УДК 517.927 Дата поступления 1 ноября 2007 г.

Кулаев Р. Ч. Конечное интегральное преобразование на графе.—Владикавказ, 2007.—30 с.—(Препринт / ИПМИ ВНЦ РАН; № 2).

Цель настоящей работы — разработка метода аналитического решения задач математической физики для уравнений в частных производных второго порядка заданных на графе (пространственной сети).

Излагается теория построения конечного интегрального преобразования на графе. Приводится общая схема применения интегрального преобразования к решению задач. Дается обоснование метода для начально-краевых задач гиперболического и параболического типов.

Ключевые слова: граф, краевая задача на графе, конечное интегральное преобразование на графе.

Библиогр. 22.

Институт прикладной математики и информатики
Владикавказского научного центра РАН
Владикавказ, 360044, РОССИЯ

Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН Препринт № 2, декабрь 2007

КОНЕЧНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НА ГРАФЕ

Р. Ч. Кулаев

Введение

Известно какую большую роль приносят теоретическим и прикладным исследованиям интегральные преобразования и связанные с ними утверждения. Применение интегральных преобразований часто позволяет осуществлять редукцию функциональной математической проблемы из одного раздела математики в какой-либо другой, упрощающий интерпретацию и исследование этой проблемы. Одним из отражений роли интегральных преобразований в современных исследованиях является факт создания разнообразной и все пополняющейся литературы,охватывающий огромный диапазон сведений [1–4, 7]. На сегодняшний день изучена и развита теория и техника применения различных интегральных преобразований, в которых переменная интегрирования меняется на прямой (в конечных или бесконечных пределах).

Вместе с тем последние десятилетия связаны с довольно бурным развитием теории дифференциальных уравнений на сетях. Подобные задачи возникают при изучении эволюционных процессов в упругих сетках [8, 9, 11–15, 17–19, 22], при моделировании гидросетей [10], электрических и нейронных сетей [20, 21]. Наиболее крупные циклы работ зарубежных авторов принадлежат G. Lumer (Бельгия), S. Nicaise и его научной группе (Франция), J. P. Roth (Франция), J. E. Lagnese (США), G. Leugering (Германия), E. J. P. G. Schmidt (Канада). В нашей стране основные исследования уравнений на сетях проводятся воронежскими математиками (Ю. В. Покорный, М. Г .Завгородный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др.), которым удалось получить ряд результатов, ставших основой для дальнейших исследований [11, 16]. Это, прежде всего, исследование вопроса однозначной разрешимости задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения на графе (пространственной сети), построение теории функции Грина для уравнений второго порядка и теория неосцилляции. Был получен также ряд результатов в спектральной теории. В частности, исследована асимптотика спектра, описана его структура и установлена спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе. Текущий период характеризуется изобилием новых постановок и направлений, связанных с задачами на графах.

В свете всего вышесказанного становится актуальным вопрос о разработке аналитических методов решения краевых задач на графах. Именно этому вопросу посвящена настоящая работа. В работе излагается теория построения конечного интегрального преобразования для общего дифференциального оператора, порожденного дифференциальным выражением второго порядка, заданным на конечном геометрическом графе, и краевыми условиями, определяемыми в вершинах графа. Строится формула обращения, соответствующая интегральному преобразованию. Приводится общая схема решения краевых задач математической физики методом интегрального преобразования и дается обоснование метода для параболических и гиперболических задач, в которых пространственная переменная имеет область своего изменения геометрический граф.

1. Основные понятия и обозначения

Начнем с описания основных терминов и обозначений используемых ниже (более подробно см. [6]).

Прежде всего дадим определения графа и функции, заданной на графе. Пусть дано конечное множество попарно непересекающихся открытых отрезков $\{\gamma_i\}_1^m$ пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через V множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, которые являются концевыми точками двух и более интервалов. Объединение всех точек интервалов γ_i и множества V обозначим через Γ и будем называть геометрическим графом (в дальнейшем просто «графом»). При этом интервалы γ_i будем называть ребрами графа Γ, а точки множества V — его внутренними вершинами. Концевые точки ребер графа не принадлежащие V будем называть граничными вершинами графа Γ. Совокупность всех граничных вершин обозначим через $\partial\Gamma$. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_i, то будем говорить, что ребро γ_i примыкает к вершине a. Множество индексов всех ребер, примыкающих к внутренней вершине a обозначим $I(a)$. Всюду далее полагаем, что граф Γ является связным множеством в $\mathbb{R}^n$ и не содержит циклических маршрутов.

Будем рассматривать вещественнозначные функции нескольких переменных, у которых одна переменная имеет областью своего изменения граф Γ. Области изменения других переменных могут быть различны, но пока они нас не интересуют, поэтому, в целях упрощения записи, для таких функций примем обозначение $u = u(x)$, $x \in \Gamma$, а через u_i будем обозначать сужение функции u на ребро γ_i, т. е. $u_i(x) = u(x)$ при $x \in \gamma_i$, $u_i(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma\backslash\gamma_i$. Везде ниже полагаем, что все рассматриваемые функции $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывны по переменной x на каждом ребре графа. Множество всех таких функций мы обозначим через $C[\Gamma]$. Далее, если a — произвольная вершина (граничная или внутренняя) графа Γ, то под $u_i(a)$ понимается $\lim\limits_{x\to a} u_i(x),\ x \in \gamma_i$.

Дифференцирование функций по переменной $x \in \Gamma$ внутри каждого ребра $\gamma \in \Gamma$ осуществляется по параметру, причем подразумевается,что для этого ребро параметризовано в одном из двух возможных направлений, т. е.

$$u'(x_0) = \frac{d}{d\lambda}\left(b + t\frac{a-b}{\|a-b\|}\right)\Big|_{t=t_0}, \quad x_0 \in \gamma = (a,b), \quad t_0 = \|x_0 - b\|,$$

при ориентации «от b к a».

Через $C^1[\Gamma]$ обозначим множество функций из $C[\Gamma]$, имеющих внутри каждого ребра равномерно непрерывные производные, а через $C^2[\Gamma]$ — множество функций из $C^1[\Gamma]$, имеющих на каждом ребре непрерывные производные второго порядка.

Под дифференциальным выражением 2-го порядка на графе будем понимать выражение вида

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x)u.$$

Здесь A, B, C — функции одной переменной, определенные на графе Γ. Дифференциальное выражение определено на множестве $C^2[\Gamma]$. Это выражение можно трактовать в виде системы m обычных дифференциальных выражений

$$A_i(x)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + B_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial x} + C_i(x)u_i, \quad x \in \gamma_i,$$

рассматриваемых на каждом ребре $\gamma_i \in \Gamma$, $i = \overline{1, m}$.

Под интегралом функции $u \in C[\Gamma]$, взятым по графу Γ, понимаем сумму интегралов по всем ребрам графа, т. е.

$$\int\limits_{\Gamma} u(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\gamma_i} u_i(x)\,dx.$$

Каждый из интегралов, стоящих под знаком суммы, с учетом выбранной ориентации ребер графа, определяется равенством

$$\int\limits_{\gamma_i} u_i(x)\,dx = \int\limits_{0}^{l_i} u_i\left(a_i + \frac{a_i - b_i}{l_i}\,t\right)\,dt,$$

где $\gamma_i = (a_i, b_i)$, $0 < t < l_i$, $l_i = \|a_i - b_i\|$.

Интегральным преобразованием функции $u \in C[\Gamma]$ называем линейный интегральный оператор

$$\mathscr{L}u = \int\limits_{\Gamma} u(x)\Phi(\xi, x)\,dx,$$

ставящий в соответствие функции u новую функцию

$$\overline{u} = \overline{u}(\xi) = \mathscr{L}u.$$

При этом область преобразования — это конечный граф Γ, а $\Phi(\xi, x)$ — ядро интегрального преобразования. Функцию $\overline{u} = \overline{u}(\xi)$ будем называть интегральным преобразованием или изображением, а совокупность всех изображений $\overline{u}$ — пространством изображений.

Преобразование

$$\mathscr{L}^{-1}\overline{u} = u(x),$$

где $\mathscr{L}^{-1}$ — оператор, обратный оператору $\mathscr{L}$, переводящее функции $\overline{u}$ в функцию u, будем называть обратным преобразованием или формулой обращения.

2. Некоторые спектральные свойства краевых задач на графе

В дальнейших рассуждениях нам понадобятся некоторые предложения, связанные со следующей спектральной краевой задачей:

$$Lu \equiv (pu')' - qu = -\lambda ru, \quad x \in \Gamma. \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) следует понимать как стандартное дифференциальное уравнение заданное на графе. Относительно функций $p, q, r \in C[\Gamma]$ предполагаем:

$$p \in C^1[\Gamma], \ \inf_{x\in\Gamma} p(x) > 0, \quad r(x) > 0, \ q(x) \geq 0, \ x \in \Gamma.$$

В каждой вершине $b \in \partial\Gamma$ имеем граничное условие

$$u(b) = 0, \tag{2.2}$$

а в каждой внутренней вершине a условия

$$u_i(a) = \alpha_i(a) u_{i_0}(a), \ \sum_{i \in I(a)} \beta_i(a) u_i'(a) = 0, \quad a \in V, \quad i_0, i \in I(a), \tag{2.3}$$

где $\alpha(a) = \{\alpha_i(a)\}_{i \in I(a)}$, $\beta(a) = \{\beta_i(a)\}_{i \in I(a)}$ — наборы вещественных чисел, свои для каждой вершины $a \in V$. Полагаем,что

$$\alpha_{i_0}(a) = 1, \ \alpha_i(a)\beta_i(a) > 0, \quad (\alpha(a), \beta(a)) \neq 0.$$

В условиях (2.3) производные подсчитаны при параметризации ребер в направлении к вершине a.

Задача (2.1)–(2.3) обладает следующими свойствами [6, 12]:

1) спектр задачи состоит из последовательности собственных значений не имеющей конечной предельной точки;

2) если граф Γ не имеет циклических маршрутов, то спектр задачи вещественен;

3) задача

$$Lu = -\lambda r u, \quad x \in \Gamma, \tag{2.4}$$

$$u(b) = 0, \, b \in \partial\Gamma, \quad u_i(a) = \alpha_i^*(a) u_{i_0}(a), \quad \sum_{i \in I(a)} \beta_i^* u_i'(a) = 0, \ a \in V, \, i_0, i \in I(a), \tag{2.5}$$

где

$$\alpha_i^*(a) = \frac{p_{i_0}(a)\beta_i(a)}{p_i(a)\beta_{i_0}(a)}; \ \beta_i^*(a) = \alpha_i(a) p_i(a),$$

является сопряженной для задачи (2.1)–(2.3);

4) спектры задачи (2.1)–(2.3) и ее сопряженной задачи (2.4), (2.5) совпадают с учетом кратностей;

5) система корневых (собственных и присоединенных) функций полна, т. е. всякая функция, истокообразно представимая через функцию Грина интегрального оператора обращающего задачу (2.1)–(2.3), разлагается в равномерно сходящийся на Γ ряд по корневым функциям задачи (2.1)–(2.3).

Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность собственных значений задачи (2.1)–(2.3) расположенных в порядке возрастания, причем каждое значение входит в последовательность столько раз какова его алгебраическая кратность. Через $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{h_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим последовательности корневых функций задач (2.1)–(2.3) и (2.4), (2.5) соответственно. Далее, через $D(L)$ обозначим множество функций класса $C^2[\Gamma]$ удовлетворяющих (2.2), (2.3), а через$D(L^*)$ — подмножество функций из $C^2[\Gamma]$, удовлетворяющих (2.5). Тогда, как показывает свойство 5), для всякой функции $u \in D(L)$ имеем

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k h_k(x), \quad \delta_k = \int\limits_{\Gamma} u(x) h_k^*(x) r(x)\, dx \tag{2.6}$$

В общем случае задача (2.1)–(2.3) не является самосопряженной. Для ее самосопряженности необходимо и достаточно, чтобы для любой вершины $a \in$

Vсуществовала константа $C(a)$ такая, что $\beta_i(a) = \alpha_i(a)p_i(a)C(a)$, $i \in I(a)$ Последнее условие гарантирует выполнение равенства $(Lu, v) = (u, Lv)$ для всех $u, v \in D(L)$. Здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2[\Gamma]$ — пространстве суммируемых с квадратом на Γ функций.

Лемма. *Существует линейный ограниченный оператор $\mathscr{P}$ взаимнооднозначно отображающий пространство $D(L)$ на $D(L^*)$ и определяемый равенством $\mathscr{P}u = \rho(x)u(x)$, где $u \in D(L)$, $\rho : \Gamma \to \mathbb{R}$ — положительная функция, постоянная на каждом ребре графа Γ.*

$\lhd$ Доказательство проведем индукцией по числу внутренних вершин. Пусть a — единственная внутренняя вершина графа Γ. Тогда легко видеть,что функция $\rho : \Gamma \to \mathbb{R}$

$$\rho_i(x) = \frac{\beta_i(a)}{\alpha_i(a)p_i(a)},\ x \in \gamma_i$$

определяет оператор $\mathscr{P}$, который обладает необходимыми свойствами.

Предположим, что лемма верна для всякого графа имеющего n внутренних вершин и рассмотрим граф Γ с $n+1$ внутренними вершинами. Удалим из Γ произвольную вершину $a \in V$. Граф Γ распадается на некоторое число графов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, каждый из которых имеет не более n внутренних вершин. Обозначим через $D(L)_i$ и $D(L^*)_i$ множества всех функций из $C^2[\Gamma_i]$, удовлетворяющих в каждой внутренней вершине $a \in \Gamma_i$ условиям (2.2), (2.3) и условиям (2.5), соответственно. В силу предположения индукции, для каждого графа Γ_i существует функция $\rho^i : \Gamma_i \to \mathbb{R}$ определяющая оператор $\mathscr{P}_i : D(L)_i \to D(L^*)_i$ обладающий нужными свойствами. Тогда, если функция $\rho : \Gamma \to \mathbb{R}$ определяется по правилу

$$\rho(x) = \frac{\beta_i(a)}{\alpha_i(a)p_i(a)}\rho^i(x), \quad x \in \Gamma_i,\ i = \overline{1, s},$$

то оператор $\mathscr{P}$, действующий по правилу $\mathscr{P}u = \rho u$, удовлетворяет всем требованиям леммы. $\rhd$

Теорема 2.1. *Все корневые функции $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ являются собственными и образуют базис Рисса в $L_2[\Gamma]$.*

$\lhd$ Введем в пространстве суммируемых с квадратом функций $L_2[\Gamma]$ скалярное произведение

$$(u, v) := \int\limits_{\Gamma} \rho(x)u(x)\bar{v}(x)r(x)\,dx, \tag{2.7}$$

где ρ— функция определяемая в лемме. Очевидно, что введенное таким образом скалярное произведение эквивалентно скалярному произведению в $L_2[\Gamma]$. Гильбертово пространство со скалярным произведение (2.7) обозначим через $L_2[\Gamma;\rho]$. Не трудно установить, что в пространстве $L_2[\Gamma;\rho]$ задача (2.1)–(2.3) является самосопряженной. Следовательно, все корневые функции задачи являются собственными. Более того последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$, биортогональная в $L_2[\Gamma]$ к $\{h_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, является ортонормированной в $L_2[\Gamma;\rho]$ и, в силу полноты (см. свойство 5) образует базис в $L_2[\Gamma;\rho]$.

Таким образом, доказано, что последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ функций из $L_2[\Gamma]$ становится ортонормированным базисом при замене скалярного произведения топологически эквивалентным. Поэтому (см.[4]) эта последовательность является базисом Рисса в $L_2[\Gamma]$. $\rhd$

Из теоремы следует, что для каждой функции $f \in L_2[\Gamma]$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k h_k(x), \quad f_k = (f, h_k^*), \tag{2.8}$$

где последний ряд сходится в среднем квадратичном.

Всюду далее будем считать, что в $L_2[\Gamma]$ скалярное произведение определяется по формуле (2.7).

3. Построение конечного интегрального преобразования на графе для дифференциального оператора второго порядка

В этом пункте мы по прежнему считаем, что u — функция нескольких переменных, одна их которых (мы обозначаем ее x) имеет областью изменения граф Γ. Область изменения других переменных в этом пункте нас не интересует, поэтому сохраняем за u обозначение $u(x)$. Пусть рассматриваемые математические соотношения содержат составляющими частями линейное дифференциальное выражение

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x)u, \quad A(x) \neq 0, \tag{3.1}$$

заданное на графе Γ; краевые условия

$$u(b) = 0, \quad b \in \partial\Gamma, \tag{3.2}$$

и условия, задаваемые в каждой внутренней вершине a графа Γ.

$$\begin{gathered} u_i(a) = \alpha_i(a) u_{i_0}(a), \quad i_0, i \in I(a),\ a \in V, \\ \sum_{i \in I(a)} \beta_i(a) \frac{\partial u_i}{\partial x}(a) = 0. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Построим такое интегральное преобразование, чтобы после применения его к любой системе соотношений, содержащей (3.1)–(3.3), соответствующая система в пространстве изображений не содержала дифференциальных операций по x. Для этого дифференциальный оператор

$$L_0 = A(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B(x)\frac{\partial}{\partial x} + C(x)$$

выбором весовой функции $r(x)$ преобразуем в самосопряженную форму

$$L_0 \equiv \frac{1}{r(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)\right\} \equiv \frac{1}{r} L.$$

Относительно функций p, p', q и r будем предполагать, что они равномерно непрерывны на каждом ребре графа Γ, причем $\inf\limits_{x \in \Gamma} \rho(x) > 0$.

Искомое интегральное преобразование представимо в виде

$$\overline{u}(\lambda) = \mathscr{L} u = \int\limits_{\Gamma} u(x)\Phi(\lambda, x)\, dx. \tag{3.4}$$

Тогда дальнейшей задачей является определение ядра $\Phi(\lambda, x)$.

Применяя оператор $\mathscr{L}$ к $L_0 u$, получим

$$\mathscr{L}[L_0 u] = \mathscr{L}\left[\frac{1}{r}Lu\right] = \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{r(x)} Lu \cdot \Phi(\lambda, x)\, dx =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x}\left(p_i(x)\frac{\partial u_i(x)}{\partial x}\right) \cdot \frac{\Phi_i(\lambda, x)}{r_i(x)}\, dx - \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\gamma_i} q_i(x) u_i(x) \frac{\Phi_i(\lambda, x)}{r_i(x)}\, dx.$$

Интегрируя по частям каждый из интегралов в первой сумме, получим

$$\mathscr{L}\left[\frac{1}{r}Lu\right] = \int\limits_{\Gamma} u(x) L\frac{\Phi}{r}\, dx + R, \tag{3.5}$$

где

$$R = R_{\partial\Gamma} + R_V = -\sum_{b_i \in \partial\Gamma} p_i(x)\left[\frac{\partial u_i(x)}{\partial x} \cdot \frac{\Phi_i(\lambda, x)}{r_i(x)} - u_i(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi_i(\lambda, x)}{r_i(x)}\right)\right]_{x=b_i} +$$
$$+ \sum_{a_j \in V} \sum_{i \in I(a_j)} p_i(x)\left[\frac{\partial u_i(x)}{\partial x} \cdot \frac{\Phi_i(\lambda, x)}{r_i(x)} + u_i(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi_i(\lambda, x)}{r_i(x)}\right)\right]_{x=a_j},$$

при этом все производные посчитаны в направлении «к вершинам графа».

Обозначим через $\varphi(\lambda, x)$ функцию $\frac{\Phi(\lambda,x)}{r(x)}$. Тогда, привлекая условия (3.2), (3.3), не трудно получить

$$R_{\partial\Gamma} = -\sum_{b_i \in \partial\Gamma} p_i(x)\frac{\partial u_i(x)}{\partial x}\, \varphi_i(\lambda, x)\Big|_{x=b_i},$$

$$R_V = \sum_{a_j \in V} \left\{ \sum_{i \in I(a_j)} \beta_i(a_j)\frac{\partial u_i(x)}{\partial x}\frac{p_i(x)\varphi_i(\lambda, x)}{\beta_i(a_j)} - \right.$$
$$\left. - u_{i_0}(a_j) \sum_{i \in I(a_j)} \alpha_i(a_j) p_i(x) \frac{\partial \varphi_i(\lambda, x)}{\partial x} \right\}_{x=a_j}. \tag{3.6}$$

Для того, чтобы преобразованная система не содержала операций дифференцирования по x, достаточно положить

$$L\varphi = -\lambda r \varphi \tag{3.7}$$

и присоединить следующие краевые условия

$$\begin{gathered} \varphi(b) = 0, \quad b \in \partial\Gamma, \\ \varphi_i(a) = \alpha_i^*(a)\varphi_1(a), \quad \sum_{i \in I(a)} \beta_i^*(a)\frac{\partial \varphi_i(a)}{\partial x} = 0, \quad a \in V, \end{gathered} \tag{3.8}$$

где $\alpha_i^*(a) = \frac{\rho_{i_0}(a)\beta_i(a)}{\rho_i(a)\beta_{i_0}(a)}$, $\beta_i^*(a) = \alpha_i(a)\rho_i(a)$.

Действительно, в силу (3.5)–(3.8)

$$\mathscr{L}[L_0 u] = \int\limits_{\Gamma} u(x) L\varphi \, dx = -\lambda \int\limits_{\Gamma} u(x) r(x) \varphi(x) \, dx = -\lambda \overline{u}(\lambda). \tag{3.9}$$

Таким образом, задача определения ядра преобразования свелась к спектральной задаче (3.7), (3.8).

Сравнивая (3.9) с интегральным преобразованием (3.4) искомой функции u, видим, что ядро $\Phi(\lambda, x)$ определено на множестве $\Lambda \times \Gamma$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и при $\lambda = \lambda_k \in \Lambda$ представляет собой произведение собственной функции h_k^* задачи (3.7), (3.8) на весовую функцию r.

Интегральный оператор $\mathscr{L} : C[\Gamma] \to l_2$ ставит в соответствие каждой функции $u \in C[\Gamma]$ последовательность $\overline{u} = \{\overline{u}(\lambda_k)\}$ ее коэффициентов Фурье по системе корневых функций $\{h_k^*\}$:

$$\overline{u}(\lambda_k) = \int\limits_{\Gamma} u(x) h_k^*(x) r(x) \, dx, \quad \lambda_k \in \Lambda. \tag{3.10}$$

Как следует из (3.9) преобразование $\mathscr{L}$ сопоставляет выражению (3.1) с краевыми условиями (3.2), (3.3) однозначно определяемое выражение $-\lambda\overline{u}$. Тем самым дифференциальная операция L_0 заменяется алгебраической операцией умножения на $-\lambda$, $\lambda \in \Lambda$.

Рассмотрим функцию $u \in C^2[\Gamma]$ и удовлетворяющую краевым условиям (3.2), (3.3). Как следует из сформулированных в п. 2 свойств, функция u разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям задачи (3.7), (3.2), (3.3). Для такой функции можно найти преобразование $\mathscr{L}^{-1} : D \to C^2[\Gamma]$, где $D = \mathscr{L}(D(L)) \subset l_2$ обратное интегральному преобразованию $\mathscr{L}$. Обратное преобразование

$$\mathscr{L}^{-1}\overline{u} = u(x)$$

определяется как разложение оригинала u в ряд по системе $\{h_k\}$. Из (2.6) находим, учитывая (3.10),

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) \overline{u}(\lambda_k). \tag{3.11}$$

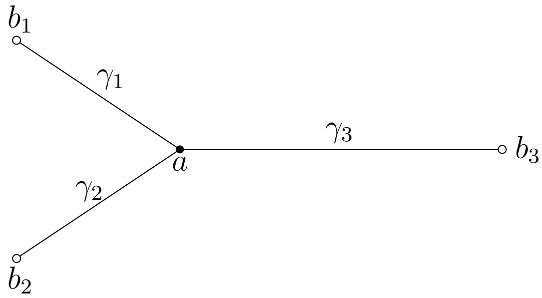
Резюмируя вышеизложенное, сформулируем следующее утверждение:

Теорема. *Для любой функции $u \in C^2[\Gamma]$, удовлетворяющей условиям* (3.2), (3.3), *имеет место формула обращения* (3.11), *которая совместно с* (3.10) *устанавливает взаимнооднозначное соответствие между функцией u и ее интегральным преобразованием $\overline{u}$.*

Пример построения интегрального преобразования. Пусть дифференциальное выражение

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

задано на плоском графе $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, состоящем из трех ребер γ_1, γ_2, γ_3 и одной внутренней вершины a их соединяющей, как это изображено на следующем рисунке:



Длины ребер γ_1 и γ_2 равны единице, а длина ребра γ_3 равна двум. На границе графа, в точках b_1, b_2 и b_3, заданы условия

$$u(b_i) = 0, \quad b_i \in \partial\Gamma.$$

Во внутренней вершине a задаются условия

$$u_1(a) = u_2(a) = u_3(a),$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(a) + 2\frac{\partial u_2}{\partial x}(a) + 3\frac{\partial u_3}{\partial x}(a) = 0.$$

Считаем, что производные посчитаны в направлении к вершине a.

Дифференциальное выражение задано в самосопряженной форме, поэтому $p(x) \equiv 1$, $r(x) \equiv 1$, $x \in \Gamma$. В соответствии с (3.8)

$$\alpha_1^*(a) = 1, \quad \alpha_2^*(a) = 2, \quad \alpha_3^*(a) = 3,$$
$$\beta_1^*(a) = \beta_2^*(a) = \beta_3^*(a) = 1.$$

Задача (3.7), (3.8) имеет вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \lambda\varphi = 0, \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered}\varphi(b_i) = 0, \quad b_i \in \partial\Gamma, \quad i = 1, 2, 3,\\ \varphi_2(a) = 2\varphi_1(a), \quad \varphi_3(a) = 3\varphi_1(a), \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(a) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(a) + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}(a) = 0.\end{gathered} \tag{3.13}$$

Функции

$$\psi_{1i}(x,\lambda) = \begin{cases}\sin(\sqrt{\lambda}\|x - b_i\|), & x \in \gamma_i,\\ 0, & x \in \Gamma\backslash\gamma_i,\end{cases}$$
$$\psi_{2i}(x,\lambda) = \begin{cases}\cos(\sqrt{\lambda}\|x - b_i\|), & x \in \gamma_i,\\ 0, & x \in \Gamma\backslash\gamma_i,\end{cases}$$

$i = 1, 2, 3$, образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (3.12).

Пусть l_k, $k = 1, \ldots, 6$, — набор линейных функционалов, определяющих систему условий (3.8). Рассмотрим характеристический определитель $\Delta(\lambda) = \det\|l_k(\psi_{ji}(\cdot,\lambda))\|$ $j = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$, который путем несложных преобразований приводится к виду

$$\Delta(\lambda) = -3\sqrt{\lambda}\cdot\sin^2\sqrt{\lambda}\cdot(4\sin^2\sqrt{\lambda} - 3).$$

Собственные значения задачи (3.12), (3.13) суть нули характеристического определителя. Решая уравнение $\Delta(\lambda) = 0$, получим три последовательности нулей определителя $\Delta(\lambda)$:

$$\lambda_k^{(1)} = \left(\pi k - \frac{2\pi}{3}\right)^2, \quad \lambda_k^{(2)} = \left(\pi k - \frac{\pi}{3}\right)^2, \quad \lambda_k^{(3)} = (\pi k)^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При этом кратность нулей $\lambda_k^{(1)}$ и $\lambda_k^{(2)}$ равна единице, а кратность $\lambda_k^{(3)}$ равна двум.

Представим спектр Λ задачи (3.12), (3.13) в виде возрастающей последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем каждое собственное значение входит в Λ столько раз, какова его кратность. Собственные функции $h_k^*(x)$ задачи (3.12), (3.13) имеют вид:

$$h_{4n-3}^*(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_{4n-3}}\|x - b_1\|), & x \in \gamma_1, \\ 2\sin(\sqrt{\lambda_{4n-3}}\|x - b_2\|), & x \in \gamma_2, \\ (-1)^{n+1} 3\sin(\sqrt{\lambda_{4n-3}}\|x - b_3\|), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

$$h_{4n-2}^*(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_{4n-2}}\|x - b_1\|), & x \in \gamma_1, \\ 2\sin(\sqrt{\lambda_{4n-2}}\|x - b_2\|), & x \in \gamma_2, \\ (-1)^{n} 3\sin(\sqrt{\lambda_{4n-2}}\|x - b_3\|), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

$$h_{4n-1}^*(x) = \begin{cases} 3\sin(\sqrt{\lambda_{4n-1}}\|x - b_1\|), & x \in \gamma_1, \\ -3\sin(\sqrt{\lambda_{4n-1}}\|x - b_2\|), & x \in \gamma_2, \\ 0, & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

$$h_{4n}^*(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_{4n}}\|x - b_1\|), & x \in \gamma_1, \\ 2\sin(\sqrt{\lambda_{4n}}\|x - b_2\|), & x \in \gamma_2, \\ (-1)^{n+1} 3\sin(\sqrt{\lambda_{4n}}\|x - b_3\|), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Собственные функции $h_k(x)$ сопряженной для (3.12), (3.13) задачи определяются следующим образом:

$$h_{4n-3}(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_{4n-3}}\|x - b_1\|), & x \in \gamma_1, \\ \sin(\sqrt{\lambda_{4n-3}}\|x - b_2\|), & x \in \gamma_2, \\ (-1)^{n+1} \sin(\sqrt{\lambda_{4n-3}}\|x - b_3\|), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

$$h_{4n-2}(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_{4n-2}}\|x - b_1\|), & x \in \gamma_1, \\ \sin(\sqrt{\lambda_{4n-2}}\|x - b_2\|), & x \in \gamma_2, \\ (-1)^{n} \sin(\sqrt{\lambda_{4n-2}}\|x - b_3\|), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

$$h_{4n-1}(x) = \begin{cases} 2\sin(\sqrt{\lambda_{4n-1}}\|x - b_1\|), & x \in \gamma_1, \\ -\sin(\sqrt{\lambda_{4n-1}}\|x - b_2\|), & x \in \gamma_2, \\ 0, & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

$$h_{4n}(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda_{4n}}\|x - b_1\|), & x \in \gamma_1, \\ \sin(\sqrt{\lambda_{4n}}\|x - b_2\|), & x \in \gamma_2, \\ (-1)^{n+1} \sin(\sqrt{\lambda_{4n}}\|x - b_3\|), & x \in \gamma_3, \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Прямое интегральное преобразование, согласно (3.10), имеет вид

$$\overline{u}(\lambda_k) = \int\limits_{\Gamma} u(x)h_k^*(x)\,dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Обратное преобразование (формула обращения), в соответствии с (3.11) принимает вид

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{u}\,(\lambda_k)h_k(x).$$

4. Общая схема применения конечных интегральных преобразований к решению задач математической физики

Применение конечных интегральных преобразований для получения решений краевых задач математической физики проиллюстрируем на примере одномерной задачи.

Всюду далее нами рассматриваются функции $u : \Gamma \times [0,T] \to \mathbb{R}$, у которых первая (пространственная) переменная имеет областью своего изменения граф Γ, а вторая (временная) — отрезок $[0,T] \subset \mathbb{R}$. Все рассматриваемые ниже функции предполагаются равномерно непрерывными по переменной x на каждом ребре графа.

Пусть требуется найти решение $u = u(x,t)$ дифференциального уравнения в частных производных

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial u}{\partial t} = L_0 u + f(x,t) \quad (\mu, \eta = \mathrm{const}) \tag{4.1}$$

со следующими краевыми и начальными условиями

$$u(b,t) = 0, \quad b \in \partial\Gamma, \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \tag{4.3}$$

φ, ψ — заданные функции из $C[\Gamma]$. В каждой внутренней вершине $a \in V$ решение $u(x,t)$ удовлетворяет при каждом $t \in [0,T]$ условиям (3.3).

Уравнение (4.1) рассматривается на $\Gamma \times [0,T]$ и принимается по пространственной переменной $x \in \Gamma$ как уравнение на графе.

Применим к системе (4.1)–(4.3) конечное интегральное преобразование (3.10), другими словами, найдем результат действия на систему (4.1)–(4.3) оператора $\mathscr{L}$. При этом оригиналу $u(x,t)$ сопоставляется изображение

$$\bar{u}(\lambda_k, t) = \int\limits_{\Gamma} u(x,t)h_k^*(x)r(x)\,dx,$$

а исходной задаче (4.1)–(4.3) в пространстве оригиналов сопоставляются следующие краевые задачи в пространстве изображений:

$$\mu\frac{d^2\bar{u}}{dt^2} + \eta\frac{d\bar{u}}{dt} + \lambda_k\bar{u} = \bar{f}(\lambda_k, t), \tag{4.4}$$

$$\bar{u}(\lambda_k, 0) = \bar{\varphi}(\lambda_k), \quad \frac{d\bar{u}}{dt}(\lambda_k, 0) = \bar{\psi}(\lambda_k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.5}$$

где

$$\bar{f}(\lambda_k, t) = \int\limits_\Gamma f(x,t) h_k^*(x) r(x)\, dx,$$
$$\bar{\varphi}(\lambda_k) = \int\limits_\Gamma \varphi(x) h_k^*(x) r(x)\, dx, \qquad (4.6)$$
$$\bar{\psi}(\lambda_k) = \int\limits_\Gamma \psi(x) h_k^*(x) r(x)\, dx.$$

Счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений (4.4) с условиями (4.5) эквивалентна дифференциальному уравнению в частных производных (4.1) с условиями (4.2), (4.3). Таким образом в пространстве изображений мы имеем более простую задачу — задачу Коши (4.4), (4.5).

Решение задачи Коши (4.4), (4.5) задается равенством:

$$\bar{u}(\lambda_k, t) = \int\limits_0^t \bar{f}(\lambda_k, s) K(\lambda_k, t, s)\, ds +$$
$$+\bar{\varphi}(\lambda_k)\left\{\mu \frac{\partial K}{\partial t}(\lambda_k, t, 0) + \eta K(\lambda_k, t, 0)\right\} + \bar{\psi}(\lambda_k)\mu K(\lambda_k, t, 0). \qquad (4.7)$$

В формуле (4.7): $K(\lambda_k, t, s)$ — функция Коши (фундаментальное решение); интегралом задается решение уравнения (4.4), удовлетворяющее однородным начальным условиям

$$\bar{u}(\lambda_k, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(\lambda_k, 0) = 0;$$

внеинтегральные слагаемые дают решение соответствующего (4.4) однородного уравнения с неоднородными условиями (4.5).

В случае $\mu \neq 0$ функция Коши определяется по правилу

$$K(\lambda_k, t, s) = \frac{1}{aW(s)} \begin{vmatrix} \varphi_1(\lambda_k, s) & \varphi_2(\lambda_k, s) \\ \varphi_1(\lambda_k, t) & \varphi_2(\lambda_k, t) \end{vmatrix},$$

где $\varphi_1(\lambda_k, \cdot)$ и $\varphi_2(\lambda_k, \cdot)$ — фундаментальная система решений, соответствующего уравнению (4.4) однородного уравнения, $W(\cdot)$ — определитель Вронского.

В частности, в гиперболическом случае ($\mu \neq 0$, $\eta = 0$)

$$K(\lambda_k, t, s) = \frac{1}{\sqrt{\mu\lambda_k}} \sin \sqrt{\frac{\lambda_k}{\mu}}(t-s).$$

Если $\mu \neq 0$, $\eta \neq 0$, то в силу $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ [12], найдется такой номер N, что при $k > N$ будет выполняться неравенство $\lambda_k \geqslant \frac{\eta^2}{4\mu}$ и тогда

$$K(\lambda_k, t, s) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\eta^2 - 4\mu\lambda_k}}\, e^{-\frac{\eta}{2\mu}(t-s)} \mathrm{sh} \dfrac{\sqrt{\eta^2 - 4\mu\lambda_k}}{2\mu}(t-s), & \text{при } k < N, \\ \dfrac{2}{\sqrt{4\mu\lambda_k - \eta^2}}\, e^{-\frac{\eta}{2\mu}(t-s)} \sin \dfrac{\sqrt{4\mu\lambda_k - \eta^2}}{2\mu}(t-s), & \text{при } k > N, \\ \dfrac{t-s}{\mu}\, e^{-\frac{\eta}{2\mu}(t-s)}, & \text{при } \lambda_N = \frac{\eta^2}{4\mu}. \end{cases}$$

В параболическом случае ($\mu = 0$, $\eta \neq 0$) левая часть (4.4) принимает вид $\eta \dfrac{d\bar{u}}{dt} + \lambda_k \bar{u}$ и $K(\lambda_k, t, s) = \dfrac{1}{\eta}\, e^{-\frac{\lambda_k}{\eta}(t-s)}$.

Возвращаясь теперь из пространства изображений $\bar{u}$ в пространство оригиналов, применим к (4.7) оператор $\mathscr{L}^{-1}$ — формулу обращения (3.11). Приходим, с учетом (4.6), к формальному решению исходной задачи (4.1)–(4.3):

$$
\begin{gathered}
u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) \cdot \bar{u}(\lambda_k, t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma f(x,s) h_k^*(x) r(x) \cdot K(\lambda_k, t, s)\, dx\, ds + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) \int\limits_\Gamma \Big[\varphi(x)\big(\mu \frac{\partial K}{\partial t}(\lambda_k, t, 0) + \eta K(\lambda_k, t, 0)\big) + \\
+ \psi(x) \cdot \mu K(\lambda_k, t, 0)\Big] h_k^*(x) r(x)\, dx.
\end{gathered}
\tag{4.8}
$$

В (4.8) первая сумма отражает вклад в решение от неоднородной части уравнения (4.1), а вторая — от начальных условий (4.3).

5. Обоснование метода интегрального преобразования для уравнения гиперболического типа

В этом пункте будет дано обоснование изложенного в п. 4 метода для следующей смешанной задачи:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u + f(x,t) \equiv Lu + f(x,t), \\
(x,t) \in \Gamma_T = \Gamma \times [0,T],
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

$$
u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Gamma,
\tag{5.2}
$$

$$
u(b,t) = 0, \quad b \in \partial\Gamma,
\tag{5.3}
$$

В каждой внутренней вершине $a \in V$ задаются условия непрерывности и условие согласования:

$$
u_i(a,t) = \alpha_i(a) u_{i_0}(a,t), \quad i, i_0 \in I(a), \qquad \sum_{i \in I(a)} \beta_i(a) \frac{\partial u_i}{\partial x}(a,t) = 0
\tag{5.4}
$$

Предполагаем, что $p \in C^1[\Gamma]$, $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x) > p_0 > 0$, $q \in C[\Gamma]$, $q \geqslant 0$, $f \in C[\Gamma_T]$, $\varphi \in C^1[\Gamma]$, $\psi \in C[\Gamma]$.

Рассматриваемая задача имеет естественную физическую интерпретацию [6]. При $\alpha_i(a) = 1$, $\beta_i(a) = p_i(a)$ она моделирует процесс малых поперечных колебаний натянутой сетки из струн, копирующей в состоянии покоя плоский граф Γ. Сетка закреплена на границе, что выражается условиями (5.3). Условия (5.4) дают непрерывность деформации в узлах сетки и условия баланса сил, действующих на узел со стороны каждой из примыкающих струн. Эта же задача описывает малые продольные деформации сетки из упругих стержней. Задача (5.1)–(5.4) получается вследствие применения вариационного принципа минимизации энергетического функционала [6].

Обоснование метода интегрального преобразования для задачи (5.1)–(5.4) будет дано на основе априорных оценок функционала энергии.

5.1. Классическое решение. Единственность и непрерывная зависимость классического решения. Для задачи (5.1)–(5.4) формальное решение (4.8) принимает вид

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{u}(\lambda_k,t)h_k(x), \tag{5.5}$$

где

$$\bar{u}(\lambda_k,t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^t\bar{f}(\lambda_k,s)\sin\sqrt{\lambda_k}(t-s)\,ds+\bar{\varphi}(\lambda_k)\cos\sqrt{\lambda_k}t+\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\bar{\psi}(\lambda_k)\sin\sqrt{\lambda_k}t, \tag{5.6}$$

$\bar{f}(\lambda_k,t)$, $\bar{\varphi}(\lambda_k)$, $\bar{\psi}(\lambda_k)$ определяются равенствами (4.6), а h_k — собственные функции спектральной задачи

$$\begin{gathered}Lh=-\lambda h,\quad x\in\Gamma,\\ h(b)=0,\quad b\in\partial\Gamma,\ h_i(a)=\alpha_i(a)h_{i_0}(a),\quad i,i_0\in I(a),\quad \sum_{i\in I(a)}\beta_i(a)h_i(a)=0,\quad a\in V.\end{gathered} \tag{5.7}$$

Как следует из теоремы 2.1, все функции h_k являются собственными и, в силу свойства 5) п. 2, образуют полную ортонормированную систему в $L_2[\Gamma]$ — пространстве суммируемых на Γ с квадратом функций. Напомним, что скалярное произведение в $L_2[\Gamma]$ определяется по формуле (2.7).

Функцию $u(x,t)\in C^2[\Gamma_T]\bigcap C^1[\Gamma_T\bigcup\partial\Gamma_T]$, удовлетворяющую в Γ_T уравнению (5.1), начальным условиям (5.2), условиям (5.3) на $\partial\Gamma_T=\partial\Gamma\times[0,T]$ и условиям (5.4) на $V\times[0,T]$ назовем классическим решением смешанной задачи (5.1)–(5.4).

В дальнейших рассуждениях очень важную роль играет интеграл энергии

$$\mathscr{I}^2(t)=\frac{1}{2}\int\limits_\Gamma\rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+qu^2\right]dx,$$

представляющей собой сумму кинетической и потенциальной энергий колеблющейся системы. Здесь ρ — функция определяемая в лемме п. 2.

Лемма 1. *Пусть* $u(x,t)$ — *классическое решение* (5.1)–(5.4). *Тогда*

$$\mathscr{I}^2(t)=\mathscr{I}^2(0)+\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma\rho(x)f(x,s)\frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\,dx\,ds, \tag{5.8}$$

где

$$\mathscr{I}^2(0)=\frac{1}{2}\int\limits_\Gamma\rho[\psi^2+p\,\varphi'^2+q\varphi^2]\,dx,\quad t\in[0,T].$$

◁ Умножим уравнение (5.1) на $\rho\frac{\partial u}{\partial t}$ и проинтегрируем по Γ_T.

$$\int\limits_{\Gamma_T} \rho f \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dt = \int\limits_{\Gamma_T} \rho \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu\right) dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{\Gamma}\int\limits_0^T \rho \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, dt\, dx - \int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma} \rho\frac{\partial u}{\partial t} Lu\, dx\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\Big|_0^T dx +$$

$$+ \int\limits_0^T \Bigg\{ \sum_{i=1}^m \int\limits_{\gamma_i} \rho_i \left[p_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x} + q_i u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}\right] dx -$$

$$- \sum_{a_j\in V} C(a_j) \sum_{i\in I(a_j)} \frac{\beta_i(a_j)}{p_i(a_j)\alpha_i(a_j)} \frac{\partial u_i}{\partial t}(a_j,t) p_i(a_j)\frac{\partial u_i}{\partial x}(a_j,t) -$$

$$- \sum_{b_j\in\partial\Gamma} \rho_i(b_j)\frac{\partial u_i}{\partial t}(b_j,t)p_i(b_j)\frac{\partial u_i}{\partial x}(b_j,t)\Bigg\} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} \rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + qu^2\right]\Bigg|_0^T dx -$$

$$- \sum_{a_j\in V} C(a_j)\int\limits_0^T \left[\frac{\partial u_{i_0}}{\partial t}(a_j,t)\sum_{i\in I(a_j)} \beta_i(a_j)\frac{\partial u_i}{\partial x}(a_j,t)\right] dt -$$

$$- \sum_{b_j\in\,\partial\Gamma} \rho_i(b_j)\int\limits_0^T \frac{\partial u_i}{\partial t}(b_j,t)p_i(b_j)\frac{\partial u_i}{\partial x}(b_j,t)\, dt.$$

Из условий (5.3), (5.4) следует равенство нулю всех сумм, поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_T} \rho f\frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} \rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + qu^2\right]\Bigg|_0^T dx.$$

Заменяя T на t, получим (5.8). ▷

Для доказательства единственности и непрерывной зависимости классического решения задачи (5.1)–(5.4) применим метод интегралов энергии.

Предположим, что $u = u(x,t)$ является классическим решением гиперболической задачи. Так как $p(x) > p_0 > 0$ на Γ, то

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L_2[\Gamma]}(t) \le \frac{1}{p_0}\int\limits_{\Gamma} \rho p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \le \frac{2}{p_0}\mathscr{J}^2(t),$$

т. е.

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2[\Gamma]}(t) \le \sqrt{\frac{2}{p_0}}\mathscr{J}(t).$$

Аналогично,

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2[\Gamma]}(t) \le \sqrt{2}\mathscr{J}(t).$$

Дифференцируя равенство (5.8) по t и применяя неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$2|\mathscr{I}(t)\mathscr{I}'(t)| \le \|f\|_{L_2[\Gamma]}(t) \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2[\Gamma]}(t) \le \|f\|_{L_2[\Gamma]}(t)\sqrt{2}\,\mathscr{I}(t),$$

$$\mathscr{I}'(t) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\,\|f\|_{L_2[\Gamma]}(t).$$

Отсюда получаем оценку для $\mathscr{I}(t)$:

$$\mathscr{I}(t) \le \mathscr{I}(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^t \|f\|_{L_2[\Gamma]}(s)\,ds.$$

Из этой оценки выводим неравенства:

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2[\Gamma]}(t) \le \sqrt{2}\mathscr{I}(0) + \int\limits_0^t \|f\|_{L_2[\Gamma]}(s)\,ds, \tag{5.9}$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2[\Gamma]}(t) \le \sqrt{\frac{2}{p_0}}\,\mathscr{I}(0) + \int\limits_0^t \|f\|_{L_2[\Gamma]}(s)\,ds, \tag{5.10}$$

Аналогично, дифференцируя функцию $\|u\|^2_{L_2[\Gamma]}(t)$, применяя неравенство Коши — Буняковского и неравенство (5.9), получается оценка:

$$\|u\|_{L_2[\Gamma]}(t) \le \|\varphi\|_{L_2[\Gamma]} + \sqrt{2}\,\mathscr{I}(0)\,t + \int\limits_0^t (t-s)\,\|f\|_{L_2[\Gamma]}(s)\,ds \tag{5.11}$$

Теперь, используя полученные оценки, докажем следующую теорему.

Теорема 5.1. *Классическое решение задачи* (5.1)–(5.4) *единственно и непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что*

$$\begin{aligned} \|u-\tilde u\|_{L_2[\Gamma]}(t) + \left\|\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \tilde u}{\partial t}\right\|_{L_2[\Gamma]}(t) + \left\|\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \tilde u}{\partial x}\right\|_{L_2[\Gamma]}(t) \leqslant \\ \le C\big(\|\varphi-\tilde\varphi\|_{C[\Gamma]} + \|\varphi' - \tilde\varphi'\|_{L_2[\Gamma]} + \|f-\tilde f\|_{L_2[\Gamma]}(t)\big), \quad t\in[0,T] \end{aligned} \tag{5.12}$$

Здесь u, $\tilde u$ — классические решения, а $C = \mathrm{const}$ не зависит от t.

$\lhd$ Единственность решения вытекает из того, что, в силу неравенства (5.11), однородная задача (5.1)–(5.4) (при $\varphi\equiv 0$, $\psi\equiv 0$, $f\equiv 0$) имеет только нулевое решение.

Докажем непрерывную зависимость решения от начальных данных.

Функция $u-\tilde u$ является классическим решением задачи (5.1)–(5.4) с заменой f,φ,ψ на $f-\tilde f$, $\varphi-\tilde\varphi$, $\psi-\tilde\psi$ соответственно. Для решения $u-\tilde u$ оценим величину $\tilde{\mathscr{I}}(0)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathscr{I}}^2(0) = \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \big[(\psi-\tilde\psi)^2 + p\,(\varphi'-\tilde\varphi')^2 + q\,(\varphi-\tilde\varphi)^2\big]\,dx \leqslant \\ \le C_1\big(\|\psi-\tilde\psi\|^2_{L_2[\Gamma]} + \|\varphi'-\tilde\varphi'\|^2_{L_2[\Gamma]} + \|\varphi-\tilde\varphi\|^2_{C[\Gamma]}\big). \end{aligned}$$

Применяя теперь к решению $u-\tilde{u}$ оценку (5.11) и последнее неравенство, получим:

$$\|u-\tilde{u}\|_{L_2[\Gamma]}(t) \le C\big(\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C[\Gamma]} + \|\varphi^{'}-\tilde{\varphi}^{'}\|_{L_2[\Gamma]} + \|\psi-\tilde{\psi}\|_{L_2[\Gamma]} + \|f-\tilde{f}\|_{L_2[\Gamma]}(t)\big).$$

Аналогично, используя неравенства (5.9), (5.10) и оценку для $\tilde{\mathscr{J}}(0)$ устанавливаются неравенства:

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right\|_{L_2[\Gamma]}(t) \le C\big(\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C[\Gamma]} + \|\varphi^{'}-\tilde{\varphi}^{'}\|_{L_2[\Gamma]} + \|\psi-\tilde{\psi}\|_{L_2[\Gamma]} + \|f-\tilde{f}\|_{L_2[\Gamma]}(t)\big),$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right\|_{L_2[\Gamma]}(t) \le C\big(\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C[\Gamma]} + \|\varphi^{'}-\tilde{\varphi}^{'}\|_{L_2[\Gamma]} + \|\psi-\tilde{\psi}\|_{L_2[\Gamma]} + \|f-\tilde{f}\|_{L_2[\Gamma]}(t)\big). \rhd$$

5.2. Обобщенное решение. Пусть существуют последовательности $f_n \in C[\Gamma_T]$, $\varphi_n \in C^1[\Gamma]$, $\psi_n \in C[\Gamma]$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\begin{gathered} 1)\ f_n \rightrightarrows f \text{ в } L_2[\Gamma] \text{ равномерно по } t \text{ на } [0,T]; \\ \varphi_n \to \varphi \text{ в } C[\Gamma],\ \psi_n \to \psi \text{ в } L_2[\Gamma],\ \varphi_n^{'} \to \varphi^{'} \text{ в } L_2[\Gamma]; \end{gathered} \tag{5.13}$$

2) при каждом $n \in \mathbb{N}$ существует классическое решение $u_n(x,t)$ смешанной задачи

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = Lu_n + f_n(x,t), \\ u_n(x,0) = \varphi_n(x), \quad \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \psi_n(x), \end{gathered} \tag{5.14}$$

удовлетворяющее условиям (5.3), (5.4).

Тогда, если существует функция $u(x,t)$, непрерывная в $L_2[\Gamma]$ по t на $[0,T]$ и такая, что $u_n \rightrightarrows u$ в $L_2[\Gamma]$ равномерно по t, то функцию u назовем обобщенным решением задачи (5.1)–(5.4).

Теорема 5.2. *Обобщенное решение задачи* (5.1)–(5.4) *единственно.*

$\lhd$ Пусть $u_n(x,t)$ — последовательность классических решений, сходящаяся к обобщенному решению $u(x,t)$ в смысле определения. Применяя к функциям u_n оценку (5.11) и переходя к пределу, с учетом (5.13), (5.14), убеждаемся в справедливости оценки (5.11) для обобщенного решения. Аналогично для обобщенного решения устанавливаются оценки (5.9), (5.10), откуда уже следует единственность обобщенного решения. $\rhd$

Теорема 5.3. *Если $\varphi \in D(L)$, $\psi \in L_2[\Gamma]$ и f — непрерывна по t в $L_2[\Gamma]$, то обобщенное решение задачи* (5.1)–(5.4) *существует и представляется рядом* (5.5) *— формальным решением.*

$\lhd$ Пользуясь теоремой разложения, представим функцию φ в виде равномерно сходящегося ряда

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\varphi}(\lambda_k) h_k(x), \tag{5.15}$$

а функции ψ и f в виде рядов

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\psi}(\lambda_k) h_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}(\lambda_k,t) h_k(x), \tag{5.16}$$

сходящихся к ним в $L_2[\Gamma]$, причем последний ряд сходится равномерно по t. Это следует из непрерывности функции f по t.

Обозначим через u_n, φ_n, ψ_n, f_n частичные суммы рядов (5.5), (5.15) и (5.16) соответственно. Из определения функций $\bar{u}(\lambda_k, t)$ следует, что $u_n(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{u}(\lambda_k, t)h_k(x)$ принадлежит $C^2[\Gamma_T] \bigcap C^1[\Gamma_T \bigcup \partial\Gamma_T]$. Далее,

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - Lu_n = \sum_{k=1}^{n} (\bar{u}''(\lambda_k, t)h_k(x) - \bar{u}(\lambda_k, t)Lh_k) = \sum_{k=1}^{n} \bar{f}(\lambda_k, t)h_k(x) = f_n(x,t),$$

$$u_n(x,0) = \varphi_n(x), \quad \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \psi_n(x).$$

т. е. функции u_n, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяют уравнению (5.14).

Таким образом, построена последовательность $u_n(x,t)$ классических решений задачи (5.14) таких, что выполнены соотношения (5.13). Остается показать, что последовательность u_n сходится в $L_2[\Gamma]$ равномерно по t. Но это сразу следует, если примерить к разности $u_n - u_p$ оценку (5.12) и привлечь соотношения (5.13). $\triangleright$

5.3. Существование классического решения. Пусть $G(x,s)$ — функция Грина интегрального оператора, обращающего дифференциальный оператор L [6]. Тогда собственные функции $\{h_k\}$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{h_k(x)}{\lambda_k} = \int\limits_{\Gamma} G(x,s)h_k(s)\,ds,$$

и равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h_k(x)|^2}{\lambda_k} = G(x,x). \tag{5.17}$$

Причем последний ряд сходится равномерно на $\bar{\Gamma}$. Докажем равномерную сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h_k'(x)|^2}{\lambda_k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|h_k''(x)|^2}{\lambda_k^3}. \tag{5.18}$$

Равномерная сходимость первого ряда вытекает из равенства

$$\frac{h_k'(x)}{\lambda_k} = \int\limits_{\Gamma} G_x'(x,s)h_k(s)\,ds = (G_x', h_k),$$

свойств функции Грина, равенства Парсеваля для G_x' и леммы Дини.

Равномерная сходимость второго ряда вытекает из равномерной сходимости ряда (5.17), первого ряда (5.18) и дифференциального уравнения

$$h_k''(x) = -\frac{p'(x)}{p(x)}h_k'(x) + \frac{q(x) - \lambda_k}{p(x)}h_k(x).$$

Лемма. *Пусть φ, $L\varphi$, $\psi \in D(L)$ и f, $\frac{\partial f}{\partial t} \in L_2(\Gamma_T)$. Тогда ряд (5.5) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по t один и два раза, сходятся равномерно на Γ_T.*

$\triangleleft$ Рассмотрим функции $\bar u(\lambda_k,t)$, определяемые равенством (5.6). Так как

$$\bar u(\lambda_k,t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^t \bar f(\lambda_k,s)\sin\sqrt{\lambda_k}(t-s)\,ds+\bar\varphi(\lambda_k)\cos\sqrt{\lambda_k}\,t+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\bar\psi(\lambda_k)\sin\sqrt{\lambda_k}\,t=\frac{1}{\lambda_k}\Big(\bar f(\lambda_k,t)-\bar f(\lambda_k,0)\cos\sqrt{\lambda_k}\,t\Big)-$$
$$-\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^t \bar f\,'(\lambda_k,s)\cos\sqrt{\lambda_k}(t-s)\,ds+\bar\varphi(\lambda_k)\cos\sqrt{\lambda_k}\,t+\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\bar\psi(\lambda_k)\sin\sqrt{\lambda_k}\,t,$$

$$\bar u\,'(\lambda_k,t)=\int\limits_0^t \bar f(\lambda_k,s)\cos\sqrt{\lambda_k}(t-s)\,ds-\sqrt{\lambda_k}\,\bar\varphi(\lambda_k)\sin\sqrt{\lambda_k}\,t+\bar\psi(\lambda_k)\cos\sqrt{\lambda_k}\,t=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\bar f(\lambda_k,0)\sin\sqrt{\lambda_k}\,t+\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^t \bar f\,'(\lambda_k,s)\sin\sqrt{\lambda_k}(t-s)\,ds+$$
$$+\sqrt{\lambda_k}\,\bar\varphi(\lambda_k)\sin\sqrt{\lambda_k}\,t+\bar\psi(\lambda_k)\cos\sqrt{\lambda_k}\,t,$$
$$\bar u\,''(\lambda_k,t)=\bar f(\lambda_k,t)-\lambda_k\bar u(\lambda_k,t)=\bar f(\lambda_k,0)\cos\sqrt{\lambda_k}\,t+$$
$$+\int\limits_0^t \bar f(\lambda_k,s)\cos\sqrt{\lambda_k}(t-s)\,ds-\lambda_k\bar\varphi(\lambda_k)\cos\sqrt{\lambda_k}\,t-\lambda_k\bar\psi(\lambda_k)\sin\sqrt{\lambda_k}\,t,$$

то получаем оценки

$$\lambda_k^2|\bar u(\lambda_k,t)|^2\le C\big(|\bar f(\lambda_k,t)|^2+|\bar f(\lambda_k,0)|^2+T\int\limits_0^T|\bar f(\lambda_k,s)|^2\,ds+\lambda_k^2|\bar\varphi(\lambda_k)|^2+\lambda_k|\bar\psi(\lambda_k)|^2\big),$$

$$\lambda_k|\bar u\,'(\lambda_k,t)|^2\le C\big(|\bar f(\lambda_k,0)|^2+T\int\limits_0^T|\bar f(\lambda_k,s)|^2\,ds+\lambda_k^3|\bar\varphi(\lambda_k)|^2+\lambda_k^2|\bar\psi(\lambda_k)|^2\big),\quad(5.19)$$

$$|\bar u\,''(\lambda_k,t)|^2\le C\big(|\bar f(\lambda_k,0)|^2+T\int\limits_0^T|\bar f(\lambda_k,s)|^2\,ds+\lambda_k^2|\bar\varphi(\lambda_k)|^2+\lambda_k|\bar\psi(\lambda_k)|^2\big).$$

Так как $f,\ \frac{\partial f}{\partial t}\in L_2(\Gamma_T)$, то ряды

$$\sum_{k=1}^\infty|\bar f(\lambda_k,t)|^2\quad\text{и}\quad\sum_{k=1}^\infty\int\limits_0^T|\bar f(\lambda_k,t)|^2\,dt\qquad(5.20)$$

сходятся равномерно по t (напомним, что $\bar f(\lambda_k,t)=(f,h_k)$).

Так как $L\varphi\in D(L)$, то $L^2\,\varphi\in L_2[\Gamma]$ и

$$\lambda_k^2\bar\varphi(\lambda_k)=\lambda_k^2(\varphi,h_k)=\lambda_k(L\varphi,h_k)=(L^2\varphi,h_k).$$

Поэтому,

$$\sum_{k=1}^\infty\lambda_k^4|\bar\varphi(\lambda_k)|^2=\|L^2\,\varphi\|_{L_2[\Gamma]}.\qquad(5.21)$$

Аналогично,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\bar{\psi}(\lambda_k)|^2 = \|L\,\psi\|_{L_2[\Gamma]}. \tag{5.22}$$

Из оценок (5.19) и сходимости рядов (5.20)–(5.22) следует утверждение леммы. $\rhd$

Теорема 5.4 (существование классического решения). *Пусть φ, $L\,\varphi$, $\psi \in D(L)$ и f, $\frac{\partial f}{\partial t} \in L_2(\Gamma_T)$. Тогда ряд* (5.5) *представляет классическое решение задачи* (5.1)–(5.4).

$\lhd$ Из сходимости рядов (5.17), (5.18) и леммы следует равномерная сходимость на Γ_T ряда (5.5) и всех рядов, полученных почленным дифференцированием по x и t один и два раза. $\rhd$

5.4. Пример. Пусть задан граф Γ, состоящий из трех ребер $\gamma_i = (b_i, a)$, $i = 1, 2, 3$, с общим концом a. Длины ребер γ_1 и γ_2 равны единице, а длина ребра γ_3 равна двум.

На множестве $\Gamma \times [0, T]$ $(T > 0)$ рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \tag{5.23}$$

дополненное начальными и граничными условиями

$$\begin{gathered} u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \\ u(b_i, t) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{5.24}$$

Во внутренней вершине a графа задаются условия вида

$$\begin{gathered} u_1(a,t) = u_2(a,t) = u_3(a,t), \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}(a,t) + 2\frac{\partial u_2}{\partial x}(a,t) + 3\frac{\partial u_3}{\partial x}(a,t) = 0. \end{gathered}$$

Рассматриваемая задача моделирует процесс малых поперечных колебаний натянутой сетки из струн.

Для решения задачи применим метод интегрального преобразования. Согласно общей теории, построение интегрального преобразования непосредственно связано со следующей спектральной задачей

$$\begin{gathered} \frac{d^2 h}{dx^2} = -\lambda h, \quad x \in \Gamma, \\ h(b_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad h_1(a) = h_2(a) = h_3(a), \\ \frac{dh_1}{dx}(a) + 2\frac{dh_2}{dx}(a) + 3\frac{dh_3}{dx}(a) = 0. \end{gathered} \tag{5.25}$$

Собственные значения λ_k и собственные функции h_k задачи (5.25), а также собственные функции сопряженной задачи были найдены в примере п. 2.

Применяя к задаче (5.23), (5.24) интегральное преобразование (3.10), приходим к следующей задаче Коши для изображения $\bar{u}(\lambda_k, t)$:

$$\begin{gathered} \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} = -\lambda_k \bar{u}, \\ \bar{u}(\lambda_k, 0) = \bar{\varphi}(\lambda_k), \quad \frac{d\bar{u}}{dt}(\lambda_k, 0) = \bar{\psi}(\lambda_k). \end{gathered}$$

Находим решение этой задачи

$$\bar{u}(\lambda_k, t) = \bar{\varphi}(\lambda_k) \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{\bar{\psi}(\lambda_k)}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k},$$

и применяя обратное преобразование (3.11), получим решение задачи (5.23), (5.24)

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) \bar{u}(\lambda_k, t) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) \left\{ \cos \sqrt{\lambda_k} t \int_{\Gamma} \varphi(x) h_k^*(x)\, dx + \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}} \int_{\Gamma} \psi(x) h_k^*(x)\, dx \right\}.$$

6. Обоснование метода интегрального преобразования для уравнения параболического типа

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma \times [0,T], \tag{6.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{6.2}$$

$$u(b,t) = 0, \quad b \in \partial\Gamma, \; u_i(a,t) = \alpha_i(a) u_{i_0}(a,t), \quad a \in V, \quad i, i_0 \in I(a),$$
$$\sum_{i \in I(a)} \beta_i(a) \frac{\partial u_i}{\partial x}(a,t) = 0, \tag{6.3}$$

В уравнении (6.1) относительно функции p, q, f предполагаем: $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x) > 0$, $p \in C^2[\Gamma]$, $q \in C^1[\Gamma]$, $f \in C[\Gamma_T]$, где $C[\Gamma_T]$ — множество функций, определенных на $\Gamma \times [0,T]$ и равномерно непрерывных на $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \{\gamma_i \times (0,T)\}$.

Обоснование метода интегрального преобразования для смешанной задачи параболического типа базируется на использовании функциональных пространств Соболева. При этом, так как интеграл от функции заданный на графе понимается как сумма интегралов на каждом ребре графа, то теоремы вложения и теоремы существования следов, установленные для этих пространств в одномерном случае, позволяют придать смысл краевым условиям для уравнений на графе, определить понятие обобщенного решения и получить априорные оценки для обобщенного решения.

Применим к задаче (6.1), (6.2) интегральное преобразование (3.10). В пространстве изображений задача примет вид:

$$\frac{d\bar{u}(\lambda_k, t)}{dt} + \lambda_k \bar{u}(\lambda_k, t) = \bar{f}(\lambda_k, t),$$
$$\bar{u}(\lambda_k, 0) = \bar{\varphi}(\lambda_k), \tag{6.4}$$

где

$$\bar{u}(\lambda_k, t) = \int_{\Gamma} u(x,t) h_k^*(x)\, dx, \;\; \bar{f}(\lambda_k, t) = \int_{\Gamma} f(x,t) h_k^*(x)\, dx, \;\; \bar{\varphi}(\lambda_k) = \int_{\Gamma} \varphi(x) h_k^*(x)\, dx.$$

Решение задачи (6.3) задается равенством:

$$\bar{u}(\lambda_k, t) = \int\limits_0^t \bar{f}(\lambda_k, s) e^{-\lambda_k (t-s)}\, ds + \bar{\varphi}(\lambda_k) e^{-\lambda_k t}, \tag{6.5}$$

а для смешанной задачи получаем формальное решение

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) \bar{u}(\lambda_k, t). \tag{6.6}$$

Введем следующие обозначения: $\Gamma_T = \{x \in \Gamma,\ 0 < t < T\}$, $\Gamma_s = \{x \in \Gamma, t = s\}$, $\Gamma_0 = \{x \in \Gamma, t = 0\}$, $\partial\Gamma_T = \{x \in \partial\Gamma,\ 0 < t < T\}$.

Функцию $u(x,t) \in C^{2,1}[\Gamma_T] \bigcap C[\Gamma_T \bigcup \Gamma_0 \bigcup \partial\Gamma_T]$ удовлетворяющую в Γ_T уравнению (6.1), на Γ_0 начальному условию (6.2) и краевым условиям (6.3) при $t \in [0, T]$ назовем классическим решением смешанной задачи (6.1)–(6.3).

Обозначим через $H^k[\Gamma]$ множество всех функций, принадлежащих $L_2[\Gamma]$, у которых существуют и принадлежат $L_2[\Gamma]$ обобщенные производные до k-го порядка включительно. Множество $H^k[\Gamma]$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^k[\Gamma]} = \int\limits_\Gamma \sum_{i=0}^{k} u^{(i)} v^{(i)}\, dx.$$

Обозначим через $H^1_L[\Gamma]$ подпространство в $H^1[\Gamma]$, состоящее из всех функций, удовлетворяющих краевым условиям (6.3). Нам удобно ввести в $H^1_L[\Gamma]$ скалярное произведение

$$(u, v)_{H^1_L[\Gamma]} = \int\limits_\Gamma \rho[p u' v' + q u v]\, dx,$$

где ρ — функция определяемая в лемме п. 2. В этом случае система $\left\{\frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}} h_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ — собственных функций задачи (2.1)–(2.3) является ортонормированной.

Через $H^{2,1}[\Gamma_T]$ будем обозначать пространство функций $f(x,t) \in L_2[\Gamma_T]$ имеющих обобщенные производные $\frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}$ при $\alpha + 2\beta \le 2$, принадлежащие $L_2[\Gamma_T]$. В $H^{2,1}[\Gamma_T]$ скалярное произведение определяем по формуле

$$(u, v)_{H^{2,1}[\Gamma_T]} = \int\limits_\Gamma \sum_{\alpha + 2\beta \leqslant 2} \frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial t^\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} v}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}\, dx\, dt.$$

Через $H^{1,0}_L[\Gamma_T]$ обозначим гильбертово пространство функций $f(x,t) \in L_2[\Gamma_T]$ имеющих обобщенную производную по $x \in \Gamma$, удовлетворяющих при $0 < t < T$ условиям (6.3), со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^{1,0}_L[\Gamma_T]} = \int\limits_{\Gamma_T} \rho[p u' v' + q u v]\, dx\, dt$$

Принадлежащая пространству $H_L^{1,0}[\Gamma_T]$ функция $u(x,t)$ называется обобщенным решением смешанной задачи (6.1)–(6.3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Gamma_T} \rho \left[-u\frac{\partial v}{\partial t} + p\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right] + quv\,dx\,dt = \int\limits_{\Gamma_0} \rho\varphi v\,dx + \int\limits_{\Gamma_T} \rho f v\,dx\,dt \tag{6.7}$$

для всех $v \in H_L^{1,0}[\Gamma_T]$ равных нулю при $t = T, x \in \Gamma$.

Теорема 6.1. Если $f(x,t) \in L_2[\Gamma_T]$ и $\varphi \in L_2[\Gamma]$, то задача (6.1)–(6.3) имеет обобщенное решение. Это решение u представляется сходящимся в $H_L^{1,0}[\Gamma_T]$ рядом (6.6). При этом имеет место неравенство

$$\|u\|_{H_L^{1,0}[\Gamma_T]} \leq C\left(\|\varphi\|_{L_2[\Gamma]} + \|f\|_{L_2[\Gamma_T]}\right), \tag{6.8}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от φ и f.

$\lhd$ Рассмотрим равенство (6.5). При любом $t \in [0,T]$ имеем

$$|\bar u(\lambda_k,t)| \leq |\bar\varphi(\lambda_k)|e^{-\lambda_k,t} + \int\limits_0^t |\bar f(\lambda_k,s)|e^{-\lambda_k(t-s)}\,ds \leq |\bar\varphi(\lambda_k)|e^{-\lambda_k t} + \frac{\|\bar f(\lambda_k)\|_{L_2(0,T)}}{\sqrt{2\lambda_k}}.$$

Поэтому

$$|\bar u(\lambda_k,t)|^2 \leq 2|\bar\varphi(\lambda_k)|^2 e^{-2\lambda_k t} + \frac{1}{\lambda_k}\|\bar f(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}. \tag{6.9}$$

Обозначим через u_m частичную сумму ряда (6.6). Функции $u_m(x,t)$ принадлежат $H_L^1[\Gamma_t]$ при каждом $t \in [0,T]$. Имеем

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|^2_{H_L^1[\Gamma_t]} &= \left\|\sum_{k=n+1}^m \bar u(\lambda_k,t)h_k(x)\right\|^2_{H_L^1[\Gamma_t]} \leqslant \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m |\bar u(\lambda_k,t)|^2\|h_k(x)\|^2_{H_L^1[\Gamma]} = \sum_{k=n+1}^m |\bar u(\lambda_k,t)|^2\lambda_k \leqslant \\ &\leq C_1\sum_{k=n+1}^m \left(|\bar\varphi(\lambda_k)|^2\lambda_k e^{-2\lambda_k t} + \int\limits_0^T [\bar f(\lambda_k,t)]^2\,dt\right). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Наряду с этим неравенством справедливо неравенство

$$\|u_m\|^2_{H_L^1[\Gamma_t]} \leq C_2\sum_{k=n+1}^m \left(|\bar\varphi(\lambda_k)|^2||\lambda_k|e^{-2\lambda_k t} + \int\limits_0^T [\bar f(\lambda_k,t)]^2\,dt\right). \tag{6.11}$$

Интегрируя (6.10) и (6.11) по t от 0 до T получим

$$\|u_m - u_n\|^2_{H_L^{1,0}[\Gamma_T]} \leq C_3\sum_{k=n+1}^m \left(|\bar\varphi(\lambda_k)|^2| + \int\limits_0^T [\bar f(\lambda_k,t)]^2\,dt\right), \tag{6.12}$$

$$\|u_m\|^2_{H_L^{1,0}[\Gamma_T]} \leq C_4\sum_{k=1}^m \left(|\bar\varphi(\lambda_k)|^2| + \int\limits_0^T [\bar f(\lambda_k,t)]^2\,dt\right). \tag{6.13}$$

Из (6.12) следует сходимость ряда (6.6) в $H_L^{1,0}[\Gamma_T]$, а из (6.13),учитывая (2.8), получаем оценку (6.8). Интегральное соотношение (6.7) получается из тождества

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = Lu_m + f_m,$$

где f_m — частичная сумма ряда (2.8), умножением на функцию $v \in H_L^{1,0}[\Gamma_T]$, с последующим интегрированием по частям и переходом к пределу. $\rhd$

Из (6.8) следует теорема

Теорема 6.2. *Обобщенное решение задачи* (6.1)–(6.3) *единственно и непрерывно зависит от начальных данных.*

Поскольку всякое классическое решение задачи (6.1)–(6.3) является обобщенным, то теорема 6.2 устанавливает единственность и непрерывную зависимость классического решения.

Теорема 6.3. *Пусть $\varphi \in H^3[\Gamma]$, $f \in H^{2,1}[\Gamma_T]$ и выполнены следующие условия согласования: $\varphi \in H_L^1[\Gamma]$, $L\varphi + f(x,0) \in H_L^1[\Gamma]$. Тогда ряд* (6.6) *сходится в $C^{2,1}[\Gamma_T]$ и представляет классическое решение задачи* (6.1)–(6.3).

$\lhd$ Заметим, что из $f \in H^{2,1}[\Gamma_T]$ следует, что функция $\bar{u}(\lambda_k, t)$ определяемая равенством (6.5) принадлежит пространству $H^2(0,T)$, а следовательно, и пространству $C^1[0,T]$. Тогда функции u_m, представляющие собой частичные суммы ряда (6.6), принадлежат $C^{2,1}[\Gamma_T]$.

Из (6.9) следует оценка для $\bar{u}(\lambda_k, t)$

$$|\bar{u}(\lambda_k,t)|^2 \le 2|\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \frac{1}{|\lambda_k|}\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}, \tag{6.14}$$

а из уравнения (6.4)— оценка для $\bar{u}'(\lambda_k, t)$

$$|\bar{u}'(\lambda_k,t)| \le |\lambda_k||\bar{\varphi}(\lambda_k)| + |\bar{f}(\lambda_k,t)| + \sqrt{\frac{|\lambda_k|}{2}\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}}.$$

Поэтому для всех $t \in [0,T]$

$$|\bar{u}'(\lambda_k,t)|^2 \le 3\lambda_k|^2\bar{\varphi}(\lambda_k)^2| + \frac{3\lambda_k}{2}\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)} + 3|\bar{f}(\lambda_k,t)|^2. \tag{6.15}$$

Рассмотрим неравенство (6.15). При больших k воспользуемся неравенством [5]:

$$f^2(t) \le \frac{2}{\varepsilon}\|\bar{f}\|^2_{L_2(0,T)} + 2\varepsilon\|\bar{f}'\|^2_{L_2(0,T)},$$

справедливым для всех $f \in H^1(0,T)$, $t \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0,T]$. Тогда

$$|\bar{f}(\lambda_k,t)|^2 \le 2\lambda_k\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{2}{\lambda_k}\|\bar{f}'(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Подставляя последнее неравенство в (6.15) получим

$$|\bar{u}'(\lambda_k,t)|^2 \le C\left(\lambda_k^2|\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \lambda_k\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{1}{\lambda_k}\|\bar{f}'(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}\right) \tag{6.16}$$

На основании теорем вложения, неравенств Соболева, справедливых на каждом ребре $\gamma_i \in \Gamma$, а значит и на всем графе Γ, и привлекая неравенства (6.14), (6.15), имеем при $t \in [0,T]$

$$\|u_m-u_n\|^2_{C^2[\Gamma_t]}+\left\|\frac{\partial}{\partial t}(u_m-u_n)\right\|^2_{C[\Gamma_t]}\le$$
$$\le C_1\left(\|u_m-u_n\|^2_{H^3[\Gamma_t]}+\left\|\frac{\partial}{\partial t}(u_m-u_n)\right\|^2_{H^1_L[\Gamma_t]}\right)\le$$
$$\le C_2\left(\left\|\sum_{k=n+1}^{m}\bar u(\lambda_k,t)Lh_k(x)\right\|^2_{H^1_L[\Gamma_t]}+\left\|\sum_{k=n+1}^{m}\bar u'(\lambda_k,t)h_k(x)\right\|^2_{H^1_L[\Gamma_t]}\right)\le$$
$$\le C_3\sum_{k=n+1}^{m}(\lambda_k^3|\bar u(\lambda_k,t)|^2+\lambda_k|\bar u'(\lambda_k,t)|^2)\le$$
$$\le C_4\sum_{k=n+1}^{m}(\lambda_k^3|\bar\varphi(\lambda_k)|^2+\lambda_k^2\|\bar f(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}+\|\bar f'(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}). \tag{6.17}$$

Так как $L\varphi\in H^1_L[\Gamma]$, то $(L\varphi,h_k)_{H^1_L[\Gamma]}=-\lambda_k^2(\varphi,h_k)_{L_2[\Gamma]}$, и на основании полноты системы h_k, заключаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\bar\varphi(\lambda_k)|^2\lambda_k^4$ сходится, а, значит, сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\bar\varphi(\lambda_k)|^2\lambda_k^3$. Аналогично, из $f\in H^{2,1}[\Gamma_T]$ следует сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|\bar f(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}\lambda_k^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|\bar f'(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}$. Поэтому из неравенства (6.17) вытекает, что ряд (6.6) сходится в $C^{2,1}[\Gamma_T]$ и следовательно, его сумма является классическим решением. $\triangleright$

Пример. Пусть Γ — граф из примера п. 3.

На множестве $\Gamma\times[0,T]$ $(T>0)$ рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \tag{6.18}$$

дополненное начальным и граничным условиями

$$u(x,0)=0,\quad u(b_i,t)=\delta,\quad i=1,2,3;\ \delta=\mathrm{const}. \tag{6.19}$$

Во внутренней вершине a графа задаются условия вида (6.3)

$$u_1(a,t)=u_2(a,t)=u_3(a,t),$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(a,t)+2\frac{\partial u_2}{\partial x}(a,t)+3\frac{\partial u_3}{\partial x}(a,t)=0.$$

Так как граничные условия (6.19) неоднородны, то решение задачи будем искать в виде суммы

$$u(x,t)=v(x,t)+\delta, \tag{6.20}$$

где $v(\cdot,\cdot)$ — решение задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t),\quad x\in\Gamma,\\ v(x,0)=-\delta,\quad v(b_i,t)=0.\end{gathered} \tag{6.21}$$

Будем решать задачу (6.21) методом интегрального преобразования, изложенным выше. Согласно общей теории, построение интегрального преобразования непосредственно связано со спектральной задачей (5.25).

Применяя к задаче (6.21) интегральное преобразование, приходим к следующей задаче Коши относительно изображения $\bar{v}(\lambda_k, t)$:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\lambda_k \bar{v},$$

$$\bar{v}(\lambda_k, 0) = -\bar{\delta}(\lambda_k).$$

Находим решение этой задачи

$$\bar{v}(\lambda_k, t) = -\bar{\delta}(\lambda_k) e^{-\lambda_k t}$$

и применяя к нему обратное преобразование, получим решение задачи (6.21):

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) \bar{v}(\lambda_k, t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) e^{-\lambda_k t} \int\limits_{\Gamma} \delta h_k^*(x)\, dx.$$

После вычисления интегралов, стоящих под знаком суммы и используя формулу (6.20), окончательно получаем решение задачи (6.18), (6.19):

$$u(x,t) = \delta + \frac{4\delta}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{6k-1}{3}\right)^2 \pi^2 t}}{6k-1} \sin\left(\frac{6k-1}{3} \pi \|x-b\|\right) +$$

$$+ \frac{4\delta}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{6k+1}{3}\right)^2 \pi^2 t}}{6k+1} \sin\left(\frac{6k+1}{3} \pi \|x-b\|\right) + C\frac{4\delta}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(2k+1)^2 \pi^2 t}}{2k+1} \sin(\pi k \|x-b\|),$$

где $C = \begin{cases} 3, & \text{если } x \in \gamma_1, \\ 0, & \text{если } x \in \gamma_2, \\ 1, & \text{если } x \in \gamma_3, \end{cases}$ $\quad b = b_i$ при $x \in \gamma_i$, $i = 1, 2, 3$.

Замечание. Изложенная в работе теория оставляет открытым вопрос об обосновании метода интегрального преобразования для задачи на графе содержащем циклические маршруты. однако, если задача на графе с циклами является самосопряженной, а именно такими и являются абсолютное большинство задач математической физики, то все результаты работы остаются справедливы. Как уже отмечалось выше для самосопряженности задачи (5.1)–(5.4) или (6.1)–(6.3) необходимо и достаточно, чтобы для каждой вершины $a \in V$ существовала константа $C(a)$ такая, что $\beta_i(a) = C(a)\alpha_i(a)p_i(a)$, $i \in I(a)$. Доказательство всех теорем для самосопряженной задачи на произвольном графе (с циклами или без) остаются теми же, что и в данной работе, с той лишь разницей, что в этом случае функция ρ определяемая в лемме п. 2 равна тождественно единице.

Литература

1. *Амербаев В. М.* Операционное исчисление и обобщенные ряды Лагерра.—Алма-Ата: Изд-во АН Каз ССР, 1974.
2. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразований Лапласа и z-преобразования.—М.: Наука 1971.
3. *Джербашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.—М.: Наука, 1966.
4. *Диткин В. А., Прудняков А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление.—М.: Физматгиз, 1961.
5. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных.—М.: Наука, 1978.
6. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2007.
7. *Трантер К. Дж.* Интегральные преобразования в математической физике.—М.: Физматгиз, 1956.
8. *Боровских А. В., Мустафакулов Р., Лазарев К. П., Покорный Ю. В.* Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети // Докл. РАН.—195.—Т. 345, № 6.—С. 730–732.
9. *Вольперт А. И.* Дифференциальные уравнения на графах // Мат . сб.—1972.—Т. 88, № 4.—С. 578–588.
10. *Гудзовский А. В.* К расчету гидровлических сетей // Докл. РАН.—1998.—Т. 358, № 6.—С. 765–767.
11. *Завгородний М. Г.* Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе // Докл. АН РФ.—1994.—Т. 335, № 3.—С. 281–282.
12. *Завгородний М. Г.* Об эфолюционных задачах на графах // Успехи мат. наук.—1991.—Т. 46, № 6.—С. 199–200.
13. *Завгородний М. Г., Покорный Ю. В.* О спектре краевых задач второго порядка на пространственных сетях // Успехи мат. наук.—1989.—Т. 44, № 4.—С. 220–221.
14. *Мерков А. Б.* Эллиптические уравнения второго порядка на графах // Мат. сб.—1985.—Т. 127, № 4.—С. 502–518.
15. *Пенкин О. М., Покорный Ю. В., Провоторова Е. Н.* Об одной векторной краевой задаче // Краевые задачи.—Пермь, 1983.—С. 64–70.
16. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М.* Теоремы Штурма для уравнений на графах // Докл. АН СССР.—1989.—Т. 309, № 6.—С. 1306–1308.
17. *Ali-Mehmeti F.* Regular solutions of transmission and interaction problems for ware equation // Math. Methods Appl. Sci.—1989.—V. 11.—P. 665–685.
18. *von Below J. A.* A characteristic equation assosiated to an eigenvalue problem on e^{∞}-network // Linear Algebra andappl.—1985.—V. 71.—P. 309–325.
19. *Lagnese J. E., Leugering G., Schmidt E. J. P. G.* Control of planar networks of Timoshenko beams // SIAM J. Control Optim.—1993.—V. 31.—P. 780–811.
20. *Nicaise S.* Some results on spectral theory over networks? applied to nerve impuls transmission // Lect. Notes Math.—Berlin: Springer-Verlag.—1985.—№ 1771.—P. 532–541.
21. *Roth J.-P.* Spectre du laplacien sur un graphe // Lect. Notes Math.—Berlin: Springer-Verlag.—1984.—№ 1096.—P. 521–539.
22. *Schmidt E. J. P. G.* On the modelling and exact controlability of networks of vibrating strigs // SIAM J. Control Optim.—1992.—V. 30.—P. 229–245.

Кулаев Руслан Черменович

Конечное интегральное преобразование на графе

Ответственный за выпуск
Биченова М. С.

Подписано в печать 5.12.2007.
Формат $60 \times 84\,{}^{1}/_{8}$. Усл. п. л. 3,49. Тираж 50 экз.