ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕМЫ: ДИАЛОГОВЫЕ ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ И УЧИТЕЛЯ

И. Е. Малова, д. пед. н., профессор,
Южный математический институт
Владикавказского научного центра Российской академии наук,
Брянск, Россия
e-mail: mira44@yandex.ru

Самара, 2026

Зачем нужно раскрывать фундаментальные основы математической темы?

Фундаментальные основы темы определяют:

- её содержание;
- её структуру;
- её методологию.

Проблема: практика обучения школьной математике испытывает дефицит средств для целенаправленного освоения этих основ.

Методологические задачи исследования и результаты решения

Методологическая задача	Решение
1. Определить структурные составляющие темы – её ***фундаментальные основы***	• ***структурные составляющие темы и связи между ними***; • ***способы доказательства*** теорем (решения задач на доказательство); • ***виды задач и способы их решения***
2. Реализовать требования ***деятельностного подхода и личностно ориентированного обучения*** для обеспечения предметной успешности обучающихся и обогащения их субъектного опыта.	Разработан ***диалоговый дидактический материал*** представлен в виде а) диалоговой компьютерной презентации и б) раздаточного материала по типу тетради с печатной основой
3. Выбрать ***источник(и) математического содержания***, по которому организуется освоение фундаментальных основ математических тем и обогащение субъектного опыта обучающихся	В нашем исследовании – это ***учебники под редакцией В.Е. Подольского***, входящие в перечень рекомендованных учебников для углублённого изучения математики в старших классах

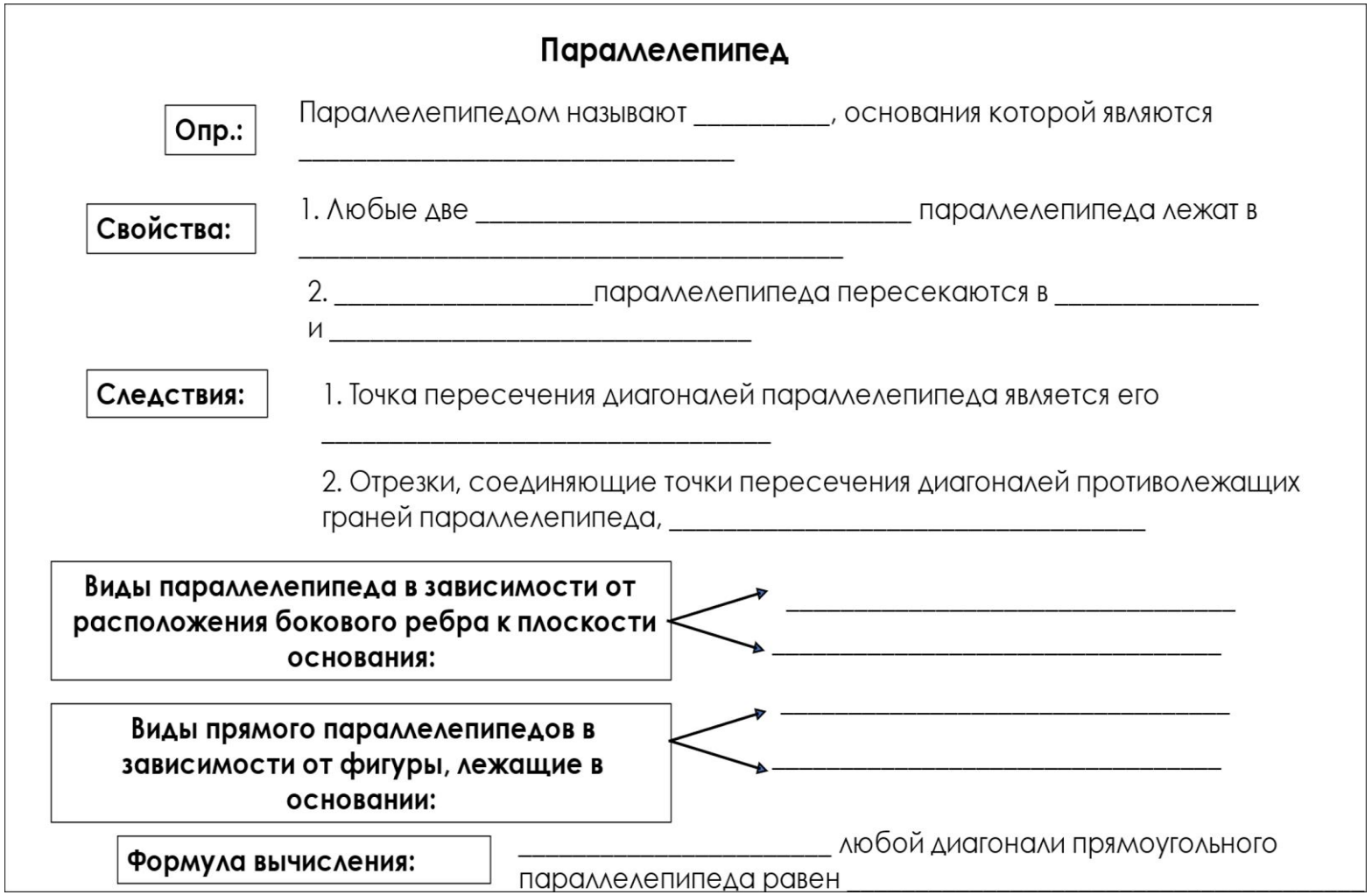
Первая фундаментальная основа

***Проблемы представления в учебнике математической темы*:**

1. Изложение темы в учебнике представлено последовательно без выделения надпредметных связей, к которым, в частности, относятся структурные составляющие темы.
2. В учебнике отсутствуют задания, позволяющие обобщить и систематизировать материал.

На решение перечисленных проблем направлена **методическая задача 1:** разработать такую диалоговую карту темы, чтобы она демонстрировала структурные её составляющие и связи между ними.

Дидактический материал «Карта темы»



***Подзадача* № 1.** *Дано*: текст учебника геометрии (10 класс, параграфы 19–20).

Требуется:

1) составить список структурных составляющих темы;

2) изобразить картинкой (картой, схемой) структурные составляющие и связи между ними.

***Подзадача* № 2.** *Дано*: список ключевых вопросов темы.

Требуется:

раскрыть каждый вопрос;

***Подзадача* № 3.** *Дано*: список ключевых вопросов темы.

Требуется: определить пропуски и анимацию для организации диалога.

Привлечение ИИ для решения задач построения карты темы

Задача для ИИ о структурных составляющих темы	**Решение**
Дано: текст учебника геометрии (10 класс, параграфы 19–20). Требуется: 1) составить список структурных составляющих темы; 2) изобразить картинкой (картой, схемой) структурные составляющие и связи между ними.	Не смогли загрузить в ИИ параграфы школьного учебника

Задача для ИИ о раскрытии каждого вопроса

***Подзадача* № 2.** Дано: список ключевых вопросов темы: определение параллелепипеда; свойства параллелепипеда о противоположных гранях, о диагоналях, о центре симметрии, об отрезках, соединяющих точки пересечения диагоналей противолежащих граней; виды параллелепипеда в зависимости от расположения бокового ребра к плоскости основания; виды прямого параллелепипеда в зависимости от фигуры, лежащей в основании.

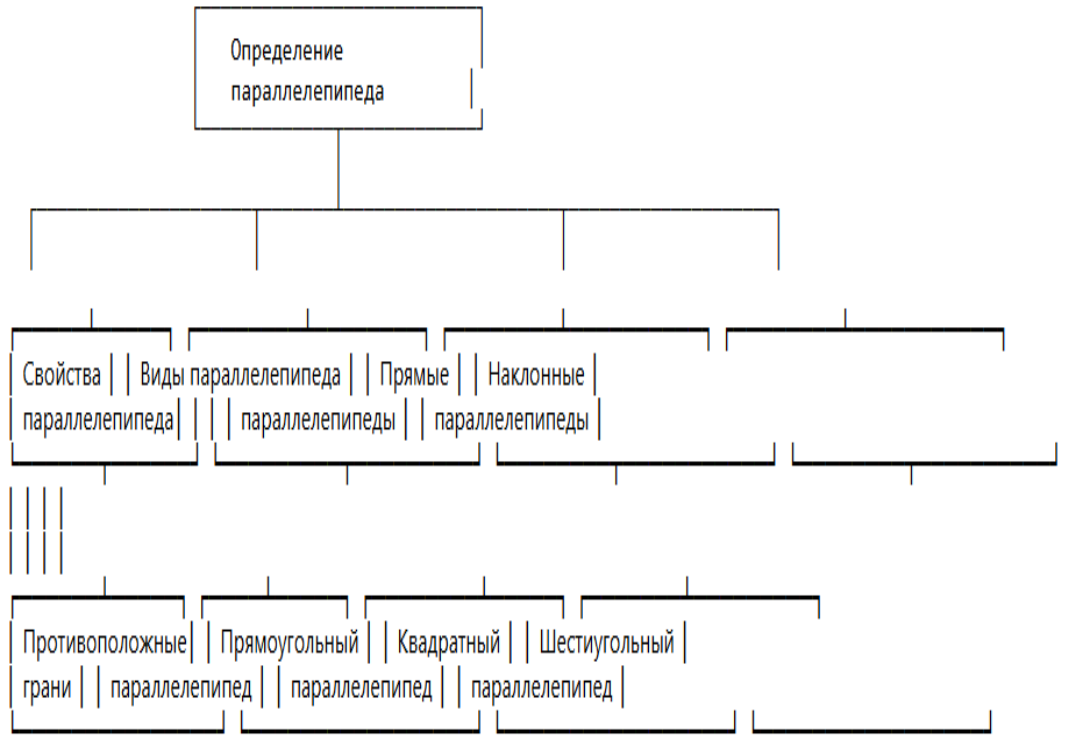
Требуется:

1) раскрыть каждый вопрос;
2) *изобразить картинкой* (картой, схемой) ключевые вопросы и связи между ними.

Анализ решении ИИ

Анализ ответа об определении	Анализ ответа о свойствах
В определении *родовым понятиям* названа трёхмерная геометрическая фигура, а не призма. К опр-нию *отнесены свойства* парал-да о противоположных гранях и боковых рёбрах, названных ИИ «рёбрами в интерьере парал-да»	В формулировке свойства противоположных граней нет согласования слов (*каждая пара противоположных грани равны и параллельны*). Вместо свойства диагоналей парал-да дано опр-е. Свойство отрезков, соединяющих точки пересечения диагоналей противоположных граней, математически неверно (*эти отрезки равны и соединяют два центра граней*). К положительным сторонам ответа ИИ здесь и далее следует отнести указание на возможность применения того или иного вопроса *(свойство противоположных граней обеспечивает симметричность фигуры)*

Анализ решении ИИ

Анализ ответа о видах	Анализ ответа о схеме
Если по первому основанию (по расположению бокового ребра к плоскости основания) правильно выделены виды параллелепипеда, хотя есть ошибки в распознавании (*боковые рёбра наклонены под углом к* основанию) (90 градусов – это тоже угол), то по второму основанию – нет (названы *прямоугольный, квадратный, шестиугольный параллелепипеды*)	Для визуализации содержания можно использовать схематическое представление:  Эта схема изображает ключевые вопросы и их взаимосвязи, что помогает лучше понимать структуру изучаемой темы.

Задача для ИИ о пропусках в текстах	**Решение**
Дано: определение параллелепипеда Требуется: Выделить существенные признаки	В определении параллелепипеда можно выделить следующие существенные признаки: 1. **Фигура**: Параллелепипед является **призмой**. Это означает, что он имеет две одинаковые пластины (основания). 2. **Основания**: Основаниями параллелепипеда являются **параллелограммы**. Это определяет форму его оснований и влияет на свойства фигуры. Таким образом, ключевыми признаками параллелепипеда являются его принадлежность к классу призм и наличие параллелограмма в качестве оснований.

Опр.: Параллелепипедом называют _____, основания которой являются _____

Вторая фундаментальная основа

Проблемы представления доказательств в тексте учебника:

1. Не выделено условие и заключение теоремы.
2. Не выделены этапы доказательства.
3. Не всегда представлены обоснования.

На решение перечисленных проблем направлена **методическая задача 2:** так раскрыть этапы доказательства, чтобы на их основе можно было не только понять доказательство, но и перенести его на доказательство других теорем, при этом обеспечить диалог с обучающимися.

Дидактический материал «Основы доказательства одной или нескольких теорем»

Докажем, что для любого натурального n справедлива формула

$$P_n = n!$$

Пусть множество M состоит из n элементов. Записать любую перестановку множества M — это фактически присвоить каждому элементу этого множества некоторый номер от 1 до n. Поэтому количество перестановок множества M равно количеству способов нумерации его элементов.

Выберем некоторый элемент a этого множества. Существует n способов присвоить этому элементу номер. Далее выберем некоторый элемент b из множества M. Так как элементу a номер уже присвоен, то существует $n - 1$ способ присвоить номер элементу b. Понятно, что следующий элемент можно пронумеровать $n - 2$ способами и т. д. Для последнего невыбранного элемента множества M существует только один способ присвоить ему номер, так как к этому моменту $n - 1$ элемент уже получили свои номера.

Следовательно, по правилу произведения можно записать:

$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, то есть

$P_n = n!$

Дано: _____.

Доказать: _____

Доказательство:

1. Сформулируем комбинаторную задачу.

Элементам множества присваиваются номера. Сколькими способами это можно сделать?

2. Сформулируем правило выбора.

Будем последовательно выбирать элементы множества и смотреть число претендентов на выбор.

3. Осуществим подсчёт.

а) *рассмотрим число претендентов на выбор*.

Первому выбранному элементу можно присвоить номер _____ способами, второму элементу – (_____) способами, …. , n-ому элементу останется только _____ номер.

б) *определим правило подсчета и применим его*.

Осуществляется выбор типа «a ___b», поэтому применяем правило произведения.

$P_n = n \cdot$ _____

$P_n =$ _____

Докажем, что при любых натуральных n и k таких, что $k \leqslant n$, справедлива формула

$$A_n^k = n\,(n-1)\,(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) \qquad (1)$$

Рассмотрим n-элементное множество и сформируем его k-элементное упорядоченное подмножество.

Существует n способов выбора первого элемента подмножества. Второй элемент подмножества можно выбрать уже только $n-1$ способами. После выбора первого и второго элементов остается $n-2$ способа для выбора третьего элемента подмножества. Вообще, выбор k-го элемента можно осуществить $n-k+1$ способами.

Следовательно, по правилу произведения можно записать:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

Так как существует только одно n-элементное подмножество данного n-элементного множества, то число A_n^n — это количество перестановок n-элементного множества, то есть

$$A_n^n = P_n$$

Этот факт подтверждает формула (1). Действительно, при $k = n$ получим:

$$A_n^n = n\,(n-1)\,(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1) = n!$$

По определению принято считать, что $0! = 1$. Эта договоренность позволяет формулу (1) записать компактнее.

Умножим и разделим выражение, стоящее в правой части формулы (1), на $(n-k)!$ (это возможно, так как $(n-k)! \neq 0$). Имеем:

$$A_n^k = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\,(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Получаем формулу

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Дано: множество M из n элементов

Доказать:

1) $A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)$

2) $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Доказательство:

Часть 1.

1. **Сформулируем** комбинаторную задачу.

Из элементов множества составляются упорядоченные подмножества из k элементов.. Сколькими способами это можно сделать?

2. **Сформулируем** правило выбора.

Будем последовательно выбирать элементы множества и смотреть число претендентов на выбор.

3. **Осуществим** подсчёт

а) *рассмотрим число* претендентов *на выбор.*

Первый элемент можно выбрать n способами, второй элемент – ($n-1$) способами, …. ,k-ый элемент ($n-k+1$) способами.

б) *определим* правило подсчета и *применим его.*

Осуществляется выбор типа «a и b», поэтому применяем правило произведения.

$A_n^k = n \cdot (n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)$

Часть 2. Преобразуем формулу: умножим и разделим на $(n-k)!$.

Получим: $A_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Решение ИИ

Условие теоремы: Дано конечное множество, состоящее из n различных (различимых) элементов. **Рассматриваются все возможные упорядоченные наборы всех этих n элементов, взятых по одному разу**.

Заключение теоремы: Число всевозможных перестановок P_n таких элементов равно факториалу числа n: $P_n = n!$, где ***n*! (эн-факториал) — это** произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно ($n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$). По определению принимается, что $0! = 1$.

Логика вывода формулы:

- На первое место в наборе можно поставить любой из n имеющихся элементов (n вариантов).
- После выбора первого элемента на второе место остается $(n-1)$ вариант.
- На третье место — $(n-2)$ варианта, и так далее.
- Для последнего места останется только один элемент. Согласно правилу произведения в комбинаторике, общее число способов составить такую последовательность равно произведению количества выборов для каждой позиции: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$, что и составляет определение $n!$.

Где заканчивается один этапы доказательства, начинается другой (как ответить на вопрос, что делают на каждом этапе)?
Почему можно пользоваться правилом произведения?

Третья фундаментальная основа

Проблемы представления решений в тексте учебника:
1. Не выделено условие и требование задачи, не указан вид задачи.
2. Не выделены этапы решения.
3. Отсутствует мотивация шагов (возникает вопрос, как догадаться о соответствующем шаге решения).

На преодоление перечисленных проблем направлена **методическая задача 3**: определить вид задачи и так раскрыть этапы решения, чтобы на их основе можно было не только понять решение, но и перенести его на решение других задач рассматриваемого вида, при этом обеспечить диалог с обучающимися.

Дидактический материал «Основы решения отдельных задач»

Пример 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения: 1) $1 - 4\cos\alpha$; 2) $\dfrac{(2-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha}$.

Решение. 1) Поскольку $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, то $-4 \leqslant -4\cos\alpha \leqslant 4$. Отсюда $-3 \leqslant 1 - 4\cos\alpha \leqslant 5$. Следовательно, наименьшее значение данного выражения равно -3; выражение принимает его при $\cos\alpha = 1$. Наибольшее значение равно 5; выражение принимает его при $\cos\alpha = -1$.

2) Имеем: $\dfrac{(2-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2 - \sin\alpha$. Понятно, что выражение $2 - \sin\alpha$ принимает все значения от 1 до 3. Наименьшее значение выражения $2 - \sin\alpha$, равное 1, достигается только при $\sin\alpha = 1$, однако при этом $\cos\alpha = 0$ и выражение $\dfrac{(2-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha}$ не определено. Следовательно, наименьшего значения не существует.

Аналогично, выражение $2 - \sin\alpha$ принимает наибольшее значение только при $\sin\alpha = -1$, однако при этом также $\cos\alpha = 0$. Следовательно, и наибольшего значения не существует.

Ответ: 1) 5; -3; 2) не существуют. ■

Тип задачи:
на нахождение **наибольшего** и **наименьшего** значения тригонометрического выражения.

Способ решения примера 1):

1. Определить, **какие операции выполняются над тригонометрической функцией**.
2. Составить **неравенство, связанное с областью значений триг. функции**.
3. Выполнить **действия над неравенствами**.

Особенности решения примера 2).

1. Упростили выражение, чтобы осталась одна тригонометрическая функция, указав при этом **ограничения в преобразованиях.**
2. Учли ограничения при выборе решения.

Оформите решения задач в соответствии с шагами способа решения

Переписка с ИИ

Определи тип задачи один минус четыре косинус альфа и раскрой способ решения.

Это задача на нахождение экстремальных значений тригонометрического выражения.
Наибольшее значение равно пяти, а наименьшее минус трём.
Такие задачи решаются через анализ области значений косинуса: он колеблется от минус единицы до единицы.

А как определить, что делать дальше?

После определения области значений косинуса нужно подставить крайние точки.
В данном случае при косинусе, равном минус единице, получаем наибольшее значение пять, а при косинусе, равном единице — наименьшее з

А как догадаться, что мне надо получить пять?

Догадаться можно, если понять, что косинус принимает значения от минус единицы до единицы.
Поэтому выражение один минус четыре косинус альфа будет максимальным при минимальном значении косинуса, то есть при минус единице.
Подставляем и получаем: один минус четыре умножить на минус один равно пяти.

А если будет другое?

Привет!
Рада снова тебя слышать.
Как у тебя дела? Подход к решению остаётся тем же.
Сначала определяешь область значений косинуса от минус единицы до единицы, а затем подставляешь эти крайние значения в выражение.

А как я могу быть уверена, что ответ будет правильный? Почему, вдруг, подставляя, мы получим результат?

Подстановка крайних значений работает, потому что косинус — периодическая функция.
Она принимает все значения от минус единицы до единицы бесконечное количество раз.

Не поняла, причём здесь периодичность функции?

Периодичность здесь ни при чём.
Мы подставляем крайние значения косинуса, потому что он непрерывно принимает все значения от минус единицы до единицы, и именно в этих точках выражение достигает своих экстремумов. и

Выводы о фундаментальных основах математической темы и их освоении обучающимися

1. ***Структурные вопросы темы и связи между ними, способы доказательства теорем, виды задач и способы их решения*** являются фундаментальными основами математики.
2. Обеспечить реализацию требований деятельностного подхода и личностно ориентированного обучения помогают ***диалоговые дидактические материалы*** в виде компьютерной презентации и раздаточного материала по типу тетради с печатной основой.
3. Разработка диалоговых дидактических материалов, помогающих организовать познавательную и рефлексивную деятельность обучающихся, является ***сложной, но интересной методической задачей***.

Выводы об использовании ИИ

1. Далеко не все методические задачи по силам ИИ, но если его обучить…
2. Ответы ИИ можно использовать для заданий учащимся «Оцени ответ».
3. Полезным может быть задание «Задай вопрос ИИ, начинающийся со слова «Почему?».

Благодарю за внимание!