ЮМИ

Сборник материалов

XX Владикавказской молодежной математической школы

24 – 25 июля 2025 г.

ЮМИ

VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTER OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

SOUTHERN FEDERAL UNIVERSITY
REGIONAL MATHEMATICAL CENTER

The Proceedings of the XX-th VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL SCHOOL FOR YOUNG SCIENTISTS

(July 24–25, 2025; Online)

Vladikavkaz
2025

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
РЕГИОНАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР

Сборник материалов

XX ВЛАДИКАВКАЗСКОЙ МОЛОДЕЖНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

(24–25 июля 2025 г.; онлайн)

Владикавказ
2025

ББК 22.16
УДК 517.9

Главный редактор:
д.ф.-м.н., профессор А. Г. Кусраев

Редакторы:
д.ф.-м.н., профессор А. Н. Карапетянц,
д.ф.-м.н., доцент Р. Ч. Кулаев

Сборник материалов XX Владикавказской молодежной математической школы (24–25 июля 2025 г.; онлайн).—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2025.—87 с.

Сборник содержит материалы лекций и тезисы докладов XX Владикавказской молодежной математической школы, состоявшейся 24–25 июля 2025 г. в онлайн формате. Школа проведена при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2025-1720.

The Proceedings of the XX-th Vladikavkaz Mathematical School for Young Scientists (July 24–25, 2025; Online).—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2025.—87 p.

This collection includes materials of lectures and the theses of reports of the XX-th Vladikavkaz Mathematical School for Young Scientists (July 24–25, 2025, Online). The event was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation, project № 075-02-2025-1720.

ISBN 978-5-904695-51-4
© ЮМИ ВНЦ РАН, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 7

ЦИКЛ ЛЕКЦИЙ

Тотиева Ж. Д. Обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа 10

Лекция 1. Основные методы исследования разрешимости обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа 10

Лекция 2. Асимптотические подходы к исследованию разрешимости двумерных обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа 28

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Абазоков М. Б. О рангах экстремума и методе ранговой оптимизации потоковых сетей с вогнутой целевой функцией 40

Алмасри А. Мультистабильность для математической модели динамики «жертва–хищник–суперхищник» на неоднородном ареале 42

Апинян Л. А. О некоторых взаимосвязях опорной и радиальной функций связанных с выпуклой фигурой 44

Безгин Д. С. Восстановление баланса влияния в кооперативной игре при изменении состава агентов 46

Березгова Р. З. Математическое моделирование переноса тепла в твердом теле при высоких температурах 48

Булыно Д. А. Начально-краевая задача для системы полулинейных параболических уравнений с поглощением и нелинейными нелокальными граничными условиями 50

Власенко И. С., Волчков В. В. О функциях с нулевыми интегралами по семейству из равнобедренного треугольника и квадрата 53

Закирова Г. Б. О p-выпуклости и q-вогнутости в пространствах Банаха — Канторовича над кольцом измеримых функций 55

Ившин М. С. Об одной задаче управления для уравнения диффузии 58

Казачанский И. А. Реализации пространств функций, голоморфных в областях Рейнхарта 60

Козаченко И. С. О деформировании пороупругой пластины 62

Коханов П. В. Косимметричность задачи конвекции Дарси — Буссинеска для горизонтального сплошного цилиндра 63

Логиновская М. М., Люксембург И. Л. Пространство максимальных идеалов алгебр операторов умножения на разрывные функции 65

Макоев А. К. Моделирование резистивного нагрева от солнечной панели с использованием программы SimInTech 67

Малал К. Гомогенизация модели хищник–жертва с коротковолновым внешним сигналом и таксисом типа Патлака — Келлера — Сегеля 68

Маннаников Р. С. О существенной и ω-существенной нормах линейного оператора на весовых пространствах последовательностей 71

Романенко И. А. Собственные подпространства дискретного преобразования Хартли 73

Саадулаева А. А. О продолжении положительных однородных полиномов 76

Слиняков П. А. Свойство RUC для системы из хаосов случайных величин в L_∞ 78

Тихонова Г. А. Многомерные интегральные операторы с однородными степени $(-n)$ ядрами в L_p-пространствах с радиальным весом 80

Томаев М. Р. Об обратной задаче для интегро-дифференциального уравнения акустики 82

Шеряев А. В. О приближении фи-статистик для наблюдений размерности три 84

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник содержит материалы XX Владикавказской молодежной математической школы (ВММШ-2025), которая состоялась в период с 24 по 25 июля 2025 года в дистанционном формате.

Соорганизаторами школы уже традиционно выступили Региональный научно-образовательный математический центр Южного федерального университета, Факультет математики и компьютерных наук Северо-Осетинского государственного университета им. К. Л. Хетагурова, Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук. ВММШ-2025 проведена при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2025-1720.

Владикавказская молодежная математическая школа — это научно-образовательное мероприятие, предоставляющее участникам возможность ознакомления с новейшими достижениями в области современной математики, обмена идеями, раскрытия творческого потенциала и развития исследовательских навыков. Школа способствует решению следующих задач: поиск и продвижение талантливой молодежи; формирование нового поколения исследователей, содействие их профессиональному становлению, творческому росту, максимальному использованию научного потенциала; укрепление позиций математического образования на Юге России. Участники ВММШ — студенты старших курсов бакалавриата, магистранты, аспиранты, только начинающие свой путь в науке, а также молодые ученые, уже получившие степени кандидатов наук и продолжающие свои научные исследования.

Традиционно ВММШ состоит из двух блоков — это лекции в области фундаментальной и прикладной математики и конференция молодых ученых. Первый блок в 2025 году представлял собой циклы лекций в области математического моделирования и обратных задач для уравнений математической физики, а также в области дробного дифференцирования и его применения к моделям искусственных нейросетей. Второй блок — это конференция молодых ученых, т. е. площадка, на которой молодые и начинающие исследователи имели возможность представить результаты собственных исследований широкой аудитории специалистов в соответствующих областях математической науки. А именно, в этом году 35 человек (как российских, так и зарубежных молодых исследователей) выступили на конференции с докладами, тематически разделенными по трем секциям: «функциональный анализ», «дифференциальные уравнения» и «математическое моделирование». В настоящий сборник вошел один цикл лекций, прочитанный в рамках лектория ВММШ в 2025 году, а также 22 тезиса докладов, представленных в рамках работы конференции молодых ученых.

Курс лекций д.ф.-м.н., и. о. заведующего отделом математического моделирования, ведущего научного сотрудника Тотиевой Жанны Дмитриевны (Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ) **«Обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа»** посвящен основным методам исследования разрешимости обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа. В частности,

была рассмотрена обратная задача для волнового уравнения с интегральным оператором свертки с сосредоточенным источником возмущения волн, а также изучен асимптотический подход к исследованию разрешимости двумерных обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и приведены постановки нерешенных обратных задач. В рамках данного курса прочитаны следующие 2 лекции: «Основные методы исследования разрешимости обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа» и «Асимптотические подходы к исследованию разрешимости двумерных обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа».

Владикавказская молодежная математическая школа в 2025 году привлекла к участию 73 человека, среди которых слушатели и докладчики из восьми стран мира, включая Армению (г. Ереван), Вьетнам (г. Ханой), Колумбия (г. Богота), Кыргызстан (г. Бишкек), Республика Беларусь (г. Минск, г. Витебск, г. Гомель), Республика Узбекистан (г. Ташкент, г. Нукус), Россия (г. Баксан, г. Владикавказ, г. Владимир, г. Донецк, г. Екатеринбург, г. Краснодар, г. Люберцы, г. Москва, г. Нальчик, г. Ростов-на-Дону, г. Санкт-Петербург, г. Таганрог, г. Шахты), Эквадор (г. Кито).

ЦИКЛ ЛЕКЦИЙ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Ж. Д. Тотиева

(Южный математический институт ВНЦ РАН; Владикавказ, Россия)

В настоящем мини-курсе представлены основные методы исследования разрешимости обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа. В частности, рассмотрена обратная задача для волнового уравнения с интегральным оператором свертки с сосредоточенным источником возмущения волн. Изучен асимптотический подход к исследованию разрешимости двумерных обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа. Приводятся постановки нерешенных обратных задач.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, обратная задача, ядро, дельта-функция, принцип сжатых отображений, преобразование Фурье.

Лекция 1.
Основные методы исследования разрешимости обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа

1.1. Об обратных задачах математической физики

С точки зрения соотношения «причина–следствие», все задачи математической физики условно можно разделить на два класса: прямые и обратные. В прямых задачах при известных причинах требуется определить следствия, в обратных задачах — найти причины, приведшие к тем или иным следствиям.

До середины XX века практически все научные работы в области естествознания были направлены на решение прямых задач. Первые научные статьи по обратным задачам были связаны с физикой (акустика, электродинамика, квантовая теория рассеяния), геофизикой (электро-, сейсмо-, магниторазведка), астрономией. Это можно объяснить тем, что свойства среды, которые в прямых задачах считаются заданными величинами, на практике довольно часто оказываются неизвестными. Так, например, искомыми функциями в обратных задачах могут быть плотность, электропроводность, теплопроводность, скорость распространения волн.

Поскольку основные законы естествознания выражены, как правило, дифференциальными уравнениями, то в результате приходим к обратным задачам для дифференциальных уравнений. При этом «причины» конкретизируются в виде неизвестных коэффициентов, правой части, начальных или граничных условий, неизвестной области определения дифференциального уравнения. Вместе с тем, решение прямой задачи остается также неизвестным. Поэтому важным моментом в постановке и решении обратных задач является возможность иметь некоторую дополнительную информацию о решении прямой задачи. Этой информацией могут быть измерения внутри области или на ее границе, спектральные либо кинематические характеристики процесса.

Поясним это на конкретном примере. Известно, что основная задача геофизики состоит в изучении земной структуры. Однако прямые измерения в глубоких слоях Земли невозможны, глубочайшая скважина имеет длину около 15 км, поэтому изучение глубинных свойств может основываться только на косвенных измерениях. Это измерения на поверхности Земли упругих, акустических, электромагнитных колебаний, силы тяжести, тепловых и радиационных потоков. Используя эти данные, можно попытаться определить свойства недр Земли. Математические постановки приводят тогда к необходимости рассмотрения обратных задач.

Точного определения, что такое «обратная задача» не существует. Можно говорить о ней только в рамках конкретной постановки прямой задачи.

Прежде чем решать обратную задачу, необходимо исследовать прямую задачу. Прямые задачи математической физики: найти (в явной форме или приближенно) функции, описывающие различные физические явления (например, распространение звука, сейсмических колебаний, электромагнитных волн и т. п.). Как правило, все они *корректны* (решение существует в определенном классе, оно единственно и непрерывно зависит от входных данных).

Для прямых задач необходимо задать

1) область, в которой процесс изучается;

2) уравнение, описывающее данный процесс;

3) начальные условия (если процесс нестационарный);

4) условия на границе исследуемой области.

Наличие дополнительной информация о решении прямой задачи (например, значения решения внутри области или на ее границе, спектральные либо кинематические характеристики процесса и т. п.) — необходимое условие для постановки обратной задачи.

Пример 1.1.

1) Область:

$$\Omega \in \mathbb{R}^n, \quad \Gamma = \partial\Omega, \quad \mathbb{R}^n \text{ — евклидово пространство.}$$

2) Уравнение:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u + F(x,t), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

где $u(x)$ — смещение точек среды, $\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, c — постоянная скорость распространения волн в среде, $F(x,t)$ — функция источника возмущения.

3) Начальные условия:

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{1.2}$$

4) Граничные условия:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = g(x,t). \tag{1.3}$$

5) Дополнительная информация для нахождения, например, правой части:

$$u\big|_{\Gamma} = f(x,t). \tag{1.4}$$

Классификация обратных задач по искомым функциям

1. Ретроспективная, если требуется восстановить начальные условия (1.2), т. е. функции $\phi(x)$, $\psi(x)$.

2. Граничная, если требуется найти функцию, входящую в граничное условие (1.3) (функцию $g(x,t)$).

3. Задача продолжения, если начальные условия (1.2) неизвестны, а дополнительная информация и граничные условия заданы только на части границы области Ω и требуется определить решение уравнения (продолжить решение внутрь области).

4. Задача об источнике, если требуется определить источник $F(x,t)$, входящий в уравнение (1.1).

5. Коэффициентная, если требуется восстановить коэффициенты, входящие в основное уравнение (1.1).

Классификация по дополнительной информации

1. Наиболее доступными являются измерения на границе области (1.4), но иногда измерительные приборы могут быть размещены внутри объекта (внутренние задачи):

$$u(x_m,t) = f_m(t), \quad m = 1,2,\ldots$$

2. Если задача ретроспективная, то используют «финальные» (в конечный момент времени) наблюдения:

$$u(x,T) = \widetilde{f}(x).$$

3. Иногда удается фиксировать в точках времена прихода волн, порожденных локальными источниками, сосредоточенными в точках. Такой вид дополнительной информации нужен для задачи восстановления скорости распространения сигнала, которая называется обратной кинематической задачей.

Более подробно об общей теории обратных задач можно ознакомится в книге [1].

1.2. Обратная задача для одного гиперболического оператора с распределенными начальными данными

Изучение любой теории обычно начинается с рассмотрения простейших ее выводов, которые показывают содержательность теории и освещают отдельные ее грани. В теории обратных задач математической физики довольно содержательными в математическом и прикладном отношениях являются обратные задачи, связанные с простейшим уравнением гиперболического типа [2]:

$$L_q u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x) \right) u = F(x,t). \tag{1.5}$$

Они обычно заключаются в нахождении оператора L_q, т. е. функции $q(x)$, по той или иной информации о решениях уравнения (1.5). Выбор этой информации определяет постановку этой задачи и свойства ее решения. При одних данных

задача может быть корректной, при других — некорректной. Как правило, постановка обратной задачи диктуется ее физическими приложениями. Рассматриваемые в этой лекции две задачи будут отличаться следующим: первая задача имеет чисто методический характер, вторая — имеет непосредственное физическое приложение.

Для уравнения (1.5) рассмотрим в области $\Omega = \{(x,t) : -\infty < x < \infty, t > 0\}$ задачу Коши с начальными условиями

$$u\big|_{t=0} = \phi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{1.6}$$

При фиксированных q, F, ϕ, ψ эта задача является корректной, если подходящим образом подобраны функциональные простанства для данных задачи и пространство решений. В частности, задача (1.5), (1.6) является корректной, если q, ϕ, ψ принадлежат пространству непрерывных функций $C(\mathbb{R})$, а $F, u \in C(\Omega)$. При этом функция $u(x,t)$ является, вообще говоря, обобщенным решением задачи (1.5), (1.6). В дальнейшем предъявим к данным этой задачи несколько более жесткие требования, а именно: будем считать, что

$$q(x) \in C(\mathbb{R}), \quad \phi \in C^2(\mathbb{R}), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}),$$
$$F, F_t \in C(\Omega_T), \quad \Omega_T = \big\{(x,t) : -\infty < x < \infty,\ 0 < t \leqslant T\big\}.$$

Эти условия, как будет показано далее, гарантируют существование в Ω_T классического решения задачи (1.5), (1.6), т. е. $u \in C^2(\Omega_T)$.

Обратная задача. Найти $q(x) \in C(\mathbb{R})$, если решение задачи (1.5), (1.6) при заданных функциях ϕ, ψ, F известно на множестве $x = x_0$, $t \geqslant 0$, вместе со своей производной по x:

$$u(x_0,t) = f_1(t), \quad u_x(x_0,t) = f_2(t), \quad t \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Иначе говоря, имеет место соответствие $(\phi, \psi, F, f_1, f_2) \mapsto q(x)$. Очевидно, если мы найдем $q(x)$, то найдем и функцию $u(x,t)$ как решение задачи (1.5), (1.6). Поэтому часто обратную задачу формулируют как задачу отыскания пары функций q, u.

Необходимые условия на функции f_1, f_2 должны вытекать из рассмотрения свойств решений прямой задачи (1.5), (1.6), типичных для всего класса дифференциальных операторов $L_q, q \in C(\mathbb{R})$. Перейдем к изучению этих свойств.

1.2.1. Исследование прямой задачи. Обозначим $\Delta(x_0,t_0)$ треугольник на плоскости (рис. 1. 1).

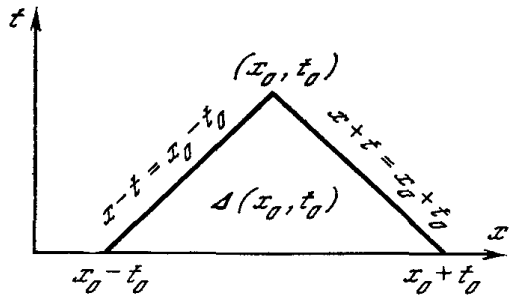


Рис. 1.1.

Лемма 1.1. *Если для какого-либо*

$$t_0 > 0, \quad q(x) \in C[x_0 - t_0, x_0 + t_0], \quad \phi(x) \in C^2[x_0 - t_0, x_0 + t_0],$$
$$\psi(x) \in C^1[x_0 - t_0, x_0 + t_0], \quad F, F_t \in C(\Delta(x_0, t_0)),$$

то в области $\Delta(x_0, t_0)$ *существует единственное классическое решение задачи* (1.5), (1.6).

$\lhd$ Для доказательства леммы сведем задачу (1.5), (1.6) к интегральному уравнению относительно функции $u(x,t)$. С этой целью воспользуемся формулой Даламбера:

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x-t) + \phi(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} F(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \qquad (1.8)$$

которое представляет решение следующей задачи:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u_0 = F(x,t), \qquad (1.9)$$

$$u_0\big|_{t=0} = \phi(x), \quad \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \qquad (1.10)$$

Принимая слагаемое $q(x)u$ в (1.5) как правую часть и, используя формулу (1.8), получим интегральное уравнение для $u(x,t)$:

$$u(x,t) = u_0(x,t) - \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} q(\xi)u(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \Delta(x_0,t_0). \qquad (1.11)$$

Уравнение (1.11) представляет собой *линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода.*

Вообще, интегральными уравнениями принято называть *уравнения, в которых неизвестная функция входит под знак интеграла.* Но это определение не совсем удачно. Например,

$$x(t) = \int\limits_0^t x'(s)\, ds + x(0)$$

есть простое тождество для любой непрерывно дифференцируемой функции.

Определение 1.1. Линейным интегральным *уравнением Вольтерра 2-го рода* называется уравнение вида

$$\phi(t) = \lambda \int\limits_a^t K(t,s)\phi(s)\, ds + f(t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Здесь $\phi(t)$ — неизвестная функция, ядро $K(t,s)$ и свободный член $f(t)$ — известные функции, λ — числовой параметр. При $f(t) \equiv 0$ уравнение называется *однородным.* Основы теории интегральных уравнений изложены в книге [3].

Покажем теперь, что уравнение (1.11) определяет единственное непрерывное в области $\Delta(x_0,t_0)$ решение. Используем для этого метод последовательных приближений, представив $u(x,t)$ в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t), \qquad (*)$$

где $u_n(x,t)$, $n\geqslant 1$, находятся по формулам

$$u_n(x,t)=-\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)}q(\xi)u_{n-1}(\xi,\tau)\,d\xi d\tau. \qquad (1.12)$$

Нетрудно проверить, что в условиях леммы $u_0(x,t)\in C^2(\Delta(x_0,t_0))$. Формула (1.12) показывает, что все $u_n(x,t)\in C(\Delta(x_0,t_0))$. Введем обозначение

$$\begin{aligned} U_n(t)&=\max_{x_0+(t-t_0)\leqslant x\leqslant x_0-(t-t_0)}\bigl|u_n(x,t)\bigr|, \quad 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ \bigl\|u\bigr\|_k&=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\max_{(x,t)\in\Delta(x_0,t_0)}\bigl|D^{\alpha}u(x,t)\bigr|, \quad k=0,1,2,\\ D^{\alpha}&=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1}\partial t^{\alpha_2}}, \quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2), \quad |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2. \end{aligned} \qquad (1.13)$$

Тогда из (1.12) вытекает оценка

$$\begin{aligned} U_n(t)&\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^t\max_{x_0+(t-t_0)\leqslant x\leqslant x_0-(t-t_0)}\left|\int\limits_{\tau-t+x}^{-\tau+t+x}q(\xi)\,u_{n-1}(\xi,\tau)\,d\xi\right|d\tau\leqslant\\ &\leqslant\|q\|_0\int\limits_0^t(t-\tau)\,U_{n-1}(\tau)\,d\tau, \quad n\geqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant t_0. \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Применяя ее последовательно для $n=1,2,\ldots$, получим

$$U_n(t)\leqslant\bigl(\|q\|_0\bigr)^n\frac{t^{2n}}{(2n!)}\,\|u_0\|_0, \quad n\geqslant 1. \qquad (1.15)$$

Оценка (1.15) показывает, что ряд $(*)$ сходится равномерно в области $\Delta(x_0,t_0)$, так как он мажорируется в D_T сходящимся числовым рядом $\|u_0\|_0\sum_0^{\infty}\frac{(\|q\|_0t_0^2)^n}{(2n)!}$ и определяет поэтому непрерывную в области $\Delta(x_0,t_0)$ функцию $u(x,t)$, которая является решением уравнения (1.11). Это решение единственно, так как однородное уравнение, отвечающее (1.11):

$$u(x,t)=-\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)}q(\xi)u(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \qquad (1.16)$$

имеет в классе непрерывных в $\Delta(x_0,t_0)$ функций только нулевое решение. В самом деле, если

$$U(t)=\max_{x_0+(t-t_0)\leqslant x\leqslant x_0-(t-t_0)}\bigl|u(x,t)\bigr|,$$

то из (1.16) вытекает

$$U(t) \leqslant \|q\|_0 \int\limits_0^t (t-\tau)U(\tau)\,d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0. \tag{1.17}$$

По лемме Гронуолла, имеем, что $U(t) \equiv 0$, следовательно, $u(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in \Delta(x_0,t_0)$.

Лемма Гронуолла. *Если* $U(t) \geqslant 0$, $h(t) \geqslant 0$, $U(t), h(t) \in C(t_0;\infty)$, *и выполняется неравенство для* $t_0 > 0$:

$$U(t) \leqslant c + \int\limits_{t_0}^t h(\tau)U(\tau)\,d\tau,$$

то имеем оценку

$$U(t) \leqslant c \cdot \exp \int\limits_{t_0}^t h(\tau)\,d\tau.$$

Можно показать, что решение (1.11) имеет в $\Delta(x_0,t_0)$ непрерывные производные до второго порядка и определяет классическое решение задачи (1.5), (1.6). Имеем

$$u(x,t) = u_0(x,t) - \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} q(\xi)\left[\int\limits_0^{t-|x-\xi|} u(\xi,\tau)\,d\tau\right]d\xi, \quad (x,t) \in \Delta(x_0,t_0). \tag{1.11$'$}$$

Так как $u_0 \in C^2(\Delta(x_0,t_0))$, то выражение, стоящее в формуле (1.11$'$) справа, имеет по x, t частные производные второго порядка. Несложно дальше продифференцировать (1.11$'$) и убедиться в этом (самостоятельно!). $\triangleright$

Следствие 1.1. *При выполнении условий леммы функции* f_1, f_2, *являющиеся данными обратной задачи, должны обладать следующей гладкостью:*

$$u(x_0,t) = f_1(t) \in C^2[0,t_0], \quad u_x(x_0,t) = f_2(t) \in C^1[0,t_0]. \tag{1.18}$$

Требования гладкости не являются единственными требованиями к функциям f_1, f_2. Эти функции должны удовлетворять еще условиям согласования с данными прямой задачи. Так как $u|_{t=0} = \phi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$, то

$$\phi(x_0) = f_1(0),\ \psi(x_0) = f_1'(0),\ \phi'(x_0) = f_2(0),\ \psi'(x_0) = f_2'(0). \tag{1.19}$$

Условия (1.19) — необходимые условия существования решения обратной задачи — являются и достаточными для существования ее решения в малом.

1.2.2. Исследование обратной задачи.

Теорема 1.1. *Если при* $t_0 > 0$ *для функций* ϕ, ψ, F *выполнены условия леммы* 1.1, *условия* (1.18), (1.19) *для функций* f_1, f_2 *и условие*

$$\big|\psi(x)\big| \geqslant \psi_0 > 0, \quad x \in [x_0 - t_0, x_0 + t_0], \tag{1.20}$$

то для достаточно малых $h>0$ решение обратной задачи на отрезке $[x_0-h, x_0+h]$ существует, единственно и принадлежит классу $C[x_0-h, x_0+h]$.

Малость h обусловлена двумя факторами:

1) h не может быть больше t_0;

2) для доказательства используется метод, основанный на принципе сжатых отображений; при этом для применимости метода оказывается необходимым, чтобы было выполнено неравенство $h < h^*$, где h^* определяется данными обратной задачи.

$\lhd$ Как уже было сказано, основная идея доказательства — это применение принципа сжатых отображений.

Первый шаг в этом направлении состоит в том, чтобы заменить эквивалентным образом обратную задачу для оператора L_q системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Для этого выпишем выражения для u_t, u_{tt}, u_{xx}, дифференцируя (1.11′):

$$u_t(x,t) = (u_0)_t(x,t) - \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} q(\xi)\, u\big(\xi, t-|x-\xi|\big)\, d\xi, \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} u_{tt} = (u_0)_{tt}(x,t) - \frac{1}{2}\big[q(x+t)u(x+t,0) + q(x-t)u(x-t,0)\big] - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} q(\xi)\, u_t\big(\xi, t-|x-\xi|\big)\, d\xi, \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned} u_{xt} = (u_0)_{xt}(x,t) - \frac{1}{2}\big[q(x+t)u(x+t,0) - q(x-t)u(x-t,0)\big] - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} q(\xi)\, u_t\big(\xi, t-|x-\xi|\big)\, \operatorname{sign}(\xi-x)\, d\xi. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Положим в равенствах (1.22), (1.23) $x = x_0$ и воспользуемся данными задачи Коши (1.6) и данными обратной задачи (1.7). Получим

$$\begin{aligned} f_1''(t) = (u_0)_{tt}(x_0,t) - \frac{1}{2}\big[q(x_0+t)\phi(x_0+t) + q(x_0-t)\phi(x_0-t)\big] - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{x_0-t}^{x_0+t} q(\xi)\, u_t\big(\xi, t-|x_0-\xi|\big)\, d\xi, \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned} f_2'(t) = (u_0)_{xt}(x_0,t) - \frac{1}{2}\big[q(x_0+t)\phi(x_0+t) - q(x_0-t)\phi(x_0-t)\big] - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{x_0-t}^{x_0+t} q(\xi)\, u_t\big(\xi, t-|x_0-\xi|\big)\, \operatorname{sign}(\xi-x_0)\, d\xi,\ t\in[0,t_0], \end{aligned} \tag{1.25}$$

из последних двух равенств находится $q(x)$ для $x \geqslant x_0$ и $x \leqslant x_0$:

$$q(x) = \frac{1}{\phi(x)} \left\{ - f_1''(x - x_0) - f_2'(x - x_0) + \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) u_0(x,t) \right]_{x=x_0, t=x-x_0} - \right.$$
$$\left. - \int_{x_0}^{x} q(\xi)\, u_t(\xi, x - \xi)\, d\xi \right\}, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + t_0,$$

$$q(x) = \frac{1}{\phi(x)} \left\{ - f_1''(x_0 - x) - f_2'(x_0 - x) + \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) u_0(x,t) \right]_{x=x_0, t=x_0-x} - \right.$$
$$\left. - \int_{x}^{x_0} q(\xi)\, u_t(\xi, \xi - x)\, d\xi \right\}, \quad x_0 - t_0 \leqslant x \leqslant x_0.$$

Или, объединяя эти два равенства, имеем для $x \in [x_0 - t_0, x_0 + t_0]$:

$$q(x) = q_0(x) + \frac{1}{\phi(x)} \int_{x_0}^{x} q(\xi)\, u_t\big(\xi, |\xi - x|\big)\, d\xi \cdot \operatorname{sign}(x_0 - x),$$

$$q_0(x) = \frac{1}{\phi(x)} \left\{ - f_1''\big(|x - x_0|\big) - f_2'\big(|x - x_0|\big)\, \operatorname{sign}(x - x_0) + \right. \tag{1.26}$$
$$\left. + \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \operatorname{sign}(x_0 - x)\, \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) u_0(x,t) \right]_{x=x_0,\, t=|x-x_0|} \right\}.$$

Несмотря на наличие разрывного множителя $\operatorname{sign}(x - x_0)$, функция $q_0(x)$ является непрерывной на отрезке $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$. Этот факт является следствием выполнения последнего из условий согласования (1.19). В самом деле, так как

$$-f_2'(0) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\, u_0(x,t) \Big|_{x=x_0, t=0} = -f_2'(0) + \psi'(x_0) = 0,$$

то множитель, стоящий перед $\operatorname{sign}(x - x_0)$, обращается при $x = x_0$ в нуль.

Второй шаг. Рассмотрим в области $\Delta(x_0, t_0)$ равенства (1.11), (1.21), (1.26). Эти три равенства определяют систему нелинейных интегральных уравнений второго рода относительно функций u, y_t, q. Указанная система обладает малым параметром, роль которого играет мера области интегрирования в этих уравнениях. Благодаря наличию этого малого параметра к системе уравнений оказывается применим в достаточно малой области принцип сжатых отображений. В самом деле, запишем систему уравнений в виде операторного уравнения

$$\varphi = A\varphi, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \tag{1.27}$$

$$\varphi_1 := u(x,t), \quad \varphi_2 = u_t(x,t), \quad \varphi_3 := q(x),$$

а оператор $A = (A_1, A_2, A_3)$ определен на множестве функций $\varphi \in C(\Delta(x_0, t_0))$ и в соответствии с равенствами (1.11), (1.21), (1.26) имеет вид:

$$A_1\varphi = u_0(x,t) - \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,t)} \varphi_3(\xi)\varphi_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau,$$

$$A_2\varphi = \frac{\partial}{\partial t}\,u_0(x,t) - \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \varphi_3(\xi)\,\varphi_1\big(\xi, t-|x-\xi|\big)\,d\xi, \tag{1.27′}$$

$$A_3\varphi = q_0(x) + \operatorname{sign}(x_0 - x)\cdot\frac{1}{\phi(x)}\int\limits_{x_0}^{x} \varphi_3(\xi)\,\varphi_2\big(\xi, |\xi - x|\big)\,d\xi.$$

Введем обозначение

$$\|\varphi\|(t_0) = \max_{1\leqslant k\leqslant 3}\ \max_{(x,t)\in\Delta(x_0,t_0)} \big|\varphi_k(x,t)\big|,$$

$$\varphi_0(x,t) = \Big(u_0(x,t), \frac{\partial}{\partial t}\,u_0(x,t),\, q_0(x)\Big)$$

и рассмотрим в пространстве $C(\Delta(x_0,h))$, $0 < h \leqslant t_0$, множество (шар с центром в точке $\|\varphi_0\|(t_0)$)

$$\Phi(h) = \big\{\varphi(x,t) :\, \|\varphi - \varphi_0\|(h) \leqslant \|\varphi_0\|(t_0)\big\}. \tag{1.28}$$

Определение 1.2. Оператор A называется *сжимающим* на множестве $\Phi(h)$, если выполняются следующие два условия:

1) если $\varphi \in \Phi(h)$, то $A\varphi \in \Phi(h)$;

2) если $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ — произвольные элементы $\Phi(h)$, то

$$\big\|A\varphi^{(1)} - A\varphi^{(2)}\big\| \leqslant \rho\,\big\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\big\|, \quad 0 < \rho < 1.$$

Покажем, что нелинейный оператор A является сжатием, т. е. при достаточно малых h оператор A осуществляет сжатое отображение множества $\Phi(h)$ на себя.

В самом деле, для $\varphi \in \Phi(h)$ справедливо неравенство

$$\|\varphi\|(h) \leqslant 2\|\varphi_0\|(h).$$

С другой стороны, оценивая интегралы, входящие в формулы (1.27′), находим

$$\|A\varphi - \varphi_0\|(h) \leqslant 4\,\|\varphi_0\|^2(t_0)\max\left(\frac{1}{2}\,h^2, h, \frac{h}{\psi_0}\right),$$

поэтому для того, чтобы оператор A переводил множество $\Phi(h)$ в $\Phi(h)$, т. е.

$$\|A\varphi - \varphi_0\|(h) \leqslant \|\varphi_0\|(t_0),$$

нужно, чтобы

$$h \leqslant h^* = \min\left(\frac{1}{\sqrt{2\|\varphi_0\|(t_0)}}, \frac{\min(\psi_0, 1)}{4\|\varphi_0\|(t_0)}, t_0\right).$$

Теперь покажем сжимаемость отображения A. Пусть $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ — любые два элемента из множества $\Phi(h)$, $h \leqslant h^*$:

$$\left\|A\varphi^{(1)} - A\varphi^{(2)}\right\| \leqslant \alpha \left\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\right\|, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Рассмотрим

$$\left\|A_1\varphi^{(1)} - A_1\varphi^{(2)}\right\| = \left\| -\frac{1}{2} \iint\limits_{\Delta(x,t)} \left[\varphi_3^{(1)}(\xi)\,\varphi_1^{(1)}(\xi,\tau) - \varphi_3^{(2)}(\xi)\,\varphi_1^{(2)}(\xi,\tau)\right] d\xi d\tau \right\|.$$

Аналогично выписываются другие два равенства относительно $A_j\varphi^{(1)} - A_j\varphi^{(2)}$, $j = 2, 3$.

Тогда, используя неравенства

$$\begin{aligned}\left|\varphi_k^{(1)}\varphi_s^{(1)} - \varphi_k^{(2)}\varphi_s^{(2)}\right| &\leqslant \left|\varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)}\right| \left|\varphi_s^{(1)}\right| + \left|\varphi_s^{(1)} - \varphi_s^{(2)}\right| \left|\varphi_k^{(2)}\right| \\ &\leqslant 4\,\|\varphi_0\|(t_0) \left\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\right\|(h), \quad k, s = 1, 2, 3,\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}\left\|A\varphi^{(1)} - A\varphi^{(2)}\right\|(h) &\leqslant 4\left\|\varphi_0\right\|(t_0) \left\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\right\|(h) \max\left(\frac{1}{2}\,h^2, h, \frac{h}{\psi_0}\right) \leqslant \\ &\leqslant \frac{h}{h^*} \left\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\right\|(h).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что при любом $h < h^*$ оператор A осуществляет сжатое отображение множества $\Phi(h)$ на себя. Тогда в силу теоремы Банаха на множестве $\Phi(h)$ существует, и притом только одна, неподвижная точка отображения, т. е. существует только одно решение уравнения (1.27). Следовательно, решая систему уравнений (1.11), (1.21), (1.26), например, методом последовательных приближений (из теоремы Банаха следует его сходимость к решению), мы однозначно построим в области $\Delta(x_0, h)$ для $h \in (0, h^*)$ функции u, u_t, q. Тем самым определяется решение обратной задачи, т. е. функция $q(x)$ на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$. Доказательство завершено. $\triangleright$

1.3. Обратная задача для волнового уравнения с интегральным оператором свертки с сосредоточенным источником возмущения волн

Рассмотренная нами обратная задача о коэффициенте имеет чисто методический характер. Она была изучена для дальнейшего использования идеи неподвижной точки и техники доказательства в задачах прикладного характера.

В приложениях, связанных, в частности, с задачами разведочной геофизики, данные часто являются финитными функциями, локализованными в относительно небольшой области пространства. Математическое моделирование таких ситуаций удобно проводить, рассматривая данные задачи как *обобщенные функции*, носители которых сосредоточены в фиксированных точках пространства.

При этом решением краевой задачи является также обобщенная функция. Обратные задачи, в которых данные прямой задачи являются обобщенными функциями, требуют отдельного изучения. С точки зрения приложений это наиболее интересные задачи.

1.3.1. Об обобщенных функциях. Впервые обобщенные функции в явной и теперь общепринятой форме ввел С. Л. Соболев в 1936 г. Он применил обобщенные функции к выяснению вопроса о единственности решения задачи Коши для линейных гиперболических уравнений, моделирующих волновые процессы в различных средах. Уже давно в физике употребляются так называемые *сингулярные функции*, которые не могут быть корректно определены в рамках классической теории функций. Основы теории обобщенных функций подробной изложены в книге [4].

Простейшей сингулярной функцией является дельта-функция $\delta(x-x_0)$: она, по определению физиков, «равна нулю всюду, кроме одной точки x_0, в этой точке равна бесконечности и обладает интегралом, равным 1». Излишне указывать, что эти условия несовместимы с точки зрения классического определения функции и интеграла.

Здесь нужно заметить, что при решении конкретных задач математической физики дельта-функции (и другие сингулярные) встречаются, как правило, только на начальных или промежуточных этапах; в окончательном ответе сингулярные функции или вовсе отсутствуют или фигурируют под знаком интеграла в произведении с какой-либо достаточно хорошей функцией. Таким образом, нет прямой необходимости отвечать на вопрос, что такое сингулярная функция сама по себе: нам достаточно ответить на вопрос, что означает интеграл от произведения сингулярной функции и «хорошей» функции. Например, вместо того чтобы отвечать на вопрос, что такое дельта-функция, нам достаточно указать, что для любой достаточно хорошей функции $\varphi(x)$ имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(x_0).$$

Иными словами, мы связываем с каждой сингулярной функцией функционал, который ставит в соответствие этой сингулярной функции и каждой «достаточно хорошей» функции некоторое число.

Но если это так, то мы можем и не задумываться над смыслом понятия «сингулярная функция»: мы можем теперь отождествить «сингулярную функцию» с тем функционалом, о котором конкретно идет речь, это и будет вполне достаточным ее определением (при условии, что точно указан и тот класс «достаточно хороших» функций, на котором задан этот функционал).

Обыкновенные интегрируемые функции также укладываются в эту схему: для каждой такой функции $f(x)$ мы умеем ответить на вопрос, чему равен интеграл от произведения $f(x)$ на «хорошую функцию». Таким образом, представление об обобщенных функциях как о функционалах охватывает как «сингулярные», так и обыкновенные функции.

Перейдем к основным понятиям и терминам.

Основные функции. Прежде всего зададим совокупность тех функций, которые мы называли условно «достаточно хорошими», на которых будут действовать в дальнейшем наши функционалы. В качестве этой совокупности мы рассмотрим множество D (линейное пространство) всех вещественных функций $\phi(x)$, каждая из которых имеет непрерывные производные всех порядков и финитна, т. е. обращается в нуль вне некоторой ограниченной области (своей для каждой из функций $\phi(x)$). Эти функции будем называть *основными.*

Обобщенные функции. Мы говорим, что нам задан *линейный непрерывный функционал* f на пространстве D, если указано правило, в силу которого с каждой основной функцией $\phi(x)$ сопоставлено некоторое вещественное число (f, ϕ). Например, пусть задана некоторая функция $f(x)$, абсолютно интегрируемая в каждой конечной области вещественного пространства (такие функции называются *локально интегрируемыми*). С помощью этой функции мы можем каждой основной функции $\phi(x)$ поставить в соответствие число

$$(f, \phi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx, \tag{1.29}$$

где интегрирование фактически совершается по ограниченной области, вне которой функция $\phi(x)$ обращается в ноль. Можно указать функционалы иного типа. Например, функционал, который ставит в соответствие каждой функции $\phi(x)$ ее значение в точке $x_0 = 0$, очевидно, линеен и непрерывен. Но можно показать, что он не может быть представлен в виде (1.29) ни при какой локально интегрируемой функции $f(x)$.

Указанный функционал мы будем называть *дельта-функцией* в соответствии с установившейся терминологией и обозначать $\delta(x)$; таким образом,

$$(\delta(x), \phi(x)) = \phi(0).$$

Часто встречается «сдвинутая» дельта-функция — функционал $\delta(x - x_0)$, определяемый равенством

$$(\delta(x - x_0), \phi(x)) = \phi(x_0).$$

Обобщенной функцией мы будем теперь называть каждый линейный непрерывный функционал, определенный на основном пространстве D. Обобщенные функции (совокупность которых будем обозначать D'), задаваемые формулами вида (1.29), будем называть *регулярными*, а все остальные (в том числе и дельта-функцию) — *сингулярными.*

Дифференцирование обобщенных функций на примере функций одного переменного

Оказывается, что обобщенные функции имеют производные (и притом всех порядков), которые представляют собой также обобщенные функции.

Как известно,

$$(f', \phi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)\,dx = f(x)\phi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\,dx = (f, -\phi').$$

Это равенство мы и положим в основу общего определения производной от обобщенной функции. *Функционал g, заданный формулой*

$$(g, \phi) = (f, -\phi'), \tag{1.30}$$

мы будем называть производной от функционала f и обозначать f'.

Пример 1.2. Рассмотрим функцию Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Отвечающий ей функционал также будем обозначать через $\theta(x)$. Согласно общей формуле (1.30) функционал $\theta'(x)$ действует на основную функцию $\phi(x)$ так:

$$(\theta'(x), \phi(x)) = (\theta, -\phi'(x)) = -\int_0^\infty \phi'(x)\,dx = \phi(0);$$

таким образом, в силу определения дельта-функции

$$\theta'(x) = \delta(x).$$

Аналогично,

$$\theta'(x-h) = \delta(x-h).$$

Пример 1.3. Построим производную от дельта-функции. Имеем,

$$(\delta'(x-h), \phi) = (\delta(x-h), -\phi') = -\phi'(x).$$

Пример 1.4. Постановка обобщенной задачи Коши для волнового уравнения [5]:

$$u_{tt} - u_{xx} = F(x,t), \quad x > 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.31}$$

$$u\big|_{t=+0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=+0} = u_1(x). \tag{1.32}$$

Считаем, что $F \in C(t \geqslant 0)$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $u_1(x) \in C(\mathbb{R})$.

Предположим, что существует классическое решение $u(x,t)$ задачи Коши (1.31), (1.32). Это значит, что функция u класса $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geqslant 0)$ удовлетворяет уравнению (1.31) при $t > 0$ и начальным условиям (1.32) при $t \to +0$.

Продолжим функции u и F нулем при $t < 0$, положив

$$\widetilde{u} = \begin{cases} u, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad \widetilde{F} = \begin{cases} F, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Можно показать [5], что функция $\widetilde{u}(x,t)$ удовлетворяет в $\mathbb{R}$ волновому уравнению

$$\widetilde{u}_{tt} - \widetilde{u}_{xx} = \widetilde{F}(x,t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t). \tag{1.33}$$

Таким образом, начальные возмущения u_0 и u_1 для функции $\widetilde{u}(x,t)$ играют роль правой части, моделирующей источник возмущения волн $u_0(x)\cdot\delta'(t)+u_1(x)\cdot\delta(t)$, действующего мгновенно при $t=0$. Далее, классические решения задачи Коши (1.31)–(1.32) содержатся среди тех решений уравнения (1.33), которые обращаются в нуль при $t<0$. Это дает основание назвать задачу об отыскании обобщенных решений уравнения (1.33), обращающихся в нуль при $t<0$, обобщенной задачей Коши для волнового уравнения. Но в таком случае в уравнении (1.33) $\widetilde{F}$, u_0, u_1 можно считать обобщенными функциями.

Итак, *обобщенной задачей Коши* для волнового уравнения с источником $f\in D'(\mathbb{R})$ и начальными возмущениями $u_0,u_1\in D'(\mathbb{R})$ назовем задачу о нахождении обобщенной функции $u\in D'(\mathbb{R})$, обращающейся в нуль при $t<0$ и удовлетворяющей волновому уравнению

$$u_{tt}-u_{xx}=F(x,t)+u_0(x)\cdot\delta'(t)+u_1(x)\cdot\delta(t). \tag{1.34}$$

Уравнение (1.34) эквивалентно следующему: для любой $\phi\in D(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$(u,\phi_{tt}-\phi_{xx})=(F,\phi)-(u_0,\phi_t(x,0))+(u_1,\phi(x,0)).$$

Из уравнения (1.34) следует, что необходимым и достаточным условием разрешимости обобщенной задачи Коши является обращение в нуль F при $t<0$.

Пример 1.5. Решением начально-краевой задачи для $x>0$, $t\in\mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0,$$

$$u\big|_{t<0}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=+0}=\frac{1}{2}\,\delta(t)\quad\text{или}\quad\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=+0}=\frac{1}{2}\,\delta'(t),$$

являются функции $u(x,t)=\frac{1}{2}\theta(t-x)$ или $u(x,t)=\frac{1}{2}\delta(t-x)$ соответственно.

Мы видим, что структура решения определяется характеристическими лучами. Разрывные граничные условия определяют сохраняющиеся разрывы на характеристиках.

1.3.2. Постановка и исследование обратной задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу, моделирующую некоторый волновой процесс в средах, в которых состояние в момент времени t зависит от состояния от истории поведения до момента t (*среды с последействием или среды с памятью*):

$$u_{tt}-u_{xx}=\int_0^t k(\tau)u(x,t-\tau)\,d\tau,\quad x>0,\ t\in\mathbb{R}, \tag{1.35}$$

$$u\big|_{t<0}\equiv 0,\quad u_x\big|_{x=0}=\delta'(t). \tag{1.36}$$

Определение 1.3. Задачу определения функции $u(x,t)$ из уравнения (1.35) при заданных функции $k(t)$, $t>0$, начальных и граничных условий (1.36) назовем *прямой* задачей.

Функция $u(x,t)$ — обобщенное решение прямой задачи.

Решение прямой задачи имеет следующую структуру [5]:

$$u(x,t) = -\delta(t-x) + v(x,t)\theta(t-x), \tag{1.37}$$

т. е. представляет собой сумму сингулярной и регулярной частей. Здесь неизвестная функция $v(x,t)$ является достаточно гладкой в области $t > x > 0$.

Поставим обратную задачу определения $k(t)$. Но для постановки обратной задачи нам необходимо привлечь дополнительную информацию о решении прямой задачи. В качестве такой информации, исходя из физического смысла, могут быть измерения функции смещения $u(x,t)$ на поверхности $x = +0$. Математически это записывается как задание следа функции $u(x,t)|_{x=+0}$, причем, следуя структуре решения прямой задачи (1.37), имеем

$$u(x,t)\big|_{x=+0} = -\delta(t) + g(t)\theta(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.38}$$

Здесь $g(t)$ — заданная гладкая функция.

Обратная задача. Определить функцию $k(t)$, $t > 0$, из равенств (1.35), (1.36), если относительно решения прямой задачи известна информация (1.38).

Задачи по определению ядер интегральных операторов — это интенсивно развивающееся направление в теории обратных задач. Первые результаты по данному направлению отражены в [6–8]. Одной из последних фундаментальных работ по определению ядер для гиперболических уравнений является монография [9].

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия*

$$g(0) = g'(0) = 0, \quad g(t) \in C^2[0,T], \quad T > 0.$$

Тогда обратная задача (1.35)–(1.38) *имеет единственное решение* $k(t) \in C[0,T]$.

$\lhd$ Подставим $u(x,t) = -\delta(t-x) + v(x,t)\theta(t-x)$ в исходное уравнение (1.35) и условия (1.36).

При подстановке нужно учитывать свойства дельта-функции, а именно, что

$$\int_0^t k(\tau)u(x,t-\tau)\,d\tau = \int_0^t k(\tau)\big[-\delta(t-x-\tau) + v(x,t-\tau)\theta(t-x-\tau)\big]\,d\tau =$$

$$= -k(t-x) + \int_0^{t-x} k(\tau)v(x,t-\tau)\,d\tau.$$

Приравнивая коэффициенты при особенностях $\delta(t-x)$, $\theta(t-x)$, с учетом дополнительной информации (1.38) мы получаем новую задачу относительно функций $v(x,t)$, $k(t)$ в области $t > x > 0$

$$v_{tt} - v_{xx} + k(t-x) - \int_0^{t-x} k(\tau)v(x,t-\tau)\,d\tau = 0, \tag{1.39}$$

$$v\big|_{x=0} = g(t), \quad v_x\big|_{x=0} = 0, \quad t > 0. \tag{1.40}$$

$$v\big|_{t=x+0} = 0. \tag{1.41}$$

Совершая замену переменных $x_1 := t + x$, $t_1 := t - x$ и введя обозначение

$$U(x_1, t_1) := v\left(\frac{x_1 - t_1}{2}, \frac{x_1 + t_1}{2}\right),$$

обратную задачу (1.39)–(1.41) можно переписать в терминах новой функции U:

$$U_{t_1 x_1} + \frac{1}{4}\left(k(t_1) - \int\limits_0^{t_1} k(s)\, U(x_1 - s, t_1 - s)\, ds\right) = 0, \quad (x_1, t_1) \in D_T, \tag{1.42}$$

$$U\big|_{t_1=x_1} = g(x_1), \quad U_{x_1}\big|_{t_1=x_1} = \frac{1}{2}\, g'(x_1), \quad 0 < x_1 < T, \tag{1.43}$$

$$U\big|_{t_1=0} = 0. \tag{1.44}$$

Здесь $D_T := \{(x_1, t_1) |\ 0 < t_1 < x_1 < T\}$, $T > 0$. Далее индекс «1» будет опущен.

Задачу (1.42)–(1.44) в области D_T можно свести к системе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Действительно, пусть

$$V(x, t) := U_x(x, t),$$

тогда, интегрируя последнее равенство на плоскости переменных (ξ, τ) от точки (t, t) до точки (x, t):

$$U(x, t) = g(x) + \int\limits_t^x V(\xi, t)\, d\xi. \tag{1.45}$$

Интегрируя (1.42) от точки (x, t) до (x, x):

$$\int\limits_t^x V_\tau(x, \tau)\, d\tau + \frac{1}{4} \int\limits_t^x \left[k(\tau) - \int\limits_0^\tau k(s)\, U(x - s, \tau - s)\, ds\right] d\tau = 0,$$

и, учитывая, что

$$V\big|_{t=x} = U_x\big|_{t=x} = \frac{1}{2}\, g'(x), \quad 0 < x < T,$$

получаем уравнение для V:

$$V(x, t) = \frac{1}{2}\, g'(x) + \frac{1}{4} \int\limits_t^x \left[k(\tau) - \int\limits_0^\tau k(s)\, U(x - s, \tau - s)\, ds\right] d\tau, \quad (x, t) \in D_T. \tag{1.46}$$

Наконец, в (1.46) возьмем $t = 0$ и воспользуемся условием (1.44):

$$-\frac{1}{2}\, g'(x) = \frac{1}{4} \int\limits_t^x \left[k(\tau) - \int\limits_0^\tau k(s)\, U(x - s, \tau - s)\, ds\right] d\tau.$$

Теперь дифференцируем по x получаем третье интегральное уравнение для $k(x)$:

$$k(x) = -2g''(x) + \int_0^x k(s)g(x-s)\,ds + \int_t^x \int_0^\tau k(s)\,V(x-s,\tau-s)\,ds\,d\tau. \qquad (1.47)$$

Система интегральных уравнений (1.45)–(1.47) относительно функций $U(x,t)$, $V(x,t)$, $k(x)$ является замкнутой системой нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода в области D_T. Замкнутой в том плане, что интегрирование ведется по отрезкам, целиком содержащихся в D_T.

Ее можно представить (как и в задаче предыдущего параграфа) в виде

$$\varphi = A\varphi := (A_1\varphi, A_2\varphi, A_3\varphi),$$

где

$$\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] := \big[U(x,t), V(x,t), k(x)\big],$$

а нелинейный оператор $A = (A_1, A_2, A_3)$ согласно равенствам (1.45)–(1.47) действует по правилу:

$$A_1\varphi = g(t) + \int_t^x \varphi_2(\xi,t)\,d\xi,$$

$$A_2\varphi = \frac{1}{2}\,g'(x) + \frac{1}{4}\int_t^x \left[\varphi_3(\tau) - \int_0^\tau \varphi_3(s)\,\varphi_1(x-s,\tau-s)\,ds\right] d\tau,$$

$$A_3\varphi = -2g''(x) + \int_0^x \varphi_3(s)g(x-s)\,ds + \int_t^x \int_0^\tau \varphi_3(s)\,\varphi_2(x-s,\tau-s)\,ds\,d\tau.$$

Далее исследование проводится аналогично тому, как это было сделано в первой части. $\triangleright$

Лекция 2.
Асимптотические подходы к исследованию разрешимости двумерных обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа

Определение 2.1. Согласно терминологии, принятой в [10], обратная задача называется *одномерной*, если искомая функция зависит от одной переменной, и *многомерной*, если она зависит от двух и более переменных.

Вполне естественно предполагать, что если волновой процесс происходит в двумерном или трехмерном пространстве, то и свойства среды будут меняться в зависимости от точки пространства, т. е. коэффициенты или ядра интегральных операторов при наличии памяти также будут зависеть от нескольких переменных. В этой ситуации возникает проблема исследования *многомерных обратных задач*.

Так как в этом случае мы имеем дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, то лишь в исключительных случаях для прямых задач можно получить точные решения. Проблему можно решить с помощью применения асимптотических методов, успешно использующихся в уравнениях математической физики для получения приближенных решений. В основе асимптотических методов лежит идея разложения искомого решения в формальный ряд по степеням некоторого малого параметра ε:

$$u(\cdot) = u_0(\cdot) + \varepsilon u_1(\cdot) + \varepsilon^2 u_2(\cdot) + \ldots + = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(\cdot).$$

И, хотя при этом степенные ряды являются, как правило, расходящимися, тем не менее приближенное решение — решение, получаемое путем обрыва формальных рядов на каком-то n-м члене, — оказывается весьма пригодным для целого ряда практических расчетов. Получаемое таким путем приближенное решение имеет асимптотический характер в том смысле, что оно стремится к соответствующему точному решению не с увеличением числа n, а при фиксированном n и при стремлении к нулю малого параметра.

Особенно популярным является метод линеаризации, который предполагает представление решения прямой задачи в виде

$$u(\cdot) = u_0(\cdot) + \varepsilon u_1(\cdot) + O\big(\varepsilon^2\big),$$

т. е. ряд обрывается на $n = 2$.

При постановке многомерных обратных задач, наряду с асимптотическим разложением решения прямой задачи $u(\cdot)$, также разлагается и искомый коэффициент.

Рассмотрим несколько постановок многомерных обратных задач с использованием асимптотического подхода.

2.1. Постановка двумерной обратной задачи для волнового уравнения в слабо горизонтально-неоднородной среде с памятью

Целью данной работы является определение двумерного коэффициента и ядра интегрального оператора для волнового уравнения в слабо горизонтально-неоднородной среде.

Для $(x, z, t) \in \mathbb{R}^3$, $z > 0$, рассмотрим **прямую задачу** определения функции $u(x, z, t)$ из интегро-дифференциального уравнения [11]:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{zz} - q(x, z)u = \int_0^t k(\tau)u(x, z, t - \tau)\, d\tau, \tag{2.1}$$

$$u\big|_{t<0} = 0, \tag{2.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=+0} = -\delta'(x)\delta'(t), \tag{2.3}$$

где $q(x, z)$ — коэффициент, характеризующий свойства среды, в которой распространяется волновой процесс; $k(t)$ — ядро, описывающее память среды.

При заданных функциях $q(x, z)$, $k(t)$ задача (2.1)–(2.3) корректно поставлена и имеет единственное решение $u(x, z, t)$, обладающее компактным носителем при любом конечном t.

Обратная задача заключается в определении коэффициента $q(x, z)$, $(x, z) \in \mathbb{R}^2$, $z > 0$ и $k(t)$, $t > 0$, входящих в (2.1), если относительно решения прямой задачи (2.1)–(2.3) известна дополнительная информация

$$u(x, z, t)\big|_{z=+0} = f(x, t), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

$f(x, t)$ — заданная функция.

Определение 2.2. Пара функций $q(x, z)$, $k(t)$ из класса непрерывных функций $C(\mathbb{R}_+)$ и $C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ соответственно называется *решением обратной задачи* (2.1)–(2.4), если соответствующее ей решение прямой задачи (2.1)–(2.3) $u(x, z, t)$ из класса обобщенных функций $D'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2_+)$ удовлетворяет (2.4) для $f(x, t)$, принадлежащих классу обобщенных функций $D'(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$.

Предполагаем, что $q(x, z)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x:

$$q(x, z) = q_0(z) + \varepsilon x q_1(z) + O\big(\varepsilon^2\big), \tag{2.5}$$

где ε — малый параметр. В дальнейшем будем полагать в равенстве (2.5) $q_0(z) \equiv q_0 > 0$ есть известная величина.

Решение прямой задачи (2.1)–(2.3) будем искать в виде ряда по степеням ε:

$$u(x, z, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x, z, t). \tag{2.6}$$

Тогда, учитывая (2.4) и (2.6), имеем

$$f(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j f_j(x, z, t). \tag{2.7}$$

Подставляя (2.5), (2.6) в (2.1)–(2.4) и приравнивая коэффициенты при ε^j, $j = 0, 1$, предполагая, что вклад слагаемых с ε^j, $j = 2, 3, \ldots$, пренебрежимо мал, получаем **две обратные одномерные задачи** последовательного определения $k(t)$ и $q_1(z)$, которые и будут рассмотрены.

Для решения обратных задач достаточно задать образ Фурье от функций $f_0(x,t)$ и $f_1(x,t)$ по переменной x для фикисированного ненулевого значения параметра преобразования.

2.2. Задача определения $u_0(x,z,t)$ и $k(t)$

Рассмотрим прямую задачу определения $u_0(x,z,t)$ из следующей начально-краевой задачи в области $(x,z,t) \in \mathbb{R}^3,\ z > 0$:

$$(u_0)_{tt} = (u_0)_{xx} + (u_0)_{zz} + q_0(z) \cdot u_0 - \int\limits_0^t k(\tau) u_0(x,z,t-\tau)\, d\tau, \tag{2.8}$$

$$u_0\big|_{t<0} = 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z}\bigg|_{z=+0} = -\delta'(x)\delta'(t). \tag{2.10}$$

Применим *интегральное преобразование Фурье*, определяемое формулой

$$\widetilde{u}_0(\nu,z,t) = F_x[u_0](\nu,z,t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(x,z,t) e^{-i\nu x}\, dx, \quad i \text{ — мнимая единица,}$$

в этом случае *формула обращения* будет выглядеть так:

$$u_0(x,z,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u}_0(\nu,z,t) e^{i\nu x}\, dx.$$

Свойства преобразования Фурье, которые нам понадобятся:

1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} (u_0)_x\,(x,z,t) e^{-i\nu x}\, dx = i\nu \widetilde{u}_0(\nu,z,t),$

$\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n u_0}{\partial x^n}\,(x,z,t) e^{-i\nu x}\, dx = (i\nu)^n\, \widetilde{u}_0(\nu,z,t);$

2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, u_0(x,z,t)\, e^{-i\nu x}\, dx = i(\widetilde{u}_0)_\nu(\nu,z,t);$

3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\nu x}\, dx = 1, \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) e^{-i\nu x}\, dx = -i\nu.$

После применения к задаче определения u_0 (2.8)–(2.10) преобразования Фурье, получаем:

$$(\widetilde{u}_0)_{tt} = (\widetilde{u}_0)_{zz} + \left(q_0 - \nu^2\right)\widetilde{u}_0 - \int\limits_0^t k(\tau)\,\widetilde{u}_0(\nu, z, t-\tau)\,d\tau, \tag{2.11}$$

$$\widetilde{u}_0\big|_{t<0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \widetilde{u}_0}{\partial z}\right|_{z=0} = -i\nu\delta'(t). \tag{2.12}$$

Обратная задача. Найти $u_0(\nu, z, t)$ и $k(t)$, входящих в (2.11)–(2.12), если $u_0(\nu, z, t)$ для некоторого ненулевого значения параметра ν известно

$$\widetilde{u}_0(\nu, z, t)\big|_{z=0} = i\nu\delta(t) + \widetilde{f}_0(\nu, t)\theta(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.13}$$

где $\widetilde{f}_0(\nu, t) = F_x[f_0](\nu, t)$ — заданная функция, $\theta(t)$ — функция Хевисайда (далее знак $\widetilde{\ }$ над функциями u_0, f_0 будет опущен).

Будем искать решение преобразованной задачи (2.11)–(2.12) в виде

$$u_0(\nu, z, t) = i\nu\delta(t-z) + v(\nu, z, t)\theta(t-z). \tag{2.14}$$

Тогда, подставляя (2.14) в (2.11)–(2.12) и применяя метод выделения особенностей, относительно функции $v(\nu, z, t)$ получим для $t > z > 0$:

$$v_{tt} - v_{zz} - \left(q_0 - \nu^2\right)v = -i\nu k(t-z) - \int\limits_0^{t-z} k(\tau)\,v(\nu, z, t-\tau)\,d\tau, \tag{2.15}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad v\big|_{t=z} = -\frac{i\nu z}{2}\left(q_0 - \nu^2\right), \tag{2.16}$$

$$v\big|_{z=0} = f_0(\nu, t). \tag{2.17}$$

Введем новые переменные $z_1 := t + z$, $t_1 := t - z$ и пусть

$$U(\nu, z_1, t_1) := v\left(\nu, \frac{z_1 - t_1}{2}, \frac{z_1 + t_1}{2}\right).$$

Задача (2.15)–(2.17) перепишется в терминах функции $U(\nu, z_1, t_1)$ следующим образом:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t_1 \partial z_1} = \frac{1}{4}\left[\left(q_0 - \nu^2\right)U(\nu, z_1, t_1) - i\nu k(t_1) - \int\limits_0^{t_1} k(\tau)U(\nu, z_1 - \tau, t_1 - \tau)\,d\tau\right], \tag{2.18}$$

$$U\big|_{t_1 = z_1} = f_0(\nu, z_1), \tag{2.19}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z_1}\right|_{t_1 = z_1} = \frac{1}{2}\,(f_0)'_{z_1}(\nu, z_1), \tag{2.20}$$

$$U\big|_{t_1=0} = -\frac{i\nu z_1}{4}(q_0 - \nu^2). \tag{2.21}$$

Из (2.21) следует, что $f_0(\nu,0)=0$.

Пусть

$$\omega(\nu,z_1,t_1)=\frac{\partial U}{\partial z_1}(\nu,z_1,t_1),\quad \omega(\nu,z_1,0)=-i\nu\,\frac{q_0-\nu^2}{4},$$

тогда

$$U(\nu,z_1,t_1)=f_0(\nu,t_1)+\int\limits_{t_1}^{z_1}\omega(\nu,\xi,t_1)\,d\xi. \tag{2.22}$$

Из уравнения (2.18) выводим:

$$\int\limits_{t_1}^{z_1}\frac{\partial\omega}{\partial\tau}\,d\tau=\frac{1}{4}\int\limits_{t_1}^{z_1}\left[\big(q_0-\nu^2\big)U(\nu,z_1,\tau)-i\nu k(\tau)-\int\limits_0^{\tau}k(\eta)U(\nu,z_1-\eta,\tau-\eta)\,d\eta\right]d\tau.$$

Так как

$$\int\limits_{t_1}^{z_1}\frac{\partial\omega}{\partial\tau}\,d\tau=\frac{1}{2}\,(f_0)'_{z_1}(\nu,z_1)-\omega(\nu,z_1,t_1),$$

то для $\omega(\nu,z_1,t_1)$ имеем

$$\begin{gathered}\omega(\nu,z_1,t_1)=\frac{1}{2}(f_0)'_{z_1}(\nu,z_1)-\\ -\frac{1}{4}\int\limits_{t_1}^{z_1}\left[\big(q_0-\nu^2\big)U(\nu,z_1,\tau)-i\nu k(\tau)-\int\limits_0^{\tau}k(\eta)U(\nu,z_1-\eta,\tau-\eta)\,d\eta\right]d\tau.\end{gathered} \tag{2.23}$$

Взяв $t=0$ в уравнении (2.23) и дифференцируя его по z_1, получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\,(f_0)''_{z_1}(\nu,z_1)=\frac{1}{4}\int\limits_0^{z_1}\left[\big(q_0-\nu^2\big)\omega(\nu,z_1,\tau)-\int\limits_0^{\tau}k(\eta)\omega(\nu,z_1-\eta,\tau-\eta)\,d\eta\right]d\tau+\\ +\frac{1}{4}\left[\big(q_0-\nu^2\big)f_0(\nu,z_1)-i\nu k(z_1)-\int\limits_0^{z_1}k(\eta)f_0(\nu,z_1-\eta)\,d\eta\right],\end{gathered}$$

отсюда выводим уравнение для $k(z_1)$:

$$\begin{gathered}k(z_1)=\frac{2i}{\nu}\,(f_0)''_{z_1}(\nu,z_1)-\frac{(q_0-\nu^2)i}{\nu}\,f_0(\nu,z_1)+\frac{i}{\nu}\int\limits_0^{z_1}k(\tau)f_0(\nu,z_1-\tau)\,d\tau-\\ -\frac{i}{\nu}\int\limits_0^{z_1}\left[\big(q_0-\nu^2\big)\omega(\nu,z_1,\tau)-\int\limits_0^{\tau}k(\eta)\omega(\nu,z_1-\eta,\tau-\eta)\,d\eta\right]d\tau.\end{gathered} \tag{2.24}$$

Теорема 2.1. *Пусть $T>0$ фиксировано и выполнены следующие условия:*

$$f_0(\nu,0)=0,\quad (f_0)'_t(\nu,0)=-i\nu\,\frac{q_0-\nu^2}{2},\quad f_0(\nu,t)\in C^2[0,T]$$

для некоторого ненулевого значения параметра ν. Тогда обратная задача (2.11)–(2.13) *в области* $G_T = \{(z,t)|\ 0 \leqslant z \leqslant t \leqslant T - z\}$ *имеет единственное решение* $k(t) \in C[0,T]$.

$\lhd$ Заметим, что в условиях теоремы обратная задача (2.15)–(2.17) эквивалента замкнутой нелинейной системе интегральных уравнений Вольтера второго рода с непрерывными ядрами и непрерывными свободными членами (2.22)–(2.24). Это показывается переходом от начально-краевой задачи (2.15)–(2.17) к системе (2.18)–(2.21), и далее к уравнениям (2.23), (2.24). Равенство (2.22) очевидно и используется для замыкания системы. Нетрудно убедиться, что и обратные преобразования имеют место.

Систему (2.22)–(2.24) можно переписать в виде

$$\varphi = A\varphi, \tag{2.25}$$

где $A := (A_1, A_2, A_3)$ — нелинейный оператор, действующий на множестве вектор-функций $\varphi \in C[G_T]$,

$$\varphi := \big[\underbrace{U(\nu, z_1, t_1)}_{\varphi_1}, \underbrace{\omega(\nu, z_1, t_1)}_{\varphi_2}, \underbrace{k(z_1)}_{\varphi_3}\big].$$

Вид A_1, A_2, A_3 определяется правыми частями равенств (2.22)–(2.24). В качестве малого параметра данная система (2.25) содержит промежуток интегрирования, который не превосходит число T. Поэтому при малых T к ней применим принцип Банаха, обеспечивающий существование единственного решения системы.

Дальше доказательство аналогично доказательству предыдущих теорем. $\rhd$

2.3. Задача определения $u_1(x,z,t)$ и $q_1(z)$

Рассмотрим прямую задачу определения $u_1(x,z,t)$ из следующей начально-краевой задачи:

$$(u_1)_{tt} = (u_1)_{zz} + xq_1(z)u_0 + q_0u_1 - \int\limits_0^t k(\tau)u_1(x,z,t-\tau)\,d\tau, \tag{2.26}$$

$$u_1\big|_{t<0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0, \quad z > 0,\ (x,t) \in \mathbb{R}. \tag{2.27}$$

Обратная задача. Найти $u_1(x,z,t)$ и $q_1(z)$, входящих в (2.26)–(2.27), если относительно преобразования Фурье $F_x[u_1](\nu,z,t)$ для некоторого ненулевого значения параметра ν известно

$$F_x[u_1](\nu,z,t)\big|_{z=0} = \widetilde{f}_1(\nu,t), \quad t > 0.$$

После преобразования Фурье по переменной x имеем (далее знак $\widetilde{\ }$ над $u_1(\nu,z,t)$, $f_1(\nu,t)$ будет опущен)

$$\begin{aligned}(u_1)_{tt} = (u_1)_{zz} + iq_1(z)(u_0)_\nu(\nu,z,t) + \big(q_0 - \nu^2\big)u_1(\nu,z,t) - \\ - \int\limits_0^t k(\tau)u_1(\nu,z,t-\tau)\,d\tau, \quad z > 0,\ t \in \mathbb{R},\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$u_1\big|_{t<0} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z}\,\Big|_{z=0} = 0, \quad u_1|_{t=z} = 0, \tag{2.29}$$

$$u_1\big|_{z=0} = f_1(\nu, t). \tag{2.30}$$

Пусть $z_2 := \frac{z+t}{2}$, $t_2 = \frac{t-z}{2}$ и

$$U^*(\nu, z_2, t_2) := u_1(\nu, z_2 - t_2, z_2 + t_2),$$

тогда задача (2.28)–(2.30) перепишется в терминах новой функции $U^*(\nu, z_2, t_2)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U^*}{\partial t_2 \partial z_2} &= \frac{i}{2}\, q_1(z_2 - t_2)\big[i\delta(2t_2) + U_\nu(\nu, 2z_2, 2t_2)\theta(2t_2)\big] + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\big(q_0 - \nu^2\big)U^*\big(\nu, z_2, t_2\big) - \int\limits_0^{2t} k(\tau)U^*(\nu, z_2 - \tau, t_2 - \tau)\, d\tau\right],\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$U^*\big|_{t_2=0} = 0, \quad U^*\big|_{t_2=z_2} = f_1(\nu, 2z_2), \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial z_2}\,\Big|_{t_2=z_2} = (f_1')_{z_2}(\nu, 2z_2). \tag{2.33}$$

С учетом (2.33) очевидно, что

$$U^*(\nu, z_2, t_2) = f_1(\nu, 2t_2) + \int\limits_{t_2}^{z_2} \frac{\partial U^*}{\partial z_2}\,(\nu, \xi, t_2)\, d\xi. \tag{2.34}$$

Из уравнения (2.31) имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{t_2}^{z_2} \frac{\partial U^*}{\partial \tau \partial z_2}\, d\tau &= -\frac{1}{2}\int\limits_{t_2}^{z_2} q_1(z_2 - \tau)\delta(2\tau)\, d\tau + \frac{i}{2}\int\limits_{t_2}^{z_2} q_1(z_2 - \tau)U_\nu'(\nu, 2z_2, 2\tau)\, d\tau + \\ &+ \frac{1}{2}\int\limits_{t_2}^{z_2}\left[\big(q_0 - \nu^2\big)U^*(\nu, z_2, \tau) - \int\limits_0^{2\tau} k(\eta)U^*(\nu, z_2 - \eta, \tau - \eta)\, d\eta\right] d\tau.\end{aligned} \tag{2.35}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{t_2}^{z_2} \frac{\partial U^*}{\partial \tau \partial z_2}\,(\nu, z_2, \tau)\, d\tau = (f_1)_{z_2}'(\nu, 2z_2) - \frac{\partial U^*}{\partial z_2}\,(\nu, z_2, t_2), \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^*}{\partial z_2}\,(\nu, z_2, t_2) &= (f_1)_{z_2}'(\nu, 2z_2) + \frac{1}{4}\, q_1(z_2) - \frac{i}{2}\int\limits_{t_2}^{z_2} q_1(z_2 - \tau)U_\nu'(\nu, 2z_2, 2\tau) d\tau - \\ &- \frac{1}{2}\int\limits_{t_2}^{z_2}\left[\big(q_0 - \nu^2\big)U(\nu, z_2, \tau) - \int\limits_0^{2\tau} k(\eta)U^*(\nu, z_2 - \eta, \tau - \eta)\, d\eta\right] d\tau.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Так как в силу (2.32)

$$\frac{\partial U^*}{\partial z_2}\Big|_{t_2=0} = 0,$$

то взяв в (3.37) $t_2 = 0$, выводим

$$\begin{gathered} q_1(z_2) = -4(f_1)'_{z_2}(\nu, 2z_2) + 2i\int\limits_0^{z_2} q_1(z_2-\tau)U'_\nu(\nu, 2z_2, 2\tau)\,d\tau + \\ + 2\int\limits_0^{z_2}\left[\big(q_0-\nu^2\big)U^*(\nu, z_2, \tau) - \int\limits_0^{2\tau} k(\eta)U^*(\nu, z_2-\eta, \tau-\eta)\,d\eta\right]d\tau. \end{gathered} \tag{2.38}$$

Подставляя (2.37) в (2.36), получим уравнение для $U^*(\nu, z_2, t_2)$:

$$\begin{gathered} U^*(\nu, z_2, t_2) = f_1(\nu, 2z_2) + \\ + \frac{1}{4}\int\limits_{t_2}^{z_2} q_1(\xi)\,d\xi - \frac{i}{2}\int\limits_{t_2}^{z_2}\int\limits_{t_2}^{\xi} q_1(\xi-t_2)U_\nu(\nu, 2\xi, 2\tau)\,d\tau d\xi - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{t_2}^{z_2}\int\limits_{t}^{\xi}\left[\big(q_0-\nu^2\big)U^*(\nu, \xi, \tau) - \int\limits_0^{2\tau} k(\eta)U^*(\nu, \xi-\eta, \tau-\eta)\,d\eta\right]d\tau d\xi. \end{gathered} \tag{2.39}$$

Уравнения (2.38) и (2.39) являются замкнутой системой относительно $q_1(z_2)$ и $U^*(\nu, z_2, t_2)$.

Теорема 2.2. *Пусть* $T \in (0, T^*)$, $f_1(\nu, t_1) \in C^1[0, T]$, $f_1(\nu, 0) = 0$, $(f_1)'_t(\nu, 0) = 0$, *и функции* $u_0(\nu, z, t)$ *и* $k(t)$ *являются решением задачи* (2.4)–(2.6). *Тогда в области* G_T *существует единственное решение обратной задачи* (2.38)–(2.39) $q_1(z) \in C[0, T/2]$.

$\lhd$ Обратная задача (2.28)–(2.30) эквивалентна системе интегральных уравнений (2.38), (2.39). Данная система является замкнутой линейной системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода с непрерывными свободными членами и ядрами относительно неизвестных функций в области G_T при $\nu \in \mathbb{R}$.

Идея доказательства существования единственного решения данной системы состоит в применении обобщенного принципа сжатых отображений.

Определение 2.2. Пусть B — такое непрерывное отображение полного нормированного пространства в себя, что некоторая его степень B^n является сжатием; тогда уравнение $\psi = B\psi$ имеет одно и только одно решение.

Запишем систему (2.38), (2.39) в виде операторного уравнения

$$\psi = B\psi, \tag{2.40}$$

$$\psi := \big[\underbrace{q_1(z_2)}_{\psi_1}, \underbrace{U^*(\nu, z_2, t_2)}_{\psi_2}\big].$$

Линейный оператор $B = (B_1, B_2)$ определен на множестве вектор-функции $\psi \in C(\mathbb{R}\times G_T)$ и B_1, B_2 определяются правыми частями уравнений (2.38), (2.39).

Покажем теперь, что некоторая степень n (n — натуральное число) линейного отображения $B\psi$ является сжатием. Положим $D_T := [0, T/2] \times [0, T/2]$ и

$$\|\psi\|(\nu) = \max\Big\{ \max_{(z_2,t_2)\in D_T} \big|\psi_j(\nu, z_2, t_2)\big|,\ j = 1, 2\Big\}.$$

Пусть $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ — две непрерывные вектор-функции в $\mathbb{R}\times D_T$, удовлетворяющие линейной системе интегральных уравнений (2.40). Для $(\nu, z_2, t_2) \in \mathbb{R}\times D_T$ имеем

$$\max_j \big|B_j\psi^{(1)} - B_j\psi^{(2)}\big|\big(\nu, z_2, t_2\big) \leqslant M z_2 \big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\big\|, \quad (\nu, z_2, t_2) \in \mathbb{R} \times D_T,$$

где M — константа, зависящая от величин T, $\|U'_\nu\|$, q_0, ν, $\|k(t)\|$.

Далее

$$\big|B_j^2\psi^{(1)} - B_j^2\psi^{(2)}\big|\big(\nu, z_2, t_2\big) \leqslant M^2 \int\limits_0^{z_2} \xi \,\big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\big\|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant M^2\, \frac{z_2^2}{2!}\, \big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\big\|, \quad j = 1, 2.$$

Отсюда

$$\max_j \big|B_j^n\psi^{(1)} - B_j^n\psi^{(2)}\big|\big(\nu, z_2, t_2\big) \leqslant M^2\, \frac{z_2^2}{n!}\, \big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\big\|, \quad (z_2, t_2) \in D_T,$$

и, вообще,

$$\big\|B^n\psi^{(1)} - B^n\psi^{(2)}\big\| \leqslant M^n\, \frac{(T/2)^n}{n!}\, \big\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\big\|.$$

При любом фиксированном T число n можно выбрать настолько большим, что

$$M^n\, \frac{(T/2)^n}{n!} < 1.$$

Тогда отображение B^n является сжатием. Согласно обобщению принципа сжимающих отображений уравнение $B\psi = \psi$ имеет одно и только одно решение, принадлежащее $C(\mathbb{R} \times D_T)$. Данное решение может быть найдено методом последовательных приближений. $\triangleright$

2.4. Постановка открытых проблем

Задача 2.1. Для $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $z > 0$, рассмотрим **прямую задачу** определения функции $u(x, y, z, t)$ из интегро-дифференциального уравнения:

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} - q(x, z)u = \int\limits_0^t k(y, \tau)u(x, y, z, t - \tau)\, d\tau, \tag{2.41}$$

$$u\big|_{t<0} = 0, \tag{2.42}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=+0} = -\delta'(x)\delta'(t). \tag{2.43}$$

Обратная задача заключается в определении коэффициента $q(x,z), (x,z) \in \mathbb{R}^2$, $z > 0$ и ядра $k(y,t)$, $y \in \mathbb{R}$, $t > 0$, входящих в (2.41), если относительно решения прямой задачи (2.41)–(2.43) известна дополнительная информация

$$u(x,y,z,t)\big|_{z=+0} = f(x,y,t), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

$f(x,y,t)$ — заданная функция.

Задача 2.2. Для (x,z,t), $x \in \mathbb{R}$, $z > 0$, $t \in \mathbb{R}$ рассматривается следующее интегро-дифференциальное уравнение акустики:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2(z)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \int\limits_0^t k(x,t-\tau)\frac{\partial u}{\partial x}\,d\tau\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ + \int\limits_0^t k(x,t-\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,d\tau + \nabla \ln \rho(x,z)\nabla_{x,z}U, \quad t > 0,\end{aligned} \tag{2.44}$$

с начальными и граничными условиями

$$u\big|_{t<0} \equiv 0, \tag{2.45}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \int\limits_0^t k(x,t-\tau)\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{z=+0} = -\delta(t), \tag{2.46}$$

где

$$\nabla_{x,z}U := \nabla_{x,z}u(x,z,t) + \int\limits_0^t k(x,t-\tau)\nabla_{x,z}u(x,z,\tau)\,d\tau.$$

Здесь $u(x,z,t)$ — акустическое (избыточное) давление, $c(z) > 0$ — скорость распространения акустических волн, $\rho(x,z) > 0$ — плотность среды, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Функция $k(x,t)$, входящая в интеграл свертки, описывает поглощающие свойства среды. Функции $c(z)$, $\rho(x,z)$ являются заданными и достаточно гладкими.

Уравнение (2.44) учитывает поглощение идеально-упругой среды и возникает в геофизике при изучении (идентификации) свойств среды с помощью сейсмических волн. Фактически, при предположении о гладкости система уравнений Больцмана (одна из наиболее распространенных для линейной неупругой среды) в двумерном случае сводится к уравнению (2.44).

Для задачи (2.44)–(2.46) можно поставить обратную задачу определения ядра $k(x,t)$, задавая значение функции $u(x,z,t)$ на границе полупространства аналогично тому, как это было сделано в задаче 2.1.

Литература

1. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Учеб. для вузов / 2-е изд.—Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.—457 с.
2. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики.—М.: Наука, 1984.—251 с.
3. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения.—М.: Наука, 1975.—304 с.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними.—М.: Физматлит (Физматгиз), 1959.—411 с.
5. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 2016.—400 с.
6. *Grasselli M., Kabanikhin S. I., Lorentsi A.* An inverse problem for an integro-differential equation // Sib. Math. J.—1992.—Vol. 33, № 3.—P. 415–426.
7. *Graselli M.* Determining the relaxation tensor in linear viscoelasticity of integral type // Japan J. Industrial Appl. Math.—1994.—Vol. 11.—P. 131–153.
8. *Durdiev D. K.* A multidimensional inverse problem for an equation with memory // Sib. Math. J.—1994.— Vol. 35, № 3.—P. 514–521.
9. *Durdiev D. K., Totieva Z. D.* Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations.— Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2023.—390 p.—(Ser. Infosys Science Foundation Series in Mathematical Sciences).
10. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах.—М.: Научный мир, 2005.—295 с.
11. *Ахматов З. А., Тотиева Ж. Д.* Квазидвумерная коэффициентная обратная задача для волнового уравнения в слабо горизонтально-неоднородной среде с памятью // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, № 4.—С. 15–27.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

О РАНГАХ ЭКСТРЕМУМА И МЕТОДЕ РАНГОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПОТОКОВЫХ СЕТЕЙ С ВОГНУТОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ

М. Б. Абазоков

(Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН;
Нальчик, Россия)

Рассмотрим следующую задачу:

$$z(v) = \sum_{ij \in D} c_{ij}(v_{ij})\, l_{ij} \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^+} v_{ij} - \sum_{k \in \Gamma_j^-} v_{jk} = g_i \quad (\forall\, j \neq 1 \in B), \tag{2}$$

$$\sum_{j \in \Gamma_j^-} v_{1j} = Q, \tag{3}$$

$$v_{ij} \geqslant 0 \quad (\forall\, (i,j) \in D), \tag{4}$$

где $\Gamma(B, D)$ — заданный орграф сети; B и D — множество его вершин и дуг; v_{ij}, c_{ij}, l_{ij} — искомое значение величины потока, заданные удельная стоимость и длина (i,j)-й дуги; Q — заданный поток в сеть; g_i — заданный расход потока в i-м узле сети. Целевая функция (1) отражает стоимость потока сети, ограничение (2) есть уравнение неразрывности потока, соотношение (3) говорит о том, что узел 1 является источником потока.

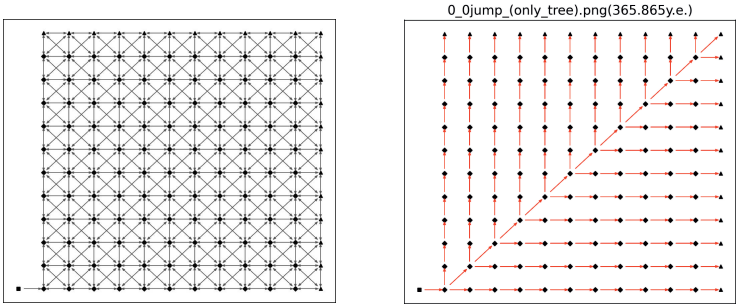
Функция c_{ij} (v_{ij}) непрерывна, строго вогнута (выпукла вверх), возрастает и $c_{ij}(0) = 0$. В связи с вогнутостью целевой функции экстремумы могут достигаться лишь в угловых точках выпуклого (транспортного) многогранника (2)–(4). Задача (1)–(4), как известно, является NP-полной.

Для решения данной задачи были введены понятия *ранга экстремума* и *ранговой оптимизации*. Были разработаны алгоритмы и блок-схемы алгоритмов полной невозвратной P-вариации и P-оптимизации сети.

На основе алгоритмов разработана программа построения потоковой сети P-го ранга оптимальности на языке программирования Python3 и проведен вычислительный эксперимент построения потоковой сети 3-го ранга оптимальности.

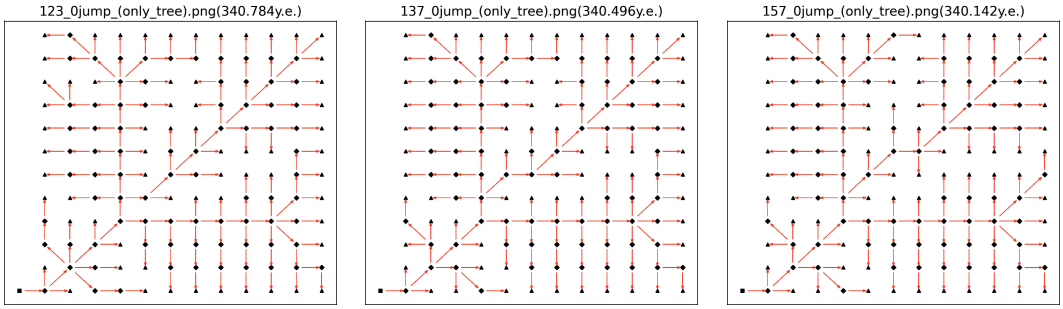
Для оптимизации был взят плотный базовый граф (ПБГ) с количеством вершин $n = 101$ (рис. 1 (а)). Была проведена полная оптимизация 3-го ранга с начального остовного дерева «Елка» (рис. 1 (б)). Информация о результатах оптимизации представлена в таблице 1, а на рис. 2 приведены деревья 1-го, 2-го, 3-го рангов оптимальности ((а), (б), (в) соответственно).

Как видно из таблицы 1, общее время построения 3-оптимальной потоковой сети на ПБГ составляет около 41,5 часов. Общая оптимизация сети составляет $\approx 6,86\%$.



(а) БГ (б) НОД (365, 865 у. е.)

Рис. 1. Базовый граф (БГ) и начальное остовное дерево (НОД).



(а) (б) (в)

Рис. 2. Результаты 3-оптимизации: (а) дерево 1-го ранга оптимальности (340, 784 у. е.); (б) дерево 2-го ранга оптимальности (340, 496 у. е.); (в) дерево 3-го ранга оптимальности (340, 142 у. е.).

Таблица 1.

Результаты 3-оптимизации

Оптимизация	1-оптимизация	Доведение до 2-оптимальности	Доведение до 3-оптимальности
Стоимость сети «до»	**365,865 у.е.**	**340,784 у.е.**	**340,496 у.е.**
Суммарное кол-во проходов (всех рангов)	6	10	16
Суммарное кол-во улучшений (всех рангов)	115	120	125
Улучшение стоимости	25,081 у.е.	0,288 у.е.	0,354 у.е.
Время (час:мин)	<00:01	00:13 (00:14 с начала)	41:18 (41:32 с начала)
Стоимость сети «после»	**340,784 у.е.**	**340,496 у.е.**	**340,142 у.е.**

Литература

1. *Кудаев В. Ч.* Ранги экстремумов и структурная оптимизация больших сетевых систем // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН.—2016.—Т. 72, № 4.—С. 15–24.
2. *Кудаев В. Ч., Абазоков М. Б.* Ранговая оптимизация потоковых сетей // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.—2018.—Т. 24, № 4.—С. 178–185. DOI 10.18454/2079-6641-2018-24-4-178-185.
3. *Кудаев В. Ч., Абазоков М. Б.* Компьютерное проектирование потоковых сетей P-го ранга оптимальности // Изв. Кабардино-Балкарского научн. центра РАН.—2019.—Т. 92, № 6.—С. 122–131. DOI 10.35330/1991-6639-2019-6-92-122-131.

МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ «ЖЕРТВА–ХИЩНИК–СУПЕРХИЩНИК» НА НЕОДНОРОДНОМ АРЕАЛЕ

А. Алмасри

(Южный федеральный университет; Ростов-на-Дону, Россия)

Проводится анализ мультистабильности для математической модели трех видов, описывающей взаимойдействие жертвы $u(x,t)$, потребляющего ее хищника $v(x,t)$ и суперхищника $w(x,t)$, питающегося обоими видами в случае неоднородного одномерного ареала $x \in [0,a]$. Рассматриваемая модель при дополнительных условиях на параметры относится к классу косимметричных динамических систем [1]. Впервые непрерывные семейства решений для систем с суперхищником были получены в [2, 3]. Математическая модель может быть записана в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} &\dot u = -q_1' + F_1, \qquad q_1 = -k_1 u' + \alpha_1 u\varphi_1', \qquad \varphi_1 = \ln p\,, \\ &\dot v = -q_2' + F_2, \qquad q_2 = -k_2 v' + \alpha_2 v\varphi_2', \qquad \varphi_2 = \ln(p+\beta_2 u), \\ &\dot w = -q_3' + F_3, \qquad q_3 = -k_3 w' + \alpha_3 w\varphi_3', \qquad \varphi_3 = \ln(p+\beta_3 u). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь q_i $(i = 1,2,3)$ — потоки видов, k_i — коэффициенты диффузии, направленная миграция (таксис) задается функциями φ_i, α_i, β_i — миграционные коэффициенты, $p = p(x)$ — функция ресурса, точкой обозначено дифференцирование по времени t, штрихом — производная по x. Члены F_i описывают локальное взаимодействие видов на основе функционального отклика Холлинга второго рода:

$$F_1 = u\left(1 - \frac{u}{p} - \frac{v+w}{p+cu}\right),\ F_2 = v\left(\frac{\eta_2 u - d_2 w}{p+cu} - \mu_2\right),\ F_3 = w\left(\frac{\eta_3 u + d_3 v}{p+cu} - \mu_3\right).$$

Здесь μ_2, μ_3 — коэффициенты естественной смертности хищника (v) и суперхищника (w), η_2, η_3 — коэффициенты пищевой ценности, d_2, d_3 — коэффициенты, описывающие взаимодействие хищников.

Система (1) дополняется условиями периодичности при $x = 0$ $(x = a)$:

$$\begin{aligned} &u(0,t) = u(a,t), \qquad v(0,t) = v(a,t), \qquad w(0,t) = w(a,t), \\ &q_1(0,t) = q_1(a,t), \qquad q_2(0,t) = q_2(a,t), \qquad q_3(0,t) = q_3(a,t). \end{aligned}$$

Начальные условия задаются для плотностей видов

$$u(x,0) = u^0(x), \quad v(x,0) = v^0(x), \quad w(x,0) = w^0(x).$$

В случае $k_j = 0$, $\varphi_j = 0$, $p(x) > 0$ получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, пространственная переменная x является параметром.

Для $c = 0$ получены условия, при которых задача косимметрична и явные формулы для однопараметрического семейства равновесий:

$$u = \gamma_1 p, \quad v = \gamma_2 p, \quad w = \gamma_3 p, \tag{2}$$

$$\gamma_1 \in \left[\frac{\mu_2}{\eta_2}, \frac{d_2+\mu_2}{d_2+\eta_2}\right], \quad \gamma_2 = \left(1+\frac{\mu_2}{d_2}\right) - \left(\gamma_1 + \frac{\gamma_1\eta_2}{d_2}\right), \quad \gamma_3 = \frac{\eta_2\gamma_1 - \mu_2}{d_2}.$$

В случае $p(x) = 1$ получается семейство [2].

При $k_j = \alpha_j$ $(j = 1, 2, 3)$ и выполнении условий на параметры

$$\eta_3 = \left(1+\frac{\eta_2}{d_2}\right) d_3, \quad \mu_3 = \left(1+\frac{\mu_2}{d_2}\right) d_3$$

система (1) имеет косимметрию

$$L = \left[vw, -\frac{1}{d_2}\, uw, \frac{1}{d_3}\, uv\right]$$

на подпространстве

$$u = c_1 p, \quad v = c_2 p, \quad w = c_3 p, \quad c_j \in R \quad (j = 1, 2, 3),$$

и существует семейство стационарных решений (2).

Представлены результаты вычислительных экспериментов в среде MATLAB для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных в результате конечно-разностной аппроксимации по пространственной координате.

Благодарность. Автор выражает благодарность В. Г. Цибулину за внимание к работе.

Литература

1. *Юдович В. И.* О бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию // Докл. РАН.—2004.—Т. 398, № 1.—С. 57–61.
2. *Алмасри А., Цибулин В. Г.* Анализ динамической системы жертва–хищник–суперхищник: семейство равновесий и его разрушение // Компьют. исслед. и модел.—2023.—Т. 15.—С. 1601–1615.
3. *Almasri A., Tsybulin V. G.* Multistability and dynamic scenarios in the prey–predator–superpredator model // Sib. Electr. Math. Reports.—2024.—Vol. 21, № 2.—P. 771–788.

О НЕКОТОРЫХ ВЗАИМОСВЯЗЯХ ОПОРНОЙ И РАДИАЛЬНОЙ ФУНКЦИЙ СВЯЗАННЫХ С ВЫПУКЛОЙ ФИГУРОЙ

Л. А. Апинян

(Российско-Армянский университет,
Институт математики и информатики; Ереван, Армения)

Задача нахождения информации или полного восстановления выпуклых тел по распределениям характеристик k-мерных сечений — одна из основных задач стохастической томографии. Решение таких задач выходит далеко за рамки теоретического интереса. Эта область была значительно развита в течение последних десятилетий, когда требовалось все большее количество реальных приложений [1–3]. В частности, восстановление выпуклого тела по его случайным сечениям является центральной задачей стохастической томографии.

Задача настоящей работы состоит в нахождении взаимосвязи между опорной функцией и радиальной функцией, связанных с выпуклой фигурой на плоскости.

Опорная функция выпуклой фигуры A — $h_A(\varphi)$ определяется как $\sup_{x\in\mathbb{A}}\langle x,u\rangle$, где φ — произвольный угол, а u — единичный вектор в направлении φ.

Радиальная функция выпуклой фигуры A — $\rho_A(\varphi)$ определяется как $\max_{t\in\mathbb{R}}\{t>0; tu\in A\}$, где φ — произвольный угол, а u — единичный вектор в направлении φ [4].

В настоящей работе были получены следующие результаты.

1. Формула, выражающая угол наклона прямой, соединяющей начало координат с точкой на границе тела, имеющей заданную внешнюю нормаль, с помощью опорной функции:

$$\alpha(\varphi)=\arcsin\left(\frac{h(\varphi)\sin\varphi+h'(\varphi)\cos\varphi}{\sqrt{h(\varphi)^2+h'(\varphi)^2}}\right).$$

2. Формула, выражающая угол внешней нормали тела в граничной точке через угол луча, проходящего из начала координат через эту точку, с помощью радиальной функции:

$$\varphi(\alpha)=\arctan\left(\frac{\rho(\alpha)\sin\alpha-\rho'(\alpha)\cos\alpha}{\rho(\alpha)\cos\alpha+\rho'(\alpha)\sin\alpha}\right).$$

3. Алгоритм нахождения угла внешней нормали тела в граничной точке через угол луча, проходящего из начала координат через эту точку, с помощью опорной функции.

Фиксируется некоторый угол α_0 и вводятся следующие обозначения:

$$\varphi_l=\alpha_0+\frac{\pi}{2};\quad \varphi_r=\alpha_0-\frac{\pi}{2}.$$

Далее рассчитывается некоторое начальное (i-е) приближение $\varphi'=\frac{\varphi_l+\varphi_r}{2}$.

При помощи формулы, полученной из задачи 1, высчитывается $\alpha(\varphi')$.

• Если $\alpha(\varphi') = \alpha_0$, то $\varphi(\alpha_0) = \varphi'$, т. е. ответ найден и алгоритм завершается.

• Если $\alpha(\varphi') > \alpha_0$, то φ_l и φ_r переобозначаются следующим образом:

$$\varphi_l = \varphi' \quad \text{и} \quad \varphi_r = \varphi_r.$$

• Если $\alpha(\varphi') < \alpha_0$, то φ_l и φ_r переобозначаются следующим образом:

$$\varphi_l = \varphi_l \quad \text{и} \quad \varphi_r = \varphi'.$$

Снова рассчитывается φ' и алгоритм продолжается.

Алгоритм также может завершиться, если на каком-то шаге разность двух последовательных приближений будет удовлетворительно малой (меньше некоторого наперед заданного значения).

4. Алгоритм нахождения угла наклона прямой соединяющей начало координат с точкой на границе тела, имеющей заданную внешнюю нормаль, с помощью радиальной функции. (Аналогичен алгоритму из задачи 3.)

5. Формула, выражающая радиальную функцию через опорную:

$$\rho(\alpha) = \frac{h(\varphi(\alpha))}{\cos(\varphi(\alpha) - \alpha)}.$$

6. Формула, выражающая опорную функцию через радиальную:

$$h(\varphi) = \rho(\alpha(\varphi)) \cos(\varphi - \alpha(\varphi)).$$

Литература

1. *Santaló L. A.* Integral Geometry and Geometric Probability.—Cambridge Univ. Press, 2004.
2. *Averkov G., Bianchi G.* Confirmation of Matheron's conjecture on the covariogram of a planar convex body // J. European Math. Soc.—2009.—Vol. 11, № 6.—P. 1187.
3. *Bianchi G.* The covariogram determines three-dimensional convex polytopes // Adv. Math.—2009.—Vol. 220, № 6.—P. 1771–1808.
4. *Huang Y., Yang D., Zhang G.* Minkowski problems for geometric measures // Bull. Amer. Math. Soc.—2025.—Vol. 62, № 3.—P. 359–425.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ БАЛАНСА ВЛИЯНИЯ В КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЕ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ СОСТАВА АГЕНТОВ

Д. С. Безгин

(Южный федеральный университет; Ростов-на-Дону, Россия)

В теории игр, игра голосования является частным случаем кооперативной игры. Задача кооперативной игры — распределение между агентами характеристической функции, т. е. дохода и влияния [1, с. 65]. Игра голосования определяется формулой (1):

$$v(K) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i \in K} q_i \geqslant Q, \\ 0, \end{cases} \tag{1}$$

где q_i — число голосов, которые имеет агент, K — выигрывающая коалиция агентов, Q — минимально необходимое количество голосов.

Для определения вектора Шепли используются формулы (2), (3) [1, с.77]:

$$\Phi_i(v) = \sum_{Ki} \gamma_n(k)\big[v(K) - v(K\backslash\{i\})\big], \quad iN, \tag{2}$$

$$\gamma_n(k) = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}, \quad k = |K|,\ n = |N|, \tag{3}$$

где N — множество игроков, K — число членов минимальной выигрывающей коалиции.

Изменение количества участников голосования требует, вслед за этим, внесения изменений в правила голосования, либо изменения влияния (количества голосов) основных участников процесса голосования до его проведения.

Рассмотрим процесс голосования в Совете Безопасности ООН с точки зрения кооперативной игры. Игру голосования можно записать в виде $(39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, где 39 — минимально необходимое для принятия решения количество голосов, 7 — количество голосов у постоянных членов Совета Безопасности, 1 — количество голосов у непостоянных членов СБ ООН. Таким образом, постоянные члены СБ ООН обладают правом вето, т. е. без их согласия невозможно набрать минимально необходимое для принятия решения количество голосов.

Аналитически определено [2, с. 69], что C-ядром игры являются постоянные члены Совета Безопасности (Россия, Китай, США, Великобритания, Франция). Распределение вектора Шепли имеет вид:

$\Phi_i^H(v) = 0,00186$ для непостоянного агента,

$\Phi_i^n(v) = 0,199628$ для постоянного агента.

При изменении количества постоянных членов СБ ООН кооперативная игра может принять вид $(39; 7, 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. При данных условиях определено, что C-ядро игры отсутствует, постоянные члены СБ ООН теряют право вето [2, с. 69]. Распределение вектора Шепли имеет вид:

$\Phi_i^H(v) = 0,00082$ для непостоянного агента,

$\Phi_i^n(v) = 0,199836$ для постоянного агента.

При изменении количества непостоянных членов СБ ООН игра может принять вид $(39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. В таком случае C-ядро сохраняется, распределение вектора Шепли принимает вид:

$\Phi_i^H(v) = 0,0012$ для непостоянного агента,

$\Phi_i^n(v) = 0,197426$ для постоянного агента.

Таким образом, изменение состава постоянных агентов принципиально влияет на процесс голосования в Совете Безопасности ООН. Изменение количества участников голосования требует, вслед за этим, внесения изменений в правила голосования, либо изменения влияния (количества голосов) основных участников процесса голосования до его проведения [2, с. 70].

В 2025 году сенаторы внесли законопроект о выходе США из ООН (Сенаторы внесли законопроект о выходе США из ООН // РБК URL: `https://www.rbc.ru/politics/21/02/2025/67b82a0b9a79473867f37940` (дата обращения: 20.07.2025)).

В связи с этим процесс голосования в Совете Безопасности приобретает вид $(39; 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ и требует пересмотра правил по причине отсутствия C-ядра и невозможности получения минимально необходимого количества голосов.

Предложение 1. *Для восстановления баланса влияния и сохранения права вето у постоянных членов Совета Безопасности и восстановления возможности набора минимально необходимого количества голосов, было предложено изменить вид игры на* $(39; 7, 7, 7, 7, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$. *Определено, что в указанной кооперативной игре C-ядро состоит из оставшихся членов СБ ООН (Россия, Китай, Великобритания, Франция) с сохранением их права вето. Голоса непостоянных членов распределены следующим образом:* 1 *голос у участников первого года участия в Совете Безопасности,* 2 *голоса у участника второго года участия. Данное распределение голосов позволяет сохранять баланс влияния и не требует дальнейшего изменения состава участников Совета Безопасности ООН.*

Литература

1. *Угольницкий Г. А.* Лекции по теории игр: учебное пособие.—Ростов н/Д.; Таганрог: Изд-во Южного федерального ун-та, 2023.—339 с.
2. *Безгин Д. С.* Зависимость правил голосования от состава коалиций на основе кооперативно-игровой формализации принятия решений // Информационные технологии, системный анализ и управление (ИТСАУ-2024): сб. тр. XXII Всерос. науч. конф. молодых ученых, аспирантов и студентов (Таганрог, 5–7 декабря 2024 г.): в 2-х т. / Южный федеральный университет.—Ростов н/Д.; Таганрог: ДиректСайнс, 2024.—С. 68–70.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Р. З. Березгова

(Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН;
Нальчик, Россия)

Изучение процессов теплопередачи играет ключевую роль в развитии науки и технологий. В настоящее время теоретическое исследование теплопередачи в значительной степени опирается на численное моделирование с применением компьютеров. При высоких температурах линейное изменение теплоемкости и линейное расширение твердого тела в физике твердого тела объясняются именно ангармонизмом колебаний атомов среды. Целью настоящей работы является исследование первой начально-краевой задачи для одного из типичных нелинейных уравнений теплопроводности, учитывающего ангармонические поправки.

В работе выведено уравнение математической модели распространения тепла в кристаллическом твердом теле с учетом ангармонизма колебаний атомов.

Вывод уравнения. Рассмотрим процесс распространения тепла в кристаллическом твердом теле с учетом ангармонизма колебаний атомов. Количество тепла, проходящее через сечение ΔS за время Δt, равно

$$k\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial z}\,\Delta S\Delta t,$$

где $u(x,t)$ — температура тела, k — коэффициент теплопроводности, x — координата, t — время. Количество тепла через некоторый малый интервал расстояний Δt становится равным

$$k\,\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial z}\,\Delta S\Delta t.$$

Следовательно, количество тепла в слое толщиной Δx есть

$$k\,\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial z}\,\Delta S\Delta t - k\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial z}\,\Delta S\Delta t \approx k\,\frac{\partial^2 u(x+\Delta x,t)}{\partial x^2}\,\Delta V\Delta t, \qquad (1)$$

где $\Delta V = \Delta S\Delta t$ — объем нагретого слоя.

Далее, в удовлетворительном приближении необходимо учесть ангармонизм колебаний атомов. Здесь имеет место линейная зависимость удельной изобарной теплоемкости от температуры [1, 2]:

$$C_p = C_0(1+\beta u), \qquad (2)$$

где C_0 и β — положительные константы. С учетом (2) теплота в рассматриваемом слое равна

$$\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\Delta V\Delta t = \rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^u C_p(u')\,du'\right]\Delta V\Delta t = \rho C_0(1+\beta u)\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\Delta V\Delta t, \qquad (3)$$

где ρ — плотность вещества. Приравнивая (1) и (3), находим

$$(1+\beta u)\,\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{4}$$

где $\alpha = k/(\rho C_0)$ — коэффициент температуропроводности.

Уравнение (4) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа. В настоящей работе проводится исследование влияния ангармонизма колебаний атомов среды на основе численного решения первой начально-краевой задачи для уравнения (4). Численно реализовано решение первой начально-краевой задачи для данного уравнения.

В области $\Omega = (0, l) \times (0, T)$ рассматривается уравнение

$$(1+\beta u)u_t - \alpha u_{xx} = 0. \tag{5}$$

Для уравнения (5) исследована первая начально-краевая задача

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{6}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \tag{7}$$

Представлены ее примеры решения при следующих условиях:

$$u_0(x) = \exp\left(-\frac{2(x-x_0)^2}{R}\right), \quad u(0) = u(1) = 0, \tag{8}$$

где $x_0 = 0,5$ — положение точки с максимальной температурой, $R = 0,02$ — эффективный радиус, на котором температура уменьшается в $7,4$ раза. Отметим, что условия, аналогичные (8), возникают при описании лазерного нагрева, прекращающего свое действие при $t = 0$, когда фокальное пятно радиусом R имеет гауссовские распределение по интенсивности.

В целях моделирования была разработана программа на языке программирования C++. Выполненные вычислительные эксперименты показывают, что учет ангармонизма колебаний атомов твердого тела приводит к замедлению процесса остывания. С физической точки зрения это означает, что теплота дополнительно запасается в образце за счет высокочастотных колебательных мод [2]. Это в свою очередь приводит к увеличению изобарной теплоемкости в соответствии с формулой (2). Вычислительные эксперименты в рамках новой математической модели показывают, что ангармонизм колебаний атомов существенно сказывается на кинетике процесса переноса тепла в твердом теле и его остывании.

1. *Брандт Н. Б., Чудинов С. М.* Электроны и фононы в металлах.—М.: Изд-во МГУ, 1990.—335 с.
2. *Рехвиашвили С. Ш.* Теплоемкость твердых тел фрактальной структуры с учетом ангармонизма колебаний атомов // Журн. тех. физ.—2008.—Т. 78, № 12.—С. 54–58.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОГЛОЩЕНИЕМ И НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Д. А. Булыно

(Белорусский государственный университет; Минск, Беларусь)

Рассматривается начально-краевая задача для системы полулинейных параболических уравнений с поглощением и нелинейными нелокальными граничными условиями:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + v^p - au^r, \ v_t = \Delta v + u^q - bv^s, & x \in \Omega, \ t > 0, \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \displaystyle\int\limits_\Omega \phi(x,y,t) u^m(y,t)\, dy, & x \in \partial\Omega, \ t > 0, \\ \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial \nu} = \displaystyle\int\limits_\Omega \psi(x,y,t) v^n(y,t)\, dy, & x \in \partial\Omega, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \ v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где a, b, p, q, r, s, m, n — положительные постоянные, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$, ν — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Относительно данных задачи (1) предполагается следующее:

$$\phi(x,y,t) \in C\big(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0,+\infty)\big), \quad \phi(x,y,t) \geqslant 0;$$

$$\psi(x,y,t) \in C\big(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0,+\infty)\big), \quad \psi(x,y,t) \geqslant 0;$$

$$u_0(x) \in C^1\big(\overline{\Omega}\big), \quad v_0(x) \in C^1\big(\overline{\Omega}\big), \quad u_0(x) \geqslant 0, \quad v_0(x) \geqslant 0 \text{ в } \Omega;$$

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int\limits_\Omega \phi(x,y,0) u_0^m(y)\, dy, \quad \frac{\partial v_0(x)}{\partial \nu} = \int\limits_\Omega \psi(x,y,0) v_0^n(y)\, dy \ \text{ на } \partial\Omega.$$

Пусть $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$, $\Gamma_T = S_T \cup \overline{\Omega} \times \{0\}$, где $T > 0$.

Определение 1. Пара неотрицательных функций $(u(x,t), v(x,t))$ называется нижним решением задачи (1) в Q_T, если $u, v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ и

$$\begin{cases} u_t \leqslant \Delta u + v^p - au^r, \ v_t \leqslant \Delta v + u^q - bv^s, & (x,t) \in Q_T, \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} \leqslant \displaystyle\int\limits_\Omega \phi(x,y,t) u^m(y,t)\, dy, & (x,t) \in S_T, \\ \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial \nu} \leqslant \displaystyle\int\limits_\Omega \psi(x,y,t) v^n(y,t)\, dy, & (x,t) \in S_T, \\ u(x,0) \leqslant u_0(x), \ v(x,0) \leqslant v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Пара неотрицательных функций $(u(x,t), v(x,t))$ называется верхним решением задачи (1) в Q_T, если $u, v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ и удовлетворяет (2) с неравенствами противоположного знака. Пара неотрицательных функций $(u(x,t), v(x,t))$ называется решением задачи (1) в Q_T, если $(u(x,t), v(x,t))$ как нижним решением, так и верхним решением задачи (1) в Q_T.

Определение 2. Решение $(u_{\max}(x,t), v_{\max}(x,t))$ задачи (1) в Q_T называется максимальным, если для любого другого решения $(u(x,t), v(x,t))$ задачи (1) в Q_T выполняются неравенства $u(x,t) \leqslant u_{\max}(x,t), v(x,t) \leqslant v_{\max}(x,t)$ для $(x,t) \in Q_T$.

Исследованию начально-краевых задач для параболических уравнений и систем с нелокальными граничными условиями посвящено много работ. В частности, задача (1) при a = b = 0 рассматривалась в [1]. Начально-краевая задача (1) при a = b = 0 и нелокальных граничных условиях Дирихле изучалась в [2].

Доказано локальное существование решений задачи (1).

Теорема 1. *При малых значениях T задача* (1) *имеет максимальное решение в Q_T.*

Установлен принцип сравнения решений для задачи (1).

Теорема 2. *Пусть $(\overline{u}(x,t), \overline{v}(x,t))$ и $(\underline{u}(x,t), \underline{v}(x,t))$ — верхнее и нижнее решения задачи* (1) *в Q_T соответственно. Предположим, что $\underline{u}(x,t) > 0$ или $\overline{u}(x,t) > 0$ в $Q_T \cup \Gamma_T$ и $\underline{v}(x,t) > 0$ или $\overline{v}(x,t) > 0$ в $Q_T \cup \Gamma_T$, если $\min(p,q,m,n) < 1$. Тогда $\overline{u}(x,t) \geqslant \underline{u}(x,t)$ и $\overline{v}(x,t) \geqslant \underline{v}(x,t)$ в $Q_T \cup \Gamma_T$.*

Найдены условия, при выполнении которых решения задачи (1) являются положительными функциями.

Лемма 1. *Пусть (u,v) — решение задачи* (1) *в Q_T. Если $\min(r,s) \geqslant 1$ и $u_0(x) \not\equiv 0$ или $v_0(x) \not\equiv 0$ в Ω, то $u(x,t) > 0$ и $v(x,t) > 0$ в $Q_T \cup S_T$. Если $u_0(x) > 0$ и $v_0(x) > 0$ в $\overline{\Omega}$ и либо $p < r < 1$, $q < s < 1$, либо $\max(r,s) \geqslant 1$, то $u(x,t) > 0$ и $v(x,t) > 0$ в $Q_T \cup \Gamma_T$.*

С помощью теоремы 2 и леммы 1 доказывается, что при определенных условиях решение задачи (1) единственно в Q_T.

Теорема 3. *Пусть (u,v) — решение задачи* (1) *в Q_T. Предположим, что выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $u(x,t) > 0$ *и* $v(x,t) > 0$ *в* $Q_T \cup \Gamma_T$;

2) $\min(p,q,m,n) \geqslant 1$;

3) $\min(p,q,m,n) < 1$, $u_0(x) > 0$ *и* $v_0(x) > 0$ *в* $\overline{\Omega}$ *и либо* $p < r < 1$, $q < s < 1$, *либо* $\max(r,s) \geqslant 1$.

Тогда решение задачи (1) *единственно в Q_T.*

Показано, что при определенных условиях задача (1) может иметь неединственное решение в Q_T.

Теорема 4. *Пусть $u_0(x) = v_0(x) \equiv 0$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $pq < 1$, $r > \lambda p$ *и* $s > q/\lambda$ *при* $\lambda \in [q, 1/p]$;

2) $\min(1,r) > m$ *и* $\phi(x, y_1, t_1) > 0$ *для любого* $x \in \partial\Omega$ *и некоторых* $y_1 \in \partial\Omega$ *и* $t_1 \in [0,T)$;

3) $\min(1,s) > n$ *и* $\psi(x, y_2, t_2) > 0$ *для любого* $x \in \partial\Omega$ *и некоторых* $y_2 \in \partial\Omega$ *и* $t_2 \in [0,T)$.

Тогда задача (1) *имеет неединственное решение в Q_T.*

Доказательства приведенных выше результатов опубликованы в [3].

Найдены условия, при выполнении которых решения задачи (1) разрушаются за конечное время.

Теорема 5. *Если $pq > \max(r,1)\max(s,1)$, то существуют решения задачи* (1), *которые разрушаются за конечное время.*

Литература

1. *Гладков А. Л., Никитин А. И.* О глобальном существовании решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Неймана // Дифференц. уравнения.—2018.—Т. 54, № 1.—С. 88–105.
2. *Гладков А. Л., Никитин А. И.* О существовании глобальных решений системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравнения.—2016.—Т. 52, № 4.—С. 490–505.
3. *Bulyno D. A., Gladkov A. L., Nikitin A. I.* Initial boundary value problem for a system of semilinear parabolic equations with absorption and nonlinear nonlocal boundary conditions // Vladikavkaz Math. J.—2025.—Vol. 27, № 2.—P. 5–18.

О ФУНКЦИЯХ С НУЛЕВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО СЕМЕЙСТВУ ИЗ РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА И КВАДРАТА[1]

И. С. Власенко
(Донецкий государственный университет; Донецк, Россия),
В. В. Волчков
(Донецкий государственный университет; Донецк, Россия)

Введение и постановка задачи. Пусть в действительном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$ заданы открытое множество D и компактное множество A. Обозначим через $M(n)$ группу движений $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Mot}(A, D) = \{\lambda \in M(n) : \lambda A \subset D\}$. Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в D, если для локально суммируемой функции $f : D \to \mathbb{C}$, из условия $\int_{\lambda A} f(x)dx = 0$ для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(A, D)$ следует, что $f = 0$ почти всюду в D. Совокупность всех множеств Помпейю в D обозначим через $P(D)$. Классическая проблема Помпейю заключается в описании $P(\mathbb{R}^n)$. Она была сформулирована румынским математиком Помпейю в прошлом веке и достаточно хорошо изучена (см. обзор [1] с обширной библиографией), хотя и не решена полностью. В [2] было показано, что если $A \in P(\mathbb{R}^n)$, то A является множеством Помпейю в шаре $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ радиуса $R \geqslant 2r^*(A)$, где $r^*(A) = \inf\{R > 0 : \mathrm{Mot}(A, B_R) \neq \varnothing\}$. В связи с этим в [2] поставлена

Проблема 1. *Для данного компакта $A \subset \mathbb{R}^n$ найти значение*

$$R_A = \inf\{R > 0 : A \in P(B_R)\}.$$

Рассмотрим теперь некоторый фиксированный набор (семейство) компактных множеств A_j, $j = 1, \ldots, m$. Если для комплекснозначной локально суммируемой в шаре B_R функции f из выполнения условия (1) для всех $A = A_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ и $\lambda \in \mathrm{Mot}(A_j, B_R)$ следует $f = 0$ п. в. в B_R, будем говорить, что $\{A_j\}_{j=1}^m$ является семейством Помпейю в шаре B_R и обозначать $\{A_j\} \in P(B_R)$.

Аналогично проблеме 1 возникает (см., например, [3])

Проблема 2. *Для данного семейства $\{A_j\}_{j=1}^m$ компактных множеств $A_j \subset \mathbb{R}^n$ найти величину*

$$R_{\{A_j\}} = \inf\{R > 0 : \{A_j\} \in P(B_R)\}.$$

В [1–4] содержится достаточно полное описание множеств, для которых решены указанные проблемы или получены оценки искомых величин. В настоящей работе проблема 2 решена для семейства, состоящего из равнобедренного треугольника и квадрата в $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим равнобедренный треугольник $T \subset \mathbb{R}^2$ с боковыми сторонами единичной длины и углом между ними $\pi/6$:

$$T = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \leqslant x \leqslant \cos(\pi/12),\, y \leqslant x \tan(\pi/12)\big\}$$

[1]Исследование проводилось по теме государственного задания № 124012400352-6.

и квадрат со стороной единичной длины:

$$K_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant 1/2,\, y \leqslant 1/2\big\}.$$

Для компактного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и числа $\mu > 0$ определим множество $\mu A = \{x \in \mathbb{R}^n : x/\mu \in A\}$. Из определения следует, что для любых таких μ и A имеет место равенство $R(\mu A) = \mu R(A)$.

Поскольку ранее было получено $R(T) = 6/4$ и $R(K_1) = 5/2$, рассмотрим квадрат $K = \frac{30}{10} K_1$. Тогда $R(T) = R(K) = 6/4$. Основной результат работы представляет

Теорема 1. *Имеет место равенство* $R_{\{T,K\}} = 3/\sqrt{3}$.

Для доказательства теоремы 1 были изучены размещения рассматриваемых множеств внутри круга, найдены экстремальные расстояния от центра круга до вершин и сторон множеств. Методами, традиционно применяемыми для решения подобных задач, был получен основной результат.

Решение локального варианта проблемы Помпейю имеет применения в различных областях математики. Рассмотрим применение в комплексном анализе.

Следующий результат является теоремой типа Мореры.

Теорема 2. *Пусть* $f \in C(B_R)$ *и выполнено условие*

$$\int\limits_{\partial(\lambda T)} f(z)\, dz = 0 \quad \textit{при всех} \quad \lambda \in \mathrm{Mot}(T, B_R). \tag{$*$}$$

Тогда верны следующие утверждения:

1) *если* $R > R(T)$, *то* f *голоморфна в* B_R;

2) *если* $3\sqrt{3} < R < R(T)$, *то существуют неголоморфные, бесконечно дифференцируемые функции в* B_R *с условием* $(*)$.

Выводы. В работе в явном виде получено значение величины $R_{\{T,K\}} = 3/\sqrt{3} \approx 0,577$. Общие соображения давали оценку $R_{\{T,K\}} \leqslant 6/4 \approx 0.612$. Таким образом, получено существенное уточнение искомой величины.

Литература

1. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.—454 p.
2. *Волчков В. В., Волчков Вит. В.* Элементы нетрадиционной интегральной геометрии // Вестн. Донец. национ. ун-та.—2021.—№ 2.—С. 9–52.
3. *Машаров П. А.* Радиус Помпейю для семейства из сектора и полукруга // Вестн. Донец. национ. ун-та.—2022.—№ 2.—С. 77–88.
4. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group.—London: Springer, 2009.—671 p.
5. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces.—Donetsk: Donetsk National Univ., 2009.—573 p.

О p-ВЫПУКЛОСТИ И q-ВОГНУТОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА — КАНТОРОВИЧА НАД КОЛЬЦОМ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

Г. Б. Закирова

(Ташкентский государственный транспортный университет;
Ташкент, Узбекистан)

Пусть B — произвольная полная булева алгебра и $L^0(B) := C_\infty(Q(B))$ — алгебра всех непрерывных функций $x : Q(B) \to [-\infty, +\infty]$, определенных на стоуновском компакте $Q(B)$, отвечающем булевой алгебре B и принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах из $Q(B)$.

Пусть $L^0(\Omega) = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ — кольцо всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций, заданных на измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) с σ-конечной числовой мерой μ, $B(\Omega)$ — полная булева алгебра всех идемпотентов из $L^0(\Omega)$. Пусть m — строго положительная $L^0(\Omega)$-значная мера на B, обладающая свойством Магарам, т. е. для любых $e \in B$, $f \in L^0(\Omega)$, $0 \leqslant f \leqslant m(e)$, существует такое $q \in B$, $q \leqslant e$, что $m(q) = f$ (такие меры называют мерами Магарам). В этом случае [1] существует единственный инъективный вполне аддитивный булев гомоморфизм $\varphi : B(\Omega) \to B$ такой, что $\nabla(m) = \varphi(B(\Omega))$ есть правильная булева подалгебра в B, и $m(\varphi(q)e) = qm(e)$ для всех $q \in B(\Omega)$, $e \in B$. Кроме того, алгебра $L^0(\Omega)$ отождествляется с подалгеброй $L^0(\nabla(m)) = C_\infty(Q(\nabla(m)))$ в алгебре $L^0(B)$ и является правильной векторной подрешеткой в $L^0(B)$. При этом $L^0(B)$ является $L^0(\nabla(m))$-модулем.

Пусть E — ненулевой $L^0(\nabla(m))$-подмодуль в $L^0(B)$, и $\|\cdot\|_E$ есть $L^0(\Omega)$-значная норма на E, наделяющая E структурой решеточно нормированного пространства над $L^0(\Omega)$. Пусть $0 < p, q < \infty$. РНП E называется *p-выпуклой* (соответственно *q-вогнутой*), если существует постоянное число M такое, что для любой конечной последовательности $\{x_k\}_{k=1}^n \subseteq E$ имеют место неравенства

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \right\|_E \leqslant M \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_E^p \right)^{1/p}, \tag{1}$$

соответственно,

$$\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_E^q \right)^{1/q} \leqslant M \left\| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q \right)^{1/q} \right\|_E. \tag{2}$$

Наименьшее постоянное число, удовлетворяющее (1) (соответственно (2)), называется *константой p-выпуклости (соответственно q-вогнутости) E* и обозначается через $M^{(p)}(E)$ (соответственно, $M_{(q)}(E)$). Заметим, что РНП E над $L^0(\Omega)$ является 1-выпуклой с константой выпуклости равной 1. Если $E = L^p(B, m)$, $1 \leqslant p < \infty$ (определение см. в [2]), тогда для любой конечной последовательности $\{x_k\}_{k=1}^n \subseteq L^p(B, m)$ имеем

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \right\|_{p,m} = \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_{p,m} \right)^{1/p}.$$

Следовательно, $L^p(B,m)$ является p-выпуклой и p-вогнутой и, кроме того,

$$M^{(p)}(L^p(B,m)) = M_{(p)}(L^p(B,m)) = 1.$$

Для $1 \leqslant p < \infty$ рассмотрим множество

$$E^{(p)} = \big\{x \in L^0(B) : |x|^p \in E\big\},$$

и положим

$$\|x\|_{E^{(p)}} = \Big\||x|^p\Big\|_E^{1/p}, \quad x \in E^{(p)}.$$

$(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ является РНП над $L^0(\Omega)$, и оно называется *p-конвексификацией* РНП $(E, \|\cdot\|_E)$.

Теорема 1 [3]. *Если $(E, \|\cdot\|_E)$ является пространством Банаха — Канторовича над $L^0(\Omega)$, то его p-конвексификация $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ также является пространством Банаха — Канторовича над $L^0(\Omega)$.*

$L^0(\Omega)$-значная норма в решеточно нормированной решетке $(E, \|\cdot\|_E)$ над $L^0(\Omega)$ называется *порядково непрерывной*, если $\|x_n\|_E \downarrow \mathbf{0}$ для каждой последовательности $\{x_n\} \subset E$ такой, что $x_n \downarrow \mathbf{0}$.

Говорят, что решеточно нормированная решетка $(E, \|\cdot\|_E)$ над $L^0(\Omega)$ имеет *свойство Фату*, если для каждой возрастающей последовательности $\{x_n\}_{n\in N}$ в E_+, удовлетворяющей условию $\|x_n\|_E < \alpha$ для всех $n \in N$, где $\alpha \in L^0(\Omega)_+$, существует такой элемент $x \in E_+$, что $x_n \uparrow x$ в E и

$$\sup_{n\in N} \|x_n\|_E = \|x\|_E.$$

Предложение 1. *Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ — решеточно нормированное пространство над $L^0(\Omega)$ и $p \geqslant 1$.*

(i) Если $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет порядково непрерывную норму, тогда $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ также имеет порядково непрерывную норму.

(ii) Если $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет свойсво Фату, тогда $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ также имеет свойство Фату.

Два элемента x и y из $L^0(B)_+$ называются m-равноизмеримыми, если $m\{x > h\} = m\{y > h\}$ для любого $h \in L^0(\Omega)_{++}$, где $\{x > h\} \in B$ есть характеристическая функция замыкания открытого множества $\{s \in Q(B) : x(s) > h(s)\}$ и

$$L^0(\Omega)_{++} := \Big\{\alpha \in L^0(\Omega)_+ : s(\alpha) = \sup_{n\geqslant 1}\big\{|\alpha| > n^{-1}\big\} = \mathbf{1}\Big\}.$$

Пусть $(E, \|\cdot\|_E) \subset L^0(B)$ — решетка Банаха — Канторовича над $L^0(\Omega)$ со свойством идеальности. Говорят, что E есть симметричное пространство Банаха — Канторовича над $L^0(\Omega)$, если из m-равноизмеримости элементов x и y, где $0 \leqslant x \in L^0(B)$, $0 \leqslant y \in E$, следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Основными примерами симметричных пространств Банаха — Канторовича являются пространства $(L^p(B,m), \|\cdot\|_{p,m})$, $1 \leqslant p < \infty$ [4].

Теорема 2. *Если $(E, \|\cdot\|_E)$ является симметричным пространством Банаха — Канторовича над $L^0(\Omega)$, то его p-конвексификация $(E^{(p)}, \|\cdot\|_{E^{(p)}})$ также является симметричным пространством Банаха — Канторовича над $L^0(\Omega)$.*

Литература

1. *Закиров Б. С., Чилин В. И.* Разложимые меры со значениями в порядково полных векторных решетках // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, № 4.—С. 31–38.
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
3. *Zakirova G. B.* On p-convexification of the Banach–Kantorovich lattice // e-Journal of Analysis and Applied Mathematics.—2024.—P. 21–32.
4. *Chilin V. I., Zakirova G. B.* Symmetric spaces of Banach–Kantorovich // Al-Farabi Kazakh National University Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science.—2025.—Vol. 126, № 2.—P. 80–90.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

М. С. Ившин

(Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН;
Нальчик, Россия)

В данной работе рассматривается уравнение диффузии

$$u_y - u_{xx} = f(x, y) \tag{1}$$

в области $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, 0 < y < T\}$.

Для уравнения (1) различные задачи граничного и оптимального управления исследовались в работах [1–3].

Определение 1. Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega)$ и удовлетворяющую (1) в Ω.

Определение 2. Обозначим через W_T функции

$$\varphi(x) = \left\{\varphi(x) : \varphi(x) \in C(\mathbb{R}),\ |\varphi(x)| < e^{Cx^2}\right\},$$

где $C < 1/8T$.

Для уравнения диффузии решение задачи единственно в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$|u(x, y)| < e^{x^2},$$
$$|f(x, y)| < Ce^{x^2},$$
$$|f(x', y) - f(x, y)| \leqslant M|x' - x|^{\lambda}.$$

Если $\tau \in W_T$, то это гарантирует существование и единственность регулярного решения уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющего условию

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Задача 1. Для заданных множества $V \subset W_T$ и функции $h(y) \in L_2[0, T]$, найти такое $\tau \in V$, при котором величина

$$\int_0^T \left[u(x_0, y) - h(y)\right]^2 dy \tag{3}$$

принимает минимальное значение, где $u(x, y)$ решение задачи (1), (2).

В данной работе мы рассматриваем случай, если класс V совпадает с классом полиномов, т. е. когда $V = P_n$, где

$$P_n = \left\{\sum_{k=0}^{n} p_k x^k,\ p_k \in \mathbb{R}\right\}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $h(y) \in L_2[0, T]$ и $V = P_n$. Тогда решение задачи в классе V существует и определяется единственным образом, с точностью до полинома по нечетным степеням.*

Литература

1. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами.—М.: Наука.—1965.—476 с.
2. *Бутковский А. Г.* Метод моментов в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами // Автомат. и телемех.—1963.—Т. 24, № 9.—С. 1217–1225.
3. *Тагиев Р. К., Габибов В. М.* Об одной задаче оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием // Вестн. Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2016.—Т. 20, № 1.—С. 54–64.

РЕАЛИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В ОБЛАСТЯХ РЕЙНХАРТА[1]

И. А. Казачанский

(Южный федеральный университет; Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича; Ростов-на-Дону, Россия)

В докладе идет речь о реализациях пространств функций многих комплексных переменных, голоморфных в полной области Рейнхарта, в виде пространств (мульти)последовательностей их тейлоровских коэффициентов.

Далее Ω — ограниченная область в $\mathbb{C}^N$, $H(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций. Символ $\mathrm{H}^\infty(\Omega)$ обозначает пространство Фреше голоморфных в Ω функций, бесконечно дифференцируемых вплоть до границы Ω:

$$\mathrm{H}^\infty(\Omega) := \mathrm{H}(\Omega) \cap C^\infty\big(\overline{\Omega}\big).$$

Пространство $\mathrm{H}^{-\infty}(\Omega)$ голоморфных в Ω функций полиномиального роста вблизи границы Ω определяется следующим образом:

$$\mathrm{H}^{-n}(\Omega) := \Big\{ f \in \mathrm{H}(\Omega) \,\Big|\, \sup_{z\in\Omega} |f(z)|\,(\rho_\Omega(z))^n < +\infty \Big\}, \quad \mathrm{H}^{-\infty}(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{H}^{-n}(\Omega),$$

где $\rho_\Omega(z) := \inf_{t\in\partial\Omega} |z-t| = \inf_{t\in\mathbb{C}^N\setminus\Omega} |z-t|$ — расстояние от точки $z \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω; $|z| := \big(\sum_{k=1}^N |z_k|^2\big)^{1/2}$. Оно наделяется естественной топологией индуктивного предела последовательности банаховых пространств.

Далее считаем, что Ω является полной областью Рейнхарта с центром в точке 0, т. е. областью такой, что для любого $z \in \Omega$ множество $\{t \in \mathbb{C}^N : |t_j| \leqslant |z_j|, 1 \leqslant j \leqslant N\}$ содержится в Ω.

Пусть $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Будем использовать числа $d_k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0^N$, введенные Л. А. Айзенбергом и Б. С. Митягиным [1]:

$$d_k(\Omega) := \sup_{z\in\Omega} \big|z^k\big| = \sup_{z\in\Omega} \prod_{j=1}^N |z_j|^{k_j}, \quad k \in {\mathbb{N}_0}^N.$$

Характеристики подобного рода широко используются, например, в теории роста целых функций многих комплексных переменных.

Определим пространства числовых последовательностей

$$\Lambda^n := \Big\{ c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^N} : \sum_{|k|=0}^{\infty} |c_k|\, d_k(\Omega)\,(|k|+1)^n < +\infty \Big\}, \quad \Lambda^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda^n;$$

$$\Lambda^{-n} := \Big\{ c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^N} : \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{|c_k|\, d_k(\Omega)}{(|k|+1)^n} < +\infty \Big\}, \quad \Lambda^{-\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda^{-n}.$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00062, https://rscf.ru/project/25-21-00062/.

В Λ^∞ и $\Lambda^{-\infty}$ вводятся топологии, соответственно, пространства Фреше и счетного индуктивного предела банаховых пространств.

Ниже $\mathscr{R}\Omega$ — диаграмма Рейнхарта области Ω [2, 3]; $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$; $\partial(\mathscr{R}\Omega)$ — граница $\mathscr{R}\Omega$ в $\mathbb{R}^N_+$, топология которого индуцирована из $\mathbb{R}^N$.

Определение. Будем говорить, что множество $\mathscr{R}\Omega$ является ε-звездным относительно точки 0, где $\varepsilon > 0$, если для любого $x \in \mathbb{R}^N_+$ такого, что $|x| < \varepsilon$, и всех $w \in \partial(\mathscr{R}\Omega)$, $\beta \in [0, 1)$, точка $\beta w + (1 - \beta)x$ принадлежит $\mathscr{R}\Omega$.

Теорема. *Пусть Ω — ограниченная полная область Рейнхарта с центром в точке* 0.

(*i*) *Отображение*

$$\mathrm{H}^\infty(\Omega) \ni f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^N} a_k z^k \longmapsto (a_k)_{k \in \mathbb{N}_0^N}$$

является топологическим изоморфизмом $\mathrm{H}^\infty(\Omega)$ *на* Λ^∞.

(*ii*) *Если $\mathscr{R}\Omega$ ε-звездна относительно точки 0 для некоторого $\varepsilon > 0$, то отображение*

$$\mathrm{H}^{-\infty}(\Omega) \ni f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^N} a_k z^k \longmapsto (a_k)_{k \in \mathbb{N}_0^N}$$

является топологическим изоморфизмом $\mathrm{H}^{-\infty}(\Omega)$ *на* $\Lambda^{-\infty}$.

Литература

1. *Айзенберг Л. А., Митягин Б. С.* Пространства функций, аналитических в кратно-круговых областях // Сиб. мат. журн.—1960.—Т. 1, № 2.—С. 153–170.
2. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ.—М.: Наука, 1969.
3. *Jarnicki M., Pflug P.* First Steps in Several Complex Variables: Reihardt Domains.—Kraków–Oldenburg, 2008.

О ДЕФОРМИРОВАНИИ ПОРОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

И. С. Козаченко

(Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича; Ростов-на-Дону, Россия)

Вопрос о деформировании пористых структур важен во многих отраслях, таких как механика композитных материалов, инженерия градиентных материалов и биомеханика глаза. В настоящей работе была рассмотрена круглая пороупругая изотропная пластина заданного радиуса с порами насыщенными жидкостью и с упругой связью на краю. Полагалось, что данная пластина является пластиной Тимошенко, и была решена задача о ее деформации при неоднородности по радиальной координате коэффициентов Ламе.

На основе теории Био и с помощью вариационного принципа Лагранжа для пластин был получен функционал потенциальной энергии, задача о минимизации которого решена с помощью метода Ритца.

Схожий подход к решению задачи о деформации неоднородных пластин можно встретить в статье [1], в которой была рассмотрена задача о колебаниях круглой упругой изотропной пластины заданного радиуса с переменной жесткостью и упругой связью на краю. Исследование проведено в рамках модели Кирхгофа, в результате были найдены резонансные частоты, построено приближенное решение для прогиба и решен ряд обратных задач. Продолжением данной работы является статья [2], в ней рассмотрена деформация аналогичной пластины, помимо построения решения для прогибов, оценено влияние упругой заделки на деформацию пластины и решена задача о реконструкции трех параметров, в том числе характеризующих упругую связь. В [3] изучается схожая пластина, но удовлетворяющая гипотезам Тимошенко, а в [4] решена задача для многослойной пластины на основе метода ломанных нормалей.

В настоящей работе было построено решение для прогиба и угла поворота пористой круглой пороупругой пластины с упругой связью на краю и оценено влияние пористости. Как приложение была рассмотрена деформация решетчатой пластинки глаза, для которой сравнивались результаты при параметрах, соответствующих здоровому глазу, и с различными стадиями первичной открытоугольной глаукомы (ПОУГ). Результаты показали слабое влияние пористости на прогиб и угол поворота деформированной пластины. В приложении был замечен рост прогиба и угла поворота при увеличении стадии ПОУГ, а также смещение точки перегиба прогиба.

Литература

1. *Ватульян А. О., Потетюнко О. А.* О колебаниях неоднородной пластины с упруго опертым краем // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2016.—№ 2.—С. 35–42.
2. *Ватульян А. О., Потетюнко О. А.* К оценке деформативности решетчатой пластинки глаза // Российский журн. биомех.—2017.—Т. 21, № 1.—С. 8–17.
3. *Potetyunko O. A., Bogachev I. V., Vatulyan A. O* Modeling of an inhomogeneous round Timoshenko plate with an elastically supported boundary // Recent Approaches in Theory of Plates and Plate-Like Structures.—2021.—Chapter 21.—P. 277–286.
4. *Ватульян А. О., Козаченко И. С.* О деформировании решетчатой пластинки глаза // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2024.—№ 2.—С. 21–31.

КОСИММЕТРИЧНОСТЬ ЗАДАЧИ КОНВЕКЦИИ ДАРСИ — БУССИНЕСКА ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА

П. В. Коханов

(Южный федеральный университет; Ростов-на-Дону, Россия)

Рассматривается задача конвекции несжимаемой теплопроводной жидкости, насыщающей бесконечно длинный горизонтальный цилиндр, заполненный пористой средой и подогреваемый снизу. На основе модели Дарси — Буссинеска и уравнений в цилиндрических координатах разработана схема со смещенными сетками и специальными аппроксимациями в окрестности осевой линии. Аналитически доказана косимметричность задачи фильтрационной конвекции. Для дискретизации уравнений конвекции в естественных переменных используется интегро-интерполяционный метод. Осуществлен дискретный переход к уравнениям относительно функции тока и девиации температуры. Для определения критических значений числа Рэлея получены формулы на основе нулей бесселевых функций. Представлены результаты вычисления порога возникновения конвекции, рассчитаны ответвляющиеся от механического равновесия конвективные режимы.

Для задачи фильтрационной конвекции при подогреве снизу система безразмерных уравнений в переменных функция тока ψ и девиация температуры θ для цилиндрических координат имеет вид:

$$S_1(\theta,\psi) \equiv \Delta\psi - \lambda G(\theta) = 0, \quad \Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,,$$

$$S_2(\theta,\psi) \equiv \frac{\partial\theta}{\partial t} = \Delta\theta + G(\psi) - J(\theta,\psi), \quad J(\theta,\psi) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\,\frac{\partial\theta}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\,\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right),$$

$$G = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\,(\sin\varphi) - \frac{\partial}{\partial r}\,(r\cos\varphi)\right].$$

Здесь r и ϕ — радиальная и азимутальная координаты, t — время, Δ — оператор Лапласа, λ — число Рэлея.

Краевые условия задаются на оси и границе цилиндра:

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\theta}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \quad \psi\,\big|_{r=R} = 0, \quad \theta\,\big|_{r=R} = 0.$$

Система дополняется начальными условиями, которые ставятся только для температуры: $\theta(r,\phi,0) = \theta^0(r,\phi)$.

Данная задача косимметрична в смысле определения В. И. Юдовича [1]. Косимметрией является вектор $L = \{\theta, -\psi\}$, который ортогонален вектору правой части этой системы и не обращается в нуль для стационарных решений с ненулевой функцией тока. Действительно, для области $M = [0,R]\times[0,2\pi]$ получается:

$$\int\limits_M \left[S_2(\theta,\psi)\psi - S_1(\theta,\psi)\theta\right] r\,dr d\varphi = 0.$$

Это свойство задачи позволяет аналитически найти критическое значение числа Рэлея, при превышении которого возникают конвективные движения.

В случае плоской задачи конвекции Дарси критические значения числа Рэлея обладают кратностью не менее двух для произвольной односвязной области [1]. В таблице 1 представлены первые четыре критических значения λ_{cr} для горизонтального бесконечно длинного цилиндра с сечением $R = 1$, найденные аналитически и рассчитанные на сетке из 12×24 узлов [2]. Расчет на основе нулей бесселевых функций позволяет обеспечить необходимую кратность, а вычисления на основе метода сеток дают только двукратность критических чисел Рэлея [3].

Таблица 1

$N_r \times N_\varphi$	λ_{cr}^1	λ_{cr}^2	λ_{cr}^3	λ_{cr}^4
Аналитика	23.13	58.68	58.68	105.5
12×24	23.57	62.57	63.14	120.5

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору В. Г. Цибулину за помощь и внимание к работе.

Литература

1. *Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки.—1991.—Т. 49, № 5.—С. 142–148.
2. *Коханов П. В., Цибулин В. Г.* Моделирование фильтрационной конвекции в полярных координатах на неравномерной сетке // Мат. моделирование.—2025.—Т. 37, № 3.—С. 127–143.
3. *Kokhanov P. V., Tsybulin V. G* Modeling of convective flows in a porous circular enclosure // Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Advanced Structured Materials.—2025.—Vol. 223.—P. 337–348.

ПРОСТРАНСТВО МАКСИМАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ АЛГЕБР ОПЕРАТОРОВ УМНОЖЕНИЯ НА РАЗРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ[1]

М. М. Логиновская
(Белорусский государственный университет; Минск, Беларусь),
И. Л. Люксембург
(Институт математики НАН Беларуси; Минск, Беларусь)

В работе рассматривается банахова алгебра $JD[0;1]$, состоящая из функций на отрезке, допускающих разрывы разве лишь первого рода, и ее подалгебра $T[0;1] \subset JD[0;1]$, состоящая из функций, непрерывных в 0 и непрерывных слева в остальных точках. Отмечено, что подалгебра $T[0;1] \subset JD[0;1]$ изометрически изоморфна алгебре операторов умножения на функции из $JD[0;1]$ в пространстве $L_p[0;1]$. Построено множество $\mathfrak{M}(T[0;1])$ максимальных идеалов алгебры $T[0;1] \subset JD[0;1]$ и описана гельфандовская топология на нем. Показано, что $\mathfrak{M}(T[0;1])$ гомеоморфно пространству, известному под названием «две стрелки», введенному в работах П. С. Александрова и П. С. Урысона и использующемся как универсальный контрпример в общей топологии. В работе показано как богатые топологические свойства «двух стрелок» связаны со структурой алгебры $T[0;1]$.

Лемма 1. *Если μ — непрерывная мера с носителем $[0;1]$, то алгебра $\mathscr{A}$ операторов умножения на функции из $JD[0;1]$, действующих в $L_p([0;1],\mu)$, изометрически изоморфна подалгебре $T[0;1] \subset JD[0;1]$, состоящей из функций, непрерывных в 0 и непрерывных слева в остальных точках.*

Известно (см. [1, § 4]), что есть взаимнооднозначное соответствие между линейными мультипликативными функционалами банаховой алгебры и ее максимальными идеалами. Так, ядро каждого линейного мультипликативного функционала есть максимальный идеал, а фактор-отображение по всякому максимальному идеалу является линейным мультипликативным функционалом. Для всякого $\tau \in [0;1]$ определим отображения $\varphi_\tau^+(f) = f^+(\tau)$ и $\varphi_\tau^-(f) = f^-(\tau)$. Из стандартных свойств предела следует, что они являются линейными мультипликативными функционалами. Ядрами описанных функционалов являются максимальные идеалы M_τ^+ и M_τ^-, состоящие из функций, предел которых справа и слева соответственно в точке τ равны нулю.

Теорема 1. *Максимальными идеалами $T[0;1]$ являются M_τ^- или M_τ^+.*

Теорема 2. *Множества $\{M_\tau^+\}_{\tau\in[x;y)} \cup \{M_\tau^-\}_{\tau\in(x;y]}$, где $x, y \in [0;1]$ и $x < y$ образуют базу топологии $\mathfrak{M}(T[0;1])$.*

Теорема 3. *Пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M}(T[0;1])$ алгебры $T[0;1]$ гомеоморфно пространству «две стрелки» (см. [2, с. 99]).*

Пространство «две стрелки» является сепарабельным вполне несвязным совершенно нормальным наследственно паракомпактным компактом континуального веса. Перечисленные свойства находят отражение в свойствах алгебры $T[0;1]$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, проект № Ф25МП-010, и частичной поддержке НАН Беларуси в рамках государственной программы «Конвергенция-2025» (задание 1.3.05).

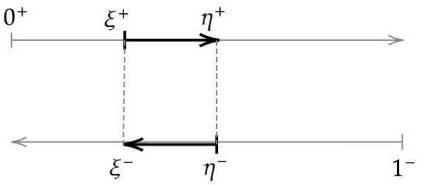


Рис. 1. Пространство $\mathfrak{M}(T[0;1])$ с выделенным элементом из базы, являющимся окрестностью точек ξ^+ и η^-.

Теорема 4. *Плотность $d(T[0;1])$ алгебры $T[0;1]$ равна континууму. Любое семейство попарно ортогональных (таких, что $f \cdot g \equiv 0$) ненулевых функций из $T[0;1]$ не более чем счетно. Всякий чистый идеал в алгебре $T[0;1]$ является проективным и порожденнным не более чем счетным множеством идемпотентов. Замкнутость чистого идеала эквивалентно тому, что он является главным, порожденным одним идемпотентом.*

Доказательство теоремы опирается на факты, изложенные в [3] и [4].

Литература

1. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца.—М.: Физматгиз, 1960.—315 с.
2. *Александров П. С., Урысон П. С.* Мемуар о компактных топологических пространствах.—М.: Наука, 1971.—144 с.
3. *Вечтомов Е. М.* Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом.—1991.—Т. 29.—С. 119–191.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология.—М.: Мир, 1986.—752 с.
5. *Ленг С.* Алгебра.—М.: Мир, 2005.—564 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗИСТИВНОГО НАГРЕВА ОТ СОЛНЕЧНОЙ ПАНЕЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ SIMINTECH

А. К. Макоев

(Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН;
Нальчик, Россия)

В данной работе представлена математическая модель нагрева нихромовой проволоки, питаемой от солнечной панели. Для реализации модели использовалась отечественная программа динамического моделирования SimInTech [1].

На основе электрофизических параметров солнечной панели задается вольтамперная характеристика с использованием экспоненциальной модели. Для анализа тепловых процессов применялась динамическая модель нагрева проволоки, учитывающая конвективный и радиационный теплообмен с окружающей средой.

Математическая модель имеет вид

$$C\left(\frac{dT}{dt}\right) = P_1 - P_2, \tag{1}$$

$$P_1 = \left(\frac{V^2}{R}\right), \tag{2}$$

$$V = \frac{NV_tR}{R + NR_s}\ln\left[\frac{R(I_p - I_s) - V}{RI_s}\right], \tag{3}$$

$$R = R_0\big[1 + \alpha(T - T_0)\big], \tag{4}$$

$$P_2 = hA(T - T_0) + \epsilon\sigma A\big(T^4 - T_0^4\big), \tag{5}$$

где T — температура, являющаяся непрерывной функцией времени, P_1 — подводимая электрическая мощность, P_2 — рассеиваемая мощность.

К математической модели нагрева добавляется терморегулятор, который обеспечивает работу системы в заданном диапазоне температур и описывается функцией вида

$$\widetilde{P}_1(\tau) = \begin{cases} P_1(\tau), & T(\tau) \leqslant T_{\min}, \\ 0, & T(\tau) \geqslant T_{\max}. \end{cases} \tag{6}$$

Решение уравнений (1)–(6) не может быть получено в явном аналитическом виде.

Программа SimInTech продемонстрировала свою эффективность при решении задачи, включающей нелинейное дифференциальное уравнение с алгебраической петлей.

Литература

1. *Скворцов Л. М.* SimInTech: Численное решение обыкновенных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений.—М.: ДМК-Пресс, 2022.

ГОМОГЕНИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ХИЩНИК–ЖЕРТВА С КОРОТКОВОЛНОВЫМ ВНЕШНИМ СИГНАЛОМ И ТАКСИСОМ ТИПА ПАТЛАКА — КЕЛЛЕРА — СЕГЕЛЯ

К. Малал

(Южный федеральный университет; Ростов-на-Дону, Россия)

Данное сообщение основано на результатах, полученных в соавторстве с А. Б. Моргулисом [1].

Мы рассматриваем многомерную систему уравнений типа реакция диффузия с нелинейной кросс-диффузией, которая записывается как

$$p_t + \operatorname{div} \mathbf{q} = pf(p,s), \tag{1}$$

$$\mathbf{q} = p\nabla(\chi s + \varkappa h - \mu \ln p), \tag{2}$$

$$s_t = \delta \Delta s + sg(p,s). \tag{3}$$

Здесь t — время, $x \in \mathbb{R}^n$ — пространственная координата, $p = p(x,t)$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x,t)$ — плотность и вектор потока массы хищников, а функция $s = s(x,t)$ обозначает плотность вида — жертвы. Жирный шрифт обозначает векторные поля. Функции f и g определяют кинетику системы. Мы предполагаем, что они известны и аналитичны в конусе $\{p > 0, s > 0\}$. Внутри него уравнение (2) определяет поток массы хищников согласно правилу Патлака — Келлера — Сегела (далее — ПКС), причем сигналами служат плотность жертвы s, а также внешний сигнал с заранее заданной интенсивностью, обозначенной как h. Коэффициенты χ и $\varkappa$ измеряют чувствительность хищников к плотности жертвы и внешнему сигналу соответственно, а коэффициенты μ и δ — коэффициенты диффузии для хищников и жертв соответственно. Все они предполагаются постоянными. Таким образом, уравнения (1), (2) и (3) составляют многомерную модель хищник–жертва с таксисом и с внешним сигналом. Мы рассматриваем эту систему как безразмерную, см. обсуждение масштабирования в статье [2].

В препринте [1] приведено асимптотическое интегрирование системы (1)–(3) при стремлении коэффициента δ к нулю и при общем коротковолновом внешнем сигнале вида

$$h = h\left(x,\, t,\, \frac{x}{\delta},\, \frac{t}{\delta}\right),$$

где функция $h = h(x,t,\xi,\tau)$ является C^∞-гладкой на $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ и периодической по координатам $\xi_1, \dots, \xi_n, \tau$ с периодами $\ell_1, \dots, \ell_n, \ell_0$, причем среднее значение функции h по коробке периодов равно нулю. Разработан итерационный процесс построения любого числа членов степенного разложения вида

$$(p,s) = \sum_{k=0\dots\infty} (p_k, s_k)(x,t,\xi,\eta)\delta^k + \dots, \quad \delta \to +0,\ \xi = \frac{x}{\delta},\ \tau = \frac{t}{\delta}, \tag{4}$$

где коэффициенты p_k, s_k периодические по быстрым координатам ξ, τ. Таким образом, обобщен результат, изложенный в статье [2], где рассматривалась одномерная задача, при этом предполагалось, что $h = h(x, t, \eta)$, где

$$\eta = \frac{x - ct}{\delta}, \quad c = \text{const}, \quad \text{и} \quad p = p(x, t, \eta), \quad s = s(x, t, \eta).$$

Следовательно, асимптотика, указанная в препринте [1], дает новый результат даже в одномерном случае. Например, можно рассмотреть сигнал в виде стоячей волны

$$h = h_1(\tau)h_2(\xi)A(x, t).$$

Рассмотрим подробно простой пример такого рода.

Главный член асимптотики имеет вид

$$s_0 = \bar{s}(x, t), \quad p_0 = \bar{p}(x, t)\, e_*(\xi, \tau), \quad e_* = \frac{e}{\langle e \rangle^\xi}, \quad e(\xi, \tau) = \mathrm{e}^{\frac{\varkappa h}{\mu}}, \tag{5}$$

где косые скобки обозначают среднее за период, а верхний индекс над правой скобкой — переменную, по которой происходит усреднение (ξ или τ). В частности, $\bar{p} = \langle\langle p_0 \rangle^\xi \rangle^\tau$. При этом неизвестные функции $\bar{p}$, $\bar{s}$ составляют решение так называемой *главной медленной системы*. В одномерном случае она имеет вид (1)–(3), где $\delta = 0$, $h = 0$, и транспортные коэффициенты μ, χ и кинетические члены f, g, изменены так:

$$f(\bar{p}, \bar{s}) = \left\langle \langle e_* f(e_* \bar{p}, \bar{s}) \rangle^\xi \right\rangle^\tau, \quad g(\bar{p}, \bar{s}) = \left\langle \langle e_* g(e_* \bar{p}, \bar{s}) \rangle^\xi \right\rangle^\tau,$$

$$\bar{\mu} = \sigma\mu, \quad \bar{\chi} = \sigma\chi, \quad \sigma = \left\langle \left(\langle e \rangle^\xi \left\langle e^{-1} \right\rangle^\xi \right)^{-1} \right\rangle^\tau.$$

Можно показать, независимо от формы сигнала, что $\sigma < 1$, т. е. внешний сигнал всегда подавляет транспорт, как диффузионный, так и таксический.

Сравним транспортные коэффициенты в случаях бегущей волны

$$h_{\text{trv}} = a_{\text{trv}} \sin(\xi - c\tau)$$

и стоячей волны

$$h_{\text{stn}} = a_{\text{stn}} \frac{\sin(\xi - c\tau) + \sin(\xi + c\tau)}{2} = a_{\text{stn}} \sin(c\tau)\cos(\xi),$$

считая для простоты, что $\varkappa = \mu$. Здесь и в дальнейшем изложении величины, относящиеся к случаям бегущей и стоячей волн помечаются нижними индексами trv и stn. Имеем

$$\sigma_{\text{trv}} = I_0^{-2}(a_{\text{trv}}), \quad \sigma_{\text{stn}} = I_0^{-2}(a_{\text{stn}} \sin(c\tau)),$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка первого рода. В случае бегущей волны имеем экспоненциальное уменьшение транспортных коэффициентов с ростом амплитуды. Расчеты сигма для стоячей волны позволяют предположить, что транспортные коэффициенты и в этом случае убывают с ростом амплитуды, но степенным образом.

Вывод: как видно из рис. 1, при больших амплитудах сигнал в форме бегущей волны значительно (экспоненциально) сильнее подавляет таксический и диффузионный массоперенос, чем сигнал в форме стоячей волны.

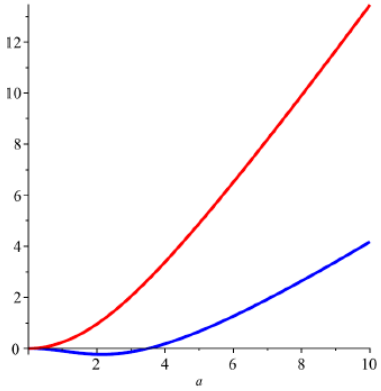


Рис. 1. По оси ординат — значения $\ln\left(\frac{\mu_{\text{stn}}}{\mu_{\text{trv}}}\right) = \ln\left(\frac{\chi_{\text{stn}}}{\chi_{\text{trv}}}\right)$.
Красный график — $\frac{a_{\text{stn}}}{a_{\text{trv}}} = 1$, синий — $\frac{a_{\text{stn}}}{a_{\text{trv}}} = 2$.

Литература

1. *Morgulis A. B., Malal K.* Prey-taxis vs a shortwave external signal in multiple dimensions // Preprint.—2025.—arXiv: 2508.12432.—URL: http://arxiv.org/abs/2508.12432.
2. *Morgulis A. B., Malal K.* Prey-taxis vs an external signal: short-wave asymptotic and stability analysis // Mathematics.—2025.—Vol. 13, 261. DOI: 10.3390/math13020261.

О СУЩЕСТВЕННОЙ И ω-СУЩЕСТВЕННОЙ НОРМАХ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА НА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Р. С. Маннаников

(Южный федеральный университет; Ростов-на-Дону, Россия)

В настоящей работе приведены новые формулы для вычисления существенной и ω-существенной норм в предельной форме через последовательности проекторов. В перспективе это даст инструменты для контроля погрешности в аппроксимациях, таких как оценка резольвенты оператора, напрямую зависящей от его существенной нормы. Главным результатом является теорема о равенстве существенной и ω-существенной норм для ω-непрерывных операторов в квазибанаховых пространствах. Приложением является обобщение известных результатов о нормах оператора весовой композиции для всей шкалы $(0 < p < \infty)$.

Обозначим через ω пространство всех последовательностей $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, наделенное топологией покоординатной сходимости. Пусть $\mathrm{w} = (\mathrm{w}(k))_{k=1}^{\infty}$ — фиксированная последовательность положительных чисел. При каждом $p \in (0, \infty)$ она задает весовое пространство последовательностей комплексных чисел

$$l^p(\mathrm{w}) := \left\{ x = (x_k) \in \omega : \ \|x\|_{p,\mathrm{w}}^p := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \, \mathrm{w}^p(k) < \infty \right\}.$$

Пусть X и Y — квазибанаховы пространства, непрерывно вложенные в ω. Через $\mathscr{L}(X, Y)$ обозначается пространство всех линейных непрерывных операторов из X в Y. Будем говорить, что линейный оператор $L : X \to Y$ является ω-непрерывным, если из того, что $(x^{(m)})_{m=1}^{\infty}$ — ограниченная в X последовательность такая, что $x^{(m)} \to x$ в (X, ω), следует, что $Lx^{(m)} \to Lx$ в (Y, ω). Через $\mathscr{L}_\omega(X, Y)$ обозначим множество всех ω-непрерывных операторов из X в Y.

Обозначим через $\mathscr{K}(X, Y)$ множество всех компактных операторов из X в Y, а через $\mathscr{K}_\omega(X, Y)$ его подмножество, состоящее из ω-непрерывных операторов. Как и выше, в случае $X = Y$ используем символы $\mathscr{K}(X) := \mathscr{K}(X, X)$ и $\mathscr{K}_\omega(X) := \mathscr{K}_\omega(X, X)$. Существенная и ω-существенная квазинормы оператора $L \in \mathscr{L}(X, Y)$ задаются соотношениями

$$\|L\|_e = \inf_{K \in \mathscr{K}(X,Y)} \|L - K\| \quad \text{и} \quad \|L\|_{\omega e} = \inf_{K \in \mathscr{K}_\omega(X,Y)} \|L - K\|,$$

соответственно.

Далее приведем основные результаты.

Предложение 1. *Для любых линейных операторов $K \in \mathscr{K}_\omega(X, Y)$, $L \in \mathscr{L}_\omega(X, Y)$ справедливо равенство $\|L + K\|_{\omega e} = \|L\|_{\omega e}$.*

Предложение 2. *Пусть $p \in (0, +\infty)$. Определим для любого $n \in \mathbb{N}$ последовательность линейных операторов $\{P_n\}$ следующим образом: для любого $x \in l^p(\mathrm{w})$*

$$(P_n x)_i = \begin{cases} x_i, & i \leqslant n, \\ 0, & i > n, \end{cases}$$

и последовательность линейных операторов $\{R_n\}$ *такую, что* $R_n + P_n = I$, *где* I *— тождественное отображение из* $l^p(\mathrm{w})$ *в* $l^p(\mathrm{w})$. *Тогда справедливы следующие утверждения для любого* $n \in \mathbb{N}$:

(i) $P_n, R_n \in \mathscr{L}(l^p(\mathrm{w}))$;

(ii) $P_n, R_n \in \mathscr{L}_\omega(l^p(\mathrm{w}))$;

(iii) $P_n \in \mathscr{K}_\omega(l^p(\mathrm{w}))$;

(iv) $\|R_n\| = 1$.

Приведем теорему о формуле существенной нормы линейного непрерывного оператора в предельной форме.

Теорема 1. *Для любого линейного оператора* $L \in \mathscr{L}(l^p(\mathrm{w}))$ *при* $p \in (0, \infty)$ *верна формула*

$$\|L\|_e = \lim \|R_n L\|. \tag{1}$$

Для $L \in \mathscr{L}_\omega(l^p(\mathrm{w}))$, $p \in (0, \infty)$ *имеем*

$$\|L\|_{\omega e} = \lim \|R_n L\|. \tag{2}$$

Теорема 2. *Для любого линейного оператора* $L \in \mathscr{L}_\omega(l^p(\mathrm{w}))$, $p \in (0, \infty)$ *верно равенство*

$$\|L\|_e = \|L\|_{we}. \tag{3}$$

Литература

1. *Thomas M. P.* Closed ideals of $l^1(\omega_n)$ when $\{\omega_n\}$ is star shaped // Pacific J. Math.—1983.—Vol. 105, № 1.—P. 237–255.
2. *Якубович Д. В.* Инвариантные подпространства операторов взвешенного сдвига // Зап. науч. сем. ЛОМИ.—1985.—Т. 141.—С. 100–143.
3. *Albanese A. A., Bonet J., Ricker W. J.* Spectrum and compactness of the Cesaro operator on weighted l_p spaces // J. Aust. Math. Soc.—2015.—Vol. 99, № 3.—P. 287–314.
4. *Albanese A. A., Bonet J., Werner J. R.* The Cesaro operator in weighted l_1 spaces // Math. Nachr.—2018.—Vol. 291, № 7.—P. 1015–1048.
5. *Luan D. M., Khoi L. H.* Weighted composition operators on weighted sequence spaces // Contemp. Math.—2015.—Vol. 645, № 7.—P. 199–215.
6. *Абанин А. В., Маннаников Р. С.* Операторы весовой композиции на квазибанаховых весовых пространствах последовательностей // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, № 4.—С. 5–19.

СОБСТВЕННЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРТЛИ

И. А. Романенко

(Владимирский государственный университет; Владимир, Россия)

При цифровой обработке сигналов анализируют матричный вид преобразования $y = F \cdot x$, где x и y представлены в виде вектор-столбцов.

Матрицей дискретного преобразования Хартли (ДПХарт) первого рода порядка N [1] называется матрица

$$X_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_1 & C_2 & \dots & C_{N-1} \\ 1 & C_2 & C_4 & \dots & C_{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{N-1} & C_{2(N-1)} & \dots & C_{(N-1)^2} \end{pmatrix},$$

где

$$C_n = C_n(N) = \operatorname{cas} \frac{2\pi n}{N} = \cos \frac{2\pi n}{N} + \sin \frac{2\pi n}{N}.$$

Матрица ДПХарт служит действительным аналогом матриц дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и Уолша (ДПУ). Причем, матрица X_4 совпадает с матрицей ДПУ в нумерации Пэли. Поэтому отдельные свойства матрицы дискретного преобразования Хартли повторяют свойства ДПФ и ДПУ.

1) Матрица X_N симметрична по определению.

2) Коэффициенты $C_n(N)$ периодические с периодом N.

3) Квадрат матрицы ДПХарт равен произведению порядка N на единичную матрицу E.

Матрица $J = \frac{1}{\sqrt{N}} X_N$ задает оператор инволюции: $J^2 = E$.

Кроме того, можно построить матрицу дискретного преобразования Хартли второго рода порядка N (обозначаем Y_N), элементы которой определяются по формуле

$$s_{ij} = \operatorname{sac} \frac{2\pi ij}{N} = \cos \frac{2\pi ij}{N} - \sin \frac{2\pi ij}{N}.$$

Свойства матрицы дискретного преобразования Хартли второго рода повторяют приведенные свойства матрицы дискретного преобразования Хартли первого рода.

Утверждение 1. *Взаимосвязь матриц дискретного преобразования Хартли первого и второго рода:*

$$X_N \cdot Y_N = Y_N \cdot X_N = P,$$

$$Y_N = X_N \cdot P = P \cdot X_N,$$

$$X_N = Y_N \cdot P = P \cdot Y_N,$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— перестановочная матрица с единицами на диагонали ниже и параллельно побочной (*еще единица в начале*).

В [2, с. 36] отмечено, что относительно оператора инволюции J все пространство раскладывается в прямую сумму двух собственных подпространств $X = R_+ \oplus R_-$, отвечающих собственным числам 1 и -1. Ортогональные проекторы на эти подпространства

$$P_+ = \frac{1}{2}(E + J) \quad \text{и} \quad P_- = \frac{1}{2}(E - J). \tag{1}$$

Значит, собственные числа оператора ДПХарт X_N и Y_N есть $\sqrt{N}$ и $-\sqrt{N}$. Доказательство утверждения опирается на симметричность $Q^T = Q$ и идемпонентность $Q^2 = Q$ ортопроекторов на эти подпространства. Найдем размерности собственных подпространств R_+ и R_-.

Теорема 1. *Для матрицы X_N размерности собственных пространств:*
1) *если $N = 2n + 1$, то $\dim R_+ = n + 1$ и $\dim R_- = n$;*
2) *если $N = 4n$, то $\dim R_+ = 2n + 1$ и $\dim R_- = 2n - 1$;*
3) *если $N = 4n + 2$, то $\dim R_+ = \dim R_- = 2n + 1$.*

Доказательство теоремы 1 опирается на значение сумм Гаусса, вывод которых в [3, 4].

Дальнейшим обобщением дискретного преобразования Хартли служит его кронекерова степень $X_N^{\otimes n}$ в качестве новой исследуемой матрицы F. По свойствам кронекеровой степени доказывается: симметричность матрицы — $(X_N^{\otimes n})^T = X_N^{\otimes n}$; и ее ортогональность — $(X_N^{\otimes n})^2 = N^n \cdot E$. Следовательно, после нормировки $J = \frac{1}{N^{n/2}} X_N^{\otimes n}$ матрица становится матрицей инволюции, что влечет наличие двух собственных подпространств и вид (1) операторов проектирования. С использованием сумм Гаусса решим и для кронекеровой степени матрицы ДПХарт задачу поиска размерности собственных подпространств.

Теорема 2. *Для матрицы $X_N^{\otimes n}$ размерности собственных пространств:*
1) $\dim R_+ = \dim R_- + 1$, *если N — нечетное;*
2) $\dim R_+ = \dim R_-$, *если $N = 4k + 2$;*
3) $\dim R_+ = \frac{1}{2}N^n + 2^{n-1}$ *и* $\dim R_- = \frac{1}{2}N^n - 2^{n-1}$, *если $N = 4k$.*

Одномерное дискретное ортогональное преобразование в матричном виде есть переход от столбца x к столбцу y по формуле умножения матриц $y = F \cdot x$. Аналогичное двумерное дискретное преобразование применяется к матрице X размера $N_1 \times N_2$ по следующей формуле умножения матриц: $Y = F_{N_1} \cdot X \cdot F_{N_2}$. Поэтому двумерным дискретным преобразованием Хартли первого рода служит преобразование

$$Y = X_{N_1} \cdot X \cdot X_{N_2},$$

а не записанное в координатной форме в [1, с. 69] по аналогии с двумерным дискретным преобразованием Фурье. Причина несоответствия заключается в том, что функции $\operatorname{cas}\varphi$ не мультипликативны.

Литература

1. *Брейсуэлл Р.* Преобразование Хартли.—М.: Мир, 1990.—175 с.
2. *Беспалов М. С., Скляренко В. А.* Дискретные функции Уолша и их приложения.—Владимир: ВлГУ.—2014.—68 с.
3. *Виноградов И. М.* Суммы Гаусса и приложения их к доказательству закона взаимности квадратичных вычетов // Чебышевский сб.—2021.—Т. 22, № 4.—С. 7—49. DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-4-7-87.
4. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу.—М.: Дрофа.—2004.—640 с.

О ПРОДОЛЖЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМОВ[1]

А. А. Саадулаева

(Южный математический институт ВНЦ РАН; Владикавказ, Россия)

Операторы, действующие между векторными решетками, обладают хорошими свойствами, если их значения находятся в порядково полной векторной решетке. Так, классическая теорема Л. В. Канторовича утверждает, что положительный линейный оператор, действующий из мажорирующего подпространства $G \subset E$ векторной решетки E в порядково полную векторную решетку F допускает продолжение на все E с сохранением линейности и положительности [1, теорема 1.32]. В некоторых случаях возможно ослабить требование порядковой полноты F за счет предъявления к E некоторых дополнительных требований. В настоящей заметке рассматривается такое взаимодействие условий сепарабельности E и σ-интерполяционного свойства F в задаче о продолжении положительных полиномиальных операторов (однородных полиномов). Все необходимые определения из теории векторных решеток представлены в [1, 2]. Введем соответствующие понятия.

Определение 1. Нормированное векторное пространство E называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество $A \subset E$.

Определение 2. Векторная решетка F *обладает σ-интерполяционным свойством* (или *свойством Кантора*), если для любых последовательностей $x_n \uparrow$ (возрастающей), $z_m \downarrow$ (убывающей) таких, что $x_n \leqslant z_m$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, существует $y \in F$ такой, что $x_n \leqslant y \leqslant z_m$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$.

Определение 3. Топологическое векторное пространство E называется *локально телесным*, если E обладает базисом окрестностей нуля, состоящим из телесных множеств. Напомним, что множество $A \subset E$ называется *телесным*, если $|y| \leqslant |x|$ и $x \in A$ влекут $y \in A$.

Определение 4. Топологическая векторная решетка E называется *решеткой Фреше*, если она метризуема и (метрически) полна.

Теперь введем основной объект исследования.

Определение 5. Пусть E и F — векторные решетки. Отображение $P : E \to F$ называется *однородным полиномом степени n* или *n-однородным полиномом* ($n \in \{1, 2, \ldots\}$), если существует полилинейное отображение $\varphi : E^n \to F$, называемое *порождающим*, такое, что

$$P(x) = \varphi\big(\underbrace{x, \ldots, x}_{n \text{ раз}}\big) \quad (x \in E).$$

Среди полилинейных операторов, порождающих данный полином P, существует единственный симметричный оператор φ, называемый *ассоциированным*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-71-10094.

и обозначаемый символом $\check{P}$. Симметричность φ означает, что для любой перестановки σ множества $\{1,\dots,n\}$ выполняется $\varphi(x_1,\dots,x_n)=\varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$ для любых $x_1,\dots x_n\in E$ [3].

Определение 6. Однородный полином $P:E\to F$ называется *ортогонально аддитивным*, если $P(x+y)=P(x)+P(y)$ для любых дизъюнктных $x,y\in E$. Напомним, два элемента $x,y\in E$ называются *дизъюнктными* (и пишут $x\perp y$), если $|x|\wedge|y|=0$.

Определение 7. Однородный полином $P:E\to F$ называется *положительным*, если $\check{P}(x_1,\dots,x_n)\geqslant 0$ для всех $x_1,\dots,x_n\in E_+$.

Теперь можем сформулировать основной результат.

Теорема 1. *Пусть E — сепарабельная решетка Фреше, $G\subset E$ — мажорирующая подрешетка в E и F — локально телесная топологическая векторная решетка с σ-интерполяционным свойством. Тогда любой положительный ортогонально аддитивный n-однородный полином $P_0:G\to F$ допускает продолжение до положительного ортогонально аддитивного n-однородного полинома $P:E\to F$.*

Результат выводится из аналогичной теоремы для линейных операторов [4, теорема 1] с помощью теоремы о линеаризации n-однородных ортогонально аддитивных полиномов [5, теорема 4] и конструкции степени векторной решетки [6, теорема 3.2].

Литература

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—London: Acad. Press Inc., 1985.—29 p.
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—624 с.
3. *Kuczma M.* An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality.—Basel etc.: Birkhäuser, 2009.
4. *Ильина К. Ю., Кусраева З. А.* О продолжении положительных операторов // Сиб. мат. журн.—2020.—Т. 61, № 2.—С. 330–336.
5. *Кусраева З. А.* О представлении ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн.—2011.—Т. 52, № 2.—С. 315–325.
6. *Boulabiar K., Buskes G.* Vector lattice powers: f-algebras and functional calculus // Commun. Algebra.—2006.—Vol. 34, № 4.—P. 1435–1442.

СВОЙСТВО RUC ДЛЯ СИСТЕМЫ ИЗ ХАОСОВ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В L_∞

П. А. Слиняков

(Институт математики НАН Беларуси; Минск, Беларусь)

Пусть $X = \{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность независимых ограниченных симметричных случайных величин (не обязательно одинаково распределенных), заданная на вероятностном пространстве $([0,1],\mu)$, где μ — стандартная мера Лебега. Ограниченность понимается в смысле sup-нормы, т. е. $\|X_k\|_{L_\infty} = C_k > 0$.

Будем также рассматривать независимые копии исходной последовательности $\{X_k^{(l)}\}_{k=1}^{\infty}$, $l = 1,\dots,d$, что означает, что элементы системы СВ X, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, …, $X^{(d)}$ одинаково распределены и независимы в совокупности.

Пусть $d, n \in \mathbb{N}$ такие, что $1 \leqslant d \leqslant n$. Обозначим через $\mathbb{N}_n^d$ множество мультииндексов $J = (j_1,\dots,j_d)$ таких, что $j_k \in [n]$, где $[n] := \{1,2,\dots,n\}$, а через Δ_n^d множество мультииндексов $J = (j_1,\dots,j_d)$ таких, что $1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_d \leqslant n$.

Будем называть систему $\{X_{j_1}^{(1)} X_{j_2}^{(2)} \dots X_{j_d}^{(d)}\}_{(j_1,j_2,\dots,j_d)\in\mathbb{N}^d}$ *однородной мультипликативной случайной системой степени* d, а объединение по таким независимым системам степеней от 1 до d — *смешанной мультипликативной случайной системой степени* d.

Наряду с этой системой, будем рассматривать следующую систему, составленную из элементов самой исходной последовательности СВ X_k, вида $\{X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_d}\}_{(j_1,j_2,\dots,j_d)\in\Delta^d}$, которую назовем *однородным случайным хаосом порядка* d, а объединение по таким независимым системам степеней от 1 до d — *смешанным случайным хаосом порядка* d.

Будем говорить, что последовательность $\{x_k\}$ обладает RUC-свойством (Random Unconditional Convergence), если существуют такие универсальные константы, что для любого n и для любых скаляров $\{a_k\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, выполняется

$$\mathsf{E}_\theta \left\| \sum_{k=1}^{n} \theta_k a_k x_k \right\|_X \asymp \min_{\theta_k=\pm 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} \theta_k a_k x_k \right\|_X,$$

где $\mathsf{P}\{\theta_k = 1\} = \mathsf{P}\{\theta_k = -1\} = 1/2$.

Теорема 1. *Однородный хаос порядка* d, *сформированный последовательностью* $X = (X_k)$ *независимых симметричных ограниченных случайных величин, обладает свойством RUC. Более того, следующие соотношения выполняются с константой, зависящей только от* d:

$$\mathsf{E}_\theta \left\| \sum_{J\in\Delta_n^d} \theta_J a_J X_J \right\|_{L_\infty} \asymp \min_{\theta} \left\| \sum_{J\in\Delta_n^d} \theta_J a_J X_J \right\|_{L_\infty} \asymp \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\substack{J=(j_1,j_2,\dots,j_d)\in\Delta_n^d:\\ \exists\, k\in[d]:\, j_k = j}} \tilde{a}_J^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *Смешанный случайный хаос по последовательности* (X_k) *независимых симметричных ограниченных СВ обладает свойством RUC. Более того, пусть*

$$S(X,\Theta) = \Theta_1 P_1(X) + \Theta_2 P_2(X) + \dots + \Theta_d P_d(X),$$

где

$$\Theta_m P_m := \sum_{J \in \Delta_n^m} \theta_J a_J X_J, \quad X_J = X_{j_1} X_{j_2} \dots X_{j_m}.$$

Тогда верно

$$\mathsf{E}_\Theta \big\| S(X,\Theta) \big\|_{L_\infty} \asymp \min_\Theta \big\| S(X,\Theta) \big\|_{L_\infty} \asymp \sum_{m=1}^{d} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\substack{J = (j_1, j_2, \dots, j_m) \in \Delta_n^m : \\ \exists\, k \in [d] : j_k = j}} \tilde{a}_J^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Используя данные соотношения для норм, можно показать, что однородный хаос (и тем более смешанный) не обладает более сильным свойством безусловной сходимости.

Литература

1. *Lindestrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces I and II.—Heidelberg: Springer Berlin, 1996.
2. *Albiac F., Kalton N. J.* Topics in Banach Space Theory.—New York: Springer, 2006.
3. *Кашин Б. С., Саакян. А. А.* Ортогональные ряды.—М.: Изд-во АФИ, 1999.
4. *Astashkin S. V., Lykov K. V.* Random unconditional convergence of Rademacher chaos in L_∞ and sharp estimates for discrepancy of weighted graphs and hypergraphs // Math. Ann.—2025.
5. *Kwapien S.* Decoupling inequalities for polynomial chaos // Ann. Probab.—1987.—Vol. 15, № 3.—P. 1062–1071.
6. *Billard P., Kwapien S., Pelchynski A., Samuel Ch.* Biorthogonal systems of random unconditional convergence in Banach spaces // Longhorn Notes. Texas Funct. Anal. Seminar.—Texas, Austin: Univ. Texas, 1985–1986.—P. 13–35.

МНОГОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОДНОРОДНЫМИ СТЕПЕНИ $(-n)$ ЯДРАМИ В L_p-ПРОСТРАНСТВАХ С РАДИАЛЬНЫМ ВЕСОМ

Г. А. Тихонова

(Южный федеральный университет; Ростов-на-Дону, Россия)

Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и функция $w\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ измерима. Обозначим через $L_p(\mathbb{R}^n, w)$ пространство (классов) измеримых комплекснозначных функций с нормой

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n,w)} = \|f\|_{p,w} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(|x|)\,dx\right)^{1/p}.$$

Рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где функция $k(x,y)$ измерима и однородна степени $(-n)$, т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x,y) \quad (\forall\, \alpha > 0). \tag{2}$$

Назовем функцию $w_*(t) = \sup_{s>0} \frac{w(ts)}{w(s)}$ растяжением функции $w(t)$.

В работе [1] были получены достаточные условия ограниченности оператора K в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$ при дополнительном предположении инвариантности ядра относительно всех вращений пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и ядро $k(x,y)$ оператора K удовлетворяет условию* (2), *а также условиям:*

$$\kappa_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{\sigma\in\mathbb{S}_{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|k(\sigma,y)\big|\,|y|^{-n/p} \left(w_*\left(\frac{1}{|y|}\right)\right)^{1/p} dy < \infty,$$

$$\kappa_2 = \operatorname*{ess\,sup}_{\sigma\in\mathbb{S}_{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|k(x,\sigma)\big|\,|x|^{-n/p'} \big(w_*(|x|)\big)^{1/p}\,dx < \infty.$$

Тогда оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$, причем справедливо неравенство

$$\|K\varphi\|_{p,w} \leqslant \kappa_1^{1/p'} \kappa_2^{1/p} \|\varphi\|_{p,w}.$$

Установим условия на ядро $k(x,y)$ необходимые для ограниченности оператора K вида (1) в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$, функция $k(x,y)$ однородна степени $(-n)$ и неотрицательна, и оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$. Тогда выполнены условия*

$$\int\limits_{\mathbb{S}_{n-1}} d\sigma \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(\sigma,t)\,|t|^{-n/p} \big(w_*(|t|)\big)^{-1/p}\,dt < \infty,$$

$$\int\limits_{\mathbb{S}_{n-1}} d\sigma \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(t,\sigma)\,|t|^{-n/p'}\left(w_*\left(\frac{1}{|t|}\right)\right)^{-1/p} dt < \infty.$$

Пусть M_a — оператор умножения на функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Оператор M_a ограничен в пространстве $L_{p,w}(\mathbb{R}^n)$, причем $\|M_a\varphi\|_{p,w} \leqslant \|a\|_\infty \|\varphi\|_{p,w}$ для любой $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n, w)$. Поставим вопрос о компактности произведения оператора M_a и оператора K вида (1). При этом будем считать, что ядро $k(x,y)$, помимо условия (2), инвариантно относительно группы вращений $SO(n)$, т. е.

$$k(\omega(x),\omega(y)) = k(x,y) \quad (\forall\, \omega \in SO(n)), \tag{3}$$

и удовлетворяет условию суммируемости

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|k(e_1,y)\big||y|^{-n/p}\left(w_*\left(\frac{1}{|y|}\right)\right)^{1/p} dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|k(x,e_1)\big||x|^{-n/p'}\big(w_*(|x|)\big)^{1/p} dx < \infty. \tag{4}$$

Определение 1. Будем говорить, что функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $B^{\sup}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$, если

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|>N} |a(x)| = \lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{|x|<1/N} |a(x)| = 0.$$

Теорема 3. *Пусть ядро $k(x,y)$ оператора K удовлетворяет условиям* (2), (3), (4), *а также для любого $s_0 > 0$ и $h \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство*

$$\lim_{h\to 0} \sup_{s\in(0,s_0)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|k(e_1,t+h)\left(\frac{w(s|t|)}{w(s|t+h|)}\right)^{1/p} - k(e_1,t)\right| |t|^{-n/p}\left(w_*\left(\frac{1}{|t|}\right)\right)^{1/p} dt = 0.$$

Тогда если $a \in B^{\sup}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$, то оператор M_aK компактен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.

Следствие 1. *Пусть $w(|x|) = |x|^\alpha$ и ядро $k(x,y)$ оператора K удовлетворяет условиям* (2), (3), (4). *Тогда если $a \in B^{\sup}_{0,0}(\mathbb{R}^n)$, то оператор M_aK компактен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, w)$.*

Литература

1. *Умархаджиев С. М.* Интегральные операторы с однородными ядрами в гранд-пространствах Лебега // Мат. заметки.—2017.—Т. 102, № 5.—С. 775–788.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ

М. Р. Томаев

(Южный математический институт ВНЦ РАН; Владикавказ, Россия)

Исследуется двумерная задача определения ядра интегрального оператора свертки, входящего в уравнение акустики с переменными коэффициентами. Функция ядра зависит от пространственной и временной переменной. Прямая задача в области переменных (x, z, t), $x \in \mathbb{R}$, $z > 0$, $t \in \mathbb{R}$ представляет собой начально-краевую задачу для акустического (избыточного) давления с нулевыми начальными данными и граничным условием Неймана специального вида с дельта-источником возбуждения волн:

$$\frac{1}{c^2(z)}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \int\limits_0^t k(x, t-\tau)\frac{\partial u}{\partial x}\,d\tau\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ + \int\limits_0^t k(x, t-\tau)\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,d\tau + \nabla \ln \rho(x, z)\nabla_{x,z} U, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0, \tag{2}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \int\limits_0^t k(x, t-\tau)\,\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{z=+0} = -\delta(t), \tag{3}$$

где

$$\nabla_{x,z} U := \nabla_{x,z} u(x, z, t) + \int\limits_0^t k(x, t-\tau)\nabla_{x,z} u(x, z, \tau)\,d\tau.$$

Здесь $u(x, z, t)$ — акустическое (избыточное) давление, $c(z) > 0$ — скорость распространения акустических волн, $\rho(x, z) > 0$ — плотность среды, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Функция $k(x, t)$, входящая в интеграл свертки, описывает вязкие свойства среды и называется ядром памяти. Функции $c(z)$, $\rho(x, z)$ являются заданными и достаточно гладкими.

Уравнение (1) учитывает поглощение идеально-упругой среды и возникает в геофизике при изучении (идентификации) свойств среды с помощью сейсмических волн. Фактически, при предположении о гладкости система уравнений Больцмана (одна из наиболее распространенных для линейной неупругой среды) в двумерном случае сводится к уравнению (1).

С помощью линеаризации, применяя преобразование Фурье по пространственной переменной, обратная нелинейная задача сводится к эквивалентной системе линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. А именно, предполагаем, что ядро памяти $k(x, t)$ является малой величиной и, вводя формально параметр малости ε, его можно представить в виде:

$$k(x, t) = \varepsilon k_1(x, t). \tag{4}$$

Также полагаем, что

$$\rho(x,z) = \rho_0(z) + \varepsilon\rho_1(x,z). \tag{5}$$

Решение прямой задачи (1)–(3) будем искать в виде ряда по степеням ε:

$$u(x,z,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x,z,t). \tag{6}$$

Подставляя (4)–(6) в (1) и считая, что вклад слагаемых с членами при ε^j, $j = 2,3,\ldots$, пренебрежимо мал, приравниваем члены, стоящие при ε^j, $j = 0,1$. В результате получаем две прямые задачи относительно u_0, u_1. Задача для u_0 изучена в монографии [1].

Обратная задача: найти ядро $k_1(x,t) \in C_t^1([0,\infty);\, L_2(\mathbb{R}))$, $t > 0$, если известна дополнительная информация о решении прямой задачи u_1:

$$u_1(x,z,t)\big|_{z=+0} = g(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$g(x,t)$ — заданная функция.

Будем считать, что

$$\widetilde{k}_1(\nu,t) = F_x[k_1](\nu,t) \in \widetilde{\Lambda}_1(\omega,T)$$

(образ Фурье по переменной x) тогда и только тогда, когда $\widetilde{k}_1(\nu,t) \in C_t^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ и для любого фиксированного $t \in [0,T]$ $\operatorname{supp}\widetilde{k}_1(\nu,t) \subset [-\omega,\omega]$. Соответственно, $k_1(x,t) \in \Lambda_1(\omega,T)$ тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{k}_1(\nu,t) = F_x[k_1](\nu,t) \in \widetilde{\Lambda}_1(\omega,T).$$

В пространстве непрерывных функций доказана теорема однозначной разрешимости и получена оценка устойчивости решения обратной задачи.

Теорема 1. *Пусть $\omega > 0$, $T > 0$ фиксированы. Для существования и единственности решения обратной задачи $k_1(x,t) \in \Lambda(\omega,T)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\widetilde{g}(\nu,t) := F_x[g](\nu,t) \in C_t^2(\mathbb{R}\times[0,T]), \quad \widetilde{g}(\nu,0) = 0$$

и любого фиксированного $t \in [0,T]$ $\operatorname{supp}\widetilde{g}(\nu,t) \subset [-\omega,\omega]$.

Теорема 2. *Пусть $k_1^{(1)}(x,t)$, $k_1^{(2)}(x,t) \in \Lambda(\omega,T)$ — решения обратной задачи, отвечающие информациям $g^{(1)}(x,t)$, $g^{(2)}(x,t)$ соответственно. Тогда при выполнении условий теоремы 1 имеет место оценка устойчивости*

$$\int\limits_R \left\| k_1^{(1)} - k_1^{(2)} \right\|^2_{C[0,T]} dx \leqslant C \int\limits_{-\omega}^{\omega} \left\| \widetilde{g}^{(1)} - \widetilde{g}^{(2)} \right\|^2_{C^2[0,T]} d\nu,$$

где C — некоторая константа, зависящая от величин ω, T и значений функций $c(z)$, $\rho_0(z)$, $\rho_1(\nu,z)$.

Литература

1. *Яхно В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости.—Новосибирск: Наука, 1990.—304 с.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФИ-СТАТИСТИК ДЛЯ НАБЛЮДЕНИЙ РАЗМЕРНОСТИ ТРИ

А. В. Шеряев

(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Москва, Россия)

Рассмотрим классическую задачу математической статистики: пусть вектор $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^\top$ имеет мультиномиальное распределение $M_3(n, \boldsymbol{\pi})$, т. е.

$$\mathbb{P}\big(Y_1 = n_1, Y_2 = n_2, Y_3 = n_3\big) = \begin{cases} n! \prod\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\pi_j^{n_j}}{n_j!}, & n_j = \overline{0,n}, \ \sum\limits_{j=1}^{3} n_j = n, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)^\top, \quad \pi_j > 0, \quad \sum_{j=1}^{3} \pi_j = 1,$$

и считается выполненной нулевая гипотеза $H_0 : \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p}$. Основным объектом исследования в работе является построенное по вышеуказанному распределению семейство *фи-статистик*

$$T_\phi = \frac{2n}{\phi''(1)} \cdot \sum_{j=1}^{3} p_j \phi\left(\frac{Y_j}{np_j}\right),$$

где ϕ — выпуклая функция на $\mathbb{R}_+$ такая, что $\phi(u) \geqslant 0 \ \forall\, u > 0$, $\phi(1) = \phi'(1) = 0$, $\phi''(1) > 0$.

Известно, что при $n \to \infty$ распределение данной статистики сходится к распределению хи-квадрат с двумя степенями свободы, однако при проверке гипотез важно понимать, насколько велика ошибка аппроксимации реального распределения предельным. В данной работе задача состоит в исследовании точности приближения хи-квадрат распределением для $\mathbb{P}(T_\phi(\mathbf{Y}) < c)$, где $c > 0$.

Введем нормированные величины $X_j = (Y_j - np_j)/\sqrt{n}$ и будем исследовать свойства вектора $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$. Компоненты $\mathbf{X}$ сконцентрированы на решетке

$$L = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : \, x_j = \frac{n_j - np_j}{\sqrt{n}}, \, j = 1, 2\right\}, \quad n_j \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда распределение статистики T_ϕ можно записать в виде

$$\mathbb{P}\big(T_\phi(\mathbf{Y}) < c\big) = \mathbb{P}\big(\mathbf{X} \in B^\phi(c)\big),$$

где $B^\phi = \{(x, y) : T_\phi(x, y) < c\}$ и

$$T_\phi(x, y) \, = \, \frac{2n}{\phi''(1)} \left(p_1 \phi\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n} p_1}\right) + p_2 \phi\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n} p_2}\right) + p_3 \phi\left(1 - \frac{x + y}{\sqrt{n} p_3}\right)\right).$$

Можно показать, что множество $B^\phi(c)$ принадлежит классу так называемых обобщенных выпуклых множеств.

Определение 1. Множество $B \subset \mathbb{R}^2$ называется обобщенным выпуклым множеством, если его можно представить в следующем виде:

$$B = \big\{(x,y):\, \lambda_1(y) < x < \theta_1(y),\, y \in B_1\big\} = \big\{(x,y):\, \lambda_2(x) < y < \theta_2(x),\, x \in B_2\big\},$$

где $B_1 \subset \mathbb{R}$, $B_2 \subset \mathbb{R}$ и λ_1, θ_1, λ_2, θ_2 — непрерывные функции, определенные на B_1 и B_2 соответственно.

Следуя результатам Ярнольда [1] и работы [2], получим, что если ϕ четырежды дифференцируема и $\phi^{(4)}(t)$ непрерывна в точке $t = 1$, то

$$\mathbb{P}\big(\mathbf{X} \in B^\phi(c)\big) = J_1^\phi + J_2^\phi + O\big(n^{-1}\big),$$

где

$$J_1^\phi = \mathbb{P}\big(\chi_2^2 < c\big) + O\big(n^{-1}\big), \quad J_2^\phi = \big(N^\phi - nV^\phi\big)\,\frac{e^{-c/2}}{2\pi n}\,\sqrt{p_1p_2p_3} + o(1),$$

N^ϕ — число точек решетки L в множестве $B^\phi(c)$, V^ϕ — площадь множества $B^\phi(c)$. Таким образом, задача свелась к оценке члена J_2^ϕ.

Для члена J_2^ϕ справедлива оценка Ярнольда: $J_2^\phi = O(n^{-1/2})$, однако ее можно улучшить. Рассмотрим важное подсемейство фи-статистик: степенные статистики согласия, получаемые при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ выбором следующей функции:

$$\phi_\lambda(u) = \frac{u^{\lambda+1} - (\lambda+1)(u-1) - 1}{\lambda(\lambda+1)}\,.$$

В работе [3] Асылбеков, Зубов и Ульянов показали, что для $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$ и для любого фиксированного $c > 0$ выполнено

$$\mathbb{P}\big(T_{\phi_\lambda} < c\big) = \mathbb{P}\big(\chi_2^2 < c\big) + O\big(n^{-50/73}(\log n)^{315/146}\big).$$

В настоящей работе доказан аналогичный результат для более широкого класса фи-статистик. При доказательстве использовались результаты из области теории чисел (см. [4]) для оценки разности $N^\phi - nV^\phi$.

Обозначим $\mathbb{R}_{++} := \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. В данной работе доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $\phi \in C^4(\mathbb{R}_{++})$. Тогда $\forall\, c > 0$ справедлива оценка*

$$J_2^\phi = O_{c,\phi,\mathbf{p}}\big(n^{-50/73}(\log n)^{315/146}\big).$$

Как следствие, получена аппроксимация $\mathbb{P}(T_\phi < c)$.

Теорема 2. *Пусть $\phi \in C^4(\mathbb{R}_{++})$. Тогда при фиксированном $c > 0$ справедливо соотношение*

$$\mathbb{P}\big(T_\phi < c\big) = \mathbb{P}\big(\chi_2^2 < c\big) + O_{c,\phi,\mathbf{p}}\big(n^{-50/73}(\log n)^{315/146}\big).$$

Замечание 1. В статье [5] приведена нижняя оценка на порядок $J_2^{\phi_1}$ (где функция $\phi_1(u)$ соответствует классической статистике хи-квадрат Пирсона):

$O(n^{-3/4}\log\log n)$. Результат же в настоящей работе можно записать следующим образом:

$$\mathbb{P}\big(T_\phi < c\big) = \mathbb{P}\big(\chi^2_2 < c\big) + O_{c,\phi,\mathbf{p}}\big(n^{-3/4+\beta}\big), \quad \beta \approx 0,065.$$

Благодарность. Автор выражает благодарность своему научному руководителю, профессору кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, В. В. Ульянову за постановки задач и ценные замечания.

Литература

1. *Yarnold J. K.* Asymptotic approximations for the probability that a sum of lattice random vectors lies in a convex set // Ann. Math. Statist.—1972.—Vol. 43, № 5.—P. 1566—1580.
2. *Taneichi N., Sekiya Y., Suzukawa A.* An asymptotic approximation for the distribution of φ-divergence multinomial goodness-of-fit statistic under local alternatives // J. Japan Statist. Soc.—2001.—Vol. 31, № 2.—P. 207–224.
3. *Asylbekov Zh. A., Zubov V. N., Ulyanov V. V.* On approximating some statistics of goodness-of-fit tests in the case of three-dimensional discrete data // Sib. Math. J.—2011.—Vol. 52, № 4.—P. 571–584.
4. *Huxley M. N.* Exponential sums and lattice points II // Proc. London Math. Soc.—1993.—Vol. 3, № 2.—P. 279–301.
5. *Hardy Gr. H.* On Dirichlet's divisor problem // Proc. London Math. Soc.—1917.—Vol. 2, № 1.—P. 1–25.

Сборник материалов

XX ВЛАДИКАВКАЗСКОЙ МОЛОДЕЖНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

(24–25 июля 2025 г.; онлайн)

Главный редактор:
А. Г. Кусраев

Редакторы:
А. Н. Карапетянц, Р. Ч. Кулаев

Зав. редакцией: *В. В. Кибизова*

Компьютерная верстка: *М. У. Вазагаева*

ЮМИ ВНЦ РАН
362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 53.

ISBN 978-5-904695-51-4