet$. Тем самым мы приходим к следующему выводу [51, следствия 10 и 11].

Если векторная решетка равномерно полна (латерально полна, порядково полна, порядково σ-полна), то таким же будет и ее квадрат.

1.4.4. Обозначим символом $BL_o^\sim(E;F)$ пространство порядково ограниченных ортосимметричных билинейных операторов из $E \times E$ в F, упорядоченное конусом положительных билинейных операторов. (Напомним, что если F порядково полна, то $BL_o^\sim(E;F)$ и $BL_{or}(E;F)$ совпадают.) Следующее утверждение вытекает немедленно из 1.4.2.

Теорема. *Пусть E и F — векторные решетки, причем E равномерно полна. Соответствие $b \mapsto \Phi_b$ из 1.4.2 является изоморфизмом упорядоченных векторных пространств $BL_o^\sim(E;F)$ и $L^\sim(E^\odot, F)$. При этом, b — решеточный биморфизм в том и только в том случае, когда Φ_b — решеточный гомоморфизм.*

1.4.5. Справедлива также теорема, обратная к 1.4.2. Чтобы в этом убедиться определим в F сложение $\dot{+}$ и умножение на скаляры $\star$ формулами (см. 1.4.1)

$$x \dot{+} y := \sigma'(x,y), \quad \lambda \star x := \theta(\lambda)x \quad (\lambda \in \mathbb{R};\ x,y \in F)$$

и положим $F^\circ := (F, \dot{+}, \star, \leqslant)$, где $\leqslant$ — исходный порядок в F. Тогда F° — равномерно полная векторная решетка и $(F^\circ)^\bullet = F$ [85, предложение 4.8 (ii)]. Более того, F° единственна с точностью до эквивалентности, и мы приходим к следующему результату.

1.4.6. Теорема [68, 69]**.** *Пусть F — равномерно полная векторная решетка. Тогда существует равномерно полная векторная решетка F°, квадратом которой служит F; символически, $(F^\circ)^\odot = F$. Векторная решетка F° с этим свойством единственна с точностью до решеточного изоморфизма.*

Обозначим символами $\mathfrak{B}(E)$ и $\mathfrak{P}(E)$ булевы алгебры соответственно всех полос и всех порядковых проекторов в E. Пусть $\mathscr{S}_{\mathrm{uc}}(E)$ обозначает упорядоченное по включению множество равномерно замкнутых подрешеток в E. В следующем утверждении собраны полезные свойства квадрата векторной решетки.

1.4.7. Теорема [68, 69]**.** *Пусть E — равномерно полная векторная решетка. Для $L \in \mathscr{S}_{\mathrm{uc}}(E)$ обозначим символом $\hat{\iota}(L)$ множество $\iota(L) := \{x \odot |x| : x \in L\}$ с алгебраическими операциями и порядком индуцированными из $E^\odot$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(**1**) *отображение $L \mapsto \hat{\iota}(L)$ осуществляет порядковый изоморфизм упорядоченных по включению множеств $\mathscr{S}_{\mathrm{uc}}(E)$ и $\mathscr{S}_{\mathrm{uc}}(E^\odot)$;*

(**2**) *$L \in \mathscr{S}_{\mathrm{uc}}(E)$ — порядковый идеал (фундамент) в E в том и только в том случае, если $\hat{\iota}(L)$ — порядковый идеал (фундамент) в $E^\odot$;*

(**3**) *$\hat{\iota}$ определяет булев изоморфизм $\mathfrak{B}(E)$ на $\mathfrak{B}(E^\odot)$;*

(**4**) *$\hat{\iota}(L)$ допускает порядковый проектор π в том и только в том случае, если L допускает порядковый проектор π' и в этом случае $\pi(x \odot y) = (\pi'x) \odot y = x \odot (\pi'y) = (\pi'x) \odot (\pi'y)$;*

(**5**) *E и $E^\odot$ одновременно являются решетками с проекциями и в этом случае существует булев изоморфизм $\pi \mapsto \pi'$ из $\mathfrak{P}(E^\odot)$ на $\mathfrak{P}(E)$ такой, что $\pi(x \odot y) = (\pi'x) \odot y = x \odot (\pi'y) = (\pi'x) \odot (\pi'y)$ для любых $x, y \in E$ и $\pi \in \mathfrak{P}(E)$;*

(**6**) *если E — пространство Канторовича, то существует изоморфизм $\alpha \mapsto \alpha'$ f-алгебр $\mathrm{Orth}^\infty(E^\odot)$ и $\mathrm{Orth}^\infty(E)$ такой, что $\alpha(x \odot y) = (\alpha'x) \odot y = x \odot (\alpha'y)$ для всех $\alpha \in \mathrm{Orth}^\infty(E^\odot)$ и $x, y \in \mathscr{D}(\alpha)$, где $\mathscr{D}(\alpha)$ обозначает область задания α.*

1.4.8. Пусть E и G — векторные решетки и b — положительный билинейный оператор из $E \times E$ в G. Скажем, что b *сохраняет порядковые отрезки* или обладает *свойством Магарам,* если для любых $x, y \in E_+$ и $0 \leqslant g \leqslant b(x,y) \in G_+$ существуют $0 \leqslant u \leqslant x$ и $0 \leqslant v \leqslant y$ такие, что $g = b(u,v)$ или, короче, $b\left([0,x] \times [0,y]\right) = [0, b(x,y)]$ для любых $x, y \in E_+$. Положительный порядково непрерывный билинейный оператор, обладающий свойством Магарам, назовем *билинейным оператором Магарам.*

Пусть ϕ — еще один положительный билинейный оператор из $E \times E$ в G. Тогда b называют *абсолютно непрерывным* относительно ϕ, если $b(x,y) \in \phi(x,y)^{\perp\perp}$ для всех $0 \leqslant x, y \in E$. Как видно, любой оператор $b \in \phi^{\perp\perp}$ абсолютно непрерывен относительно ϕ.

1.4.9. Структура линейных операторов Магарам изучена достаточно хорошо, см., например, [11]. В билинейном контексте эффект сохранения порядковых отрезков не столь прозрачен. И. Шеффолд [81] ввел следующее понятие: говорят, что билинейный оператор $b: E \times F \to G$ *почти сохраняет порядковые отрезки справа (слева)*, если для любых $e \in E_+$ и $f \in F_+$ множество $[0, b(e,f)]$ совпадает с замыканием $b(e,[0,f])$ (соответственно, $b([0,e],f)$) в абсолютно слабой топологии $|\sigma|(G, G^\sim)$ [38]. (Предполагается, что порядково сопряженное пространство $G^\sim$ разделяет точки.) В [43, предложение 3.2] установлено, что если G равномерно полно и b почти сохраняет порядковые отрезки справа или слева, то оператор Φ_b почти сохраняет порядковые отрезки. (Линейные операторы, почти сохраняющие порядковые отрезки, введены в [71].) Опираясь на этот факт в [43, теорема 3.3] установлен билинейный вариант теоремы Арендта [38, теорема 7.4]. Как было показано в [68], в случае ортосимметричных операторов можно продвинутся существенно дальше.

1.4.10. Теорема [68, 69]**.** *Пусть E и G — пространства Канторовича, $b: E \times E \to G$ — положительный ортосимметричный билинейный оператор и $b = \Phi_b \odot$ для единственного положительного линейного оператора $\Phi_b: E^\odot \to G$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(**1**) *b сохраняет порядковые отрезки;*

(**2**) *$b(x,\cdot)$ сохраняет порядковые отрезки для каждого $0 \leqslant x \in E$;*

(**3**) *$b(\cdot,y)$ сохраняет порядковые отрезки для каждого $0 \leqslant y \in E$;*

(**4**) *для любых $0 \leqslant x \in E$ и $0 \leqslant u \leqslant b(x,x)$ существует $y \in E$, $0 \leqslant y \leqslant x$, такой, что $u = b(y,y)$;*

(**5**) *Φ_b сохраняет порядковые отрезки.*

В доказательстве этого факта имеются лишь две нетривиальные импликации: (4) $\Rightarrow$ (5) и (5) $\Rightarrow$ (2). Первая импликация выводится с помощью однородного функционального исчисления: если $0 \leqslant v \leqslant b(x,x)$ и $v = b(x_1,x_2)$ для некоторых $x_1, x_2 \in [0,x]$, то для элемента $x_0 := x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ выполняется $x_0 \odot x_0 = x_1 \odot x_2$, поэтому $b(x_0,x_0) = \Phi_b(x_0 \odot x_0) = \Phi(x_1 \odot x_2) = b(x_1,x_2) = v$. Вторая импликация выводится из 1.4.2. Подробности см. в [68, теорема 8.2] и [69, теорема 4.2].

1.4.11. Рассмотрим равномерно полную векторную решетку E, пространство Канторовича G и орторегулярный билинейный оператор $b: E \times E \to G$. *Симметричный нулевой идеал* $\mathscr{N}_b$ и *симметричный носитель* $\mathscr{C}_b$ оператора b определяются формулами

$$\mathscr{N}_b := \{x \in E : \ |b|(|x|,|x|) = 0\},$$
$$\mathscr{C}_b := \mathscr{N}_b^\perp = \{x \in E : x \perp \mathscr{N}_b\}.$$

Поскольку $b(x,x) = b(|x|,|x|)$ $(x \in E)$ для любого ортосимметричного b, то симметричный нулевой идеал $\mathscr{N}_b$ можно также определить формулой $\mathscr{N}_b := \{x \in E : \ |b|(x,x) = 0\}$. Как видно из 1.4.2 и 1.4.7 (2), симметричный нулевой идеал на самом деле является порядковым идеалом, ибо $\mathscr{N}_{\Phi_b} = \iota(\mathscr{N}_b)$. Если b порядково непрерывен, то $\mathscr{N}_b$ есть полоса в E. Если $b \geqslant 0$ и $\mathscr{N}_b = \{0\}$, то b называют *существенно положительным.* Ортосимметричный положительный билинейный оператор b существенно положителен в том и только в том случае, когда он положительно определен.

Орторегулярный билинейный оператор b назовем *сингулярным*, если $\mathscr{N}_b$ содержит некоторый фундамент или, эквивалентно, $\mathscr{N}_b$ — фундамент в E.

1.4.12. *Пусть E, G, b и Φ_b — те же, что и* 1.4.10. *Справедливы утверждения:*

(**1**) *b порядково непрерывен в том и только в том случае, когда Φ_b порядково непрерывен;*

(**2**) *b сингулярен в том и только в том случае, когда Φ_b сингулярен;*

(**3**) *b строго положителен в том и только в том случае, когда Φ_b строго положителен;*

(**4**) *b — оператор Магарам в том и только в том случае, когда Φ_b — оператор Магарам.*

1.4.13. Операторы Магарам впервые изучались в работе Д. Магарам [73] (см. также обзор [74]). В. Люксембург и А. Шеп [72] распространили часть теории Магарам на положительные операторы в пространствах Канторовича. Термины «свойство Магарам» и «оператор

Магарам» были введены в [72] и [10] соответственно (подробнее см. в [11]). Свойство Магарам в антураже выпуклого анализа изучено в [20]. Как было установлено в [10], линейный оператор Магарам представляет собой интерпретацию порядково непрерывного линейного функционала в подходящей булевозначной модели [11]. Булевозначный подход возможен, разумеется, и к изучению билинейных операторов [66].

Используя теорему 1.4.2, можно некоторые результаты о строении линейных операторов Магарам переносить на ортосимметричные билинейные операторы Магарам. Для билинейного оператора $\phi \in BL_o^{\sim}(E;G)$ обозначим $E_\phi := \mathscr{C}_\phi$ и $G_\phi := \phi(E \times E)^{\perp\perp}$. Если ϕ — порядково непрерывный ортосимметричный билинейный оператор Магарам, то в силу 1.4.2 можно применить [72, теорема 2.2] (см. также [11, теорема 3.4.3]) к линейному оператору Магарам Φ_ϕ, что приводит к следующему результату.

1.4.14. Теорема [68, 69]**.** *Пусть E и G — пространства Канторовича, ϕ — положительный ортосимметричный билинейный оператор Магарам из $E \times E$ в G. Тогда существует изоморфизм h из f-алгебры* $\mathrm{Orth}^\infty(G_\phi)$ *на порядково замкнутую подалгебру f-алгебры* $\mathrm{Orth}^\infty(E_\phi)$ *такой, что справедливы утверждения:*

(**1**) *h индуцирует булев изоморфизм из $\mathfrak{P}(G_\phi)$ на порядково полную подалгебру булевой алгебры $\mathfrak{P}(E_\phi)$;*

(**2**) *h индуцирует изоморфизм f-алгебры $\mathscr{Z}(G_\phi)$ на порядково замкнутую подалгебру f-алгебры $\mathscr{Z}(E_\phi)$;*

(**3**) *для любого положительного ортосимметричного порядково непрерывного билинейного оператора $b:\ E \times E \to G$, абсолютно непрерывного относительно ϕ, выполняется*

$$\pi \circ b(x,y) = b(h(\pi)x,y) = b(x,h(\pi)y) \quad (\pi \in \mathrm{Orth}^\infty(G_\phi)_+;\ x,y \in \mathscr{D}(\pi)),$$

и в этом случае b — оператор Магарам.

Аналогичными рассуждениями, использующими линеаризацию посредством квадрата, устанавливаются следующие три теоремы.

1.4.15. Теорема Радона — Никодима [68, 69]**.** *Пусть E и G — пространства Канторовича, а b и ϕ — порядково непрерывные ортосимметричные положительные билинейные операторы из $E \times E$ в G, причем ϕ обладает свойством Магарам. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(**1**) *$b \in \{\phi\}^{\perp\perp}$;*

(**2**) *b абсолютно непрерывен относительно ϕ;*

(**3**) *существует ортоморфизм $0 \leqslant \rho \in \mathrm{Orth}^\infty(E)$ такой, что*

$$b(x,y) = \phi(\rho x,y) = \phi(x,\rho y) \quad (x,y \in \mathscr{D}(\rho));$$

(**4**) *существует возрастающая последовательность положительных ортоморфизмов (ρ_n), $\rho_n \in \mathrm{Orth}(E)$, такая, что*

$$b(x,y) = \sup_n \phi(\rho_n x,y) = \sup_n \phi(x,\rho_n y) \quad (x,y \in E_+).$$

Более того, если $0 \leqslant b \leqslant \phi$, то $b = \phi \circ (\rho \times I_E) = \phi \circ (I_E \times \rho)$ для некоторого ортоморфизма $\rho \in \mathrm{Orth}(E)$, удовлетворяющего неравенству $0 \leqslant \rho \leqslant I_E$.

$\lhd$ В силу 1.4.2, 1.4.4, 1.4.7 (6), 1.4.10 и 1.4.14 каждое из утверждений (1)–(4) эквивалентно соответствующему условию для линейных операторов Φ_b and Φ_ϕ. Следовательно, нужно лишь применить теорему Радона — Никодима для линейных операторов Магарам, установленную В. Люксембургом и А. Шепом в [72, теорема 3.3], см. также [11, теорема 3.4.9]. Подробности см. в [68, 69]. $\rhd$

1.4.16. Теорема Накано [68, 69]**.** *Пусть E и G — пространства Канторовича и ϕ — ортосимметричный билинейный оператор Магарам из $E \times E$ в G. Орторегулярные билинейные операторы $b_1, b_2 \in \{\phi\}^{\perp\perp}$ дизъюнктны в том и только в том случае, если дизъюнктны их симметричные носители $\mathscr{C}_{b_1}$ и $\mathscr{C}_{b_2}$.*

$\lhd$ Доказательство см. [68, теорема 9.3] и [69, теорема 4.7]. $\rhd$

Стоит отметить, что следующее следствие из сформулированной теоремы: *Соответствие $\pi \mapsto \phi \circ (\pi \times \pi)$ является изоморфизмом $\mathfrak{P}(\mathscr{C}_\phi)$ на булеву алгебру $\mathfrak{E}(\phi)$ всех осколков ϕ.* В частности, применение этого факта к $\phi := |b|$, приводит к следующему результату.

1.4.17. Теорема Хана о разложении [68, 69]. *Пусть E и G — пространства Канторовича и пусть $b : E \times E \to G$ — порядково ограниченный ортосимметричный билинейый оператор, для которого $|b|$ — оператор Магарам. Тогда существует порядковый проектор $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ такой, что $b^+ = b \circ (\pi \times \pi)$ и $b^- = b \circ (\pi^\perp \times \pi^\perp)$.*

1.5. Билинейные операторы, сохраняющие дизъюнктность

Этот параграф посвящен билинейным операторам, сохраняющим дизъюнктность. Рассмотрен вариант проблемы Викстеда для билинейных операторов, дана характеризация классов билинейных операторов, представимых в виде разности симметричных решеточных биморфизмов или же конечных сумм билинейных операторов, сохраняющих дизъюнктность и дано аналитическое представление орторегулярных билинейных операторов, сохраняющих дизъюнктность, в форме операторов взвешенного сдвига. Детальное изложение имеется в статьях [23, 24, 47, 66].

1.5.1. Пусть E — векторная решетка. Билинейный оператор $b : E \times E \to E$ назовем *раздельно нерасширяющим,* если отображения $b(\cdot, e)$ и $b(e, \cdot)$ являются нерасширяющими для всех $e \in E$ или, эквивалентным образом, если $b(L \times E) \subset L$ и $b(E \times L) \subset L$ для любой полосы L в E. Рассуждениями, аналогичными [38, теорема 8.2], можно получить следующую характеризацию раздельно нерасширяющих билинейных операторов.

1.5.2. *Пусть E — векторная решетка и $b : E \times E \to E$ — билинейный оператор. Следующие утверждения равносильны:*

(1) *b является раздельно нерасширяющим;*

(2) *$b(x, y) \in \{x\}^{\perp\perp} \cap \{y\}^{\perp\perp}$ для любых $x, y \in E$;*

(3) *$b(x, y) \perp z$, если только $z \in E$ и либо $x \perp z$, либо $y \perp z$.*

Если E — векторная решетка с главными проекциями, то (1)–(3) *эквивалентны также* (4) *и* (5)*:*

(4) *$\pi b(x, y) = b(\pi x, \pi y)$ для любого порядкового проектора π в E и любых $x, y \in E$;*

(5) *$\pi b(x, y) = b(\pi x, y) = b(x, \pi y)$ для любого порядкового проектора π в E и любых $x, y \in E$.*

1.5.3. Как видно из 1.5.2 (2), всякий раздельно расширяющий билинейный оператор ортосимметричен. Следовательно, все орторегулярные раздельно нерасширяющие билинейные операторы симметричны в силу 1.1.9. В то же время порядково ограниченный раздельно нерасширяющий билинейный оператор b имеет вид $b = \pi\odot$, где π — некоторый ортоморфизм в $E^\odot$, см. 1.4 и 1.4.7 (3). Тем самым возникает вопрос, который следует считать билинейным вариантом *проблемы Викстеда* [11, 65]:

Каковы необходимые и достаточные условия, при которых все раздельно нерасширяющие билинейные операторы в векторной решетке симметричны? порядково ограничены?

Проблема Викстеда была сформулирована в [86]. Историю и иные формы этой задачи см. в обзоре [65], а также [12, 13, 15, 16, 66].

1.5.4. Решение можно получить средствами, аналогичными линейному случаю [15, 16]. Булеву σ-алгебру $\mathbb{B}$ называют *σ-дистрибутивной,* если

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{m\in\mathbb{N}} b_{n,m} = \bigwedge_{\varphi\in\mathbb{N}^\mathbb{N}} \bigvee_{n\in\mathbb{N}} b_{n,\varphi(n)}$$

для любой двойной последовательности $(b_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{B}$. Другие эквивалентные определения имеются в [36], см. также [7, 11, 65]. Теперь можем сформулировать основной результат настоящего параграфа.

1.5.5. Теорема [66]. *Пусть G — расширенная векторная решетка и $\mathbb{B} := \mathfrak{P}(G)$ обозначает полную булеву алгебру полос в G. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$\mathbb{B}$ σ-дистрибутивна;*

(2) *нет ни одного раздельно нерасширяющего антисимметричного билинейного оператора из $G \times G$ в G;*

(3) *все раздельно нерасширяющие билинейные операторы из $G \times G$ в G симметричны;*

(4) *все раздельно нерасширяющие билинейные операторы из $G \times G$ в G порядково ограничены.*

1.5.6. *Пусть E, F и G — произвольные векторные решетки. Для порядково ограниченного билинейного оператора $b : E \times F \to G$ следующие утверждения эквивалентны:*
(1) *$b(x, \cdot)$ и $b(\cdot, y)$ сохраняют дизъюнктность, каковы бы ни были $x \in E_+$ и $y \in F_+$;*
(2) *$b(x, \cdot)$ и $b(\cdot, y)$ сохраняют дизъюнктность, каковы бы ни были $x \in E$ и $y \in F$;*
(3) *$b(x_1, y_1) \perp b(x_2, y_2)$, если либо $x_1 \perp x_2$, либо $y_1 \perp y_2$.*

Говорят, что билинейный оператор $b : E \times F \to G$ *сохраняет дизъюнктность*, если он удовлетворяет одному (а тогда и всем) из условий 1.5.6 (1–3).

Следующий результат, представляющий собой билинейный вариант теоремы Мейера [11, теорема 3.3.1 (5)], был получен независимо в [23, теорема 3.4] и [78].

1.5.7. Теорема [23]. *Пусть E, F и G — векторные решетки и $b : E \times F \to G$ порядково ограниченный билинейный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Тогда b имеет положительную часть b^+, отрицательную часть b^- и модуль $|b|$, которые являются решеточными биморфизмами. Более того,*

$$b^+(x, y) = b(x, y)^+, \quad b^-(x, y) = b(x, y)^- \quad (0 \leqslant x \in E,\ 0 \leqslant y \in F);$$
$$|b(x, y)| = |b|(|x|, |y|) = |b(|x|, |y|)| \quad (x \in E,\ y \in F).$$

1.5.8. Теорема [24]. *Порядково ограниченный билинейный оператор $b : E \times F \to G$, сохраняющий дизъюнктность, допускает представление в виде*

$$b(x, y) = S(x)T(y) \quad (x \in E, y \in F),$$

где операторы $S : E \to G^u$ и $T : F \to G^u$ принимают значения в максимальном расширении G^u векторной решетки G, снабженном однозначно определяемой выбором порядковой единицы структурой f-алгебры, причем один из них порядково ограничен и сохраняет дизъюнктность, а другой — решеточный гомоморфизм. Если, сверх того, $E = F$ и оператор b симметричен, а S — решеточный гомоморфизм, то можно взять $T = \pi S - \pi^\perp S$, где π — порядковый проектор в G^u, и $\pi^\perp := I_G - \pi$.

Из этого результата легко выводится (ср. [47, теорема 3.4]):

1.5.9. Теорема [19]. *Пусть E и G — векторные решетки и $b : E \times E \to G$ — сохраняющий дизъюнктность орторегулярный билинейный оператор. Тогда существуют векторная решетка F, решеточные гомоморфизмы $S, T : E \to F$ и изоморфное вложение $h : F^\odot \to G$ такие, что $S(E) \perp T(E)$, $S(E) + T(E) = F$ и справедливо представление:*

$$b(x, y) = h(S(x) \odot S(y)) - h(T(x) \odot T(y)) \quad (x, y \in E).$$

1.5.10. Пусть E — произвольная векторная решетка, а F — пространство Канторовича. С. С. Кутателадзе [27] получил следующую характеризацию разностей решеточных гомоморфизмов: *Порядково ограниченный линейный оператор T из E в G можно представить в виде разности решеточных гомоморфизмов в том и только в том случае, когда ядро слоя πT оператора T служит векторной подрешеткой E для каждого $\pi \in \mathfrak{P}(G)$*. Ниже приведем аналогичный результат для решеточных биморфизмов, установленный в [68, теорема 7.4] и [69, теорема 3.6], используя теоремы 1.4.2 и 1.4.7 (1). *Симметричным ядром* ортосимметричного билинейного оператора b назовем множество $\mathrm{sker}(b) := \{x \in E : \ b(x, |x|) = 0\}$.

1.5.11. Теорема [68]. *Пусть E — произвольная векторная решетка, а G — пространство Канторовича. Орторегулярный билинейный оператор $b : E \times E \to G$ можно представить в виде разности двух симметричных решеточных биморфизмов в том и только в том случае, когда симметричное ядро $\mathrm{sker}(\pi b)$ слоя πb оператора b служит векторной подрешеткой E для каждого $\pi \in \mathfrak{P}(G)$.*

1.5.12. Пусть E и G — фундаменты расширенных пространств Канторовича $\mathscr{E}$ и $\mathscr{G}$ с фиксированными единицами $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{G}}$ соответственно. Каждое из пространств $\mathscr{E}$ и $\mathscr{G}$ снабдим структурой f-алгебры, определяемой единственным образом выбором порядковой единицы. Напомним, что порядково ограниченный ортоморфизм в $\mathscr{E}$ или $\mathscr{G}$ представляет собой оператор умножения на некоторый фиксированный элемент, с которым и будем отождествлять соответствующий ортоморфизм. Для $f \in \mathscr{E}$ существует единственный элемент $g \in \mathscr{E}$ такой, что $fg = [f]1_{\mathscr{E}}$ и $[f] = [g]$, где $[f]$ — порядковый проектор на полосу $f^{\perp\perp}$. Обозначим элемент

g символом $1_{\mathscr{E}}/f$ и положим $g/f = g(1_{\mathscr{E}}/f)$. Ортоморфизм $g \mapsto g/f$ будем обозначать тем же символом $1_{\mathscr{E}}/f$.

Рассмотрим фундаменты $E' \subset \mathscr{E}$, $G' \subset \mathscr{G}$ и $G'' \subset \mathscr{G}$. Обозначим символом $G'{\cdot}G''$ векторную подрешетку в $\mathscr{G}$, порожденную множеством $\{g'g'' : g' \in G', g'' \in G''\}$.

Если $w : E \to E'$ и $S : E' \to G'$ — линейные операторы, то $w \times w : E \times E \to E' \times E'$ и $S \bullet S : E' \times E' \to G' \cdot G'$ обозначают линейный и билинейный операторы, определяемые формулами $(x, y) \mapsto (wx, wy)$ и $(x, y) \mapsto S(x)S(y)$ соответственно. Скажем, что билинейый ортосимметричный оператор $b : E{\times}E \to G$ допускает *WSW-представление,* если существуют фундаменты $E' \subset \mathscr{E}$ и $G' \subset \mathscr{G}$, ортоморфизмы $w : E \to E'$ и $W : G' \cdot G' \to G$, и оператор сдвига $S : E' \to G'$ такие, что $b = W \circ (S \bullet S) \circ (w \times w)$, т. е. диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
E \times E \arrow[r, "b"] \arrow[d, "w\times w"'] & G \\
E' \times E' \arrow[r, "S\bullet S"'] & G' \cdot G' \arrow[u, "W"']
\end{tikzcd}
$$

коммутативна. *Оператор сдвига* из E' в G' — ограничение на E' положительного линейного оператора $\hat{S} : \hat{E} \to \mathscr{G}$, удовлетворяющего условиям: 1) $\hat{E}$ — фундамент в $\mathscr{E}$, содержащий E' и $1_{\mathscr{E}}$; 2) $\hat{S}$ переводит осколки $1_{\mathscr{E}}$ в осколки $1_{\mathscr{G}}$; 3) $\hat{S}$ сохраняет дизъюнктность; 4) $\hat{S}(1_{\mathscr{E}})^{\perp\perp} = \hat{S}(\hat{E})^{\perp\perp}$. Операторы W, S и w называют соответственно *внешним весом*, *сдвигом* и *внутренним весом* представления $W \circ (S \bullet S) \circ (w \times w)$. Скажем также, что $\hat{S}$ — *сдвиг оператора* $T : E \to G$, если $T(E)^{\perp\perp} = \hat{S}(1_{\mathscr{E}})^{\perp\perp}$ и $T \circ \pi = [\hat{S}(\pi 1_{\mathscr{E}})] \circ T$ для всех $\pi \in \mathfrak{P}(\mathscr{E})$.

Комбинируя теорему 1.5.8 с результатами А. Е. Гутмана [7, 11, 64] о WSW-представлении линейных операторов, сохраняющих дизъюнктность, приходим к следующему результату.

1.5.13. Теорема [47]. *Пусть $b : E \times E \to G$ — сохраняющий дизъюнктность орторегулярный билинейный оператор. Тогда существуют разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в булевой алгебре $\mathfrak{P}(F)$ и семейство $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в E^+ такие, что для каждого $\xi \in \Xi$ композиция $\rho_\xi \circ b$ допускает WSW-представление*

$$\rho_\xi \circ b = \rho_\xi W \circ (\rho_\xi S \bullet \rho_\xi S) \circ (1_{\mathscr{E}}/e_\xi \times 1_{\mathscr{E}}/e_\xi) \quad (\xi \in \Xi),$$

где S и $\rho_\xi S$ — операторы сдвига, причем $\rho_\xi S$ служит расширением $\rho_\xi \circ S$, а внешний вес $W : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ есть оператор умножения на o-$\sum_{\xi\in\Xi} \rho_\xi b(e_\xi, e_\xi)$. Таким образом, оператор b разлагается в строго дизъюнктную сумму операторов $\rho_\xi \circ b$, допускающих WSW-представление со сдвигом $\rho_\xi S$.

1.5.14. Пусть P и Q — экстремально несвязные компакты, E и G — фундаменты в расширенных пространствах Канторовича $\mathscr{E} := C_\infty(P)$ и $\mathscr{G} := C_\infty(Q)$ соответственно. Обозначим символом $C_0(Q, P)$ множество всех непрерывных отображений $\sigma : Q_0 := \mathrm{dom}(\sigma) \to P$, определенных на различных открыто-замкнутых подмножествах $Q_0 \subset Q$. Для заданных $\sigma \in C_0(Q, P)$ и $e \in C_\infty(P)$ функция $\sigma^* e : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ определяется формулой

$$(\sigma^* e)(q) := \begin{cases} e\big(\sigma(q)\big), & q \in \mathrm{dom}(\sigma), \\ 0, & q \in Q \setminus \mathrm{dom}(\sigma). \end{cases}$$

Очевидно, что функция $\sigma^* e$ непрерывна, но не входит в $C_\infty(Q)$, вообще говоря, так как может принимать бесконечные значения на множестве Q_∞ с непустой внутренностью. Однако, если некоторая функция $W \in C_\infty(Q)$ обращается в нуль на Q_∞, то $W\sigma^* x \in C_\infty(Q)$ (считая по определению $0(\pm\infty) = 0$).

Из теоремы 1.5.14 и результата о мультипликативном представлении линейных операторов, сохраняющих дизъюнктность (см. [64, теорема 5.7.5] или [11, теорема 5.4.5]), вытекает следующий результат.

1.5.15. Теорема [47]. *Пусть E и G — фундаменты соответственно в $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$, а $b : E \times E \to G$ — сохраняющий дизъюнктность орторегулярный билинейный оператор. Тогда существуют непрерывное отображение $\sigma \in C_0(Q, P)$, семейство положительных функций*

$(w_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *в* $C_\infty(P)$, *и семейство попарно дизъюнктных функций* $(W_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *в* $C_\infty(Q)$ *такие, что* $1/w_\xi \in E$ *for all* $\xi \in \Xi$ *и*

$$b(x,y) = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W_\xi \sigma^*(w_\xi x)\sigma^*(w_\xi y) \quad (x,y \in E).$$

Варианты теорем 1.5.13 и 1.5.14 имеют место и для порядково ограниченных сохраняющих дизъюнктность билинейных операторов без предположения об ортосимметричности, см. [24].

1.6. Порядковое проектирование в пространстве билинейных регулярных операторов

Здесь приводятся формулы проектирования положительного билинейного оператора на полосы, порожденные семейством положительных билинейных операторов или решеточным биморфизмом, а также на полосу порядково непрерывных билинейных операторов, см. [33, 35].

1.6.1. Для произвольного множества $A \subset B_r^+(E,F;G)$ через π_A и ρ_A обозначим проекторы на полосы $A^{\perp\perp}$ и $A^\perp$, соответственно. Напомним, что множество A называется *направленным вверх*, если $\forall\, S,T \in A\ \exists\, Q \in A,\ S \leqslant Q,\ T \leqslant Q$.

1.6.1. Рассмотрим важное понятие, позволяющее вычислить проекцию положительного билинейного оператора на полосу, порожденную решеточным биморфизмом.

Пусть E, F и G — векторные решетки и G, кроме того, порядково полна. *Тенью* регулярного билинейного оператора $T \in B_r(E,F;G)$ называется множество

$$\mathscr{S}\mathscr{H}(T) := \Big\{S \in B_r(E,F;G):\ \forall\rho,\ \rho\in\mathfrak{Br}(E),\ \forall\sigma,\ \sigma\in\mathfrak{Br}(F),\ \pi_{S(\rho E,\sigma F)} \leqslant \pi_{T(\rho E,\sigma F)}\Big\}.$$

Как обычно, булевы алгебры порядковых проекторов в пространствах E и F будут обозначаться $\mathfrak{Br}(E)$ и $\mathfrak{Br}(F)$ соответственно. Множества конечных разбиений единичных проекторов $\mathbf{1}_E$ и $\mathbf{1}_F$ будем обозначать $\mathrm{Prst}(E)$ и $\mathrm{Prst}(F)$ соответственно.

1.6.2. Теорема [33]. *Для произвольного билинейного оператора* $T \in B_r(E,F;G)$ *имеют место следующие утверждения:*

(1) $\mathscr{S}\mathscr{H}(T)$ *— полоса в пространстве* $B_r(E,F;G)$*;*

(2) $\mathscr{S}\mathscr{H}(T) = \mathscr{S}\mathscr{H}(|T|) \supset T^{\perp\perp}$*;*

(3) *проекция оператора* $S \in B_r^+(E,F;G)$ *на полосу* $\mathscr{S}\mathscr{H}(T)$ *вычисляется по формуле*

$$\pi_{\mathscr{S}\mathscr{H}(T)}S = \inf\left\{\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^m \pi_{T(\rho_k E,\sigma_l F)}S(\rho_k,\sigma_l);\,(\rho_k)_{k=1}^n \in \mathrm{Prst}(E),\ (\sigma_l)_{l=1}^m \in \mathrm{Prst}(F)\right\}.$$

1.6.3. Векторная решетка E называется *пространством Рисса — Фрейденталя* ($E \in \mathscr{R}\mathscr{F}$), если для любых $\varepsilon > 0$, $e \in E^+$, $x \leqslant e$, существуют $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\rho_i \in \mathfrak{Br}(E)$, $i = 1,\dots,n$ такие, что имеет место формула

$$\left|x - \sum_{i=1}^n \alpha_i\rho_i e\right| \leqslant \varepsilon e.$$

Пусть $E \in \mathscr{R}\mathscr{F}$. Это означает, что дизъюнктные элементы в E можно разделить проекторами. Иначе говоря, для любого $x \in E$ найдется $\rho \in \mathfrak{Br}(E)$ такой, что $x^+ = \rho x$. Для решеточного биморфизма T, действующего в паре пространств Рисса — Фрейденталя, полосу $\mathscr{S}\mathscr{H}(T)$ удается описать более точно.

1.6.4. Теорема [33]. *Пусть* $E,F \in \mathscr{R}\mathscr{F}$, G *—* K*-пространство. Тогда для любого решеточного биморфизма* $T \in B_r(E,F;G)$ *выполнено равенство* $\mathscr{S}\mathscr{H}(T) = \{T\}^{\perp\perp}$*. Кроме того, для любого оператора* $S \in B_r^+(E,F;G)$ *справедливы формулы проектирования:*

$$\pi_T(S) = \inf\left\{\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^m \pi_{T(\rho_k E,\sigma_l F)}S(\rho_k,\sigma_l);\,(\rho_k)_{k=1}^n \in \mathrm{Prst}(E),\ (\sigma_l)_{l=1}^m \in \mathrm{Prst}(F)\right\};$$

$$\pi_T(S)(x,y)=\inf\Bigg\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\pi_{T(\rho_k e,\sigma_l f)}S(\rho_k x,\sigma_l y);$$
$$(\rho_k)_{k=1}^{n}\in\mathrm{Prst}(E),\ (\sigma_l)_{l=1}^{m}\in\mathrm{Prst}(F)\Bigg\}\ \ (0\leqslant x\leqslant e,\ 0\leqslant y\leqslant f).$$

1.6.5. Пусть E, F, G — векторные решетки, причем G порядково полна. Семейство проекторов $(\pi_\alpha)\in\mathfrak{Pr}(G)$ называется разбиением единицы, если $\pi_\alpha\wedge\pi_\beta=0$, $\alpha\neq\beta$ и $\sup_\alpha\pi_\alpha=\mathbf{1}$. Напомним, что через π_z обозначается проектор на полосу $z^{\perp\perp}$, где $z\in G_+$.

Лемма. *Положительные билинейные операторы T и S из $E\times F$ в G дизъюнктны тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon>0$ и любых $x\in E_+$, $y\in F_+$ существует разбиение единицы $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ в $\mathfrak{Pr}(G)$, и для каждого $\alpha\in\Lambda$ существуют конечные наборы $(x_{1\alpha},\dots,x_{m(\alpha)\alpha})\in\mathrm{Prt}(x)$, $(y_{1\alpha},\dots,y_{n(\alpha)\alpha})\in\mathrm{Prt}(y)$ и функции $k,l:\{1,\dots,m(\alpha)\}\times\{1,\dots,n(\alpha)\}\to\{0,1\}$, $k+l=1$, такие, что справедливы формулы*

$$\pi_\alpha\bigg(\sum_{i=1}^{m(\alpha)}\sum_{j=1}^{n(\alpha)}k(i,j)T(x_{i\alpha},y_{j\alpha})\bigg)\leqslant\varepsilon T(x,y),$$
$$\pi_\alpha\bigg(\sum_{i=1}^{m(\alpha)}\sum_{j=1}^{n(\alpha)}l(i,j)S(x_{i\alpha},y_{j\alpha})\bigg)\leqslant\varepsilon S(x,y).$$

Для произвольного множества $A\subset B_r^+(E,F;G)$ через π_A обозначим проектор на полосу $A^{\perp\perp}$ и пусть $\rho_A:=I-\pi_A$, т. е. проектор на полосу $A^\perp$.

1.6.6. Теорема. *Пусть $A\subset B_r^+(E,F;G)$ — направленное вверх множество. Тогда для любого $T\in B_r^+(E,F;G)$ и любых $x\in E_+$ и $y\in F_+$ верно равенство*

$$(\rho_A T)(x,y)=\inf_{\epsilon>0,\,S\in A}\sup\bigg\{\pi\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}l(i,j)T(x_i,y_j):\pi\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}l(i,j)S(x_i,y_j)\leqslant\varepsilon S(x,y)\bigg\},$$

где супремум берется по всем $\pi\in\mathfrak{Pr}(G)$, $(x_1,\dots,x_m)\in\mathrm{Prt}(x)$, $(y_1,\dots,y_n)\in\mathrm{Prt}(y)$ и $l:\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}\to\{0,1\}$.

$\lhd$ Обозначим правую часть требуемого равенства через $h(T)$ и введем $g(T)=T(x,y)-h(T)$. Тогда требуемое можно переписать в виде

$$g(T)=\sup_{\varepsilon>0,\,S\in A}\inf\bigg\{\pi\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k(i,j)T(x_i,y_j)+\pi^\perp T(x,y):$$
$$\pi\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}l(i,j)S(x_i,y_j)\leqslant\varepsilon S(x,y)\bigg\},$$

где $k=1-l$. По условию $\pi_A T\in\{A\}^{\perp\perp}$. Это означает, что найдется сеть операторов $T_\alpha\uparrow\pi_A T$ такая, что $(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\subset\mathfrak{A}(A)$, где $\mathfrak{A}(A)=\bigcup\{[0,nS]:S\in A,\,n\in\mathbb{N}\}$. Пусть оператор $R\in\{T_\alpha\}$. Тогда $R\leqslant nS$ для некоторых $S\in A$ и $n\in\mathbb{N}$. Для произвольного $\varepsilon>0$ выберем проектор $\pi\in\mathfrak{Pr}(G)$, наборы $(x_1,\dots,x_m)\in\mathrm{Prt}(x)$, $(y_1,\dots,y_n)\in\mathrm{Prt}(y)$ и функцию l так, чтобы $\pi\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}l(i,j)S(x_i,y_j)\leqslant\varepsilon S(x,y)$. Учитывая неравенство $R\leqslant(nS)\wedge T$ и полагая $k:=1-l$, можем написать

$$R(x,y)\leqslant\pi\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k(i,j)T(x_i,y_j)+\pi\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}l(i,j)R(x_i,y_j)+$$
$$+\pi^\perp T(x,y)\leqslant n\varepsilon S(x,y)+\pi\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k(i,j)T(x_i,y_j)+\pi^\perp T(x,y).$$

Переход к точной нижней границе по всем параметрам π, $(x_1,\dots,x_m)$, $(y_1,\dots,y_n)$, k и l указанного вида приводит к неравенству $R(x,y)\leqslant n\varepsilon S(x,y)+g(T)$. Так как в данном неравенстве

$\varepsilon > 0$ произвольно, то $R(x,y) \leqslant g(T)$ и $(\pi_A T)(x,y) = \sup_\alpha T_\alpha(x,y) \leqslant g(T)$. Это означает, что $h(T) \leqslant (\rho_A T)(x,y)$.

Докажем обратное неравенство. Ясно, что для любого T из $B^+(E,F;G)$ верно соотношение

$$h(\rho_A T) \leqslant h(T) \leqslant h(\rho_A T) + h(\pi_A T).$$

С другой стороны, в силу доказанного выше $h(\pi_A T) \leqslant (\rho_A \pi_A T)(x,y) = 0$. Поэтому $h(\rho_A T) = h(T)$. Осталось установить равенство $h(\rho_A T) = \rho_A T(x,y)$. Пусть $K := \rho_A T$ и $S \in A$. Тогда $S \wedge K = 0$ и можно выбрать разбиение единицы $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \mathfrak{Pr}(G)$, семейство наборов $(x_{1\alpha},\dots,x_{m(\alpha)\alpha}) \in \mathrm{Prt}(x)$, $(y_{1\alpha},\dots,y_{n(\alpha)\alpha}) \in \mathrm{Prt}(y)$ и функции $l,k : \{1,\dots,m(\alpha)\} \times \{1,\dots,n(\alpha)\} \to \{0,1\}$, удовлетворяющие условию леммы 1.6.5 с заменой T на K. Отсюда

$$\begin{aligned}\varepsilon K(x,y) \geqslant \pi_\alpha \sum_{i=1}^{m(\alpha)} \sum_{j=1}^{n(\alpha)} k(i,j) K(x_{i\alpha}, y_{j\alpha}) = \\ = \pi_\alpha \left(\sum_{i=1}^{m(\alpha)} \sum_{j=1}^{n(\alpha)} k(i,j) K(x_{i\alpha}, y_{j\alpha}) + \pi_\alpha^\perp K(x,y) \right) \geqslant \\ \geqslant \pi_\alpha \inf \left\{ \pi \sum_{i=1}^{m(\alpha)} \sum_{j=1}^{n(\alpha)} k(i,j) K(x_i, y_j) + \pi^\perp K(x,y) \right\},\end{aligned}$$

где $\pi \in \mathfrak{Pr}(G)$, $\pi \sum_{i=1}^{m(\alpha)} \sum_{j=1}^{n(\alpha)} l(i,j) S(x_i,y_j) \leqslant \varepsilon S(x,y)$. Таким образом, имеем $\varepsilon K(x,y) \geqslant \sup_\alpha \pi_\alpha g(K) = g(K)$ для любого $\varepsilon > 0$. Это означает в силу произвола в выборе $\varepsilon > 0$, что $g(K) = 0$. $\triangleright$

1.6.7. Следствие. *Для любых $T, S \in B_r^+(E,F;G)$ и (x,y), $x \in E_+$, $y \in F_+$, справедливы формулы*

$$(\pi_S T)(x,y) = \sup_{\varepsilon>0} \inf \left\{ \pi \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k(i,j) T(x_i,y_j) + \pi^\perp T(x,y) : \pi \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} l(i,j) S(x_i,y_j) \leqslant \varepsilon S(x,y) \right\};$$

$$(\rho_S T)(x,y) = \inf_{\varepsilon>0} \sup \left\{ \pi \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} l(i,j) T(x_i,y_j) : \pi \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} l(i,j) S(x_i,y_j) \leqslant \varepsilon S(x,y) \right\}.$$

1.6.8. Замечание. Из следствия 1.6.7 вытекает, что $\pi_{S(x,y)}^\perp(\rho_S T(x,y)) = \pi_{S(x,y)}^\perp(T(x,y))$ и $\pi_{S(x,y)}^\perp(\rho_S T(x,y))$, где $\pi_{S(x,y)}$ — проектор на полосу $\{S(x,y)\}^{\perp\perp}$. Кроме того, мы можем написать

$$(\rho_S T)(x,y) = \pi_{S(x,y)}^\perp T(x,y) + \inf_{\varepsilon>0} \sup \left\{ \rho \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} l(i,j) T(x_i,y_j) : \rho \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} l(i,j) S(x_i,y_j) \leqslant \varepsilon S(x,y) \right\},$$

где $0 \leqslant \rho \leqslant \pi_{S(x,y)}$.

1.6.9. Следствие. *Пусть $S = v \otimes \varphi$ — одномерный положительный билинейный оператор, т. е. $S(x,y) = v\varphi(x,y)$, где $v \in G_+$, $\varphi \in B_r^+(E,F;\mathbb{R})$ — положительный билинейный функционал, а $T \in B_+(E,F;G)$. Тогда имеет место формула*

$$(\pi_{v\otimes\varphi} T)(x,y) = \sup_{\varepsilon>0} \inf \left\{ \pi_v \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k(i,j) T(x_i,y_j)) : \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} l(i,j) \varphi(x_i,y_j)) \leqslant \varepsilon\varphi(x,y) \right\},$$

где инфинум берется по всем $(x_1,\dots,x_m) \in \mathrm{Prt}(x)$, $(y_1,\dots,y_n) \in \mathrm{Prt}(y)$ и $k,l : \{1,\dots,m(\alpha)\} \times \{1,\dots,n(\alpha)\} \to \{0,1\}$, $k + l = 1$.

1.6.10. Для билинейных ортосимметричных операторов из $E \times E$ в G в случае, когда E обладает сильным свойством Фрейденталя, вышеприведенные формулы проектирования примут следующий вид:

$$(\rho_A T)(x, y) = \inf_{\epsilon>0,\, S\in A} \sup \big\{\pi T(x_1, y_1) : \pi S(x_1, y_1) \leqslant \varepsilon S(x, y)\big\},$$
$$(\rho_S T)(x, y) = \inf_{\epsilon>0} \sup \big\{\pi T(x_1, y_1) : \pi S(x_1, y_1) \leqslant \varepsilon S(x, y)\big\},$$

где супремум берется по всем $\pi \in \mathfrak{Pr}(G)$, $0 \leqslant x_1 \leqslant x$, $0 \leqslant y_1 \leqslant y$.

1.6.11. В настоящем пункте E и F — произвольные векторные решетки, а G — K-пространство. С каждым положительным билинейным оператором T из $E \times F$ в G свяжем операторы T_n и $T_{\sigma n}$, определяемые по формулам:

$$T_n(x, y) := \inf \left\{ \sup_{\alpha,\beta} T(x_\alpha, y_\beta) : 0 \leqslant x_\alpha \uparrow x,\ 0 \leqslant y_\beta \uparrow y \right\}, \qquad (\star)$$

$$T_{\sigma n}(x, y) := \inf \left\{ \sup_{k,m} T(x_k, y_m) : 0 \leqslant x_k \uparrow x,\ 0 \leqslant y_m \uparrow y \right\}, \qquad (\star\star)$$

где $x \in E_+$, $y \in F_+$ и инфимум берется по всем возрастающим сетям x_α, y_β (последовательностям x_n, y_n), сходящимся к x и y.

Следующий результат указывает формулу проекции положительного билинейного оператора на полосу порядково непрерывных билинейных регулярных операторов. Для положительных линейных операторов этот факт см. в [38, теорема 4.6].

1.6.12. Теорема. *Пусть $T : E \times F \to G$ положительный билинейный оператор. Тогда T_n и T_σ являются проекциями на полосы порядково непрерывных и порядково σ-непрерывных регулярных операторов соответственно.*

Глава 2. Выпуклые операторы

2.1. О субдифференциалах не всюду определенных выпуклых операторов

Здесь рассматриваются сублинейные операторы со значениями в упорядоченном векторном пространстве, содержащем бесконечно много несобственных элементов. Для указанных операторов получены основные формулы субдифференциального исчисления. Подробнее см. в [5].

2.1.1. Рассмотрим векторное пространство X и упорядоченное векторное пространство E. При изучении не всюду определенных выпуклых операторов, обычно либо рассматривают операторы $f : C \to E$, определенные на выпуклом множестве $C = \operatorname{dom}(f) \subset X$, либо — операторы $f : X \to E^{\bullet}$ ($E^{\bullet} := E \cup \{+\infty\}$), определенные на всем пространстве X, но принимающие значение $+\infty$ при $x \notin \operatorname{dom}(f)$, см., например, [20].

Вместе с тем, наличие в упорядоченном векторном пространстве $E^{\bullet}$ лишь одного несобственного элемента иногда приводит к неестественному сужению рассматриваемого класса операторов, см. примеры 1 и 2 из 2.1.5. Тем самым мотивировано изучение операторов, со значениями в пространствах, содержащих бесконечно много несобственных элементов.

2.1.2. Пусть E — произвольное K-пространство. В монографии [20, § 4.5] рассматривались выпуклые операторы $f : X \to E^{\bullet}$. Расширим понятие выпуклого оператора, заменив пространство $E^{\bullet}$ на более широкий объект $E^{\star}$. В декартовом произведении $E \times \mathfrak{P}(E)$, где $\mathfrak{P}(E)$ — булева алгебра порядковых проекторов в E, выделим подмножество $E^{\star}$, состоящее из таких пар (x, π), что $\pi x = 0$. В множестве $E^{\star}$ можно корректно ввести сложение, умножение на положительные числа и упорядочение с помощью формул:

$$(x,\pi) + (y,\rho) := \big((\pi \vee \rho)^d (x+y), \pi \vee \rho\big), \quad \lambda(x,\pi) := (\lambda x, \pi),$$
$$(x,\pi) \leqslant (y,\rho) \leftrightarrow \pi \leqslant \rho \ \ \& \ \ \rho^d x \leqslant \rho^d y \quad (x, y \in E;\ \pi, \rho \in \mathfrak{P};\ \lambda \in \mathbb{R}^+).$$

Нетрудно проверить, что $E^{\star}$ — порядково полная $\mathbb{R}$-коническая решетка (см. [20, 1.5.1]). Отображение, сопоставляющее элементу $x \in E$ пару $(x, 0)$, служит вложением E в $E^{\star}$, сохраняющим операции и порядок. Мы будем отождествлять E с соответствующим подмножеством $E^{\star}$. Проектор $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ можно продолжить до проектора на $E^{\star}$ следующим образом: если $z := (x, \rho) \in E^{\star}$, то полагаем $\pi z := (\pi x, \pi\rho)$. Множество вида $\pi E^{\star}$ естественно назвать *полосой* в $E^{\star}$. Пара $(0, \pi)$, обозначаемая символом $+\propto_\pi := \propto_\pi$, будет *наибольшим элементом в полосе* $\pi E^{\star}$. Элемент $+\infty := \infty := \propto_{\mathbb{1}}$ — *наибольшим элементом* $E^{\star}$. Таким образом, в каждой полосе $\pi E^{\star}$ имеется своя *бесконечность* $\propto_\pi$, причем все они являются *осколками бесконечности* ∞, т. е. $\propto_\pi \wedge \propto_{\pi^d} = 0$ и $\propto_\pi \vee \propto_{\pi^d} = \infty$. Очевидно, что множество всех бесконечных элементов $\propto_\pi$ (включая $0 = \propto_0$) с индуцированным из $E^{\star}$ порядком образует полную булеву алгебру, изоморфную $\mathfrak{P}(E)$.

2.1.3. Обозначим символом $C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$ множество всех непрерывных функций из Q в $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, принимающих значение $-\infty$ на нигде не плотном множестве. Введем в $C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$ операции сложения и умножения на положительные скаляры, полагая $(u+v)(t) = u(t) + v(t)$ и $(\lambda u)(t) = \lambda \cdot u(t)$, причем правые части этих соотношений имеют смысл для каждого t из подходящего котощего множества $Q_0 \subset Q$. (Напомним, что множество в топологическом пространстве называют *котощим,* если его дополнение является тощим множеством.) Порядок в $C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$ определяется поточечно, т. е. $u \leqslant v$ означает, что $u(t) \leqslant v(t)$ для всех $t \in Q$. Тогда $C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$ — порядково полная $\mathbb{R}$-коническая решетка (см. [20, 1.5.1]). Ясно, что $C_\infty(Q) \subset C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$, причем порядок и операции в $C_\infty(Q)$ индуцированы из $C^+_\propto(Q, \overline{\mathbb{R}})$. Из результатов о функциональном представлении K-пространств (см. [11, п. 1.4.6] и [20, П1.13]) вытекает следующее утверждение.

Пусть E — произвольное K-пространство и Q — стоунов компакт булевой алгебры $\mathfrak{P}(E)$. Тогда существует полулинейный изоморфизм, отображающий $\mathbb{R}$-коническую решетку $E^{\star}$ в

$\mathbb{R}$-коническую решетку $C^+_\propto(Q,\overline{\mathbb{R}})$. Образ E относительно этого изоморфизма служит фундаментом в $C_\infty(Q)$, а образ $E^\star$ совпадает с $C^+_\propto(Q,\overline{\mathbb{R}})$ в том и только в том случае, если E расширенно.

Очевидно, что элемент $\propto_\pi \in E^\star$ при указанном изоморфизме переходит в функцию, принимающую значение $+\infty$ на открыто-замкнутом множестве $Q_\pi \subset Q$, соответствующем проектору π. При этом ограничение этой функции на $Q \setminus Q_\pi$ входит в $C_\infty(Q \setminus Q_\pi)$.

2.1.4. Рассмотрим отображение $f : X \to E^\star$. *Эффективное множество* и *надграфик* мы определим обычным образом:

$$\operatorname{dom}(f) := \{x \in X : f(x) \in E\},$$
$$\operatorname{epi}(f) := \{(x, e) \in X \times E : f(x) \leqslant e\}.$$

Полунепрерывность снизу отображения f вводится по аналогии с [20, п. 4.3.3]. Ограничимся случаем, когда E содержит слабую единицу $\mathbb{1}$. Пусть X — банахово пространство. Возьмем точку $x_0 \in X$. Обозначим через π_∞ проектор в E, для которого $\pi_\infty f(x_0) = \propto_\pi$ и $\pi^d_\infty f(x_0) \in E$. Будем говорить, что f *полунепрерывно снизу в точке* x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует счетное разбиение единицы $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$, $\|x - x_0\| \leqslant 1/n$ выполняется

$$\pi'_n f(x) \geqslant \pi'_n(f(x_0) - \varepsilon\mathbb{1}), \quad \pi''_n f(x) \geqslant (1/\varepsilon)\pi''_n \mathbb{1},$$

где $\pi'_n := \pi_n \wedge \pi^d_\infty$ и $\pi''_n := \pi_n \wedge \pi_\infty$. Нетрудно убедиться, что отображение $f : X \to E^\star$ является полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда

$$f(x_0) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf\, \{f(x) : \ x \in X,\ \|x - x_0\| \leqslant 1/n\}.$$

Подчеркнем, что точные границы в этой формуле вычисляются в $E^\star$.

2.1.5. Приведем два примера мотивирующих введение пространства $E^\star$ (см. [20, § 5.1]).

Пример 1. Пусть $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}^\bullet$ — полунепрерывные снизу выпуклые функционалы, определенные на произвольном нормированном пространстве X. Положим $E := \mathbb{R}^2$ и определим операторы $F_1 : X \to E^\bullet$ и $F_2 : X \to E^\star$ формулами:

$$F_1(x) := \begin{cases} (f_1(x), f_2(x)), & \text{если } x \in \operatorname{dom}(f_1) \cap \operatorname{dom}(f_2), \\ (+\infty, +\infty) := +\infty, & \text{если } x \notin \operatorname{dom}(f_1) \cap \operatorname{dom}(f_2); \end{cases}$$

$$F_2(x) = (f_1(x), f_2(x)) \quad (x \in X),$$

и, стало быть,

$$E^\star = \mathbb{R}^2 \cup \{(0,\, +\infty),\, (+\infty, 0),\, (+\infty, +\infty)\}.$$

Если $x_0 \in \operatorname{dom}(f_1)$ и $x_0 \notin \operatorname{dom}(f_2)$, то оператор F_2 полунепрерывен снизу в точке x_0, а F_1 — нет. Таким образом, если мы рассматриваем операторы со значениями в $E^\bullet$, то происходит неестественное сужение класса полунепрерывных снизу операторов.

Пример 2. Пусть X — банахово пространство и (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой. Рассмотрим функцию $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}^\bullet$. Допустим, что функция $f(\omega, \cdot\,)$ выпукла при почти всех $\omega \in \Omega$, а композиция $\omega \mapsto f(\omega, u(\omega))$ измерима для всех u из некоторого пространства L измеримых по Бохнеру вектор-функций $u : \Omega \to X$. Тогда интегральный функционал $I_f : L \to \mathbb{R}^\bullet$ определяется следующим образом:

$$I_f(u) := \int\limits_\Omega f(\omega, u(\omega))\, d\mu(\omega),$$

если функция $\omega \mapsto f(\omega, u(\omega))$ суммируема, и $I_f(u) := +\infty$ — в противном случае, см. [29]. Пусть $E := L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ — K-пространство (классов эквивалентности) измеримых функций, а $I : L^1(\mu) \to \mathbb{R}$ — интеграл Лебега. Тогда имеет место представление $I_f = I \circ F$, где оператор $F : L \to E^\star$ определяется формулой $F(u) : \omega \mapsto f(\omega, u(\omega))$. В рассматриваемом контексте функцию f принято называть *интегрантом.* Как видно, допущение к рассмотрению лишь операторов F со значениями в $E^\bullet$ приводит к нежелательному сужению класса интегрантов.

2.1.6. Рассмотрим множество $\widetilde{\widetilde{E}} := \{(x,\pi,\rho) : x \in E,\ \pi x = \rho x = 0,\ \pi,\rho \in \mathfrak{P}(E),\ \pi \circ \rho = 0\}$. Определим на этом множестве порядок и алгебраические операции следующим образом:

$$(x_1,\pi_1,\rho_1) \leqslant (x_2,\pi_2,\rho_2) \ \Leftrightarrow\ \pi_1 \leqslant \pi_2 \ \&\ \rho_1 \geqslant \rho_2 \ \&\ (\pi_2 \vee \rho_1)^d x_1 \leqslant (\pi_2 \vee \rho_1)^d x_2;$$

$$a(x,\pi,\rho) = \begin{cases} (ax,\pi,\rho) & \text{при } a > 0, \\ (ax,\rho,\pi) & \text{при } a < 0, \\ (0,\pi,0) & \text{при } a = 0, \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R};$$

$$(x_1,\pi_1,\rho_1) + (x_2,\pi_2,\rho_2) = \big((\pi_1 \vee \pi_2 \vee \rho_1 \vee \rho_2)^d (x_1 + x_2), \pi_1 \vee \pi_2, (\rho_1 \vee \rho_2) \wedge (\pi_1 \vee \pi_2)\big)\,,$$

Очевидно, что $E^\star \subset \widetilde{\widetilde{E}}$. Обозначим символом $C^{\pm}_\infty(Q,\overline{\mathbb{R}})$ множество всех непрерывных функций из Q в $\overline{\mathbb{R}}$. Заметим, что $\widetilde{\widetilde{E}}$ изоморфно подмножеству в $C^{\pm}_\infty(Q,\overline{\mathbb{R}})$. Если E расширенное K-пространство, то образ E совпадает с $C^{\pm}_\infty(Q,\overline{\mathbb{R}})$.

2.1.7. Для операторов со значениями в $E^\star$ остаются в силе основные формулы субдифференциального исчисления. Сначала приведем алгебраический вариант формулы Моро — Рокафеллара.

Пусть X — произвольное векторное пространство, а E — K-пространство. Рассмотрим сублинейный оператор $p : X \to E^\star$. Опорное множество (субдифференциал в нуле) ∂p оператора p вводится точно так же, как и в [20, 1.4.11]:

$$\partial p := \{T \in L(X,E) : \ (\forall x \in X)\, Tx \leqslant p(x)\}.$$

Однако, в отличие случая когда p всюду определенный оператор (см. [20, определение 1.4.11]), включение $T \in \partial p$ не сводится к справедливости для всех $x \in \mathrm{dom}(p)$ неравенства $Tx \leqslant p(x)$, а требует также выполнения неравенств вида $\pi^d Tx \leqslant \pi^d e$, если элемент $p(x) \in E^\star$ определяется парой (e,π). Соответствующим образом изменяется и определение общего положения (ср. [20, пп. 3.1.9 и 3.2.8]). Будем говорить, что сублинейные операторы $p_1,\dots,p_n : X \to E^\star$ *находятся в алгебраическом общем положении*, если существует такое подпространство $Z_0 \subset X^n$, что $Z_0 = \prod_{k=1}^n \mathrm{dom}(\pi p_k) - \Delta_n(X)$ для любого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$, где $\Delta_n(X) := \{(x,\dots,x) \in X^n : x \in X\}$. Заметим, что для двух сублинейных операторов условие общего положения равносильно существованию подпространства $X_0 \subset X$, обеспечивающего справедливость равенства $X_0 = \mathrm{dom}(\pi p_1) - \mathrm{dom}(\pi p_2)$ при всех $\pi \in \mathfrak{P}(E)$.

Теорема [4]. *Если сублинейные операторы $p_1,\dots,p_n : X \to E^\star$ находятся в алгебраическом общем положении, то справедлива формула Моро — Рокафеллара*

$$\partial(p_1 + \ \dots + p_n) = \partial p_1 + \ \dots + \partial p_n.$$

Используя технические приемы, развитые в [20, гл. 2 и 4], из формулы Моро — Рокафеллара можно вывести алгебраические варианты основных формул субдифференцирования.

2.1.8. Приведем формулу для вычисления опорного множества супремума конечного числа сублинейных операторов.

Теорема [4]. *Если сублинейные операторы $p_1,\dots,p_n : X \to E^\star$ находятся в алгебраическом общем положении, то справедлива формула*

$$\partial(p_1 \vee \dots \vee p_n) = \bigcup_{\substack{0 \leqslant \alpha_1,\dots,\alpha_n \in E \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = I_E}} \big\{\partial(\alpha_1 \circ p_1) + \ \dots + \partial(\alpha_n \circ p_n)\big\}.$$

2.1.9. Принято говорить, что выпуклые операторы $f_1,\dots,f_n : X \to E^\star$ *находятся в алгебраическом общем положении*, если в общем положении находятся преобразования Хёрмандера этих операторов $H(f_1),\dots,H(f_n)$. Напомним, что преобразование Хёрмандера $H(f) : X \times \mathbb{R} \to E^\star$ выпуклого оператора $f : X \to E^\star$ вводится формулой

$$H(f) : (x,t) \mapsto \begin{cases} tf(x/t), & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t = 0,\ x = 0; \\ +\infty, & \text{если } t < 0 \text{ или } t = 0 \text{ и } x \neq 0. \end{cases}$$

Преобразование Юнга — Фенхеля $f^* : L(X,E) \to \widetilde{\widetilde{E}}$ отображения $f : X \to E^\star$ определяется формулой:

$$f^*(T) = \sup\{Tx - f(x) : \ x \in X\} \quad (T \in L\,(X,E)),$$

где супремум вычисляется в $\widetilde{\widetilde{E}}$. Непосредственно проверяется, что $\pi f^*(T) = (\pi f)^*(\pi T)$ для $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ и $T \in L(X,E)$. Отсюда вытекает, в частности, что если $\pi T = \pi S$ для некоторых $S, T \in L(X,E)$, то $\pi f^*(T) = \pi f^*(S)$. Заметим также, что если $T \in \operatorname{dom}(\pi f)^*$, то $\pi^d T = 0$.

2.1.10. Теорема [4]**.** *Если выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^\star$ находятся в алгебраическом общем положении, то справедлива формула*

$$(f_1 + \ldots + f_n)^* = f_1^* \oplus \ldots \oplus f_n^*.$$

Указанная формула точна в следующем смысле: для произвольного проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ и для любого $T \in \operatorname{dom}(\pi(f_1 + \ldots + f_n)^*)$ существуют линейные операторы $T_i \in L(X,E)$ $(i := 1, \dots, n)$ такие, что

$$T = T_1 + \ldots + T_n,$$
$$\pi(f_1 + \ldots + f_n)^*(T) = \pi f_1^*(T_1) + \ldots + \pi f_n^*(T_n).$$

2.1.11. Теорема [4]**.** *Если выпуклые операторы $f_1, \dots, f_n : X \to E^\star$ находятся в алгебраическом общем положении, то справедлива формула*

$$(f_1 \vee \ldots \vee f_n)^* = \inf\left\{\bigoplus_{l=1}^{n} (\alpha_l \circ f_l)^* : \ \alpha_l \in \operatorname{Orth}(E)^+, \ \sum_{l=1}^{n} \alpha_l = I_E\right\}.$$

Указанная формула точна в следующем смысле: для произвольного проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ и для любого $T \in \operatorname{dom}(\pi(f_1 \vee \ldots \vee f_n)^*)$ существуют линейные операторы $T_l \in L(X,E)$ и ортоморфизмы $\alpha_l \in \operatorname{Orth}(E)$ $(l := 1, \dots, n)$ такие, что

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = I_E, \quad T = T_1 + \ldots + T_n,$$
$$\pi(f_1 \vee \ldots \vee f_n)^*(T) = \pi(\alpha_1 f_1)^*(T_1) + \ldots + \pi(\alpha_n f_n)^*(T_n).$$

2.2. Необходимые условия экстремума в векторных квазидифференцируемых экстремальных задачах

Этот параграф посвящен уточнению необходимых условий экстремума для многоцелевых квазидифференцируемых экстремальных задач, см. [1, 2, 3]. С помощью векторной теоремы о биполяре выводятся необходимые условия экстремума в векторной квазидифференцируемой задаче с ограничениями типа неравенства при выполнении слабого условия регулярности.

2.2.1. Пусть X — действительное векторное пространство, а E — произвольное K-пространство. Оператор $f : X \to E^\bullet$ называют *квазидифференцируемым в точке* x_0, если он дифференцируем по направлениям в этой точке и его производная по направлениям — квазилинейный оператор (т. е. представима в виде разности двух сублинейных операторов):

$$f'(x_0)h = p(h) - q(h) = \sup_{T \in \partial p} Th - \sup_{T' \in \partial q} T'h \quad (\forall h \in X).$$

Таким образом, в силу двойственности Минковского, квазилинейному оператору $f'(x_0) = p - q$, можно поставить в соответствие упорядоченную пару опорных множеств $(\partial p, \partial q)$. Заметим, что представление $f'(x_0)$ в виде разности двух сублинейных операторов неединственно (достаточно прибавить к p и q любой сублинейный оператор). Пары $(\partial p, \partial q)$ и $(\partial p_1, \partial q_1)$ назовем эквивалентными, если по ним восстанавливается один и тот же квазилинейный оператор, т. е.

$$f'(x_0)h = \sup_{T \in \partial p} Th - \sup_{T' \in \partial q} T'h = \sup_{T \in \partial p'} Th - \sup_{T' \in \partial q'} T'h \quad (\forall h \in X).$$

Класс эквивалентных пар опорных множеств $[\partial p, \partial q]$ называют *квазидифференциалом* f в точке x_0 и обозначают символом $\mathscr{D} f(x_0)$. При этом опорные множества ∂p и ∂q принято называть соответственно *субдифференциалом* и *супердифференциалом* функции f в точке x_0 и обозначать $\underline{\partial} f(x_0)$ и $\overline{\partial} f(x_0)$. Итак,

$$\mathscr{D} f(x_0) := [\partial p, \partial q] := [\underline{\partial} f(x_0), \overline{\partial} f(x_0)].$$

2.2.2. Рассмотрим векторную программу (C, f), т. е. многоцелевую экстремальную задачу

$$x \in C, \quad f(x) \to \inf,$$

где $C \subset X$ — некоторое множество, а $f : X \to E^{\bullet}$ — отображение, предполагаемое в дальнейшем квазидифференцируемым в нужной точке из $\operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$. Здесь $\operatorname{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < \infty\}$ означает эффективную область оператора f, а $\operatorname{core}(M)$ — алгебраическую внутренность множества M.

Точки $x \in C$ называют *допустимыми* точками задачи (C, f). Допустимая точка x_0 — *идеальный локальный инфимум* в программе (C, f), если существует множество $U \subset X$ такое, что $0 \in \operatorname{core}(U)$ и

$$f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in C \cap (x_0 + U)\}.$$

Следующая теорема дает необходимые условия экстремума в безусловной квазидифференцируемой задаче, т. е. при $C = X$, см. [2] или [20, теорема 6.5.1 (1)].

Теорема [2]. *Пусть отображение $f : X \to E^{\bullet}$ квазидифференцируемо в точке $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$. Если x_0 — идеальный локальный оптимум в безусловной задаче $f(x) \to \inf$, то $\overline{\partial} f(x_0) \subset \underline{\partial} f(x_0)$ или, что то же самое, $\mathscr{D} f(x_0) \geqslant 0$.*

2.2.3. Пусть X — векторное пространство, E и F — некоторые K-пространства, $f : X \to E^{\bullet}$ и $g : X \to F^{\bullet}$. Рассмотрим векторную программу вида (C, f), где $C := \{x \in X : g(x) \leqslant 0\}$, причем отображения f и g квазидифференцируемы в нужной точке. Эту программу мы будем обозначать символом (g, f).

(1) *Условие квазирегулярности.* Векторную программу (g, f) называют *квазирегулярной в точке* $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$, если выполнены условия:

(a) существуют сублинейный оператор Магарам $r : F \to E$ и поглощающее множество $U \subset X$ такие, что для любого $x \in x_0 + U$ выполняется $\pi_x f(x_0) \leqslant \pi_x f(x)$, где $\pi_x := [(r \circ g(x))^-]$ — проектор на компоненту, порожденную элементом $(r \circ g(x))^-$;

(b) для любых оператора $T \in \partial r(g(x_0))$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ выполняется $\pi T \circ \overline{\partial} g(x_0) \cap \pi T \circ \underline{\partial} g(x_0) = \varnothing$.

(2) **Теорема** [20, 6.5.5]. *Если допустимая точка $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom} f)$ есть идеальный локальный оптимум квазирегулярной квазидифференцируемой задачи (g, f), то для любых $s \in \overline{\partial} f(x_0)$ и $S \in \overline{\partial} g(x_0)$ существуют положительный ортоморфизм $\alpha \in \operatorname{Orth}^+(E)$ и оператор $\gamma \in L^+(F, E)$ такие, что совместна система условий*

$$\ker \alpha = \{0\}, \quad \gamma \circ g(x_0) = 0,$$
$$0 \in \alpha(\underline{\partial} f(x_0) - s) + \gamma \circ (\underline{\partial} g(x_0) - S).$$

2.2.4. В некоторых вопросах выпуклого анализа важную роль играет векторнозначная двойственность, представляющая собой пару векторных пространств с фиксированным билинейным оператором, принимающим свои значения из пространства Канторовича. Одним из центральных результатов возникающей при этом теории является теорема о биполяре (см, например, [8]).

Рассмотрим некоторое K-пространство E и вещественные векторные пространства X и Y. Пусть задан билинейный оператор $\langle \cdot | \cdot \rangle$ из $X \times Y$ в E. С этим оператором связаны бра-отображение $\langle \cdot | : X \to L(Y, E)$ и кет-отображение $| \cdot \rangle : Y \to L(X, E)$, определяемые следующими формулами:

$$\langle x | : y \mapsto \langle x | y \rangle \quad (x \in X, \ y \in Y),$$
$$| y \rangle : x \mapsto \langle x | y \rangle \quad (x \in X, \ y \in Y),$$

где $L(U, V)$, — как обычно, множество всех линейных операторов из U в V. Нетрудно видеть, что бра-отображение и кет-отображение являются линейными операторами.

Двойственностью над E или E*-значной двойственностью* называют тройку $(X, Y, \langle\cdot|\cdot\rangle)$, если соответствующие бра-отображение $\langle\cdot|$ и кет-отображение $|\cdot\rangle$ инъективны. В этой ситуации говорят также, что X и Y приведены в векторную двойственность оператором $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Часто этот оператор называют *каноническим билинейным оператором двойственности*, а саму двойственность обозначают $X \leftrightarrow Y$. Двойственность $(Y, X, \langle\cdot|\cdot\rangle')$, где $\langle y|x\rangle' := \langle x|y\rangle$ $(x \in X, y \in Y)$, отождествляют с $X \leftrightarrow Y$.

Подмножество $A \subset Y$ называется *слабо ограниченным*, если для любого $x \in X$ множество $\{\langle x|y\rangle : y \in A\}$ порядково ограничено в E.

2.2.5. Пусть $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — некоторое семейство в Y, а $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в булевой алгебре проекторов $\mathfrak{P}(E)$. Элемент $y \in Y$ называют *перемешиванием семейства* (y_ξ) *относительно* (π_ξ), если $\pi_\xi\langle x|y - y_\xi\rangle = 0$ для всех $x \in X$ и $\xi \in \Xi$. Нетрудно показать, что перемешивание единственно. Перемешивание семейства (y_ξ) относительно (π_ξ) обозначается символом $\mathrm{mix}(\pi_\xi y_\xi) := \mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}(\pi_\xi y_\xi)$. Множество всех перемешиваний $\mathrm{mix}(\pi_\xi y_\xi)$, где $(y_\xi) \subset C$, называется циклической оболочкой C и обозначается символом $\mathrm{mix}(C)$. Если $\mathrm{mix}(C) = C$, то C принято называть *циклическим*.

Множество $C \subset X$ называется *разложимым*, если для любого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ и произвольного элемента $x \in C$ существует элемент $\pi x \in C$ такой, что $\pi\langle x|y\rangle = \langle \pi x|y\rangle$ и $\pi^\perp\langle x|y\rangle = 0$ для всех $y \in Y$, т. е. $x = \mathrm{mix}\{\pi x, \pi^\perp 0\}$. Таким образом, множество $C \subset X$ будет разложимым, если существует перемешивание $\mathrm{mix}(\pi_\xi y_\xi) \in C$ для каждого конечного семейства $(y_\xi) \subset C$ и для любого конечного разбиения единицы $(\pi_\xi) \in \mathfrak{P}(E)$. Если же существуют перемешивания $\mathrm{mix}(\pi_\xi y_\xi) \in C$ для любых слабо ограниченных семейств $(y_\xi) \subset C$ относительно произвольных разбиений единицы $(\pi_\xi) \in \mathfrak{P}(E)$, то говорят, что C *дизъюнктно полно*. Двойственность $X \leftrightarrow Y$ называют *разложимой* (*дизъюнктно полной*) по Y, если Y есть разложимое (дизъюнктно полное) множество.

2.2.6. Пусть A — подкольцо кольца $\mathrm{Orth}(E)$. Если на Y можно определить структуру модуля над A так, что каноническая билинейная форма $\langle\cdot|\cdot\rangle$ становится A-однородной по второй переменной, то говорят, что двойственность $X \leftrightarrow Y$ *допускает структуру* A*-модуля по* Y или что Y *допускает согласованную модульную структуру над* A.

Если двойственность $X \leftrightarrow Y$ над E разложима по Y, то она допускает согласованную модульную структуру по Y над кольцом конечнозначных разложений единицы в булевой алгебре $\mathfrak{P}(E)$. В частности, равенство $y = \mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}\,\pi_\xi y_\xi$ имеет место в том и только в том случае, если

$$\langle x|y\rangle = \sum_{\xi\in\Xi}\langle x|\pi_\xi y_\xi\rangle \quad (x \in X).$$

2.2.7. Приведем пример векторнозначной двойственности, допускающей согласованную модульную структуру.

Пусть X — векторное пространство, E — K-пространство и пусть $L(X, E) \leftrightarrow X$ — двойственность над E. Канонический билинейный оператор определим формулой

$$\langle T|x\rangle := Tx \quad (T \in L(X, E),\ x \in X).$$

Очевидно, что двойственность $L(X, E) \leftrightarrow X$ дизъюнктно полна по $L(X, E)$.

Рассмотрим пространство $W := L(L(X, E), E)$, состоящее из линейных операторов

$$\bar{x} : L(X, E) \to E, \ \ \bar{x}(T) := Tx \ \ (T \in L(X, E),\ x \in X).$$

И заметим, что $W \supset X$ является модулем над $A := \mathrm{Orth}(E)$, следовательно, двойственность $L(X, E) \leftrightarrow W$ допускает согласованную модульную структуру над A. Обозначим через $\overline{X}$ модуль натянутый на X с операциями, индуцированными из W. Тогда двойственность $L(X, E) \leftrightarrow \overline{X}$ имеет согласованную модульную структуру по W над A и дизъюнктно полна по $L(X, E)$.

2.2.8. Введем теперь полярные множества относительно векторной двойственности. Пусть E — некоторое K-пространство с единицей $\mathbf{1}$ и $X \leftrightarrow Y$ — произвольная E-значная двойственность. *Полярой* C° множества $C \subset X$ называют множество, определяемое формулой:

$$C^\circ := \big\{y \in Y : \langle x|y\rangle \leqslant \mathbf{1},\ x \in C\big\}.$$

Множество $C^{\circ\circ} := (C^\circ)^\circ$ называют *биполярой* C. Для всякого подмножества $C \subset X$ поляра C° является слабо замкнутым циклическим коническим отрезком. Напомним, что *коническим отрезком* называют выпуклое множество, содержащее нуль. Если K — конус, то поляра K° вычисляется по формуле

$$K^\circ := \{y \in Y : \langle x|y\rangle \leqslant 0, \ x \in K\}.$$

2.2.9. Теорема о биполяре [8]**.** *Пусть $X \leftrightarrow Y$ — это E-значная двойственность, дизъюнктно полная по X и допускающая согласованную модульную структуру по Y над кольцом* $\mathrm{Orth}(E)$*. Биполяра произвольного множества $C \subset X$ совпадает со слабым замыканием циклической оболочки множества* $\mathrm{co}(C \cup \{0\})$*. Символически:*

$$C^{\circ\circ} = \mathrm{cl}(\mathrm{mix}(\mathrm{co}(C \cup \{0\}))),$$

где cl *— операция слабого замыкания.*

2.2.10. Пусть F еще одно пространство Канторовича, $l : X \to E^\bullet$ и $L : X \to E^\bullet$ — квазилинейные операторы. Рассмотрим квазилинейную экстремальную задачу (L, l):

$$l(h) \to \inf, \qquad L(h) \leqslant 0.$$

Теорема [5]**.** *Для квазилинейной задачи (L, l) следующие утверждения равносильны:*
(1) 0 *— решение задачи (L, l);*
(2) $(\forall s \in \overline{\partial} l)(\forall S \in \overline{\partial} L)\ 0 \in (\underline{\partial} l - s) + \mathrm{cl}\,\mathrm{mix}\,\mathrm{cone}(\underline{\partial} L - S)$.

2.2.11. Пусть $f : X \to E^\bullet$ и $g : X \to F^\bullet$ — квазидифференцируемые в нужной точке операторы. Рассмотрим квазидифференцируемую векторную программу (g, f), т. е. экстремальную задачу

$$f(x) \to \inf, \quad g(x) \leqslant 0.$$

(1) *Условие слабой квазирегулярности.* Квазидифференцируемую векторную программу (g, f) назовем *слабо квазирегулярной в точке* x_0, если существуют возрастающий сублинейный оператор $r : F \to E$ и поглощающее множество $U \subset X$ такие, что выполняются условия

(a) $r(e_n) \downarrow 0$ для любой последовательности $(e_n) \subset F$, $e_n \downarrow 0$;

(b) для любого $x \in x_0 + U$ выполняется неравенство $\pi_x f(x_0) \leqslant \pi_x f(x)$, где $\pi_x := [(r \circ g(x))^-]$ — проектор на компоненту, порожденную элементом $(r \circ g(x))^-$.

Условие слабой квазирегулярности выполняется, если, например, существует такой возрастающий сублинейный оператор $r : F \to E$, что для любого $x \in X$ из $g(x) \nleqslant 0$ следует $r \circ g(x) \geqslant 0$.

(2) **Теорема** [5]**.** *Если допустимая точка x_0 есть идеальный локальный оптимум в слабо квазирегулярной квазидифференцируемой (в точке x_0) векторной программе (g, f), то*

$$0 \in (\underline{\partial} f(x_0) - s) + \rho^d\,\mathrm{cl}\,\mathrm{mix}\,\mathrm{cone}_E(\underline{\partial} g(x_0) - S)$$

для любых $s \in \overline{\partial} f(x_0)$ и $S \in \overline{\partial} g(x_0)$.

2.3. О субдифференциале сублинейного интегрального оператора

Вычисление субдифференциалов негладких отображений является важной задачей теории экстремальных задач. К числу наиболее ярких результатов в этом направлении следует отнести формулы вычисления субдифференциалов интегральных функционалов, заданных на различных классах функциональных пространств. Первая работа в этом направлении была выполнена Штрассеном, вычислившим субдифференциал сублинейного функционала [84]. В дальнейшем, в работах ряда советских и зарубежных математиков была создана теория двойственности интегральных функционалов, заданных на пространствах измеримых скалярных и векторнозначных функций [29, 56]. В 1990-х годах само понятие вектор-функции (измеримой или непрерывной) было помещено в новую концептуальную рамку, благодаря пионерской теории банаховых расслоений [7]. В связи с этим возникает естественная задача —

расширить теорию двойственности на пространства сечений банаховых расслоений. Первый шаг в этом направлении сделан в работе [18].

2.3.1. Через (Ω, Σ, μ) обозначим пространство с мерой. Банахово расслоение над Ω — произвольное отображение $\mathscr{X}$, определенное на Ω и ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ некоторое банахово пространство $\mathscr{X}_\omega$ — слой в точке ω. Норму элемента x в слое $\mathscr{X}_\omega$ будем обозначать через $\|x\|_\omega := \|x\|_{\mathscr{X}_\omega}$. Функция v, определенная на множестве $\mathrm{dom}(v)$, называется сечением над $\mathrm{dom}(v)$ расслоения $\mathscr{X}$, если $v(\omega) \in \mathscr{X}(\omega)$ для всех $\omega \in \mathrm{dom}(v)$. Будем говорить, что сечение определено почти всюду, если множество $\Omega \backslash \mathrm{dom}(v)$ имеет нулевую меру. Множество почти всюду определенных сечений расслоения $\mathscr{X}$ обозначается $S\,(\Omega, \mathscr{X})$. Множество сечений $V \subset S\,(\Omega, \mathscr{X})$ называется послойно плотным в $\mathscr{X}$, если множество $\{v(\omega) : v \in V, \omega \in \mathrm{dom}(v)\}$ послойно плотно в $\mathscr{X}(\omega)$ для любой точки $\omega \in \Omega$. Сечение называется *скалярно измеримым*, если измерима функция $\omega \mapsto \|v(\omega)\|_\omega$. Линейная комбинация конечного числа почти всюду определенных сечений также является почти всюду определенным сечением. Оно определяется поточечно и определено на пересечении их областей определения.

2.3.2. *Измеримой структурой* в $\mathscr{X}$ называют послойно плотное множество скалярно измеримых сечений $\mathscr{I} \subset S\,(\Omega, \mathscr{X})$, являющееся векторным подпространством в $S\,(\Omega, \mathscr{X})$. Банахово расслоение над множеством $\mathscr{X}$ с заданной измеримой структурой называют *измеримым банаховым расслоением* (ИБР) над Ω и обозначают $(\mathscr{X}, \mathscr{I})$.

Пусть $(\mathscr{X}, \mathscr{I})$ — измеримое банахово расслоение над Ω. Сечение, совпадающее с v на измеримом множестве $A \subset \Omega$ и равное нулю на дополнении к A, обозначим через $[A]v$. Сечение $s \in S\,(\Omega, \mathscr{X})$ называют ступенчатым, если $s = \sum_{i=1}^n [A_i]v_i$, для некоторых $n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ и $v_1, \dots, v_n \in \mathscr{I}$. Сечение $v \in S\,(\Omega, \mathscr{X})$ называют *измеримым*, если для каждого $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$, существует такая последовательность $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ступенчатых сечений, что $v_n(\omega) \to v(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Множество всех измеримых сечений расслоения $\mathscr{X}$ обозначим $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$. Для $u, v \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ положим $v \sim u$, если $v(\omega) = u(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Класс эквивалентности, содержащий элемент $v \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$, обозначается символом $\overline{v} := v^\sim$. Фактор-множество $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}) \backslash \sim$ естественным образом превращается в векторное пространство. Для каждого элемента $v^\sim \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}) \backslash \sim$ можно ввести векторную норму $\boldsymbol{|} v^\sim \boldsymbol{|} = \boldsymbol{|} \overline{v} \boldsymbol{|} \in L_0(\Omega, \mu)$. Тогда пара $(\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}) \backslash \sim, \boldsymbol{|} \cdot \boldsymbol{|})$ становится решеточно нормированным пространством над $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$. В дальнейшем это пространство будем обозначать $L_0(\Omega, \Sigma, \mu, \mathscr{X})$ или просто $L_0(\Omega, \mathscr{X})$. Следует отметить, что пространство $L_0(\Omega, \mathscr{X})$ можно наделить естественной структурой модуля над кольцом $L_0(\Omega, \mu)$, полагая $\overline{e}\overline{v} := \overline{(ev)}$ для всех $e \in L_0(\Omega)$ и $v \in L_0(\Omega, \mathscr{X})$. При этом выполняется $\boldsymbol{|} \overline{e}\overline{v} \boldsymbol{|} = |\overline{e}|\, \boldsymbol{|} \overline{v} \boldsymbol{|}$.

Измеримое банахово расслоение $\mathscr{X}$ называется *сепарабельным*, если существует счетное множество измеримых сечений послойно плотное в $\mathscr{X}$.

Пусть E — идеальное пространство над $L_0(\Omega)$. Положим по определению

$$E(\mathscr{X}) := \{v \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu, \mathscr{X}) : \boldsymbol{|} v \boldsymbol{|} \in E\}.$$

Известно, что $E(\mathscr{X})$ — это bo-полное решеточно нормированное пространство, а $L_0(\Omega, \mathscr{X})$ — его максимальное расширение [11].

2.3.3. Докажем техническую лемму, которая понадобиться в дальнейшем.

Лемма. *Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство мерой, $\mathscr{X}$ — ИБР над (Ω, Σ, μ) с лифтингом и F — банахово пространство. Тогда существует и единственно ИБР с лифтингом $\mathscr{Z}$ над Ω такое, что в каждой точке ω слой $\mathscr{Z}(\omega)$ является подпространством $B(\mathscr{X}(\omega), F)$.*

$\lhd$ Рассмотрим постоянное ИБР $\Omega \times \{F\}$. Воспользовавшись теоремой 5.2.3 из [7], найдем ИБР с лифтингом $\mathscr{Y}$ над Ω, такое что F является банаховым подпространством каждого слоя $\mathscr{Y}(\omega)$. Осталось применить теорему 4.4.6 из [7]. $\rhd$

2.3.4. Введем необходимый нам класс сублинейных операторов. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство мерой, $\mathscr{X}$ — ИБР над (Ω, Σ, μ) с лифтингом, $E \subset L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ — идеальное пространство и E' — идеальное пространство, двойственное к E,

$$E' := \left\{ e' \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu) : \ (\forall e \in E) \ \int_\Omega |e'e|\, d\mu(\omega) < \infty \right\}.$$

Рассмотрим банахову решетку F с порядково непрерывной нормой и пусть $(K_\omega)_{\omega\in\Omega}$ — семейство непрерывных сублинейных операторов $K_\omega : \mathscr{X}_\omega \to F$ таких, что для всех $u \in E(\mathscr{X})$ вектор-функция $\omega \mapsto K_\omega(u(\omega)) := K(\omega, u(\omega))$ измерима по Бохнеру, а функция $\omega \mapsto \|K_\omega\|$ мажорируется некоторой измеримой функцией из E'. Тогда определен сублинейный оператор $K : E(\mathscr{X}) \to F$

$$K(u) = \int_\Omega K(\omega, u(\omega))d\mu(\omega) \quad (u \in E(\mathscr{X})),$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера. В данном контексте возникает естественная задача — описать субдифференциал оператора K. Впервые аналогичный результат для выпуклых интегральных функционалов был получен Штрассеном в работе [84]. Обобщение этого результата для сублинейных функционалов, определенных на пространстве сечений банаховых расслоений, имеется в работе А. Г. Кусраева [18].

2.3.5. Обозначим через $\int_\Omega \partial K_\omega d\mu(\omega)$ множество всех линейных операторов из $E(\mathscr{X})$ в F, которые можно представить формулой

$$u(\cdot) \mapsto \int_\Omega \langle u(\omega), u'(\omega)\rangle d\mu(\omega),$$

где $u'(\cdot)$ — измеримое сечение, принадлежащее $\mathscr{Z}$ такое, что $u'(\omega) \in \partial K_\omega$ для всех $\omega \in \Omega$ и $|u'| \in E'$. Далее, через $E(\mathscr{X})^\star$ обозначим множество всех линейных операторов $T : E(\mathscr{X}) \to L_1(\Omega, \Sigma, \mu, F)$, для которых существует элемент $e' \in E'$ такой, что

$$|Tu| \leqslant e' \, |u| \, . \qquad (*)$$

В случае, когда $\mathscr{X}$ — сепарабельное ИБР, для пространства $E(\mathscr{X})^\star$ существует удобное описание.

Лемма. *Если $\mathscr{X}$ — сепарабельное ИБР с лифтингом, то пространство измеримых сечений $E'(\mathscr{Z})$ и пространство операторов $E(\mathscr{X})^\star$ линейно изометричны. Изометрия состоит в сопоставлении измеримому сечению $v \in E'(\mathscr{Z})$ оператора $T : E(\mathscr{X}) \to L_1(\Omega, \Sigma, \mu, F)$, задаваемого формулой $T_v : u \mapsto \langle u, v\rangle$.*

$\lhd$ Воспользуемся неравенством $|\langle u, v\rangle| \leqslant |u| \, |v|$. Так как $|v| \in E'$, то $T_v \in E(\mathscr{X})^\star$. Пусть теперь $T \in E(\mathscr{X})^\star$. Учитывая формулу $(*)$ и разлагая пространство $E(\mathscr{X})$ на дизъюнктные полосы, можем полагать, что $|T| = 1$. Долее, можем считать, что оператор T действует в $L_\infty(\mu, \mathscr{Y})$. Если теперь ρ — лифтинг пространства $L_\infty(\mu, \mathscr{Y})$, то сечение $v \in E'(\mu, \mathscr{Z})$, определяемое формулой

$$\langle x, v(\omega)\rangle := (\rho \circ T)(\omega), \quad x = u(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

будет требуемым. $\rhd$

2.3.6. С семейством $(K_\omega)_{\omega\in\Omega}$ мы свяжем оператор $R : E(\mathscr{X}) \to L_1(\Omega, \Sigma, \mu, F)$ по формуле

$$Ru := \pi(K(\omega, u(\omega))) \quad (u \in E(\mathscr{X})),$$

где $\pi(g)$ — класс эквивалентности измеримой вектор-функции. Ясно, что R — сублинейный оператор.

Лемма. *Для произвольного измеримого банахова расслоения имеет место формула*

$$\partial K = \int_\Omega \partial R_w \, d\mu(\omega).$$

$\lhd$ Достаточно воспользоваться тем фактом, что оператор Магарам можно выносить из под знака субдифференциала слева [20, теорема 4.5.2]. В случае когда F — банахова решетка с порядково непрерывной нормой интеграл Бохнера $I : L_1(\Omega, \Sigma, \mu, F) \to F$ является оператором Магарам [11, теорема 4.2.4] и таким образом справедлива формула

$$\partial(I \circ R) = I \circ \partial R,$$

откуда и следует требуемое. $\rhd$

2.3.7. Сформулируем теперь основной результат этого параграфа.

Теорема. *Пусть* (Ω, Σ, μ) — *пространство с мерой, обладающее свойством прямой суммы, а* $\mathscr{X}$ — *сепарабельное ИБР над* (Ω, Σ, μ) *с лифтингом. Пусть семейство операторов* $(K_\omega)_{\omega\in\Omega}$ *такое же как в* 3.3. *Тогда имеет место представление*

$$\partial K = \int_\Omega \partial K_\omega \, d\mu(\omega).$$

$\lhd$ Включение $\partial K \supset \int_\Omega \partial K(\omega, u(\omega)) d\mu(\omega)$ очевидно. Требуется установить обратное включение. Пусть $T \in \partial K$ и $\|K_\omega\| \leqslant e'(\omega)\,(\omega \in \Omega)$ для некоторого $e' \in E'$. Тогда справедливо неравенство $|Tu| \leqslant e'\,|u| \quad (u \in E(\mathscr{X}))$ и, следовательно, $T \in E(\mathscr{X})^\star$. По лемме 2.3.5 справедливо представление $Tu = \langle u, v \rangle$ $(u \in E(\mathscr{X}))$ для некоторого $v \in E'(\mathscr{X})$. Привлекая свойство прямой суммы и разлагая пространство $E(\mathscr{X})$ на дизъюнктные полосы, без ограничения общности будем считать, что характеристическая функция множества Ω принадлежит E. Пусть последовательность измеримых сечений $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ плотна в $\mathscr{X}$. Заменив, если надо u_n на $\frac{u_n}{1+|u_n|}$ можем считать, что $(u_n) \in E(\mathscr{X})$. Возьмем произвольный представитель v_0 из класса эквивалентности v. Символом $D(u)$ обозначим множество тех $\omega \in \Omega$, для которых нарушается неравенство $\langle u(\omega), v_0(\omega)\rangle \leqslant K(\omega, u(\omega))$. Тогда $D = \bigcup_{n=1}^\infty D(u_n)$ — множество нулевой меры. Для любого $\omega \notin D$ выполняется неравенство $\langle x, v_0(\omega)\rangle \leqslant K(\omega, u(\omega))$, когда $x \in X'(\omega) := \{u_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$. Так как множество $X'(\omega)$ плотно в $\mathscr{X}_\omega$, то в силу непрерывности операторов K_ω, $v_0(\omega)$ это неравенство выполняется на всем пространстве $\mathscr{X}_\omega$. Это означает, что $v_0(\omega) \in \partial K_\omega$. Определим теперь сечение u', полагая что $u'(\omega) := v_0(\omega)$ при $\omega \notin D$ и считая $u'(\omega)$ произвольным оператором из ∂K_ω при $\omega \in D$. Тогда u' — измеримое сечение из $E'(\mathscr{X})$ для всех $\omega \in \Omega$ и $u'(\omega) = v_0(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Так как $\langle u(\omega), u'(\omega)\rangle \leqslant \langle u(\omega), v_0(\omega)\rangle$ для почти всех $\omega \in \Omega$, то $Tu = \langle u(\omega), u'(\omega)\rangle \leqslant \langle u(\omega), v_0(\omega)\rangle$. $\rhd$

Замечание. В случае когда банахова решетка F совпадает с полем действительных чисел $\mathbb{R}$, приходим к результату работы [18].

Глава 3. Ортогонально аддитивные операторы

3.1. Предварительные сведения

Здесь мы приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего изложения. Цель настоящего параграфа — зафиксировать терминологию, обозначения и ввести необходимые понятия. Стандартный источник для ссылок по теории векторных решеток — монография [11]. Теория операторов Урысона, действующих в векторных решетках, подробно изложена в [75].

3.1.1. Рассмотрим векторную решетку F и векторное пространство W. Говорят, что оператор $T : F \to W$ *ортогонально аддитивен*, если $T(f_1+f_2) = Tf_1+Tf_2$ для дизъюнктных f_1 и f_2. Ортогонально аддитивный оператор T называется *порядково ограниченным*, если он переводит порядково ограниченные множества в порядково ограниченные множества. Оператор $T : E \to F$, действующий между векторными решетками E и F, называется *абстрактным оператором Урысона*, если он порядково ограничен и ортогонально аддитивен. Множество всех абстрактных операторов Урысона из E в F обозначается $\mathscr{U}(E, F)$. Частичный порядок в векторном пространстве $\mathscr{U}(E, F)$ вводится с помощью конуса $\mathscr{U}_+(E, F)$, определяемого следующим образом:

$$T \in \mathscr{U}_+(E, F) \Leftrightarrow (\forall e \in E)\ Te \geqslant 0.$$

При этом оператор $S \geqslant T$ в том и только том случае, если $S - T \in \mathscr{U}_+(E, F)$.

В случае, когда пространство образов оператора порядково полно, для $\mathscr{U}(E, F)$ аналогично линейному случаю, можно построить порядковое исчисление типа Рисса — Канторовича.

3.1.2. *Пусть E и F — векторные решетки, причем решетка F порядково полна. Тогда $\mathscr{U}(E, F)$ — порядково полная векторная решетка и для любых двух операторов $T, S \in \mathscr{U}(E, F)$ и вектора $f \in E$ справедливы формулы* [75]:

$$\begin{gathered}(T \vee S)(f) := \sup\{Tg + Sh :\ g + h = f;\ g \perp h\};\\ (T \wedge S)(f) := \inf\{Tg + Sh : g + h = f;\ g \perp h\};\\ T^+(f) := \sup\{Tg :\ g \leqslant f,\ (f - g)\perp g\};\\ T^-(f) := -\inf\{Tg :\ g \leqslant f,\ (f - g)\perp g\};\\ |Tf| \leqslant |T|(f).\end{gathered}$$

3.1.3. В [21] были введены мажорируемые операторы Урысона, действующие в решеточно нормированных пространствах. Пусть (V, E) — решеточно нормированное пространство, а (W, F) — пространство Банаха — Канторовича. Оператор $T : V \to W$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(v+w) = Tv+Tw$, когда v и w дизъюнктны. Оператор $T : V \to W$ называется *мажорируемым оператором Урысона*, если выполняются следующие условия:

(1) T ортогонально аддитивен;

(2) существует $S \in \mathscr{U}_{\mathrm{sim}}(E,\ F)$ такой, что выполняется неравенство

$$\lvert\!\lvert Tv \rvert\!\rvert \leqslant S(\lvert\!\lvert v \rvert\!\rvert)\ (v \in V).$$

Под $\mathscr{U}_{\mathrm{sim}}(E, F)$ понимается множество ортогонально аддитивных, положительных, возрастающих, симметричных операторов. Выражаясь точнее, $T \in \mathscr{U}_{\mathrm{sim}}(E, F)$ в том и только том случае, когда T ортогонально аддитивен, $Te \in F_+$ для любого вектора $e \in E$, T возрастает на E_+ и, кроме того, $T(-e) = Te$ для любого $e \in E_+$. Оператор S, обладающий указанными свойствами, называется *мажорантой* T. Множество всех мажорант обозначается через $\mathrm{maj}(T)$. Множество $\mathscr{U}_{\mathrm{sim}}(E, F)$ само является подрешеткой $\mathscr{U}(E, F)$, и поэтому наследует векторный порядок из $\mathscr{U}(E, F)$. Наименьший элемент в $\mathrm{maj}(T)$ относительно этого естественного порядка, называется *точной мажорантой* оператора T и обозначается $\lvert\!\lvert T \rvert\!\rvert$. Множество всех мажорируемых операторов Урысона из V в W обозначается через $M_U(V, W)$. Разложимость мажорантной нормы не имеет места, однако существует некоторый аналог разложимости [21]. Для любого $T \in M_U(V, W)$ и любых $S,\, P \in \mathscr{U}_{\mathrm{sim}}(E,\, F)$ таких, что

$$0 \leqslant S \leqslant |T|;\ 0 \leqslant P \leqslant |T|;\ P \perp S;\ P + S = |T|;$$

найдется оператор $S_T \in M_U(V, W)$ и

$$|T| = |S_T| + |T - S_T|;\ |S_T| = S;\ |T - S_T| = P.$$

3.1.4. Говорят, что сеть $(v_\alpha)_{\alpha \in \Xi} \subset V$ латерально сходится к элементу v, если $v = \lim_\alpha v_\alpha$ и $(v_\alpha - v_\beta) \perp v_\beta$ для любых $\alpha, \beta \in \Xi, \beta \leqslant \alpha$. При этом пишут $v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$. Рассмотрим теперь, так называемые, латерально непрерывные операторы. Оператор $T : (V, E) \to (W, F)$ называется *латерально непрерывным* (*латерально σ-непрерывным*), если из $v = l\text{-}\lim\limits_\alpha v_\alpha$ $(v = l\text{-}\lim\limits_n v_n)$ следует $Tv = o\text{-}\lim\limits_\alpha (Tv_\alpha)$ $\Big(Tv = o\text{-}\lim\limits_n Tv_n\Big)$.

Далее в тексте под $\mathfrak{Br}(E)$ будем понимать булеву алгебру проекторов пространства E. На банаховы пространства X и Y, встречающиеся в тексте, накладываются следующие ограничения: X — сепарабельное банахово пространство, а для банахова пространства Y найдется счетное всюду плотное подмножество $Z^\sharp \subset Z$, где $Z \subset Y^\star$ — нормирующее подпространство в $Y^\star$. Имеет место следующий критерий слабой интегральной представимости мажорируемого оператора Урысона [22].

Теорема. *Пусть $T : E(X) \to F(Y)$ — мажорируемый оператор Урысона. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *T — слабый интегральный оператор Урысона;*

(2) *для любых двух ограниченных последовательностей вектор-функций $\vec{f}_n$, $\vec{g}_n$, $\left|\vec{f}_n - \vec{g}_n\right| \to 0(\nu)$ выполняется $\left|T\vec{f}_n - T\vec{g}_n\right| \to 0$ (п. в.).*

3.2. Порядковое проектирование в пространствах операторов Урысона

В этом параграфе мы представим некоторые результаты из [31, 32], касающиеся порядкового проектирования в пространствах мажорируемых операторов Урысона. Начнем с полезного утверждения, характеризующего латеральную непрерывность оператора. Напомним, что *ядром* оператора называется множество векторов, на которых оператор обращается в нуль.

3.2.1. Теорема [31]**.** *Пусть $T : E \to F$ положительный оператор Урысона, где E-решетка с проекциями на главные полосы, а F — K-пространство. Оператор T латерально непрерывен (латерально σ-непрерывен) тогда и только тогда, когда ядро любого оператора $S \in \mathscr{U}(E, F)$, $0 \leqslant S \leqslant T$, латерально замкнуто (латерально σ-замкнуто).*

В пространстве $\mathscr{U}(E, F)$ латерально непрерывные операторы играют роль аналогичную порядково непрерывным операторам в линейном случае. Поэтому вызывает интерес изучение полосы $\mathscr{U}_c^\perp(E, F)$, дизъюнктной полосе латерально непрерывных операторов. Пусть E — векторная решетка. Напомним, что порядковый идеал $M \subset E$ называется *фундаментом* (*σ-фундаментом*), если для любого $e^+ \in E$ найдется сеть $(e_\alpha) \subset M$ (найдется последовательность $(e_n) \subset M$) такая, что $e_\alpha \uparrow e$ $(e_n \uparrow e)$. Необходимо отметить, что для любого фундамента (σ-фундамента) его латеральное замыкание (латеральное σ-замыкание) совпадает с E.

Всюду ниже будем полагать, что E — это векторная решетка с проекциями на главные полосы, F — K-пространство. Под $\mathfrak{Br}(e)$, как всегда, будем понимать булеву алгебру осколков элемента e. Оператор $T \in \mathscr{U}(E, F)$ называется *сингулярным* (*σ-сингулярным*), если он равен нулю на некотором фундаменте (σ-фундаменте). Множество всех сингулярных (σ-сингулярных) операторов обозначим через $\mathscr{U}_s(E, F)$ $(\mathscr{U}_{\sigma s}(E, F))$. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема [32]**.** *Пусть E и F — это указанные выше векторные решетки. Тогда $\mathscr{U}_c(E, F) = \mathscr{U}_s^\perp(E, F)$, т. е. классы латерально непрерывных операторов и операторов, дизъюнктных сингулярным, совпадают.*

3.2.2. С каждым фундаментом $M \subset E$ свяжем множество операторов $\mathscr{N}_M := \{T \in \mathscr{U}(E,F) : M \subset \ker(T)\}$. Указанное множество обладает довольно хорошей структурой.

(1) Теорема [32]**.** *Множество $\mathscr{N}_M$ является полосой в пространстве $\mathscr{U}(E,F)$. Проектор на полосу $\mathscr{N}_M^{\perp}$ задается формулой:*

$$\pi_M Te = \sup\{Te' : e' \in M,\ e' \in \mathfrak{Fr}(e)\}.$$

Теперь можно указать формулы проектирования на полосы латерально непрерывных и латерально σ-непрерывных операторов.

(2) Следствие [32]**.** *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_\sigma$ обозначают множества фундаментов и σ-фундаментов соответственно. Тогда проекторы*

$$\pi_c = \inf\{\pi_A :\ A \in \mathfrak{A}\}; \quad \pi_\sigma := \inf\{\pi_A;\ A \in \mathfrak{A}_\sigma\}$$

являются проекторами в пространстве $\mathscr{U}(E,F)$ на полосы $\mathscr{U}_s(E,F)^{\perp}$ и $\mathscr{U}_{s\sigma}(E,F)^{\perp}$ соответственно.

Из теоремы 3.2.2 следует, что π_c и $\pi_{\sigma c}$ являются проекторами на полосы $\mathscr{U}_c(E,F)$ и $\mathscr{U}_{c\sigma}(E,F)$.

(3) Следствие [32]**.** *Для любого оператора $T \in \mathscr{U}_+(E,F)$ справедливы следующие формулы:*

$$T_c v = \inf\Big\{\sup_\alpha Tv_\alpha : v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha\Big\},$$
$$T_{\sigma c} v = \inf\Big\{\sup_n Tv_n : v = l\text{-}\lim_n v_n\Big\}.$$

3.2.3. Опираясь на теоремы предыдущего пункта можно вычислить латерально непрерывные составляющие мажорируемого оператора Урысона.

Теорема [32]**.** *Пусть (V,E) — РНП, а (W,F) — ПБК, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_\sigma$ — семейства фундаментов и σ-фундаментов в E соответственно. Тогда для любого мажорируемого оператора Урысона $T : V \to W$ справедливы следующие формулы вычисления латерально непрерывных составляющих:*

$$T_c = bo\text{-}\lim_M \pi_M T,\ M \in \mathfrak{A}; \qquad T_{\sigma c} = bo\text{-}\lim_M \pi_M T,\ M \in \mathfrak{A}_\sigma.$$

3.3. Непрерывность операторов Урысона

В настоящем параграфе мы установим непрерывность по норме слабого интегрального мажорируемого оператора Урысона, действующего в пространствах измеримых вектор-функций.

3.3.1. Пусть пара (V,E) — решеточно нормированное пространство (РНП), где E — банахова решетка. Тогда для произвольного элемента $x \in V$ существует так называемая смешанная норма

$$|||x||| := \|\ |x|\ \|_E.$$

РНП с указанным свойством будет *пространством со смешанной нормой.* В случае bo-полноты пространство со смешанной нормой (V,E) становится банаховым пространством с нормой $|||\cdot|||$. Все встречающиеся в тексте РНП со смешанной нормой будем считать bo-полными. В дальнейшем элементы пространств со смешанной нормой будем обозначать буквами x, y, z, u. За элементами нормирующих банаховых решеток зарезервируем буквы e, f, g, h. Пусть $e \in E_+$ и $M \subset V$. Напомним, что элемент $e \in E_+$ банаховой решетки называется *квазивнутренней точкой*, если порядковый идеал E_e, порожденный e, плотен по норме в E. Существование квазивнутренней точки в нормирующей решетке облегчает изучение латерально непрерывных мажорируемых операторов Урысона и позволяет получать результаты о непрерывности по норме.

Теорема [34]**.** *Пусть (V,E) и (W,F) — пространства со смешанными нормами, где E,F — банаховы решетки, E, кроме того, — K_σ-пространство, e — квазивнутренняя точка в E и норма в F порядково непрерывна. Пусть $T \in M_U(V,W)$ — σ-латерально непрерывный оператор. Если T равномерно непрерывен по норме на каждом порядково ограниченном множестве, то он непрерывен по норме на всем пространстве V.*

3.3.2. Опираясь на доказанную выше теорему, можно установить непрерывность по норме слабого интегрального оператора Урысона, действующего в пространствах измеримых вектор-функций.

Теорема [34]. *Пусть E, F — банаховы идеальные подпространства пространств измеримых функций $L_0(\nu)$ и $L_0(\mu)$, норма в F порядково непрерывна, X, Y — банаховы пространства и $E(X)$, $F(Y)$ — соответствующие пространства измеримых вектор-функций. Пусть $T : E(X) \to F(Y)$ — мажорируемый слабый интегральный оператор Урысона. Тогда T равномерно непрерывен на порядково ограниченных множествах в $E(X)$.*

Так как слабый интегральный оператор Урысона латерально непрерывен, то справедливо следующее утверждение.

Следствие [34]. *Пусть E, F — банаховы идеальные подпространства пространств измеримых функций $L_0(\nu)$ и $L_0(\mu)$, норма в F порядково непрерывна, X, Y — банаховы пространства и $E(X)$, $F(Y)$ — соответствующие пространства измеримых вектор-функций. Пусть $T : E(X) \to F(Y)$ — мажорируемый слабый интегральный оператор Урысона. Тогда T непрерывен по норме.*

3.4. Компактность операторов Урысона

В настоящем параграфе дан обзор результатов, касающихся различных типов компактности мажорируемых операторов Урысона, действующих в пространствах со смешанной нормой.

3.4.1. Пусть (V, E) и (W, F) — пространства со смешанными нормами, а $T : (V, E) \to (W, F)$ — мажорируемый оператор Урысона. Оператор называется *компактным*, если для каждого ограниченного по норме множества $M \subset V$ его образ $T(M)$ предкомпактен в W. Компактный и непрерывный оператор называется *вполне непрерывным*.

Оператор T называется *BM-компактным*, если для любого $x \in V$ оператор отображает множество $M_x := \{y : y \in V, \lvert y \rvert \leqslant \lvert x \rvert\}$ в предкомпактное множество в W. В случае, когда пространства со смешанными нормами (V, E) и (W, F) имеют вид (E, E) и (F, F) BM-компактность совпадает с AM-компактностью введенной в [76]. Пусть $x \in V$. Напомним, что $y \in V$ называется осколком x, если $\lvert x - y \rvert \perp \lvert y \rvert$. Множество осколков x обозначается $\mathfrak{B}_x$. Отметим, что булевы алгебры осколков x и $\lvert x \rvert$ изоморфны. Оператор T называется *C-компактным*, если для любого $x \in X$ $T(\mathfrak{B}_x)$ — предкомпактное множество в W.

Оператор T называется *почти компактным*, если для любого $\varepsilon > 0$ и порядково ограниченного множества $D \subset V$ существует $x \in V$ такой, что

$$T(D) \subset T(M_x) + \varepsilon B_W,$$

где $B_W := \{z : z \in W; |||z||| \leqslant 1\}$ — единичный шар пространства W.

В контексте теории банаховых решеток, операторы с вышеуказанными свойствами изучались в работе [76]. Для операторов, действующих в решеточно нормированных пространствах, можно ввести свойство, близкое к C-компактности. Пусть $\mathfrak{C}_x := \{y : \lvert y \rvert = \lvert z \rvert ; z \in \mathfrak{B}_x\}$. Оператор T называется *EC-компактным*, если для любого $x \in X$ образ $T(\mathfrak{C}_x)$ — предкомпактное множество в W.

3.4.2. Простейшие примеры показывают, что в пространствах со смешанной нормой множества EC-компактных и C-компактных операторов не совпадают. В случае операторов, действующих в банаховых решетках, картина выглядит проще.

(1) Лемма [32]. *Пусть E и F — банаховы решетки. Тогда оператор $T \in \mathscr{U}(E, F)$ будет EC-компактным тогда и только тогда, когда он C-компактен.*

Следующая теорема устанавливает связь EC и BM компактности.

(2) Теорема [32]. *Пусть (V, E) и (W, F) — пространства со смешанными нормами, E, F — банаховы решетки и E — K_σ-пространство. Пусть $T \in M_U(V, W)$ и T — EC-компактный оператор. Если T равномерно непрерывен на порядково ограниченных множествах в V, то он BM-компактен.*

(3) Теорема [32]. *Пусть (V, E), (W, F), (H, G) — пространства со смешанными нормами, где E, F, G — банаховы решетки. Предположим, что $T \in M_U(V, W)$ почти компакт-*

ный оператор и $S \in M_U(W,H)$ — BM-компактен и равномерно непрерывен. Тогда оператор $R := ST : V \to H$ компактен.

3.4.3. Накладывая некоторые ограничения на пространство, на котором определен оператор, можно получить дополнительную характеризацию почти компактных операторов.

(1) Теорема [32]**.** *Пусть (V,E), (W,F) — пространства со смешанными нормами, где E и F — банаховы решетки и E это K_σ-пространство. Пусть $T \in M_U(V,W)$. Если для любого $r \in \mathbb{R}_+$ существует $e \in E_+$, $e \neq 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ и*

$$|||T\pi x||| < \varepsilon; \quad \forall x \in V; |||x||| \leqslant r; \quad \forall \pi \in \mathfrak{Br}(V); \quad \|\pi e\| < \delta,$$

то оператор T почти компактен.

(2) Теорема [32]**.** *Пусть E, F — банаховы идеальные подпространства пространств измеримых функций $L_0(A_1,\Sigma_1,\nu)$ и $L_0(A_2,\Sigma_2,\mu)$, норма в E порядково непрерывна, X, Y — банаховы пространства и $E(X)$, $F(Y)$ — соответствующие пространства измеримых вектор-функций. Пусть $T \in M_U(V,W)$ — непрерывный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(**1**) *для любого $r \in \mathbb{R}_+$ существует $e \in E_+$, $e \neq 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ и*

$$|||T\pi x||| < \varepsilon \quad \forall x \in V, \quad |||x||| \leqslant r \quad \forall \pi \in \mathfrak{Br}(V), \quad \|\pi e\| < \delta;$$

(**2**) *для любого $r \in \mathbb{R}_+$ и для любой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ в $E(X)$, $|||x_n||| \leqslant r$; $n \in \mathbb{N}$, справедлива импликация*

$$|\, x_n - x \,| \to 0(\nu) \Rightarrow |||Tx_n - Tx||| \to 0.$$

3.5. Ортогонально биаддитивные операторы

В настоящем параграфе вводится новый класс нелинейных операторов, зависящих от двух переменных и ортогонально аддитивных по каждой переменной. Для этих операторов строится порядковое исчисление и рассматриваются формулы порядкового проектирования. Результаты этого параграфа ранее не публиковались.

3.5.1. Пусть E, F и G — векторные решетки и G, кроме того, порядково полна. Отображение $T : E \times F \to G$ называется *ортогонально биаддитивным*, если частичные операторы $T(\cdot, y) : E \to G$ и $T(x, \cdot) : F \to G$ ортогонально аддитивны. Биаддитивный оператор называется *положительным*, если $T(x,y) \in G_+$ для любых $x \in E$, $y \in F$. Оператор называется *порядково ограниченным*, если для каждого порядкового ограниченного множества $D \subset E \times F$ образ $T(D)$ порядково ограничен в G. В отличие от линейного случая, положительность оператора не гарантирует порядковую ограниченность.

Пример 1. Пусть $E, F, G = \mathbb{R}$. Оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ зададим формулой

$$T(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2y^2}, & \text{если } x \neq 0 \text{ и } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \text{ или } y = 0. \end{cases}$$

Ясно, что T — положительный биаддитивный оператор, но не является порядково ограниченным.

Отображение $T : E \times F \to G$ называется *биоператором Урысона*, если $T = S_2 - S_1$, где S_1, S_2 — порядково ограниченные, положительные ортогонально биаддитивные операторы, действующие из $E \times F$ в G. Множество таких операторов обозначим через $\mathscr{BU}(E,F;G)$.

Пример 2. Пусть $E, F, G = \mathbb{R}$. Тогда $\mathscr{BU}(E,F;G)$ совпадает с множеством всех ограниченных функций $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таких, что $f(0,\cdot) = 0$ и $f(\cdot, 0) = 0$.

3.5.2. В случае когда пространство образов порядково полно для биоператоров Урысона существует порядковое исчисление.

Теорема. *Пусть E, F, G — векторные решетки и G, кроме того, порядково полна. Тогда $\mathscr{BU}(E,F;G)$ будет K-пространством и порядковые операции имеют вид:*

(**1**) $(T \vee S)(e,f) = \sup \Bigg\{ \sum_{i=1}^{n} T(e_i, f_i^1) + S(e_i, f_i^2) : \ n \in \mathbb{N}; \ e_i \perp e_j, i \neq j;$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = e;\ \forall i \in \{1,\dots,n\},\ f_i^1 \perp f_i^2;\ f_i^1 + f_i^2 = f\Bigg\};$$

(**2**) $$(T\wedge S)(e,f) = \inf\Bigg\{\sum_{i=1}^{n} T(e_i, f_i^1) + S(e_i, f_i^2) : n\in\mathbb{N}; e_i\perp e_j, i\neq j;$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} e_i = e;\ \forall i\in\{1,\dots,n\}\ f_i^1\perp f_i^2;\ f_i^1+f_i^2 = f\Bigg\};$$

(**3**) $$T^+(e,f) = \sup\Bigg\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} T(e_i,f_i) :\ n\in\mathbb{N};\ e_i\perp e_j,\ i\neq j;\ \sum_{i=1}^{n} e_i = e;$$

$$\forall i\in\{1,\dots,n\},\ f_i\ \textit{осколок}\ f\Bigg\}.$$

$\lhd$ Докажем первую формулу. Остальные получаются аналогично. Воспользуемся линейным и решеточным изоморфизмом пространств $\mathscr{BU}(E,F;G)$ и $\mathscr{U}(E,\mathscr{U}(F,G))$. Тогда можем написать

$$(T\vee S)(e,\cdot) = \sup\{T(e^1,\cdot) + S(e^1,\cdot)\};$$
$$e^1\perp e^2,\quad e^1+e^2 = e,\quad e\in E,\quad f\in F.$$

Супремум рассматривается в пространстве $\mathscr{U}(F,G)$. Окончательная формула имеет вид

$$(T\vee S)(f,g) = \sup\Bigg\{\sum_{i=1}^{n} T(f_i^1,g_i) + S(f_i^2,g_i) :\ f\in E_+,\ g\in F_+,\ 0\leqslant f^1,\ f^2\leqslant f,$$

$$\forall i\in\{1,\dots,n\},\ f_i^1+f_i^2 = f,\ \sum_{i=1}^{n} g_i = g\Bigg\}.\quad \rhd$$

3.5.3. Напомним, что в векторной решетке V сеть (последовательность) $(v_\alpha)_{(\alpha\in\Xi)}\subset V$ $((v_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset V)$ *латерально* сходится к элементу v, если $v = o\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$ $(v = o\text{-}\lim_n v_n)$ и $(v_\alpha - v_\beta)\perp v_\beta$ $((v_m - v_n)\perp v_n)$ для любых $\alpha,\beta\in\Xi$, $\beta\leqslant\alpha$ $(m,n\in\mathbb{N}, m\leqslant n)$. При этом пишут $v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$ $(v = l\text{-}\lim_n v_n)$. Ортогонально биаддитивный оператор $T: E\times F\to G$ называется *латерально непрерывным* (*латерально σ-непрерывным*), если для любых пар латерально сходящихся сетей (последовательностей) $(f_\alpha)_{\alpha\in\Xi}\subset E$ и $(g_\beta)_{\beta\in\Theta}\subset F$ $((f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset E$ и $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}\subset F)$ таких, что $f = l\text{-}\lim_\alpha f_\alpha$ и $g = l\text{-}\lim_\beta g_\beta$ $(f = l\text{-}\lim_n f_n$ и $(g = l\text{-}\lim_m g_m))$, выполняется $T(f,g) = o\text{-}\lim_{\alpha,\beta} T(f_\alpha,g_\beta)$ $(T(f,g) = o\text{-}\lim_{n,m} T(f_n,g_m))$. Оператор T называется *раздельно* латерально непрерывным (латерально σ-непрерывным), если латерально непрерывны (латерально σ-непрерывны) частичные операторы $T(e,\cdot): F\to G$ и $T(\cdot,f): E\to G$.

Лемма. *Биоператор Урысона $T: E\times F\to G$ латерально непрерывен (σ-непрерывен) тогда и только тогда, когда он раздельно непрерывен (σ-непрерывен).*

$\lhd$ Рассмотрим случай сетей, для последовательностей получается аналогично. Необходимость условий очевидна, покажем достаточность. Возьмем $e\in E$, $f\in F$ и пару сетей $(e_\alpha)_{\alpha\in\Xi}\subset E$ и $(f_\beta)_{\beta\in\Theta}\subset F$ таких, что $e = l\text{-}\lim_\alpha e_\alpha$ и $f = l\text{-}\lim_\beta f_\beta$. Тогда можем написать

$$\begin{gathered}
|T(e_\alpha,f_\beta) - T(e,f)| = |T(e_\alpha,f_\beta) - T(e-e_\alpha+e_\alpha, f-f_\beta+f_\beta)| = \\
= |T(e_\alpha,f_\beta) - T(e-e_\alpha,f-f_\beta) - T(e_\alpha,f-f_\beta) - T(e_\alpha,f_\beta) - T(e_\alpha,f-f_\beta)| = \\
= |T(e-e_\alpha,f-f_\beta) + T(e_\alpha,f-f_\beta) + T(e_\alpha,f-f_\beta)| \leqslant \\
\leqslant |T(e-e_\alpha,f-f_\beta)| + |T(e_\alpha,f-f_\beta)| + T(e_\alpha,f-f_\beta)|.
\end{gathered}$$

В последней сумме каждое слагаемое порядково сходится к нулю. $\rhd$

3.5.4. Множество всех латерально непрерывных (σ-непрерывных) биоператоров будем обозначать через $\mathscr{BU}_n(E,F;G)$ $(\mathscr{BU}_{\sigma n}(E,F;G))$. Ясно, что латерально непрерывные операторы образуют векторное подпространство в $\mathscr{BU}(E,F;G)$. Справедливо даже более сильное утверждение.

Теорема. *Пусть E, F, G — векторные решетки и G, кроме того, порядково полна. Тогда $\mathscr{BU}_n(E,F;G)$ $(\mathscr{BU}_{\sigma n}(E,F;G))$ будет полосой в K-пространстве $\mathscr{BU}(E,F;G)$.*

$\lhd$ Проведем доказательство для латерально непрерывных операторов, для σ-непрерывных получается аналогично. Пусть T — латерально непрерывный оператор, докажем что и

$T^+ \in \mathscr{BU}_n(E,F;G)$. В соответствии с леммой 3.5.3 достаточно установить раздельную непрерывность оператора T^+. Пусть $e \in E$, $f \in F$ и сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\Xi}$ латерально сходится к e. В силу положительности оператора T^+ имеет место неравенство

$$T^+(e,f) \geqslant o\text{-}\lim_\alpha T^+(e_\alpha, f).$$

Установим обратное неравенство. Возьмем набор $\{g_1, \cdots, g_n\}$ отрицательных и положительных осколков элемента e. В общем случае для каждого осколка можно взять его положительную и отрицательную часть. Тогда элементы $g^i_\alpha := g_i \wedge e_\alpha$, $g^k_\alpha := g_k \vee e_\alpha$ будут осколками элемента e_α. Здесь инфимум или супремум берутся в зависимости от того будет осколок g_i положительным или отрицательным. Так как $g_i = o\text{-}\lim_\alpha g^i_\alpha$, то можем написать

$$\sum_{i=1}^n T(g^i_\alpha, f_i) \leqslant T^+(e_\alpha, f);$$

где $f_i \perp f_j, i \neq j$; $\sum_{i=1}^n f_i = f$. Переходя к порядковому пределу имеем

$$\sum_{i=1}^n T(g_i, f_i) \leqslant o\text{-}\lim_\alpha T^+(e_\alpha, f).$$

Далее, переходя к супремуму по всем конечным наборам

$$\{g_1, \cdots, g_n\},\ \{f_1, \cdots, f_n\};\ n \in \mathbb{N};\ f_i \perp f_j,\ i \neq j;\ \sum_{i=1}^n f_i = f;\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\ g_i \text{ — осколок } e,$$

окончательно получаем

$$T^+(e_\alpha, f) \leqslant o\text{-}\lim_\alpha T^+(e_\alpha, f).$$

Таким образом, векторное подпространство $\mathscr{BU}_n(E,F;G)$ будет подрешеткой. Докажем теперь, что оно будет и порядковым идеалом. Пусть $0 \leqslant S \leqslant T$ и $T \in \mathscr{BU}_n(E,F;G)$. Требуется установить, что $S \in \mathscr{BU}_n(E,F;G)$. Пусть сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset E$ латерально сходится к e и f произвольный элемент F. Тогда справедливы следующие формулы

$$0 \leqslant |S(e,f) - S(e_\alpha, f)| = |S(e - e_\alpha, f)| \leqslant |T(e - e_\alpha, f)| = |T(e,f) - T(e_\alpha, f)|.$$

Но последняя разность порядково сходится к нулю в пространстве G в силу латеральной непрерывности оператора T. Осталось доказать порядковую замкнутость идеала $\mathscr{BU}_n(E,F;G)$. Возьмем операторную сеть $(T_\alpha)_{\alpha\in\Xi} \subset \mathscr{BU}_n(E,F;G)$ такую, что $0 \leqslant T_\alpha \uparrow T$. Установим латеральную непрерывность оператора T. Пусть опять $e \in E$, $f \in F$ и сеть $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ латерально сходится к e. Тогда можем написать

$$|T(e,f) - T(e_\gamma, f)| = |T(e,f) - T_\alpha(e,f) + T_\alpha(e,f) - T_\alpha(e_\gamma, f) + T_\alpha(e_\gamma, f) - T(e_\gamma, f)| \leqslant$$
$$\leqslant |T(e,f) - T_\alpha(e,f)| + |T_\alpha(e,f) - T_\alpha(e_\gamma, f)| + |T_\alpha(e_\gamma, f) - T(e_\gamma, f)|.$$

В последнем выражении, используя латеральную непрерывность оператора T_α и переходя к пределу по γ, получим, что $T(e,f) = o\text{-}\lim_\gamma T(e_\gamma, f)$. $\rhd$

3.5.5. С каждым биоператором Урысона T свяжем биоператоры T_n и $T_{\sigma n}$, определяемые по формулам:

$$T_n(x,y) := \inf\left\{\sup_{\alpha,\beta} T(x_\alpha, y_\beta) : x = l\text{-}\lim_\alpha x_\alpha;\ y = l\text{-}\lim_\beta y_\beta\right\}; \qquad (*)$$

$$T_{\sigma n}(x,y) := \inf\left\{\sup_{k,m} T(x_k, y_m) : x = l\text{-}\lim_n x_n;\ y = l\text{-}\lim_m y_m\right\}; \qquad (**)$$

$$x \in E;\ y \in F.$$

Инфимум берется по всем сетям x_α, y_β, латерально сходящимся к x и y. Аналогично и в отношении последовательностей.

(1) Лемма. *Пусть T — положительный биоператор Урысона. Тогда формулы $(*)$ и $(**)$ определяют положительные биоператоры Урысона.*

$\lhd$ Проведем рассуждения для сетей, для последовательностей получается аналогично. С оператором T свяжем оператор $T^\natural$ следующей формулой:

$$T^\natural(x,y) := \inf\left\{\sup_{\alpha,\beta} T(x_\alpha, y_\beta) : \, x = l\text{-}\lim_\alpha x_\alpha;\, y = l\text{-}\lim_\beta y_\beta\right\}, \quad x \in E,\, y \in F.$$

Требуется установить, что $T^\natural(x_1+x_2,y) = T^\natural(x_1,y)+T^\natural(x_2,y)$, где $x_1, x_2 \in E$, $x_1 \perp x_2$ и $y \in F$. Пусть сеть $(v_\alpha)(\alpha \in \Lambda)$ латерально сходится к x_1+x_2. Лемма о двойном разбиении в векторных решетках гарантирует существование двух сетей (v_α^1) и (v_α^2), где

$$v_\alpha^1 + v_\alpha^2 = v_\alpha; \quad x_1 = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha^1; \quad x_2 = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha^2; \quad v_\alpha^1 \perp v_\alpha^2 \quad \forall \alpha \in \Lambda.$$

Отсюда следует, что

$$T^\natural(x_1+x_2,y) \geqslant T^\natural(x_1,y)+T^\natural(x_2,y).$$

Докажем обратное неравенство. Пусть сеть $x_1 = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$, а $x_2 = l\text{-}\lim_\gamma w_\gamma$. Произведение $\Lambda \times \Gamma$ будет направленным множеством, где порядок вводится следующим образом:

$$\alpha \times \gamma \leqslant \alpha' \times \gamma' \Leftrightarrow \alpha \leqslant \alpha' \wedge \gamma \leqslant \gamma'.$$

Построим сеть $u_{\alpha\times\gamma} := v_\alpha + w_\gamma$. Покажем, что $x_1 + x_2 = l\text{-}\lim_{\alpha\times\gamma} u_{\alpha\times\gamma}$. Действительно,

$$\begin{gathered}(u_{(\alpha'\times\gamma')} - u_{(\alpha\times\gamma)}) \wedge u_{(\alpha\times\gamma)} = (v_{\alpha'} + w_{\gamma'} - v_\alpha - w_\gamma) \wedge (v_\alpha + w_\gamma) = \\ = (v_{\alpha'} - v_\alpha + w_{\gamma'} - w_\gamma) \wedge (v_\alpha + w_\gamma) \leqslant (v_{\alpha'} - v_\alpha) \wedge v_\alpha + (w_{\gamma'} - w_\gamma) \wedge w_\gamma = 0.\end{gathered}$$

Отсюда выводим неравенство:

$$T^\natural(x_1+x_2,y) \leqslant T^\natural(x_1,y)+T^\natural(x_2,y).$$

Положительность и порядковая ограниченность оператора $T^\natural$ очевидны. $\rhd$

Следующее утверждение указывает формулу проекции положительного биоператора Урысона на полосу латерально непрерывных биоператоров.

(2) Теорема. *Пусть E, F, G — векторные решетки с проекциями на главные полосы, где G, кроме того, порядково полна, а $T : E \times E \to G$ — положительный биоператор Урысона. Тогда T_n (T_σ) является проекцией на полосу латерально непрерывных (σ-непрерывных) биоператоров Урысона.*

$\lhd$ Выведем формулу для сетей, в случае последовательностей получается аналогично. Достаточно доказать, что оператор $T^\natural$, определенный формулой $(*)$ латерально непрерывен. Действительно, пусть S-латерально непрерывный биоператор, $e \in E$, $e = l\text{-}\lim_\alpha e_\alpha$, $(\alpha \in \Lambda)$; $f \in F$; $f = l\text{-}\lim_\alpha f_\beta$, $(\beta \in \Pi)$ и $S \leqslant T$. Тогда можем написать:

$$S(e_\alpha, f_\beta) \leqslant T(e_\alpha, f_\beta) \quad (\forall\, \alpha \in \Lambda,\, \beta \in \Pi);$$
$$S(e,f) = \sup_{\alpha,\beta} S(e_\alpha, f_\beta) \leqslant \sup_{\alpha,\beta} T(e_\alpha, f_\beta).$$

Переходя к инфимуму по всем парам сетей, латерально сходящихся к e и f, можем написать $S(e,f) \leqslant T^\natural(e,f)$. Непрерывность оператора $T^\natural$ равносильна латеральной непрерывности частичных операторов $T^\natural(e,\cdot) : F \to G$ и $T^\natural(\cdot,f) : E \to G$. Установим непрерывность $T^\natural(\cdot,f)$. Итак, возьмем произвольный элемент $e \in E$ и сеть $(e_\lambda)_{(\lambda\in\Lambda)} \subset E$, латерально сходящуюся к e. Ясно, что $h = \sup_\lambda T^\natural(e_\lambda, f) \leqslant T^\natural(e,f)$. Требуется установить обратное неравенство, из которого видно, что $T^\natural(e,f) = h$. С каждым элементом e_λ свяжем порядковый проектор π_λ на полосу $\{e - e_\lambda\}^{\perp\perp}$ и положительный биоператор Урысона $T_\lambda := T \circ (\pi_\lambda \otimes I_F)$. Аналогично определяется и $T_\lambda^\natural$. Сеть T_λ убывает в пространстве $\mathscr{BU}(E,F;G)$ и ограничена снизу. Обозначим через S инфимум сети $(T_\lambda)_{(\lambda\in\Lambda)}$. Теперь можем написать:

$$T^\natural(e,f) = T^\natural(e_\lambda,f) + T_\lambda^\natural(e - e_\lambda, f) = T^\natural(e_\lambda,f) + T_\lambda^\natural(e,f);$$
$$T^\natural(e,f) - h \leqslant T^\natural(e,f) - T^\natural(e_\lambda,f) = T^\natural(e - e_\lambda, f) = T_\lambda^\natural(e,f);$$
$$0 \leqslant (T_\lambda^\natural - S_\lambda^\natural) = (T_\lambda - S)^\natural \leqslant T_\lambda - S.$$

Отсюда следует, что сеть $T_\lambda^\natural$, убывая сходится к $S^\natural$. В частности, $\inf_\lambda T_\lambda^\natural(e,f) = S^\natural(e,f)$. В последнем неравенстве перейдем к инфимуму по всем $\lambda \in \Lambda$. Теперь можем написать $T^\natural(e,f) - h \leqslant S^\natural(e,f)$. По определению $S(e_\lambda, f) = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Но тогда и вектор $S^\natural(e,f)$ равен нулю, так в качестве пар сетей, латерально сходящихся к e и f, можно взять $(e_\lambda)_{(\lambda\in\Lambda)}$ и произвольную сеть латерально сходящуюся к f. $\rhd$

(3) Следствие. *Пусть E, F и G — такие же как в теореме* 3.1.4 *и* $T \in BL_r(E,F;G)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если оператор T латерально непрерывен, то он также и порядково непрерывен;*

(2) *если оператор T латерально σ-непрерывен, то он также и порядково σ-непрерывен.*

$\lhd$ Докажем утверждение (1), второе получается аналогично. Достаточно установить непрерывность частичных операторов. Возьмем произвольный элемент $f \in F_+$ и сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset E$ такую, что $e_\alpha \downarrow 0$. Требуется показать, что $\inf_\alpha |T(e_\alpha, f)| = 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $\beta \in \Lambda$. Для каждого $\alpha \geqslant \beta$ обозначим через π_α порядковый проектор на полосу порожденную элементом $(e_\alpha - \varepsilon e\beta)^+$. Так как сеть $(e_\alpha) \downarrow 0$, то сеть $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ также убывая сходится к нулю в пространстве операторов. Теперь можем написать

$$e_\alpha - \varepsilon e_\beta \leqslant (e_\alpha - \varepsilon e_\beta)^+ = \pi_\alpha - \varepsilon \pi_\alpha e_\beta \leqslant \pi_\alpha e_\beta \quad \forall \alpha \geqslant \beta;$$
$$e_\alpha \leqslant \varepsilon e_\beta + \pi_\alpha e_\beta \quad \forall \alpha \geqslant \beta.$$

Далее, имеем

$$0 \leqslant |T|(e_\alpha, f) \leqslant \varepsilon |T|(e_\beta, f) + \pi_\alpha |T|(e_\alpha, f) \quad \forall \alpha \geqslant \beta;$$
$$0 \leqslant \inf_\alpha |T|(e_\alpha, f) \leqslant \varepsilon |T|(e_\beta, f) + \inf_\alpha \pi_\alpha |T|(e_\alpha, f) = \varepsilon |T|(e_\beta, f).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем, что $\inf_\alpha |T|(e_\alpha, f) = 0$ и тем более $\inf_\alpha |T(e_\alpha, f)| = 0$. $\rhd$

Литература

1. Басаева Е. К. Квазидифференциалы в K-пространствах // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 3.—С. 14–30.
2. Басаева Е. К. Необходимые условия экстремума в векторных квазидифференцируемых программах // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, вып. 1.—С. 13–25.
3. Басаева Е. К. Кусраев А. Г. О квазидифференциале композиции // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 4.—С. 10–25.
4. Басаева Е. К. О субдифференциалах не всюду определенных выпуклых операторов // Владикавк. мат. журн.—2006.—Т. 8, вып. 4.—С. 11–17.
5. Басаева Е. К. Необходимые условия экстремума в векторных квазидифференцируемых экстремальных задачах // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, вып. 3.—С. 3–10.
6. Биркгоф Г. Теория решеток.—М.: Наука, 1984.—568 с.
7. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.
8. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
9. Кусраев А. Г. Об одном свойстве базы K-пространства и некоторых его применениях.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1977.—17 с.
10. Кусраев А. Г. Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1312–1316.
11. Кусраев А Г. Мажорируемые операторы.— М.: Наука, 2003.—619 с.
12. Кусраев А. Г. О нерасширяющих операторах // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, № 3.—С. 47–58.
13. Кусраев А. Г. Автоморфизмы и дифференцирования в алгебре комплексных измеримых функций // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, № 3.—С. 45–49.
14. Кусраев А. Г. О представлении ортосимметричных билинейных операторов // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, № 4.—С. 30–34.
15. Кусраев А. Г. Автоморфизмы и дифференцирования в расширенных комплексных f-алгебрах // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 1.—С. 97–107.
16. Кусраев А. Г. Анализ, алгебра и логика в теории операторов // Комплексный анализ, теория операторов и математическое моделирование.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2006.—С. 171–204.
17. Кусраев А. Г. О строении ортосимметричных билинейных операторов в векторных решетках // Докл. РАН.—2006.—Т. 408, № 1.—С. 25-27.
18. Кусраев А. Г. О теореме типа Штрассена для измеримых селекторов // Владикавк. мат. журн.—2006.—Т. 8, вып. 4.—С. 32–37.
19. Кусраев А. Г. Ортосимметричные билинейные операторы в векторных решетках // В сб.: Исследования по современному анализу и математическому моделированию.—Владикавказ, 2008.—С. 186–225.
20. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы: теория и приложения.—М.: Наука, 2007.—559 с.
21. Кусраев А. Г., Плиев М. А. Ортогонально аддитивные операторы в решеточно нормированных пространствах // Владикавк. мат. журн.—1999.—Т. 1, вып. 3.—С. 33-43.
22. Кусраев А. Г., Плиев М. А. Слабое интегральное представление мажорируемых ортогонально аддитивных операторов // Владикавказский. мат. журн.—1999.—Т. 1, вып. 4.—С. 22–39.
23. Кусраев А. Г. Табуев С. Н. О билинейных операторах, сохраняющих дизъюнктность // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, № 1.—С. 58–70.
24. Кусраев А. Г., Табуев С. Н. Мультипликативное представление билинейных операторов, сохраняющих дизъюнктность // Сиб. мат. журн.—2008.—Т. 49, № 2.
25. Кусраев А. Г., Табуев С. Н. Некоторые свойства ортосимметричных билинейных операто-

ров в векторных решетках // Математический форум. Т.1. Исследования по математическому анализу.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008. С. 104–124 (Итоги науки. ЮФО).
26. Кусраев А. Г., Шотаев Г. Н. Билинейные мажорируемые операторы // Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию / Ред. Ю. Ф. Коробейник и А. Г. Кусраев.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2004.—С. 241–262.
27. Кутателадзе С. С. О разностях решеточных гомоморфизмов // Сиб. мат. журн.—2005.—Т. 46, № 2.—С. 390–393.
28. Кутателадзе С. С., Рубинов А. М. Двойственность Минковского и его приложения.—Новосибирск: Наука, 1976.—256 с.
29. Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применения в математической экономике. М.: Наука, 1985.
30. Лозановский Г. Я. О функциях от элементов линейной структуры // Изв. вузов. Математика.—1973.—№ 4.—С. 45–54.
31. Плиев М. А. Проекция положительного оператора Урысона // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 4.—С. 22–39.
32. Плиев М. А. Порядковое проектирование в пространствах операторов Урысона // Владикавк. мат. журн.—2006.—Т. 8, вып. 4.—С. 22–39.
33. Плиев М. А. Тень билинейного регулярного оператора // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, вып. 3.—С. 22–39.
34. Плиев М.А. Мажорируемые операторы Урысона в пространствах со смешанной нормой // Владикавк. мат. журн.—2007.—Т. 9, вып. 3.—С. 47–57.
35. Плиев М. А., Табуев С. Н. О проекциях положительного билинейного оператора // Математический форум. Т. 1. Исследования по математическому анализу.—Владикавказ, 2008.—С. 166–176.
36. Сикорский Р. Булевы алгебры.—М.: Мир, 1964.—375 с.
37. Шотаев Г. Н. Некоторые свойства билинейных регулярных операторов // Владикавк. мат. журн.—1999.—Т. 1, № 2.—С. 44–47.
38. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—London: Acad. Press Inc, 1985.—367 p.
39. Bernau S. J., Huijsmans C. B. Almost f-algebras and d-algebras // Math. Proc. London Phil. Soc.—1990.—Vol. 107.—P. 287–308.
40. Bernau S. J., Huijsmans C. B. The order bidual of almost f-algebras and d-algebras // Trans. Amer. Math. Soc.—1995.—Vol. 347.—P. 4259–4275.
41. Boulabiar K. Some aspects of Riesz multimorphisms // Indag. Math. (N. S.)—2002.—Vol. 13, № 4—P. 419–432.
42. Boulabiar K., Buskes G. Vector lattice powers: f-algebras and functional calculus // Comm. Algebra.—2006.—Vol. 34, № 4—P. 1435–1442.
43. Boulabiar K., Buskes G., Page R. On some properties of bilinear maps of order bounded variation // Positivity.—2005.—Vol. 9, № 3—P. 401–414.
44. Boulabiar K., Buskes G., Triki A. Some recent trends and advances in certain lattice ordered algebras. Function spaces (Edwardsville, IL, 2002) // Amer. Math. Soc.—Rhode Island: Providence, 2003.—Vol. 328.—P. 99–133.
45. Boulabiar K., Buskes G., Triki A. Results in f-algebras // Positivity / Eds. K. Boulabiar, G. Buskes, A. Triki.—Basel a.o.: Birkhäuser, 2007.—P. 73–96.
46. Bu Q., Buskes G., Kusraev A. G. Bilinear maps on product of vector lattices: A survey // Positivity / Eds. K. Boulabiar, G. Buskes, A. Triki.—Basel a.o.: Birkhäuser, 2007.—P. 97–126.
47. Buskes G., Kusraev A. G. Representation and extension of orthoregular bilinear operators // Vladikavkaz Math. J.—2007.—Vol. 9, № 1—P. 16–29.
48. Buskes G. J. H. M., van Rooij A. C. M. Hahn–Banach for Riesz homomorphisms // Indag. Math.—1993.—Vol. 51—P. 25–34.
49. Buskes G., van Rooij A. Almost f-algebras: commutativity and the Cauchy–Schwarz inequality // Positivity.—2000.—Vol. 4, № 3—P. 227–231.
50. Buskes G., van Rooij A. Almost f-algebras: structure and Dedekind completion // Positivity.—2000.—Vol. 4, № 3—P. 233–243.
51. Buskes G., van Rooij A. Squares of Riesz spaces // Rocky Mountain J. Math.—2001.—Vol. 31, № 1—P. 45–56.
52. Buskes G., van Rooij A. The bornological tensor product of two Riesz spaces. Ordered algebraic structures // Dev. Math.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.—Vol. 7.—P. 3–9

53. Buskes G., van Rooij A. The bornological tensor product of two Riesz spaces: proof and background material. Ordered algebraic structures // Dev. Math.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.—Vol. 7—P. 189–203.
54. Buskes G., van Rooij A. Bounded variation and tensor products of Banach lattices // Positivity.—2003—Vol. 7, № 1/2—P. 47–59.
55. Buskes G., van Rooij A. Small Riesz spaces // Math. Proc. Camb. Phil. Soc.—1989.—Vol. 105.—P. 523–536.
56. Castaing Ch., Valadier M. Convex analysis and Measurable Multifunctions. Berlin etc.: Springer, 1977.—278 p.
57. Cristescu R. Ordered vector spaces and linear operators // Translated from the Romanian.—Tunbridge: Abacus Press, 1976.
58. Drewnoski L., Orlich W. On representation of ortogonally additive functionals // ibid. 1969. Vol. 17. P. 167–173.
59. Drewnoski L., Orlicz W. Continuity and representation of orthogonally additive functionals // Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. sci. math. astr. et phys.—1969.—Vol. 17, № 10.—P. 647–653.
60. Fremlin D. H. Tensor product of Archimedean vector lattices // Amer. J. Math.—1972.—Vol. 94, № 3—P. 777–798.
61. Fremlin D. H. Tensor products of Banach lattices // Math. Ann.—1974.—Vol. 211—P. 87–106.
62. van Gaans O. W. The Riesz part of a positive bilinear form // Circumspice.—Nijmegen: Katholieke Universiteit Nijmegen, 2001.—P. 19–30.
63. Grobler J. J., Labuschagne C. The tensor product of Archimedean ordered vector spaces // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1988.—Vol. 104, № 2—P. 331–345.
64. Gutman A. E. Disjointness preserving operators // Vector Lattices and Integral Operators / Ed. S. S. Kutateladze.—Dordrecht etc.: Kluwer, 1996.—P. 361–454.
65. Gutman A. E., Kusraev A. G., Kutateladze S. S. The Wickstead Problem.—Vladikavkaz: VSC RAN, 2007.—44 p.—(Prep. / IAMI VSC RAS; № 3.)
66. Kusraev A. G. When are all separately band preserving bilinear operators symmetric? // Vladikavkaz Math. J.—2007.—Vol. 9, № 2.—P. 22–25.
67. Kusraev A. G. Hölder type inequalities for orthosymmetric bilinear operators // Vladikavkaz Math. J.—2007.—Vol. 9, № 3.—P. 36–46.
68. Kusraev A. G. Orthosymmetric bilinear operators.—Vladikavkaz: VSC RAS, 2007.—34 p.—(Prep. / IAMI VSC RAS; № 1.)
69. Kusraev A. G. A Radon–Nikod'ym type theorem for for Orthosymmetric bilinear operators, to appear.
70. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—Vol. 2.—243 p.
71. Lotz H. P. Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—Vol. 211.—P. 85–100.
72. Luxemburg W. A. J., Schep A. A Radon–Nikodým type theorem for positive operators and a dual // Indag. Math.—1978.—Vol. 40.—P. 357–375.
73. Maharam D. The representation of abstract integrals // Trans. Amer. Math. Soc.—1953.—Vol. 75, № 1.—P. 154–184.
74. Maharam D. On positive operators // Contemporary Math.—1984.—Vol. 26.—P. 263–277.
75. Mazon J. M., Segura de Leon S. Order bounded ortogonally additive operators // Rev. Roumane Math. Pures Appl.—1990.—Vol. 35, № 4.—P. 329–353.
76. Mazon J. M., Segura de Leon S. Uryson operators // Rev. Roumane Math. Pures Appl.—1990.—Vol. 35, № 5.—P. 431–449.
77. Nakano H. Product spaces of semi-ordered linear spaces // J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I.—1953.—Vol. 12.—P. 163–210.
78. Page R. On bilinear maps of order bounded variation. Thesis.—University of Mississippi, 2005.
79. Schaefer H. H. Aspects of Banach lattices // In: Studies in Functional Analysis, MMA Studies in Math.—1980.—Vol. 21.—P. 158–221.
80. Schaefer H. H. Positive bilinear forms and the Radon–Nikod'ym theorem // In: Funct. Anal.: Survey and Recent Results. 3.—Amsterdam e. a., 1984.—P. 135–143. (Proc 3rd Conf. Paderborn, 24–29 May, 1983.)
81. Scheffold E. Maßalgebren mit intervallerhaltender linksseitiger Multiplikation // Acta Math. Hungar.—1997.—Vol. 76, № 1/2.—P. 59–67.

82. Scheffold E. FF-Banachverbandsalgebren // Math. Z.—1981.—Vol. 177.—P. 183–205.
83. Segura de Leon S. Bukhvalov type characterization of Uryson operators // Studia Math.—1991.—Vol. 99.—P. 199–220.
84. Strassen Vol. The existence of probability measures with given martingales // Ann. Math. Stat.—1965.—Vol. 36.—P. 423–439.
85. Szulga J. (p, r)-convex functions on vector lattices // Proc. Edinburg Math. Soc.—1994.—Vol. 37, № 2.—P. 207–226.
86. Wickstead A. W. Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces // Compositio Math.—1977.—Vol. 35, № 3.—P. 225–238.
87. Wittstock G. Ordered normed tensor products // Foundations of quantum mechanics and ordered linear spaces.—Berlin: Springer, 1974.—P. 67–84.—(Lecture Notes in Phys; Vol. 29.)
88. Wittstock G. Eine Bemerkung über Tensorprodukte von Banachverbänden // Arch. Math.—Basel, 1974.—Vol. 25.—P. 627–634.

Оглавление

Введение . . . 3

Глава 1. Билинейные операторы . . . 5
1.1. Вспомогательные сведения . . . 5
1.2. Продолжение билинейных операторов . . . 7
1.3. Орторегулярные билинейные операторы . . . 10
1.4. Билинейные операторы, сохраняющие порядковые отрезки . . . 12
1.5. Билинейные операторы, сохраняющие дизъюнктность . . . 16
1.6. Порядковое проектирование в пространстве билинейных регулярных операторов . . . 19

Глава 2. Выпуклые операторы . . . 23
2.1. О субдифференциалах не всюду определенных выпуклых операторов . . . 23
2.2. Необходимые условия экстремума в векторных квазидифференцируемых экстремальных задачах . . . 26
2.3. О субдифференциале сублинейного интегрального оператора . . . 29

Глава 3. Ортогонально аддитивные операторы . . . 33
3.1. Предварительные сведения . . . 33
3.2. Порядковое проектирование в пространствах операторов Урысона . . . 34
3.3. Непрерывность операторов Урысона . . . 35
3.4. Компактность операторов Урысона . . . 36
3.5. Ортогонально биаддитивные операторы . . . 37

Литература . . . 42

Басаева Е. К., Кусраев А. Г.,
Плиев М. А., Табуев С. Н.

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ
В ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ

Ответственный за выпуск
Биченова М. С.

Подписано в печать 30.01.2009.
Формат $60 \times 84\ ^1/_8$. Усл. п. л. 5,23. Тираж 100 экз.