

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ  
НАУЧНЫЙ ЦЕНТР  
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ЮЖНО-РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ И СЕРВИСА  
ВОЛГОДОНСКИЙ ИНСТИТУТ СЕРВИСА

---

---

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ,  
КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Тезисы докладов  
международной научной конференции  
(Волгодонск, Россия, 4–8 июля 2011 г.)

Волгодонск  
2011

ББК 22.16+  
УДК 517 + 519

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-06818-моб\_г.

**Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование:** тезисы докладов международной научной конференции (Волгодонск, 4–8 июля 2011 г.).—Владикавказ: ЮМИ ВЦ РАН и РСО-А, 2011.—183 с.

ISBN 978-5-904695-06-4

© Южный математический институт  
ВЦ РАН и РСО-А, 2011  
© Южный федеральный университет, 2011  
© Волгодонский институт сервиса  
ЮРГУЭС, 2011

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

<b>Абанин А. В.</b> Взаимная двойственность пространств голоморфных функций заданного роста вблизи границы и граничной гладкости и ее приложения .....	11
<b>Arvanitoyeorgos A.</b> Recent progress on homogeneous Einstein metrics on generalized flag manifolds .....	13
<b>Вагабов А. И.</b> Интегральные представления типа Сонина и приложения .....	14
<b>Ватульян А. О.</b> Обратные коэффициентные задачи для операторов с параметром .....	15
<b>Демиденко Г. В.</b> О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом ....	17
<b>Emel'yanov E. Yu.</b> Asymptotically finite dimensional operators on Banach spaces. Recent developments and open problems .....	19
<b>Ильичев В. Г.</b> Техника модельных экспериментов в анализе скрытого взаимодействия различных биоценозов водохранилищ .....	20
<b>Кондаков В. П.</b> Слабые базисы в рефлексивных пространствах .....	21
<b>Кусраев А. Г.</b> О теоремах Штрассена .....	23
<b>Никоноров Ю. Г.</b> Римановы многообразия с однородными геодезическими .....	25

### СЕКЦИЯ I ВЕЩЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ И АНАЛИЗ НА МНОГООБРАЗИЯХ

<b>Берестовский В. Н.</b> Об одной задаче В. А. Топоногова .....	29
<b>Балащенко В. В.</b> Канонические распределения на однородных $k$ -симметрических пространствах .....	31
<b>Вылегжанин Д. В.</b> Обобщенные почти эрмитовы структуры высших рангов на $k$ -симметрических пространствах .....	34

<b>Каплицкий В. М.</b> О символах псевдодифференциальных операторов со слабым вырождением условий регулярности .....	36
<b>Климентов Д. С.</b> Одно неравенство для переходной плотности винеровского процесса на минимальной поверхности .....	38
<b>Курсаева З. А.</b> О крайних продолжениях положительного ортогонально аддитивного полинома .....	39
<b>Магомед-Касумов М. Г.</b> Явление Гиббса для частичных сумм Фурье — Хаара .....	41
<b>Плиев М. А.</b> Узкие операторы в решеточно нормированных пространствах .....	43
<b>Самсонов А. С.</b> Эрмитовы $f$ -структуры на естественно редуцированных $\Phi$ -пространствах порядка $k$ .....	44
<b>Ситник С. М.</b> Применение функций Ламберта в задачах об оценках характеристик роста целых функций .....	46
<b>Султанахмедов М. С.</b> О численном решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода посредством ортогональных полиномов .....	48
<b>Султанов Э. Ш.</b> Некоторые устойчивые методы вычисления полиномов Чебышева, ортогональных на равномерной сетке, и их приложения .....	49
<b>Тасоев Б. Б.</b> Конструкция Кальдерона — Лозановского .....	51
<b>Фетисов В. Г.</b> Нелокальная разрешимость систем нелинейных операторных уравнений, содержащих функциональные параметры .....	53
<b>Филиппенко В. И.</b> Обобщенные спектральные функции квазидифференциального оператора .....	55
<b>Шарапудинов И. И.</b> Классы $W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(M, a, b)$ и комбинированные усложненные квадратурные формулы .....	57
<b>Шах-Эмиров Т. Н.</b> Об аналоге неравенства С. Н. Бернштейна для производной тригонометрического полинома в метрике пространства $L_{2\pi}^{p(x)}$ .....	58
<b>Чебарыков М. С.</b> О некоторых свойствах кривизны Риччи левинвариантных римановых метрик на разрешимых группах Ли .....	59
<b>Чурбанов Ю. Д.</b> Однородные пространства почти произведения .....	61

СЕКЦИЯ II  
КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

<b>Брайчев Г. Г., Шерстюков В. В.</b> О радиусе полноты систем экспонент с вещественными показателями .....	66
<b>Варзиев В. А.</b> О коэффициентах рядов экспонент аналитических функций полиномиального роста .....	68
<b>Исраилов С. В.</b> Установление связи между дифференциальным уравнением бесконечного порядка и бесконечной системой дифференциальных уравнений .....	70
<b>Исраилов С. В., Сагитов А. А., Гацаева Р. С.-А.</b> Об одном методе сведения линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка к бесконечной системе интегрально-алгебраических уравнений .....	73
<b>Иванов П. А.</b> О разрешимости составных операторных уравнений .....	75
<b>Иванова О. А.</b> О правом обратном к оператору свертки на весовых пространствах целых функций, определяемых сильным уточненным порядком .....	76
<b>Кабельков В. А., Кабельков А. Н., Нефедов В. В.</b> Математическая модель высотного сооружения: устойчивость, колебания, оптимальное управление .....	78
<b>Капитонова Е. В., Мелихов С. Н.</b> Проективное описание счетных индуктивных пределов весовых пространств Фреше непрерывных функций .....	79
<b>Климентов С. Б.</b> Краевая задача Римана — Гильберта в классах Смирнова для обобщенных аналитических функций .....	81
<b>Петров С. В., Абанин А. В.</b> Минимальные абсолютно представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций с заданной граничной гладкостью .....	83
<b>Прилепкина Е. Г.</b> К задачам об экстремальном разбиении .....	85
<b>Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.</b> Функциональные свойства пространств Харди и Бергмана .....	87
<b>Кондаков В. П., Сергунин П. С.</b> Свойства базисов поточечной сходимости .....	89
<b>Шерстюкова О. В.</b> О типе целых функций порядка меньше единицы и полноте систем экспонент .....	90

<b>Шубарин М. А.</b> Степенные весовые пространства непрерывных функций .....	92
<b>Тюриков Е. В.</b> Об одном классе граничных задач мембранной теории выпуклых оболочек .....	94
<b>Фам Тиен Чонг.</b> Весовые банаховы пространства голоморфных функций и их свойства .....	96

СЕКЦИЯ III  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

<b>Абиев Н. А.</b> Асимптотика решения задачи Коши для одного класса сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных .....	100
<b>Афонин Г. Л.</b> Об определении поля скоростей полимерной жидкости в плоскопараллельном течении .....	102
<b>Бабаева Е. В.</b> Тримодальные аналоги некоторых бимодальных распределений .....	104
<b>Балакина Е. Ю.</b> Индикатор неоднородности неизвестной среды .....	106
<b>Басаева Е. К., Каменецкий Е. С., Хосаева З. Х., Челпалина Д.</b> Математическое моделирование напряженности общества в РСО-А и ее связи с протестной активностью населения .....	108
<b>Богачев В. А., Богачев Т. В.</b> Специализированные программные средства в теоретико-вероятностном моделировании .....	110
<b>Богачев И. В., Ватульян А. О.</b> Идентификация вязкоупругих характеристик неоднородного по толщине слоя .....	111
<b>Ватульян К. А.</b> Задача кручения для цилиндра с эллиптическим сечением в случае ромбоэдрической анизотропии .....	113
<b>Волик М. В.</b> Математическое моделирование течения воздуха в уличных каньонах с разной высотой домов .....	115
<b>Воронов Д. С., Глудунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В.</b> Применение пакетов аналитических вычислений к исследованию инвариантных тензорных полей на однородных римановых многообразиях .....	117
<b>Гаврилова М. С.</b> Об одной математической модели циркадианного ритма артериального давления .....	118

<b>Гладунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В.</b> Применение выпуклой геометрии пространства Лобачевского в задачах анализа .....	120
<b>Гуров М. Н.</b> МГД задача Ламба о волнах в вязкой жидкости конечной электрической проводимости при пропорциональных магнитном и гидродинамическом числах Рейнольдса .....	122
<b>Дударев В. В.</b> Предварительные напряжения в твердых телах .....	124
<b>Задорожный А. И., Лагунова Е. О.</b> Моделирование эффекта появления второй пики давления на основе модели Винклера с переменным коэффициентом податливости .....	126
<b>Каменецкий Е. С., Минасян Д. Г., Хетагуров В. Н.</b> Исследование движения сыпучей среды в центробежной мельнице вертикального типа с помощью различных математических моделей .....	129
<b>Карякин М. И., Надолин Д. К., Надолин К. А., Цывенкова О. А.</b> Опыт использования корпоративных образовательных ресурсов Microsoft на мехмате ЮФУ .....	131
<b>Козаченко М. С., Славский В. В.</b> О периодической составляющей конечного сигнала в Соболевских пространствах .....	134
<b>Кутищева Е. Ю., Родин В. А.</b> О прогрессивном подоходном налоге в России .....	135
<b>Лукашев В. В., Попов В. Н., Юшканов А. А.</b> Аналитические решения краевых задач для неоднородных дифференциальных уравнений с частными производными .....	137
<b>Ляпин А. А.</b> Динамические задачи для пороупругого слоя .....	139
<b>Матвеева И. И.</b> Об асимптотической устойчивости решений диффе- ренциальных уравнений с запаздывающим аргументом .....	141
<b>Мельник И. А.</b> О связях между решениями систем нелинейных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом .....	142
<b>Михайлов А. Б., Данильченко С. А., Прохоров В. Т., Михай- лова И. Д., Осина Т. М.</b> Программное обеспечение для расчета теплового состояния стопы человека при воздействии низких температур .....	144
<b>Михайлова Н. А.</b> Построение плана заочной формы обучения на основе учебного плана очной формы обучения .....	145
<b>Мищугова Г. В.</b> Анализ механических колебаний машинного оборудования и выявление неисправностей подшипников качения на основе преобразования Прони .....	146

<b>Нарзиев Н. Б., Нишанов С. Н.</b> Об одной генетической алгебре, возникающей в моделях биологической популяции .....	148
<b>Никонорова Ю. В.</b> Об одном подходе к решению общей задачи Фике на евклидовой плоскости .....	151
<b>Орлова Н. С.</b> Математическое моделирование виброожижения с использованием закона Дарси .....	153
<b>Павлов И. В., Назарько О. В.</b> Хааровские интерполяции моделей финансовых рынков на деформированных стохастических базисах ....	155
<b>Пасенчук А. Э.</b> О нетеровости матричных операторов типа свертки в топологических алгебрах специального вида .....	157
<b>Семенов В. П., Попов В. А.</b> Спрос на наличные деньги в условиях инфляционной экономики .....	158
<b>Пышнограй И. Г., Хайдер Надом Азиз.</b> Об учете проскальзывания в плоскопараллельном течении полимерной жидкости .....	159
<b>Рассказова Н. В.</b> Применение математической системы Maple для решения некоторых задач о треугольниках .....	161
<b>Ревина С. В.</b> Длинноволновая асимптотика задачи устойчивости сдвиговых течений .....	163
<b>Сазонов Л. И.</b> О существовании переходов между стационарными режимами системы Навье — Стокса во всем пространстве .....	165
<b>Самарина О. В., Славский В. В.</b> Применение теории три-ткани В. Бляшке в цифровой обработке изображений .....	166
<b>Скворцова М. А.</b> Оценки решений систем квазилинейных уравнений нейтрального типа .....	168
<b>Терновский В. А.</b> Модели налогообложения в схемах производства, потребления и рынков .....	170
<b>Трегубова Ю. Б.</b> Имитационное моделирование поведения макромолекулы в модели гауссовых субцепей .....	172
<b>Третьяков И. В.</b> Математическое моделирование процесса формирования полимерных пленок в условиях двуосного растяжения с учетом теплопереноса .....	175
<b>Фетисов И. В., Алехин С. Н., Фетисов В. Г.</b> Оптимизация параметров подвесной части стиральной машины при случайных воздействиях .....	177
<b>Шамраева В. В., Цветкова И. В.</b> Бесконечномерная задача оптимизации при исследовании финансового рынка со счетным числом состояний .....	179
<b>Список сокращений</b> .....	181



# Пленарные доклады



ВЗАИМНАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПРОСТРАНСТВ  
ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАННОГО РОСТА  
ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ И ГРАНИЧНОЙ ГЛАДКОСТИ  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

А. В. Абанин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Общая постановка задач, которым посвящен доклад, такова.

С каждой ограниченной областью  $\Omega$  в  $\mathbb{C}^N$  свяжем два типа пространств голоморфных в  $\Omega$  функций — с заданным ростом вблизи границы и с заданной граничной гладкостью. Будем использовать для них обозначения  $Hg(\Omega)$  и  $Hs(\bar{\Omega})$  соответственно. Требуется определить условия на  $\Omega$  и последовательность весов, задающих степень роста или оценку производных, при которых сильные сопряженные пространства  $(Hg(\Omega))'_b$  и  $(Hs(\bar{\Omega}))'_b$  допускают удобное для применений описание. Вид описания определяется как правило потребностями приложений. Так, при изучении уравнений типа свертки, полноты систем элементарных функций, представляющих систем и базисов большинство исследований сосредоточено на следующих двух направлениях:

1.  $\Omega$  — выпуклая область, и описание сопряженных пространств дается с помощью преобразования Лапласа функционалов.

2.  $\Omega$  —  $\mathbb{C}$ -выпуклая область, и описание сопряженных пространств дается с помощью преобразования Коши ( $N = 1$ ) или Коши — Фантаппье ( $N > 1$ ).

При изучении геометрических характеристик  $\Omega$ , связанных с конформными и биголоморфными отображениями и граничными свойствами голоморфных функций, определяющую роль играет другое направление, когда

3. двойственность между  $Hg(\Omega)$  и  $Hs(\bar{\Omega})$  задает стандартное скалярное произведение в  $L^2(\Omega)$ .

В первой части доклада будет дан обзор наиболее значимых этапов развития перечисленных направлений, связанных с именами следующих авторов:

1. G. Polya (1929), L. Ehrenpreis (1961), A. Martineau (1963), L. Hörmander (1966), А. Б. Державец (1984), В. В. Напалков (1987), Т. Belghiti (1994).

2. G. Köthe (1953), Л. А. Айзенберг (1966), A. Martineau (1967), А. Б. Державец (1985), Le Hai Khoi (1995).

3. S. Bell & Н. Воас (1984), С. О. Kiselman (1991), D. E. Barrett (1995).

Вторую часть доклада предполагается посвятить анализу требований на системы весов и гладкость границы области (существенность и методы снятия ограничений, особенности многомерной ситуации).

В третьей части речь пойдет об использовании результатов из первых двух направлений в приложениях. Следует отметить, что, если исключить практически полностью изученные в многочисленных работах случаи пространств  $H(\Omega)$  и  $H(\bar{\Omega})$  всех голоморфных в  $\Omega$  и, соответственно, на  $\bar{\Omega}$  функций, то вплоть до последнего времени результатов завершеного характера для операторов свертки и представления в пространствах вида  $Hg(\Omega)$  и  $Hs(\bar{\Omega})$  получено не было.

В заключительной части будут, во-первых, представлены недавние (2009–2011 гг.) результаты, полученные автором доклада в соавторстве с Ле Хай Хоем (Le Hai Khoi), Р. Ишимурой (R. Ishimura) и учениками, в которых достигнут определенный прогресс по первым двум направлениям и их приложениям. Во-вторых, будут обозначены открытые проблемы, пути их исследования и разделы классической теории функций, без развития которых дальнейший прогресс в рассматриваемой тематике вряд ли возможен.

RECENT PROGRESS ON HOMOGENEOUS EINSTEIN  
METRICS ON GENERALIZED FLAG MANIFOLDS

A. Arvanitoyeorgos (Greece, Patras; University of Patras)

A generalized flag manifold is a homogeneous space of the form  $G/K$ , where  $K$  is the centralizer of a torus in a compact connected semisimple Lie group  $G$ . The aim of the present talk is to discuss  $G$ -invariant Einstein metrics on generalized flag manifolds, whose isotropy representation decomposes into a direct sum of four or more irreducible submodules. The first step in the study is to classify such spaces, and the second step is to explicitly solve the Einstein equation, which reduces to an algebraic system of equations. For certain classical Lie groups such algebraic systems are difficult to study, and we use techniques from algebraic geometry. We also study the isometry problem of the Einstein metrics found.

The talk is based on the following recent works, joint with I. Chrysikos and Y. Sakane.

References

1. Arvanitoyeorgos A., Chrysikos I. Invariant Einstein metrics on flag manifolds with four isotropy summands // Ann. Global Anal. Geometry.—2010.—Vol. 37, № 2.—P. 185–219.
2. Arvanitoyeorgos A., Chrysikos I., Sakane Y. Complete description of invariant Einstein metrics on the generalized flag manifold  $SO(2n)/U(p) \times U(n-p)$  // Ann. Global Anal. Geometry.—2010.—Vol. 38, № 4.—P. 413–418.
3. Arvanitoyeorgos A., Chrysikos I., Sakane Y. Invariant Einstein metrics on generalized flag manifolds with two isotropy summands // J. Aust. Math. Soc.—(To appear).
4. Arvanitoyeorgos A., Chrysikos I., Sakane Y. Homogeneous Einstein metrics on the generalized flag manifold  $Sp(n)/(U(p) \times U(n-p))$  // Differential Geometry Appl.—2011.—(In press).
5. Arvanitoyeorgos A., Chrysikos I., Sakane Y. Homogeneous Einstein metrics on  $G_2/T$  // ArXiv: 1104.2664.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ  
ТИПА СОНИНА И ПРИЛОЖЕНИЯ

А. И. Вагабов (Россия, Махачкала, ЮМИ, ДГУ)

Пусть  $f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , дважды непрерывно дифференцируемая функция,  $h = \frac{b-a}{N}$  — шаг,  $N$  — натуральное число,  $\rho_h(x) = h \left( \frac{1}{2} - \left\{ \frac{x-a}{h} \right\} \right)$ ,  $x_i = a + ih$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_N = b$ .  $\sigma_h(x) = \int_a^x \rho_h(t) dt$ . Использовано обозначение  $\{\alpha\}$  — дробная часть числа  $\alpha$  (см. [1, с. 31]).

**Теорема.** Справедлива формула трапеций

$$\int_a^b f(x) dx = h \left( \sum_{i=0}^N f(x_i) + \frac{f(x_0) + f(x_N)}{2} \right) + r_n, \quad (1)$$

где

$$r_n = \int_a^b \rho_h f'(t) dt = - \int_a^b \sigma_h(t) f''(t) dt \quad \text{и} \quad r_n < \frac{b-a}{2N} \max_{[a,b]} |f'(x)|,$$

а также

$$r_n < \frac{b-a}{8N^2} \max |f'(x)|.$$

Остаток в формуле (1) представлен выражениями, допускающими не только уточненные оценки в уже известные [2, с. 354], но и точные вычисления.

ПРИМЕР. Положив в формуле (1)  $f(x) = \ln x$ ,  $a = 1$ ,  $b = N$ ,  $h = 1$ , имеем  $\sum_{k=1}^N \ln k = \int_1^N \ln x dx + \frac{1}{2} \ln(N) - \int_1^N \frac{\sigma_1(x-1)}{x^2} dx$ . Так как  $\sigma_1(x-1) = \int_1^x \left( \frac{1}{2} - \{t\} \right) dt$  и далее  $N! = \sqrt{N} \left( \frac{N}{e} \right)^N a_N$ , где  $a_N = \exp \left( 1 - \int_1^N \frac{\sigma_1(x)x^2}{d} dx \right)$ . Число  $a = \lim a_N = \lim \frac{a_N^2}{a_{2N}} = \sqrt{2\pi}$  получается как предел Валлиса [3, с. 209]. Установлена формула Стирлинга  $N! \sim \sqrt{2\pi N} \left( \frac{N}{e} \right)^N$ .

Литература

1. Виноградов И. М. Теория чисел.—М.: Наука, 1972.—167 с.
2. Ильин В. А. Высшая математика.—М.: Проспект, 2002.—592 с.
3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.—М.: Наука, 1986.—384 с.

## ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С ПАРАМЕТРОМ<sup>1</sup>

А. О. Ватульян (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Обратные задачи для дифференциальных операторов — интенсивно развивающийся раздел математической физики [1, 2], имеющий многочисленные приложения в самых разных областях математического моделирования (геофизика, термомеханика, биомеханика, механика композитов). Наиболее трудны для исследования коэффициентные обратные задачи об определении коэффициентов-функций координат по некоторой информации о следах решений в силу их существенной нелинейности и некорректности. Переменность коэффициентов дифференциальных операторов часто не позволяет в явном виде строить решения прямых задач, поэтому формулировка операторных соотношений в обратных задачах представляет собой определенный интерес. При этом важными являются различные аспекты постановки таких задач, выбор классов идентифицируемых функций, учет априорной информации в виде ограниченности, монотонности искомых функций, исследование единственности, разработка эффективных вычислительных процедур, позволяющих строить решения обратных задач. Развитие измерительных средств привело к тому, что появилась возможность иметь данные о физических полях идентифицируемого объекта не только на границе, но и внутри него. Это привело к возможности осуществлять различные постановки исследуемых задач и позволило сформулировать два типа постановок — линейную (при измерении полей внутри тела) и нелинейную (при измерении полей на его границе) [3]. При этом в качестве входной информации при решении обратной задачи фигурирует отклик объекта на некоторое динамическое воздействие; возможно либо использование отклика на нестационарное воздействие во временной области, либо анализ амплитудно-частотной зависимости в некотором частотном диапазоне на части границы. Применение преобразования Лапласа в первом случае приводит к коэффициентной обратной задаче с параметром в пространстве изображений. Таким образом, в обеих ситуациях для широкого класса операторов второго порядка исследуется задача для операторного пучка. При этом встречаются ситуации, когда пучок либо полиномиально, либо рациональным образом зависит от спектрального параметра [4–7]. Отметим, что в случае полиномиальной зависимости от параметра подобные задачи исследованы достаточно подробно [2, 4]. Проведен анализ отображений, возникающих естественным образом при исследовании подобных задач.

Первая постановка приводит к простым линейным операторным соотношениям с компактными операторами при исследовании обратной задачи, решение

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 10-01-00194-а, Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № П596.

ее строится на основе либо решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, либо на основе проекционного метода, конечномерных аппроксимаций и метода регуляризации. Отмечено, что в некоторых случаях для задачи Коши нарушается условие однозначной разрешимости.

Вторая постановка, в которой известны лишь граничные поля в некотором диапазоне изменения спектрального параметра, гораздо более сложна, приводит к нелинейным операторным уравнениям. Исследование задачи в такой постановке может быть осуществлено лишь на основе некоторых итеративных процедур, основные принципы построения которых опираются на выбор начального приближения в достаточно простом классе функций (исходя из априорной информации о коэффициентах) и метод линеаризации.

Представлены способы организации итерационных процессов, сочетающие как проекционные методы типа Галёркина, так и регуляризующие процедуры. Приведены способы построения операторных уравнений для одномерных и двумерных задач, доказаны теоремы единственности, исследованы способы построения решений на основе понятия приближенного решения и идей сглаживания [8].

## Литература

1. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations.—Berlin: Springer, 2005.—262 p.
2. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.—М.: Физматлит, 2007.—223 с.
3. *Ватульян А. О.* К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ.—2010.—№ 6.—С. 911–918.
4. *Аникина Т. А., Богачев И. В., Ватульян А. О.* Идентификация неоднородных характеристик вязкоупругих стержней при изгибных колебаниях // Механика композиционных материалов и конструкций.—2011.—№ 1.—С. 107–115.
5. *Ватульян А. О.* Об итерационных процессах в коэффициентных обратных задачах // Исследования по мат. анализу, дифференц. уравнениям и их приложениям.—Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А, 2010.—С. 20–32.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 4).
6. *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Коэффициентные обратные задачи термоупругости для неоднородных тел // Экологический вестн. науч. центров ЧЭС.—2009.—№ 3.—С. 24–30.
7. *Аникина Т. А., Богачев И. В., Ватульян А. О.* Об определении неоднородных реологических свойств балок // Вестн. ДГТУ.—2011.—Т. 10, № 7.—С. 1016–1023.
8. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // Успехи мат. наук.—1968.—Т. 23, № 4.—С. 179–238.



О КЛАССАХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ И УРАВНЕНИЯХ  
С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ<sup>1</sup>

Г. В. Демиденко (Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН, НГУ)

В настоящей работе мы продолжаем изучать связи между решениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F_n(t, x) \quad (1)$$

и уравнений с запаздывающим аргументом (см., например, [1–3]).

Рассмотрим последовательность матриц  $\{A_n\}$  размера  $n \times n$ . Будем предполагать, что все матрицы  $A_n$  удовлетворяют следующим условиям.

1. Собственные значения  $\{\lambda_j^n\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , каждой матрицы  $A_n$  являются вещественными. Пусть

$$\lambda_n^n \leq \lambda_{n-1}^n \leq \dots \leq \lambda_2^n < \lambda_1^n.$$

Предположим, что

$$\lambda_1^n \rightarrow -\theta, \quad n \rightarrow \infty.$$

2. Алгебраическое дополнение  $\alpha_n$  элемента  $b_{1n}$  матрицы  $(\lambda I - A_n) = (b_{ij})$  не зависит от  $\lambda$  при всех  $n$ , при этом

$$|\alpha_n| \left( \prod_{j=2}^n |\lambda_j^n| \right)^{-1} \leq c < \infty.$$

3. Существует  $\tau > 0$  такое, что на любом отрезке  $\{|\eta| \leq r\}$  имеет место сходимость

$$\frac{1}{\alpha_n} \prod_{j=2}^n (i\eta - \lambda_j^n) \rightarrow e^{i\eta\tau}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для каждой из систем вида (1) рассмотрим задачу Коши с нулевыми начальными данными

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_n x + F_n(t, x), \\ x|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00035, Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракты № 02.740.11.0429, № 16.740.11.0127, и Сибирского отделения Российской академии наук, междисциплинарный проект № 107.

при этом вектор-функция  $F_n(t, x)$  имеет вид

$$F_n(t, x) = (g(t, x_n), 0, \dots, 0)^T,$$

где  $g(t, z) \in C(\mathbb{R}_2^+)$  ограничена  $|g(t, z)| \leq G < \infty$  и удовлетворяет условию Липшица по  $z$ .

Будем неограниченно увеличивать число уравнений системы  $n$  и рассматривать только последнюю компоненту решения задачи Коши (2). Тогда на отрезке  $[0, T]$  получим последовательность функций  $\{x_n^n(t)\}$ . Имеет место утверждение.

**Теорема.** *Предположим, что выполнены условия 1–3. Тогда последовательность  $\{x_n^n(t)\}$  равномерно сходится на отрезке  $[0, T]$*

$$x_n^n(t) \rightarrow y(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

и предельная функция  $y(t)$  является решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq \tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Из теоремы мы получаем метод для построения приближения  $n$ -ой компоненты  $x_n(t)$  решения системы (1) с нулевыми начальными данными при больших  $n \gg 1$ . Именно, для нахождения приближения  $x_n(t)$  можно решить начальную задачу (4), а затем, оценив скорость сходимости (3), получить погрешность аппроксимации  $x_n(t) \approx y(t)$  при  $n \gg 1$ .

Отметим, что такой способ аппроксимации позволяет эффективно решать ряд важных биологических задач, возникающих при моделировании многостадийного синтеза вещества (см., например, [1, 4]).

## Литература

1. Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г. Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. математики.—2004.—Т. 7, № 1.—С. 73–94.
2. Демиденко Г. В., Лихошвай В. А. О дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн.—2005.—Т. 46, № 3.—С. 538–552.
3. Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е. Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 1.—С. 58–68.
4. Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И. Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. выч. мат. и мат. физики.—2004.—Т. 44, № 12.—С. 2276–2295.

ASYMPTOTICALLY FINITE DIMENSIONAL  
OPERATORS ON BANACH SPACES.  
RECENT DEVELOPMENT AND OPEN PROBLEMS

**E. Yu. Emel'yanov** (Turkey, Ankara; Middle East Technical University)

In this talk some recent developments concerning asymptotically finite dimensional operators in Banach spaces are discussed. We consider several open problems emerging naturally in view of these recent results. Special attention is paid to the class of Markov operators in  $L_1$ -spaces.

## ТЕХНИКА МОДЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ В АНАЛИЗЕ СКРЫТОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАЗЛИЧНЫХ БИОЦЕНОЗОВ ВОДОХРАНИЛИЩ

**В. Г. Ильичев** (Россия, Ростов-на-Дону; ЮНЦ РАН)

Для анализа сложных явлений требуется оценить влияние отдельных факторов на динамику экологической системы. Простейший подход заключается в вариации каждого фактора при фиксации остальных факторов. Тогда, однако, оценка влияния данного фактора будет зависеть от заданного уровня остальных. В ряде случаев можно использовать другой прием, основанный на так называемой процедуре «окрашивании факторов». В этой связи приведем актуальный пример.

Экосистемы протяженных водохранилищ представляют собой каскад биоценозов. Под действием течения происходит перенос веществ и организмов (=водорослей) из верхнего участка (ВУ) в нижний (НУ). Предполагается, что воды мелкого ВУ быстро прогреваются в весенний период, поэтому его водоросли лучше адаптированы к высокой температуре, чем водоросли глубоководного НУ. Здесь возникает эколого-эволюционная проблема об исходе конкуренции «аборигенов» и «пришельцев» на акватории НУ. Модельное решение заключается в том, что в начальный момент времени водоросли ВУ «окрашиваются» в красный цвет, а водоросли НУ «окрашиваются» в зеленый цвет. И далее, красные водоросли порождают красных, а зеленые водоросли производят зеленых.

При долгосрочных расчетах (=построение асимптотического режима) обнаружено, что в зависимости от скорости течения и характера температурного режима в нижнем участке могут возникать следующие ситуации:

- все водоросли окрашены в зеленый цвет. Здесь в конкурентной борьбе аборигены вытеснили пришельцев;
- все водоросли окрашены в красный цвет. Значит, победили пришельцы;
- одна часть водорослей окрашена в зеленый, а другая часть окрашена красный цвет. Это соответствует сосуществованию аборигенов и пришельцев.

СЛАБЫЕ БАЗИСЫ  
 В РЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. П. Кондаков (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

В локально выпуклом пространстве  $E$  последовательность элементов  $(e_n)_{n=1}^{\infty}$  называют *слабым базисом*, если для каждого элемента  $e \in E$  существует единственное представление в виде слабо сходящегося ряда  $e = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ , т. е. для любого непрерывного линейного функционала  $e'(\cdot)$  на  $E$  числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e'(e_n)$  сходится к  $e'(e)$ . Всякий базис определяет последовательность коэффициентов линейных форм  $e_n^*(e) = c_n$ ,  $e \in E$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Базис  $(e_n)$  называют *равностепенно непрерывным*, если выполнено условие

$$(\forall \alpha \in A) (\exists \alpha' = \alpha'(\alpha) \in A) (\exists C(\alpha) > 0) (\forall e \in E) \\ \sup_n |e_n^*(e)| \|e_n\|_{\alpha} \leq C(\alpha) \|e\|_{\alpha'(\alpha)}.$$

В пространстве Фреше, т. е. полном метрическом локально выпуклом пространстве, как известно (см. [1], а также [2] и др.), всякий слабый базис является равностепенно непрерывным базисом в исходной топологии (сильным базисом).

Обобщения этого факта получены также для ряда классов неметризуемых локально выпуклых пространств (см., например, [3–5]), содержащих многие важные классы пространств основных, обобщённых и голоморфных функций на бесконечномерных пространствах.

Напомним, что локально выпуклое пространство  $E$  называют *рефлексивным*, если его каноническое вложение, при котором элементы из  $E$  сопоставляются с непрерывными функционалами на  $E'_\beta$ , является изоморфизмом  $E$  на сильное второе сопряженное  $(E'_\beta)'_\beta$ . Класс рефлексивных пространств включает в себя важный класс монтелиевских пространств, но не совпадает с ним. Приводимое ниже определение сети появилось в работах Де Вильде [6].

*Сетью подмножеств* в линейном топологическом пространстве  $E$  называют класс  $\mathcal{W} = \{G_{n_1, \dots, n_k}\}$  подмножеств  $G_{n_1, \dots, n_k}$  в  $E$ , где  $k$  и  $n_1, \dots, n_k$  пробегает множество всех натуральных чисел, если выполняются соотношения

$$E = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} G_{n_1}, \quad G_{n_1, \dots, n_k} = \bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} G_{n_1, \dots, n_k, n_{k+1}}$$

для  $k > 1$  и всех  $n_1, \dots, n_k$ .

Когда все множества сети замкнуты, уравновешены или абсолютно выпуклы, будем говорить, что, соответственно, сеть замкнута, уравновешена, выпукла.

Уравновешенную сеть  $\mathcal{W}$  называют *строгой*, если она абсолютно выпукла, и если для каждой последовательности  $n_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , существует последовательность  $\lambda_k > 0$  такая, что для всех  $x_k \in G_{n_1, \dots, n_k}$  и всех  $\mu_k$ ,  $0 \leq \mu_k \leq \lambda_k$ ,

ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \lambda_k$  сходятся в  $E$  и  $\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k x_k$  содержатся в  $G_{n_1, \dots, n_{k_0}}$  для всех  $k_0 = 1, 2, \dots$

**Теорема.** *Всякий слабый базис в рефлексивном строго сетевом локально выпуклом пространстве  $E$ , имеющем полное сепарабельное сильное сопряженное  $E'_\beta$ , является равностепенно непрерывным базисом в исходной топологии.*

### Литература

1. Bessaga C., Pelczynski A. Spaces of continuous functions // Studia Math.—1960.—Vol. 19.—P. 53–62.
2. Эдвардс Р. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1969.—1071 с.
3. Köthe G. Topological vector spaces. II.—Berlin: Springer-Verlag, 1979.
4. Кондаков В. П. О свойствах базисов в неметризуемых монтелевских пространствах // Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям / Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев.—Владикавказ: ВЦ РАН, 2010.—С. 159–168.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 4).
5. Кондаков В. П. Три основных принципа линейного функционального анализа, их обобщения и приложения.—Владикавказ: ВЦ РАН и РСО-А, 2007.—208 с.
6. De Wilde M. On the equivalence of weak and Schauder bases // Proc. Internat. Coll on Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras. Studia Math. (Warsaw, 1969).—1970.—Vol. 38.—457 p.

## О ТЕОРЕМАХ ШТРАССЕНА

А. Г. Кусраев (Россия, Владикавказ, ЮМИ, СОГУ)

В работе В. Штрассен [1], опубликованной в 1965 г., установлены два фундаментальных результата. Первый из них [1, теорема 1] утверждает, что непрерывный ограниченный функционал на сепарабельном банаховом пространстве  $X$  допускает интегральное представление, если он мажорируется непрерывным сублинейным интегральным функционалом. Точнее, если сублинейный функционал  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  имеет вид  $p(x) = \int_{\Omega} p_{\omega}(x) d\mu(\omega)$ , а  $x^* \in X^*$  удовлетворяет неравенству  $\langle x, x^* \rangle \leq p(x)$  ( $x \in X$ ), где  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  — вероятностное пространство,  $p_{\omega} : X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывный сублинейный функционал для каждого  $\omega \in \Omega$ , причем функция  $\omega \mapsto p_{\omega}(x)$  измерима для каждого  $x \in X$ , а функция  $\omega \mapsto \|p_{\omega}\|$  интегрируема, то существует отображение  $\Omega \ni \omega \mapsto x_{\omega}^* \in X^*$  такое, что  $\langle x, x^* \rangle \leq p_{\omega}(x)$  ( $\omega \in \Omega$ ,  $x \in X$ ) и  $\langle x, x^* \rangle = \int_{\Omega} \langle x, x_{\omega}^* \rangle d\mu(\omega)$  ( $x \in X$ ).

Дальнейшие исследования в этом направлении привели к созданию теории двойственности выпуклых интегральных функционалов и операторов в пространствах измеримых вектор-функций, представленной вместе с соответствующей библиографией и историческими комментариями в [2, 3].

Второй результат [1, теорема 7] при некоторых естественных ограничениях дает необходимые и достаточные условия того, что две заданные вероятностные борелевские меры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  на польских пространствах  $K_1$  и  $K_2$ , соответственно, являются следами на  $K_1$  и  $K_2$  какой-нибудь меры  $\lambda \in \Lambda$  (т. е.  $\lambda_1(A) = \lambda(A \times K_2)$  и  $\lambda_2(A) = \lambda(K_1 \times A)$  для произвольного борелевского множества  $A$  из  $K_1$  или  $K_2$  соответственно), где  $\Lambda$  — выпуклое \*-слабо замкнутое множество вероятностных борелевских мер на  $K_1 \times K_2$ .

Оба результата обобщались разными авторами в разных направлениях.

В докладе представлены результаты типа указанных теорем Штрассена для линейных операторов в пространствах Канторовича, а также необходимые для этого операторные варианты теорем Хана — Банаха и Радона — Никодима, теоремы о внутренней характеристизации опорных множеств.

Пусть  $E$  и  $F$  — некоторые  $K$ -пространства (= пространство Канторовича) и  $P$  — возрастающий сублинейный оператор из  $E$  в  $F$ . Говорят, что  $P$  удовлетворяет *условию Магарам*, если для любых  $e \in E^+$  и  $f_1, f_2 \in F^+$  из равенства  $P(e) = f_1 + f_2$  следует существование таких  $e_1, e_2 \in E^+$ , что  $e = e_1 + e_2$  и  $P(e_l) = f_l$  ( $l := 1, 2$ ), см. [4, §4.4]. Возрастающий порядково непрерывный сублинейный оператор, удовлетворяющий условию Магарам, называют *сублинейным оператором Магарам*. Для линейного положительного оператора  $T : X \rightarrow E$  условие Магарам означает, что  $T([0, x]) = [0, Tx]$  ( $x \in X^+$ ).

**Теорема 1.** Пусть  $E$  и  $F$  — некоторые  $K$ -пространства и  $Q$  — сублинейный оператор Магарам из  $E$  в  $F$ . Тогда для любого векторного пространства  $X$  и

произвольного сублинейного оператора  $P$  из  $X$  в  $E$  имеет место формула (цепное правило)

$$\partial(Q \circ P) = \partial Q \circ \partial P. \quad (1)$$

Здесь  $\partial P := \{T \in L(E, F) : Tx \leq P(x) (x \in E)\}$  — опорное множество оператора  $P$ . Теорема Штрассена о дезинтегрировании содержится в (1), при  $Q := I_\mu : L^1(\mu)$  и  $P : X \rightarrow L^1(\mu)$ ,  $P(x) : \omega \mapsto p_\omega(x)$ . Имеется большое число формул для вычисления опорных множеств, сопряженных операторов,  $\varepsilon$ -субдифференциалов и т. п., родственных формуле (1), см. [4]. Их часто называют *формулами дезинтегрирования*. Общие приемы дезинтегрирования унифицируют в привычной форме правил исчисления разнообразные факты теории  $K$ -пространств, в основе которых лежат теоремы Хана — Банаха — Канторовича и Радона — Никодима. Обозначим символом  $BL^+(E, F; G)$  конус всех положительных билинейных операторов из  $E \times F$  в  $G$ .

Определения, нужные для формулировки следующей теоремы, см. [4, § 2.3].

**Теорема 2.** Пусть  $E, F$  и  $G$  — векторные решетки, причем  $G$  порядково полна. Пусть  $e \in E$ ,  $f \in F$ ,  $S \in L^+(E, G)$ , и  $T \in L^+(F, G)$ . Предположим, что  $\mathcal{D}$  — выпуклое, циклическое, слабо замкнутое и слабо ограниченное множество в  $BL^+(E, F; G)$ . Равносильны следующие утверждения:

- (1) существует  $B \in \mathcal{D}$  такой, что  $S = B(\cdot, f)$  и  $T = B(e, \cdot)$ ;
- (2) для любых  $x \in E$  и  $y \in F$  выполняется неравенство

$$Sx + Ty \leq \sup_{D \in \mathcal{D}} \{D(x, f) + D(e, y)\}. \quad (2)$$

Теорема Штрассена о следах соответствует случаю  $Sx = \int_{K_1} x(s) d\lambda_1(s)$ ,  $Tx = \int_{K_2} x(t) d\lambda_2(t)$ ,  $D(x, y) = \int_{K_1 \times K_2} x(s)y(t) d\lambda(s, t)$  ( $D \in \mathcal{D}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ), ср. (2) и [1, формула (28)]. Доказательство этого факта использует утверждения о том, что образ субдифференциала при  $\text{Orth}(G)$ -линейном слабо непрерывном отображении есть субдифференциал. Последнее же существенно опирается на внутреннюю характеристику [4, теорема 4.3.13] и циклическую компактность [5, теоремы 1.3.8 и 1.3.9] субдифференциала.

## Литература

1. Strassen V. The existence of probability measures with given marginals // Ann. Math. Statist.—1965.—Vol. 36.—P. 423–439.
2. Castaing Ch., Valadier M. Convex analysis and measurable multifunctions.—Berlin etc.: Springer, 1977.—278 p.—(Lecture Notes in Math. 580).
3. Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике.—М.: Наука, 1985.—352 с.
4. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения.—М.: Наука, 2007.—560 с.
5. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.



## РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ С ОДНОРОДНЫМИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ<sup>1</sup>

Ю. Г. Никоноров (Россия, Волгодонск; ЮМИ)

Доклад посвящен обсуждению недавно полученных результатов, описывающих с различных точек зрения некоторые важные подклассы класса геодезически орбитальных римановых многообразий (характеризующихся тем, что любая геодезическая многообразия является орбитой некоторой его однопараметрической группы движений).

Пусть  $(M, g)$  — связное гладкое риманово многообразие, а  $\rho$  — внутренняя метрика на  $M$ , индуцированная метрическим тензором  $g$ . Напомним, что *перенос Клиффорда-Вольфа* (перенос Клиффорда) метрического пространства  $(M, \rho)$  есть изометрия  $s$ , перемещающая все точки из  $M$  на одно и то же расстояние, т. е.  $\rho(x, s(x)) = \text{const}$  для всех  $x \in M$ . Риманово многообразие  $(M, g)$  называется *однородным по Клиффорду-Вольфу*, если для любых его точек  $x$  и  $y$  найдется перенос Клиффорда-Вольфа, переводящий точку  $x$  в точку  $y$ . Приведем также определение  $\delta$ -однородного (обобщенного нормального однородного, в другой терминологии) риманова многообразия. Риманово многообразие  $(M, g)$  называется  $\delta$ -однородным, если для любых его точек  $x$  и  $y$  найдется изометрия  $s$  такая, что  $s(x) = y$  и  $\rho(x, s(x)) \geq \rho(z, s(z))$  для любой точки  $z \in M$  (т. е.  $x$  является точкой наибольшего смещения).

Понятия  $\delta$ -однородности и однородности по Клиффорду-Вольфу были введены В. Н. Берестовским [7]. Немаловажно, что все такие многообразия имеют неотрицательную секционную кривизну. Исследованию  $\delta$ -однородных и однородных по Клиффорду-Вольфу римановых многообразий посвящен ряд недавних работ [3–6], в которых были получены важные структурные и классификационные результаты. Обзору основных из них посвящена большая часть этого доклада. Одним из примечательных результатов является классификация (компактных односвязных)  $\delta$ -однородных римановых многообразий положительной эйлеровой характеристики [3]. Также следует отметить полученную в [6] классификацию (односвязных) однородных по Клиффорду-Вольфу римановых многообразий (любое такое многообразие является прямым метрическим произведением евклидова пространства, некоторого количества нечетномерных евклидовых сфер и некоторого количества компактных простых односвязных групп Ли с биинвариантной римановой метрикой).

---

<sup>1</sup>Работа частично поддержана Программой поддержки ведущих научных школ, грант № НШ-6613.2010.1, Российским республиканским фондом фундаментальных исследований, проект № 10-01-90000-Бел-а, а также Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 02.740.11.0457.

Примерами  $\delta$ -однородных многообразий являются компактные симметрические пространства и (более общие) нормальные однородные римановы многообразия. Необходимо отметить, что  $\delta$ -однородные (и их частный случай, однородные по Клиффорду-Вольфу многообразия) являются *многообразиями с однородными геодезическими (геодезически орбитальными или  $GO$ -пространствами, в другой терминологии)*. Понятие геодезически орбитальных пространств появилось в работе [8] О. Ковальского и Л. Ванхекке и стало предметом многочисленных исследований. Примерами геодезически орбитальных многообразий являются естественно редуцируемые пространства (включающие в себя симметрические, изотропно неприводимые, нормальные однородные пространства) и слабо симметрические пространства. В докладе обсуждается полученная недавно в работе [2] классификация компактных односвязных геодезически орбитальных римановых многообразий положительной эйлеровой характеристики (ранее важный частный результат был установлен в [1]).

Кроме того, в докладе рассматривается связь полученных результатов с различными классическими разделами геометрии (в частности, обсуждается связь структуры полной группы движений геодезически орбитального риманова многообразия с наличием на этом многообразии полей Киллинга постоянной длины [9]) и приводятся некоторые нерешенные задачи.

## Литература

1. *Alekseevsky D. V., Arvanitoyeorgos A.* Riemannian flag manifolds with homogeneous geodesics // *Trans. Amer. Math. Soc.*—2007.—Vol. 359.—P. 3769–3789.
2. *Alekseevsky D. V., Nikonorov Yu. G.* Compact Riemannian manifolds with homogeneous geodesics // *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Appl.*—2009.—Vol. 5.—Paper 093.—16 p. (<http://www.emis.de/journals/SIGMA/2009/093/>).
3. *Berestovskii V. N., Nikitenko E. V., Nikonorov Yu. G.* Classification of generalized normal homogeneous Riemannian manifolds of positive Euler characteristic // *Differ. Geom. Appl.*—2011.—doi:10.1016/j.difgeo.2011.04.032.
4. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* On  $\delta$ -homogeneous Riemannian manifolds // *Differ. Geom. Appl.*—2008.—Vol. 26, № 5.—P. 514–535.
5. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* On  $\delta$ -homogeneous Riemannian manifolds. II // *Siberian Math. J.*—2009.—Vol. 50, № 2.—С. 214–222.
6. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* Clifford-Wolf homogeneous Riemannian manifolds // *J. Differ. Geom.*—2009.—Vol. 82, № 3.—P. 467–500.
7. *Berestovskii V. N., Plaut C.* Homogenous spaces of curvature bounded below // *J. Geom. Anal.*—1999.—Vol. 9, № 2.—P. 203–219.
8. *Kowalski O., Vanhecke L.* Riemannian manifolds with homogeneous geodesics // *Boll. Unione Mat. Ital. Ser. B.*—1991.—Vol. 5, № 1.—P. 189–246.
9. *Nikonorov Yu. G.* Geodesic orbit manifolds and Killing fields of constant length.—2011.—<http://arxiv.org/abs/1104.2664>.

## Секция I

# Вещественный анализ и анализ на многообразиях



ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ В. А. ТОПОНОГОВА

В. Н. Берестовский (Россия, Омск; ОФИМ СО РАН)

**Задача В. А. Топоногова.** На замкнутой верхней полуплоскости декартовой плоскости  $(x, y)$  определена непрерывно дифференцируемая вещественная функция  $f$ , тождественно равная нулю на прямой  $y = 0$ , и всюду для  $f$  модуль частной производной по  $y$  не превосходит модуля частной производной по  $x$ . Доказать, что  $f$  равна нулю всюду.

Положительное решение этой задачи и некоторые ее естественные обобщения были опубликованы в статье [1].

**Теорема 1.** Пусть  $f$  — непрерывно дифференцируемая вещественная функция на замкнутом полупространстве  $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \geq 0\}$ , причем

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \leq A \left\| \frac{\partial f}{\partial x} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \right\|, \quad (1)$$

где  $A$  — некоторая неотрицательная постоянная, а  $\|\cdot\|$  — стандартная евклидова норма в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда для каждой точки  $u^1 \in \mathbb{R}_+^{n+1}$  существует точка  $u^0 \in H \cap K_{u^1}$ , где  $H = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} | t = 0\}$ ,  $K_{u^1} := \mathbb{R}_+^{n+1} \cap (u^1 - C)$ , а

$$C = \left\{ w \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|w\| \leq \sqrt{A^2 + 1} w_{n+1} \right\}$$

— острый замкнутый конус, такая, что  $f(u^1) = f(u^0)$ .

**Следствие 1.** Если в условиях теоремы 1 функция  $f$  тождественно равна постоянной  $c$  на  $H$ , то  $f$  равна  $c$  всюду. Задача В. А. Топоногова имеет положительное решение.

Теорему 1 можно сформулировать так:

**Теорема 2.** Если для каждой точки  $u \in \mathbb{R}_+^{n+1}$  существует ненулевой вектор  $v \in C$  такой, что  $df(u)(v) = 0$ , то для каждой точки  $u^1 \in \mathbb{R}_+^{n+1}$  существует точка  $u^0 \in H \cap (u^1 - C)$  такая, что  $f(u^1) = f(u^0)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1** [2]. *Пространством-временем*  $(M, g)$  называется связное хаусдорфово  $C^\infty$ -многообразие размерности не меньше двух со счетной базой окрестностей, лоренцевой метрикой  $g$  сигнатуры  $(+, +, \dots, +, -)$  и временной ориентацией.

*Причинное* (соответственно, *хронологическое*) *будущее*  $J^+(L)$  ( $I^+(L)$ ) (соответственно, *причинное* (соответственно, *хронологическое*) *прошлое*)  $J^-(L)$  ( $I^-(L)$ ) подмножества  $L$  пространства-времени  $(M, g)$  определяется как множество всех точек  $q \in M$ , для которых существует направленная в будущее (соответственно, в прошлое) непространственно-подобная (соответственно, времениподобная) кривая  $c = c(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , такая, что  $c(a) \in L$ ,  $c(b) = q$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [2]. Пространство-время  $(M, g)$  называется *глобально гиперболическим*, если для любых точек  $p, q \in M$ , множество  $J^+(p) \cap J^-(q)$  компактно относительно топологии многообразия  $M$  и множества вида  $I^+(p) \cap I^-(q)$ , где  $p, q$  — всевозможные точки из  $M$ , образуют базу этой топологии.

Простейшими примерами глобально гиперболических пространств-времен являются *пространство-время Минковского*  $\text{Mink}^{n+1}$  и *пространство-время де Ситтера первого рода*, определяемое уравнением  $\sum_{k=1}^n x_k^2 - x_{n+1}^2 = R^2$ ,  $R > 0$ , в  $\text{Mink}^{n+1}$  с индуцированной из  $\text{Mink}^{n+1}$  лоренцевой метрикой и временной ориентацией. В случае  $A > 0$  теорема 2 допускает следующую эквивалентную формулировку.

**Теорема 3.** Пусть  $f$  — непрерывно дифференцируемая вещественная функция на замкнутом полупространстве  $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \geq 0\}$  пространства-времени Минковского  $(M, g)$ , причем для каждой точки  $u \in \mathbb{R}_+^{n+1}$  существует непространственноподобный вектор  $v \in T_u M$  с условием  $df(u)(v) = 0$ . Тогда для каждой точки  $u^1 \in \mathbb{R}_+^{n+1}$  существует точка  $u^0 \in H \cap J^-(u^1)$  такая, что  $f(u^1) = f(u^0)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Поверхностью Коши* в пространстве-времени  $(M, g)$  размерности  $n + 1$  будем называть замкнутое подмножество  $S \subset M$ , являющееся  $n$ -мерным топологическим многообразием, которое каждая непродолжаемая непространственноподобная кривая в  $(M, g)$  вида  $c = c(t)$ ,  $-\infty < a < t < b < +\infty$ , пересекает ровно в одной точке.

Следующая теорема обобщает теорему 3.

**Теорема 4.** Пусть  $f$  — непрерывно дифференцируемая вещественная функция на глобально гиперболическом пространстве-времени  $(M, g)$ . При этом для каждой точки  $u \in M$  существует непространственноподобный вектор  $v \in T_u M$  с условием  $df(u)(v) = 0$ . Тогда для каждой поверхности Коши  $S$  в  $(M, g)$  и каждой точки  $u^1$  в  $J^+(S)$  (соответственно,  $J^-(S)$ ) существует точка  $u^0 \in S \cap J^-(u^1)$  (соответственно,  $u^0 \in S \cap J^+(u^1)$ ) такая, что  $f(u^1) = f(u^0)$ .

Найдены множества  $J^+(L)$  и  $J^-(L)$  для времени-подобных геодезических  $L$  в пространстве-времени де Ситтера первого рода и их границы (горизонты событий будущего и прошлого); результаты опровергают рис. 4.18 из книги С. Хокинга [3].

## Литература

1. Берестовский В. Н. Об одной задаче В. А. Топоногова // Мат. труды.—2010.—Т. 13, № 1.—С. 15–22.
2. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени.—М.: Мир, 1977.—432 с.
3. Hawking S. The universe in a nutshell.—New York etc.: Bantam Books, 2001.—216 p.

## КАНОНИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ОДНОРОДНЫХ $k$ -СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ<sup>1</sup>

В. В. Балащенко (Беларусь, Минск; БелГУ)

На любом римановом многообразии  $(M, g, P)$ , наделенном согласованной структурой почти произведения  $P$ , возникают два взаимно дополнительных ортогональных распределения, отвечающие собственным значениям 1 и  $-1$  структуры  $P$ . Они обычно называются *вертикальным*  $\mathbf{V}$  и *горизонтальным*  $\mathbf{H}$  распределениями соответственно. Обобщая и систематизируя исследования многих авторов, А. М. Навейра в работе [1], по аналогии с методом А. Грея и Л. Хервеллы для почти эрмитовых структур, определил 36 классов римановых структур почти произведения (8 типов для каждого из распределений).

Пусть теперь  $(G/H, g, P)$  — естественно редуktивное пространство с инвариантной римановой структурой почти произведения  $P$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$  — соответствующее редуktивное разложение алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Тогда вертикальное и горизонтальное распределения структуры  $P$  являются инвариантными на  $G/H$  и определяются подпространствами  $\mathfrak{m}_+$  и  $\mathfrak{m}_-$  соответственно, где  $\mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_- = \mathfrak{m}$ . Было установлено [2], что в рассматриваемом случае возникает только 2 типа распределений: каждое из распределений имеет, как минимум, тип  $\mathbf{AF}$  (anti-foliation) — анти-слоение, при этом оно может удовлетворять сильному условию  $\mathbf{TGF}$  (totally geodesic foliation) — вполне геодезическое слоение. Таким образом, в данном случае возникают три класса А. Навейры  $(\mathbf{AF}, \mathbf{AF})$ ,  $(\mathbf{TGF}, \mathbf{AF})$ ,  $(\mathbf{TGF}, \mathbf{TGF})$ , при этом все возможности реализуются.

Обширный класс примеров инвариантных распределений обеспечивают однородные  $k$ -симметрические пространства, которые обладают *каноническими* структурами почти произведения. Итак, основным объектом рассмотрения является *однородное  $\Phi$ -пространство*  $G/H$  произвольного порядка  $k$  ( $k \geq 3$ ), порожаемое автоморфизмом  $\Phi$  ( $\Phi^k = id$ ), т. е. однородное  $k$ -симметрическое пространство. Пусть  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{h}$  — соответствующие алгебры Ли для групп Ли  $G$  и  $H$ ,  $\varphi = d\Phi_e$  — автоморфизм алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$  — *каноническое редуktивное* разложение [3]. Обозначим далее  $\theta = \varphi|_{\mathfrak{m}}$ ,  $s = \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$  (целая часть),  $u = s$  (при нечетном  $k$ ),  $u = s + 1$  (при четном  $k$ ),  $i = \overline{0, u}$ . Хорошо известно, что в соответствии со спектром автоморфизма  $\varphi$  алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  допускает следующее  $\varphi$ -инвариантное разложение:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_u,$$

причем некоторые из подпространств в данном разложении могут быть нулевыми (если спектр оператора  $\varphi$  не максимален).

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект № Ф10Р-132, в рамках совместного конкурса научных проектов РГНФ–БРФФИ.

Напомним, что инвариантная аффинорная структура  $F$  на регулярном  $\Phi$ -пространстве  $G/H$  называется *канонической* [3], если ее значение в точке  $o = H$  является полиномом от  $\theta$ :  $F = F(\theta)$ . Канонические структуры почти произведения  $P$  характеризуются тем, что они действуют на серии подпространств  $\mathfrak{m}_j$  как тождественный оператор  $id$ , а на остальных — как оператор  $-id$ ; здесь  $j = \overline{1, u}$ . В частности, для каждого  $i = \overline{1, u}$  будем обозначать в дальнейшем через  $P_i$  базовую каноническую структуру почти произведения, действие которой на подпространстве  $\mathfrak{m}_i$  есть оператор  $id$ , а на всех остальных подпространствах — оператор  $-id$ .

Пусть теперь  $(G/H, g)$  — естественно редуktивное однородное  $\Phi$ -пространство порядка  $k$ . Из общей конструкции канонических структур классического типа на однородных  $\Phi$ -пространствах конечного порядка [3] следует, что любое из подпространств  $\mathfrak{m}_j$ ,  $j = \overline{1, u}$ , а также их всевозможные суммы могут быть представлены как вертикальное (горизонтальное) распределение для соответствующей канонической структуры  $P$  ( $-P$ ).

Укажем теперь серии однородных  $\Phi$ -пространств порядка  $k$ , допускающих канонические инвариантные распределения типа **TGF**.

**Теорема 1.** Пусть для естественно редуktивного  $\Phi$ -пространства  $(G/H, g)$  порядка  $k = 2n$ ,  $n \geq 2$  подпространство  $\mathfrak{m}_n$ , соответствующее собственному значению  $-1$  оператора  $\theta$ , не тривиально. Тогда каноническое инвариантное распределение на  $G/H$ , порождаемое этим подпространством  $\mathfrak{m}_n$ , имеет тип **TGF**. Иными словами, каноническая структура почти произведения  $P_n$  принадлежит классу (**TGF**, **AF**).

**Теорема 2.** Пусть  $(G/H, g)$  — естественно редуktивное  $\Phi$ -пространство порядка  $k$ . Тогда каноническая структура почти произведения  $P_i$ , где  $i = \overline{1, u}$ , принадлежит классу (**TGF**, **AF**), если для индекса  $i$  выполняется следующая система условий:

$$k = 3i, \quad 2i \neq k - j, \quad 2i \neq j$$

для всех  $j \neq i$ . Иными словами, каноническое инвариантное распределение на  $G/H$ , порождаемое нетривиальным подпространством  $\mathfrak{m}_i$ , имеет тип **TGF**.

Получены, в частности, критерии принадлежности типу **TGF** для всех канонических инвариантных распределений на однородных  $\Phi$ -пространствах порядков  $k = 5$  и  $k = 7$ . Отметим также, что случаи порядков  $k = 4$  и  $k = 6$  были исследованы ранее в работах [3] и [4] соответственно.

## Литература

1. Naveira A. M. A classification of Riemannian almost-product manifolds // Rend. Math.—1983.—Vol. 73, № 3.—P. 577–592.
2. Balashchenko V. V. Naturally reductive almost product manifolds // Differential Geometry and Appl. Proc. of the 7th Intern. Conf., Satellite Conf. of ICM in Berlin. Aug. 10–14, Brno, 1998.—Czech Republic: Masaryk University in Brno, 1999.—P. 13–21.
3. Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. Однородные пространства: теория и приложения: монография.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.



4. Балащенко В. В., Самсонов А. С. Канонические  $f$ -структуры на естественно редуцированных Ф-пространствах порядка 6 // Докл. НАН Беларуси.—2010.—Т. 54, № 3.—С. 26–31.

## ОБОБЩЕННЫЕ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫ СТРУКТУРЫ ВЫСШИХ РАНГОВ НА $k$ -СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ<sup>1</sup>

Вылегжанин Д. В. (Беларусь, Минск; БелГУ)

В начале 80-х годов прошлого века в работах В. Ф. Кириченко (см. например, [1]) был предложен новый подход к изучению многообразий со структурами. Основным понятием этого подхода стала конструкция обобщенной почти эрмитовой структуры ( $GAH$ -структуры) и обобщенной эрмитовой геометрии.  $GAH$ -структура является обобщением таких широко известных структур как почти эрмитова структура, почти контактная структура и некоторых других. Одним из основных примеров обобщенной почти эрмитовой структуры в работе В. Ф. Кириченко [1] является метрическая  $f$ -структура.

В 90-х годах, в работах В. В. Балащенко и Н. А. Степанова [2] на однородных  $\Phi$ -пространствах были описаны канонические структуры классических типов, а также предъявлены алгоритмы построения таких структур. Вследствии этого возник обширный класс многообразий с несколькими перестановочными структурами, в том числе и с  $f$ -структурами.

В результате исследований на таких многообразиях были реализованы конструкции обобщенных почти эрмитовых структур рангов 1 и более [3]. Ниже предлагаются некоторые результаты изучения таких структур.

Пусть  $G/H$  — однородное  $\Phi$ -пространство порядка 12 ( $\Phi^{12} = \text{id}$ ),  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$  — соответствующее редуktивное разложение,  $\theta$  — ограничение  $\varphi = d\Phi$  на  $\mathfrak{m}$ ,  $\varepsilon$  — примитивный корень 12-ой степени из 1. Тогда в случае полного спектра оператора  $\theta$  редуktивное дополнение представляется в виде  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3 \oplus \mathfrak{m}_4 \oplus \mathfrak{m}_5 \oplus \mathfrak{m}_6$ , где  $\mathfrak{m}_i$  — компонента, отвечающая корню  $\varepsilon^i$ . Можно показать, что в этом случае на  $G/H$  существуют 5 базовых канонических  $f$ -структур [4]. Обозначим эти базовые структуры через  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ , где индекс означает, что образ структуры  $F_i$  совпадает с  $\mathfrak{m}_i$ . Оставшиеся канонические структуры на этом пространстве могут быть получены как линейные комбинации базовых структур с коэффициентами  $\{-1, +1, 0\}$ . Ранее доказано, что в случае, когда структуры  $F_i$  согласованы с некоторой инвариантной (псевдо) римановой метрикой, то и структуры построенные по структурам  $F_i$  указанным способом также согласованы с этой же метрикой. Таким образом, используя результаты [3], можно заключить, что на однородном  $\Phi$ -пространстве  $G/H$  порядка 12, снабженном метрикой, согласованной с действием канонических  $f$ -структур, существуют обобщенные почти эрмитовы структуры рангов от 1 до 5. Каждая из канонических  $f$ -структур, в описанной ситуации, может быть рассмотрена как обобщенная почти эрмитова структура ранга 1. Важной особенностью всех этих

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект № Ф10Р-132, в рамках совместного конкурса научных проектов РГНФ-БРФФИ.

структур является их инвариантность относительно симметрий порядка 12 однородного многообразия  $G/H$ .

Рассмотрим случай, когда только  $(-1)$  не входит в спектр  $\theta$  (т. е.  $\mathfrak{m}_6 = 0$ ). Тогда,  $G/H$  можно рассматривать как  $\Phi_1$ -пространство порядка 6 ( $\Phi_1 = \Phi^2$ ), при этом каноническое редуктивное разложение примет вид  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}'_1 \oplus \mathfrak{m}'_2 \oplus \mathfrak{m}'_3 \oplus \mathfrak{h}$ , где  $\mathfrak{m}'_1$ ,  $\mathfrak{m}'_2$  и  $\mathfrak{m}'_3$ , соответственно, отвечают уже корням  $\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon^4$  и  $\varepsilon^6 = -1$  оператора  $\theta_1 = \varphi_1|_{\mathfrak{m}} = \theta^2$ ,  $\varphi_1 = d\Phi_1$ . При этом  $\mathfrak{m}'_1 = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_5$ ,  $\mathfrak{m}'_2 = \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_4$  и  $\mathfrak{m}'_3 = \mathfrak{m}_3$ . Таким образом на  $\Phi_1$ -пространстве  $G/H$  порядка 6, оператор  $\theta_1$  обладает полным спектром и следовательно на  $G/H$  существует 2 базовые  $f$ -структуры  $F'_1$  и  $F'_2$ . Доказано, что  $F'_1 = F_1 - F_5$ ,  $F'_2 = F_2 - F_4$ . В результате мы получаем, что обобщенная почти эрмитова структура  $\{g, f_1 = F_1 - F_5, f_2 = F_2 - F_4, T\}$  ранга 2 на естественно редуктивном однородном  $\Phi$ -пространстве порядка 12 будет полностью совпадать с обобщенной почти эрмитовой структурой  $\{g, F'_1, F'_2, T\}$  ранга 2 на  $\Phi_1$ -пространстве порядка 6. Кроме этого, в работе [5] был установлен ряд свойств для канонических структур на однородном  $\Phi$ -пространстве порядка 6. Опираясь на эти результаты получаем:

**Теорема.** Пусть  $(G/H, g)$  естественно редуктивное однородное  $\Phi$ -пространство порядка 12,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$  — соответствующее редуктивное разложение. Пусть  $(-1)$  не входит в спектр оператора  $\theta = \varphi|_{\mathfrak{m}}$ , где  $\varphi = d\Phi$ . Тогда канонические  $f$ -структуры  $f_1 = F_1 - F_5$  и  $f_2 = F_2 - F_4$  являются  $NKf$ -структурами.

**Теорема.** Пусть  $(G/H, g)$  естественно редуктивное однородное  $\Phi$ -пространство порядка 12,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$  — соответствующее редуктивное разложение. Пусть  $(-1)$  не входит в спектр оператора  $\theta = \varphi|_{\mathfrak{m}}$ , где  $\varphi = d\Phi$ . Каноническая  $f$ -структура  $f_3 = f_1 + f_2$  является  $NKf$ -структурой тогда и только тогда, когда  $[\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_5 \oplus \mathfrak{m}_4] \subset \mathfrak{m}_3$ .

**Теорема.** Пусть  $(G/H, g)$  естественно редуктивное однородное  $\Phi$ -пространство порядка 12,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$  — соответствующее редуктивное разложение. Пусть  $(-1)$  не входит в спектр оператора  $\theta = \varphi|_{\mathfrak{m}}$ , где  $\varphi = d\Phi$ . Для  $(G/H, g)$  следующие условия эквивалентны:

- 1)  $f_4 = f_1 - f_2$  является  $NKf$ -структурой;
- 2)  $[\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_4 \oplus \mathfrak{m}_5] \subset \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_5$ ;
- 3)  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_4 \oplus \mathfrak{m}_5$  — подалгебра Ли в  $\mathfrak{g}$ .

## Литература

1. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии.—М.: ВИНТИ, 1986.—Т. 18.—С. 25–71.
2. Балащенко В. В., Степанов Н. А. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных  $\Phi$ -пространствах // Мат. сб.—1995.—Т. 186, № 11.—С. 3–34.
3. Вылегжанин Д. В. Естественная конструкция обобщенной почти эрмитовой структуры // Вестн. Витебского ун-та.—2001.—№ 2.—С. 114–119.
4. Вылегжанин Д. В. Обобщенная эрмитова геометрия на многообразии с  $f$ -структурами // Изв. вузов. Математика.—2003.—№ 6.—С. 28–36.
5. Балащенко В. В., Самсонов А. С. Инвариантные  $f$ -структуры на естественно редуктивных  $\Phi$ -пространствах порядка 6 // Докл. НАН Беларуси.—2010.—Т. 54, № 3.—С. 26–31.

О СИМВОЛАХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ  
СО СЛАБЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ УСЛОВИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ

В. М. Каплицкий (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Наиболее общим методом нахождения асимптотики функции распределения собственных значений эллиптических или гипоеллиптических псевдодифференциальных операторов является метод приближенного спектрального проектора. Дифференциальные операторы на замкнутых многообразиях могут обладать дискретным спектром и в случаях, когда символ оператора не удовлетворяет условиям регулярности, входящим в определение гипоеллиптичности. Такая ситуация реализуется, например, в случае операторов Клейна — Гордона на некоторых псевдоримановых многообразиях [1]. В связи с этим представляет интерес рассмотрение класса символов со слабым вырождением условий регулярности, для которых возможна модификация метода приближенного спектрального проектора, позволяющая получить главный член асимптотики функции распределения собственных значений, или, по крайней мере, оценки этой функции. Пусть  $\Omega$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $m_0, m_1, \mu$  — некоторые положительные постоянные. Пусть заданы функция  $a(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  и множества  $Z_x$  ( $x \in \Omega$ ), причем каждое множество  $Z_x$  является объединением конечного числа гладких гиперповерхностей в  $\mathbb{R}^n$ . Через  $Z_x^r$  будем обозначать  $r$  — окрестность множества  $Z_x$ , т. е. объединение шаров радиуса  $r$  с центрами в точках множества  $Z_x$ . Функция  $a(x, \xi)$  принадлежит классу  $GS^{m_0, m_1, \mu}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ , если она удовлетворяет следующим условиям:

1) для любого компакта  $K \subset \Omega$  существуют постоянные  $c_1, c_2 > 0$  такие, что

$$c_1|\xi|^{m_0} \leq |a(x, \xi)| \leq c_2|\xi|^{m_1}$$

при  $x \in K$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus Z_x^r$  и всех  $r > r_0$ , где  $r_0$  — некоторая положительная постоянная;

2) для любого компакта  $K \subset \Omega$  и мультииндексов  $\alpha, \beta$  существуют постоянные  $c_{\alpha, \beta}(K) > 0$  такие, что

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi) a^{-1}(x, \xi)| \leq \frac{c_{\alpha, \beta}(K)}{r^\mu}$$

при  $x \in K$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus Z_x^r$  и всех  $r > r_0$ , где  $r_0$  — некоторая положительная постоянная. С помощью этих классов символов можно определить и соответствующие классы псевдодифференциальных операторов на многообразиях так как это сделано в [2]. В многих случаях в качестве множества  $Z_x$ , фигурирующего в определении класса  $GS^{m_0, m_1, \mu}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ , можно принять множество нулей полного вейлевского символа или главной части вейлевского символа псевдодифференциального оператора.

Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область с гладкой границей,  $\mathcal{L}$  — дифференциальное выражение четного порядка и  $A = \mathcal{L}_D$  — оператор соответствующей задачи Дирихле. Пусть  $A$  является полуограниченным самосопряженным оператором с дискретным спектром и его вейлевский символ  $a_W(x, \xi)$  принадлежит  $GS^{m_0, m_1, \mu}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ .

Пусть

$$V_r(\lambda) = \text{mes}\{(x, \xi), x \in X, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus Z_x^r : a_W(x, \xi) < \lambda\},$$

$$\tilde{V}(\lambda) = \text{mes}\{(x, \xi), x \in X, \xi \in Z_x^{r(\lambda)} \setminus Z_x^r : a_W(x, \xi) < \lambda\}.$$

Тогда, если для любого  $r > 0$  справедлива оценка:  $\tilde{V}(\lambda) = O(V_r(\lambda))$  для некоторой функции  $r(\lambda)$  такой, что  $r(\lambda) \rightarrow +\infty$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , то для функции распределения собственных значений при каждом  $r > 0$  справедлива оценка:

$$N(\lambda) \geq (1 + o(\lambda))V_r(\lambda)$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

### Литература

1. *Волович И. В., Козлов В. В.* О суммируемых с квадратом решениях уравнения Клейна — Гордона на многообразиях // Докл. РАН.— 2006.—Т. 408, № 3.—С. 317–320.
2. *Безяев В. И.* Асимптотика собственных значений гипоеллиптических операторов на замкнутом многообразии // Мат. сб.—1982.—Т. 105, № 4.—С. 161–180.
3. *Каплицкий В. М.* Об асимптотическом распределении собственных значений самосопряженного гиперболического дифференциального оператора второго порядка на двумерном торе // Сиб. мат. журн.—2010.—Т. 51, № 5.—С. 1041–1060.

ОДНО НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ПЕРЕХОДНОЙ ПЛОТНОСТИ  
ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА НА МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Климентов Д. С. (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть  $M$  — двумерная гладкая минимальная поверхность в пространстве  $E^3$ . Не ограничивая общности, зададим на  $M$  изотермическую систему координат. Зададим также на  $M$  диффузию так, как это было сделано в работе [1]. Переходную плотность этой диффузии обозначим через  $p_t$ . Имеет место

**Теорема.** Для переходной плотности винеровского процесса  $p_t(x, y)$  имеет место неравенство

$$\frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t} \cdot \Delta \ln \frac{\Delta p_t}{\partial_t p_t} \leq 0.$$

Литература

1. Kazuhiro Kuwae, Yoshiroh Machigashira, Takashi Shioya. Sobolev spaces, Laplacian, and heat kernel on Alexandrov spaces.—Japan: Kyushi University, 1998.—43 p.—(Preprint).

## О КРАЙНИХ ПРОДОЛЖЕНИЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНОГО ПОЛИНОМА

З. А. Кусраева (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Рассматривается вопрос о крайнем продолжении однородных ортогонально аддитивных полиномов, действующих в векторных решетках. В [1, теорема 14] установлен вариант теоремы Канторовича о продолжении для однородных положительных полиномов, т. е. возможность продолжения однородного положительного полинома с мажорирующей подрешетки на всю векторную решетку с сохранением положительности и однородности. Если рассматриваемый полином ортогонально аддитивен, то его однородное положительное продолжение можно выбрать также ортогонально аддитивным [4]. Крайние точки выпуклого множества всех положительных однородных ортогонально аддитивных продолжений этого полинома называют *крайними продолжениями*. Ниже дается характеристика крайних продолжений положительного ортогонально аддитивного однородного полинома. Необходимые сведения о полиномах и векторных решетках имеются в книгах [2] и [3] соответственно.

Пусть  $E$  и  $F$  — векторные решетки и  $s \in \mathbb{N}$ . Отображение  $P : E \rightarrow F$  называется *однородным полиномом степени  $s$*  (или  *$s$ -однородным полиномом*), если существует  $s$ -линейный оператор  $\varphi : E^s \rightarrow F$  (называемый *порождающим для  $P$* ) такой, что

$$P(x) = \varphi(x, \dots, x) \quad (x \in E).$$

Для каждого полинома существует и притом лишь один симметричный порождающий оператор. Однородный полином  $P : E \rightarrow F$  называют *ортогонально аддитивным*, если  $|x| \wedge |y| = 0$  влечет  $P(x+y) = P(x) + P(y)$  для любых  $x, y \in E$ .

Полилинейный оператор  $\varphi : E^s \rightarrow F$  называется *ортосимметричным*, если  $\varphi(x_1, \dots, x_s) = 0$ , как только  $|x_i| \wedge |x_j| = 0$  для некоторых  $1 \leq i, j \leq s, i \neq j$ , *положительным*, если  $\varphi(x_1, \dots, x_s) \geq 0$  для любых  $0 \leq x_1, \dots, x_s \in E$ . Однородный полином  $P : E \rightarrow F$  степени  $s$  называют *положительным*, когда положителен порождающий его полилинейный оператор.

Можно показать, что порядково ограниченный  $s$ -однородный полином ортогонально аддитивен в том и только в том случае, когда порождающий его полилинейный оператор ортосимметричен [4].

Пусть  $P : G \rightarrow F$  — положительный ортогонально аддитивный  $s$ -однородный полином. Обозначим символом  $\mathcal{E}(P)$  множество всех положительных ортогонально аддитивных  $s$ -однородных продолжений  $P$  на все  $E$ . Тогда  $\mathcal{E}(P)$  — непустое выпуклое множество. Крайние точки множества  $\mathcal{E}(P)$  называют *крайними продолжениями* полинома  $P$ .

Рассмотрим функцию  $\vartheta_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемую формулой  $\vartheta_s(t) := t|t|^{s-1}$ . Положим  $\varphi(r, t) := \vartheta_s^{-1}(\vartheta_s(r) + \vartheta_s(t))$ . Функция  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  положительно однородна ( $\varphi(\lambda r, \lambda t) = \lambda \varphi(r, t)$ ,  $\lambda \geq 0$ ) и непрерывна, поэтому для любых  $x, u \in E$

существует  $\varphi(x, u)$  в смысле однородного функционального исчисления. Положим по определению  $(x^s + u^s)^{1/s} := \varphi(x, u) \in E$ .

**Теорема.** Пусть  $E, F$  и  $G$  — векторные решетки, причем  $F$  порядково полна,  $E$  и  $G$  равномерно полны и  $G$  — подрешетка  $E$ . Предположим, что множество  $\mathcal{E}(P)$  непусто для некоторого положительного ортогонально аддитивного  $s$ -однородного полинома  $P : E \rightarrow F$ . Тогда полином  $\widehat{P} \in \mathcal{E}(P)$  является крайним продолжением полинома  $P$  в том и только в том случае, когда для любого  $x \in E$  выполняется

$$\inf \{ \widehat{P}(|(x^s + u^s)^{\frac{1}{s}}|) : u \in G \} = 0.$$

Линейный положительный оператор  $P$  можно рассматривать как однородный полином первой степени ( $s = 1$ ). В этом случае характеристика крайних продолжений  $\widehat{P} \in \mathcal{E}(P)$  имеет вид:

$$\inf \{ \widehat{P}(|x + u|) : u \in G \} = 0.$$

Это хорошо известный результат Липецкого — Плачки — Томсена, см. [3, теорема 2.7].

### Литература

1. Loan J. Polynomials on Riesz spaces // J. Math. Anal. and Appl.—2010.—Vol. 364.—P. 71–78.
2. Dineen S. Complex analysis on infinite dimensional spaces.—Berlin: Springer-Verlag, 1999.
3. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive operators.—New York: Academic Press, 1985.—xvi+367 p.
4. Кусраева З. А. О продолжении ортогонально аддитивных регулярных полиномов // Владикавк. мат. журн.—2011.—(принята к печати).



## ЯВЛЕНИЕ ГИББСА ДЛЯ ЧАСТИЧНЫХ СУММ ФУРЬЕ — ХААРА

М. Г. Магомед-Касумов (Россия, Махачкала; ЮМИ)

При проведении численных экспериментов, связанных с приближением разрывных функций частичными суммами Фурье — Хаара, был обнаружен интересный эффект. Как оказалось, если точка разрыва является двоично-иррациональной, то в ее окрестности для сумм Фурье — Хаара наблюдается так называемое явление Гиббса. Для частичных сумм рядов Фурье по тригонометрической системе, по системе типа Уолша явление Гиббса хорошо изучено. В данной работе исследуется этот феномен для частичных сумм Фурье по системе Хаара. Показано, что явление Гиббса наблюдается в случае двоично-иррациональной точки разрыва. Более того, в частном случае, когда точкой разрыва является рациональное двоично-иррациональное число, удается точно определить структуру последовательности частичных сумм Фурье — Хаара в окрестности этой точки.

**Постановка задачи.** Напомним, что функции Хаара  $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  определяются следующим образом:

$$\chi_1(x) = 1, \quad \chi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \overline{\Delta}_n, \\ 2^{k/2}, & x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2}, & x \in \Delta_n^-, \end{cases}$$

где  $n = 2^k + i$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $i = 1, \dots, 2^k$ , а  $\Delta_n$  — это двоичный интервал вида  $\Delta_n = \Delta_k^i = (\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k})$ ,  $\overline{\Delta}_n$  — замыкание интервала  $\Delta_n$ , а  $\Delta_n^+$ ,  $\Delta_n^-$  — соответственно правая и левая половины интервала  $\Delta_n$ .

Значения в точках разрыва и на концах выбираются так, чтобы выполнялись равенства

$$\chi_n(x) = \frac{1}{2}(\chi(x+0) + \chi(x-0)), \quad x \in (0, 1);$$

$$\chi_n(0) = \chi_n(+0), \quad \chi_n(1) = \chi_n(1-0).$$

Частичные суммы  $S_N(f, x)$  для функции  $f(x)$  определяются, как обычно, следующим образом:

$$S_N(f, x) = \sum_{n=1}^N c_n \chi_n(x), \quad c_n = \int_0^1 f(t) \chi_n(t) dt.$$

**Результаты.** Обозначим через  $i_0 = i_0(k)$  номер того двоичного интервала  $\Delta_k^{i_0}$ , который будет содержать точку  $x_0$ . Имеют место следующие теоремы.

**Теорема 1.** Если  $x_0$  — рациональная двоично-иррациональная точка, двоичное разложение которой

$$x_0 = 0, b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1} \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{2^j}, \quad b_j \in \{0, 1\},$$

имеет период длины  $n$ , то числовая последовательность  $s_k^{(f)} = S_{2^k}(f, x)$ ,  $x \in \Delta_k^{i_0}$  для любой функции ограниченной вариации  $f$  со скачком в точке  $x_0$  будет состоять из  $n$  сходящихся подпоследовательностей:

$$s_{nl+p}^{(f)} \rightarrow f(x_0 + 0) - y_p \left( f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) \right), \quad l \rightarrow \infty, \quad 0 \leq p < n,$$

где  $y_p = (0, b_{p+1}b_{p+2} \dots)_2$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Так как  $x_0$  — двоично-иррациональное число, то  $0 < y_p < 1$  для любого  $0 \leq p < n$ . Следовательно, ни одна из подпоследовательностей не будет сходить к  $f(x_0 - 0)$ , ни к  $f(x_0 + 0)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $f$  — функция ограниченной вариации со скачком в точке  $x_0$ . Числовая последовательность  $s_k^{(f)}$ , представляющая собой значения частичных сумм  $S_{2^k}(f, x)$  на интервале  $\Delta_k^{i_0}$ , не является фундаментальной в том случае, если  $x_0$  — двоично-иррациональное число.

**Явление Гиббса.** Явление Гиббса определяется следующим образом. Предположим, что последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится к  $f(x)$  при  $x_0 < x \leq x_0 + h$ ,  $h > 0$ , и существует предел справа  $f(x_0 + 0)$ . Говорят, что для  $\{f_n(x)\}$  имеет место явление Гиббса в правой полуокрестности точки  $x_0$ , если

$$\overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow x_0}} f_n(x) > f(x_0 + 0) \quad \text{или} \quad \underline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow x_0}} f_n(x) < f(x_0 + 0).$$

Аналогично определяется явление Гиббса в левой полуокрестности.

Опираясь на результаты, полученные выше, можно вывести следующую теорему.

**Теорема 3.** Для последовательности частичных сумм Фурье — Хаара функции ограниченной вариации имеет место явление Гиббса в каждой изолированной двоично-иррациональной точке разрыва со скачком.

## Литература

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2.—М.: Мир, 1965.—537 с.
2. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. Изд. 2-е, доп.—М.: Изд-во АФЦ, 1999.—550 с.
3. Бари Н. К. Тригонометрические ряды.—М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961.

## УЗКИЕ ОПЕРАТОРЫ В РЕШЕТОЧНО НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. А. Плиев (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Узкие операторы в функциональных пространствах в настоящее время являются объектом интенсивного изучения [2–7]. Используя теорию решеточно нормированных пространств, можно с единых позиций изучать узкие операторы, заданные в пространствах как скалярных, так и векторных функций. Перейдем к точным определениям.

Пусть  $(V, E)$  — решеточно нормированное пространство,  $X$  — банахово пространство и кроме того векторная решетка  $E$  безатомна. Линейный оператор  $T : V \rightarrow X$  называется *узким*, если для любых  $u \in V$ ,  $\varepsilon > 0$  существуют два взаимно дополнительных осколка  $u_1, u_2$  элемента  $u$  такие, что  $\|T(u_1 - u_2)\| < \varepsilon$ .

**Теорема.** Пусть  $E, F$  — порядково полные векторные решетки и кроме того  $E$  безатомна,  $F$  — порядковый идеал банаховой решетки с порядково непрерывной нормой и  $(V, E)$  — пространство Банаха — Канторовича. Тогда каждый  $(bo)$ -непрерывный мажорируемый линейный оператор  $T : V \rightarrow F$  узок тогда и только тогда узка его точная мажоранта  $|T|$ .

### Литература

1. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—620 с.
2. Boyko K., Kadets V. Narrow operators on Bochner  $L_1$ -spaces // J. of Math. Physics, Analysis, Geometry.—2002.—Vol. 46, № 2.—P. 421–441.
3. Bilik D., Kadets V., Shvidkov R., Sirotkin G., Werner D. Narrow operators on vector-valued sup-normed spaces // Illinois J. of Math.—2006.—P. 358–371.
4. Bilik D., Kadets V., Shvidkov R., Werner D. Narrow operators and the Daugavet property for ultraproducts // Positivity.—2005.—Vol. 9.—P. 45–62.
5. Flores J., Ruiz C. Domination by positive narrow operators // Positivity.—2003.—Vol. 17.—P. 303–321.
6. Kadets V., Shvidkov R., Werner D. Narrow operators and rich subspaces of Banach spaces with the Daugavet property // Studia Math.—2001.—Vol. 147.—P. 269–298.
7. Maslyuchenko O., Mykhaylyuk V., Popov M. A lattice approach to narrow operators // Positivity.—2009.—Vol. 13.—P. 459–495.

## ЭРМИТОВЫ $f$ -СТРУКТУРЫ НА ЕСТЕСТВЕННО РЕДУКТИВНЫХ $\Phi$ -ПРОСТРАНСТВАХ ПОРЯДКА $k^1$

А. С. Самсонов (Беларусь, Минск; БелГУ)

Одним из развитий результата [1] А. Грея о приближенно келеровости (класс **NK**) почти комплексной структуры  $J = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta - \theta^2)$  на однородных 3-симметрических пространствах стали результаты В. В. Балащенко о канонических базовых  $f$ -структурах на однородных  $\Phi$ -пространствах порядков 4 и 5, которые в случае естественно редуکتивной метрики являются приближенно келеровыми (класс **NKf**) и эрмитовыми (класс **Hf**)  $f$ -структурами (см. [2, 3]). Позднее были исследованы однородные естественно редуکتивные  $\Phi$ -пространства порядка 6 и получены необходимые и достаточные условия принадлежности канонических  $f$ -структур этим классам (см., например, [4]). Перечисленные результаты для класса **NKf** и канонических  $f$ -структур обобщены (см. [5]) на  $\Phi$ -пространства произвольного порядка  $k$  в естественно редуکتивном случае, а для класса **Hf** в этой же работе изучены только канонические базовые  $f$ -структуры. Поэтому проведены исследования суммы и разности канонических базовых  $f$ -структур на таких пространствах, о результатах говорится ниже.

Рассмотрим *однородное  $\Phi$ -пространство* [6]  $G/H$  порядка  $k$  для связной группы Ли  $G$  с автоморфизмом  $\Phi$  ( $\Phi^k = id$ ,  $k \geq 3$ ). Пусть:  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}$  — соответствующие алгебры Ли,  $\varphi = d\Phi_e$  — автоморфизм алгебры  $\mathfrak{g}$  ( $\varphi^k = id$ ). Пространство  $G/H$  *редуکتивно* [7] с каноническим редуکتивным разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ . Обозначим  $\theta = \varphi|_{\mathfrak{m}}$ ,  $s = \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$  (целая часть),  $u = s$  (если  $k$  нечетное),  $u = s + 1$  (если  $k$  четное).

Запишем разложение подпространства  $\mathfrak{m}$  для автоморфизма  $\varphi$ :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_u,$$

где некоторые  $\mathfrak{m}_i$  могут быть нулевыми. Также будем считать далее, что  $\mathfrak{m}_{i+j}$  обозначает подпространство  $\mathfrak{m}_{k-(i+j)}$  при  $i + j > u$ .

Любая каноническая  $f$ -структура может быть представлена в виде (см. [8])  $f = (\zeta_1 J_1, \dots, \zeta_s J_s)$ , где  $J_1, \dots, J_s$  — специально определенные почти комплексные структуры ( $J_i^2 = -1$ ) на  $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_s$ ,  $\zeta_i \in \{-1; 0; 1\}$ ,  $i = \overline{1, s}$ ,  $f|_{\mathfrak{m}_u} = 0$  для четного  $k$ . Если подпространство  $\mathfrak{m}_i$  не тривиально,  $\zeta_i = 1$ , а все остальные  $\zeta_j = 0$  ( $j \neq i$ ), обозначим структуру  $f$  через  $f_i$  (т. е. эти структуры являются базовыми). Рассмотрим принадлежность структур  $f_i$  такому классу обобщенной эрмитовой геометрии (см., например, [9]) как эрмитовы  $f$ -структуры (*Hf-structures*, класс **Hf**), определяемых с помощью композиционного тензора  $T$  (см., например, [9]):

$$T(X, Y) = \frac{1}{4} f (\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y) = 0,$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект № Ф10Р-132, в рамках совместного конкурса научных проектов РГНФ-БРФФИ.

где  $\nabla$  — связность Леви — Чивита (псевдо) риманова многообразия  $(M, g)$ ,  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

Для канонических базовых  $f$ -структур уже известна

**Теорема [5].** Пусть  $M = G/H$  — однородное  $\Phi$ -пространство порядка  $k$  с естественно редуктивной метрикой. Тогда для любой канонической базовой  $f$ -структуры  $f_i$  на  $M$  справедливы утверждения:

- 1) если  $3i \neq k$ , то  $f_i$  принадлежит классу  $\mathbf{Hf}$ ;
- 2) если  $3i = k$ , то  $f_i \in \mathbf{Hf} \Leftrightarrow [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{h}$ .

А для суммы и разности таких структур, анализируя выражение  $T(X, Y)$ , получены

**Теорема.** Пусть  $M = G/H$  — однородное  $\Phi$ -пространство порядка  $k$  с естественно редуктивной метрикой,  $f_i, f_j$  ( $i > j$ ) — произвольные канонические базовые  $f$ -структуры на  $M$ . Структура  $f_i - f_j$  является  $Hf$ -структурой тогда и только тогда, когда выполняются оба условия:

- 1) структуры  $f_i, f_j$  принадлежат классу  $\mathbf{Hf}$ ;
- 2)  $i \neq 2j$  или справедливы оба соотношения:  $[\mathfrak{m}_j, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{h}$ ,  $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{i+j}$ .

**Теорема.** Пусть  $M = G/H$  — однородное  $\Phi$ -пространство порядка  $k$  с естественно редуктивной метрикой,  $f_i, f_j$  ( $i > j$ ) — произвольные канонические базовые  $f$ -структуры на  $M$ . Структура  $f_i + f_j$  является  $Hf$ -структурой тогда и только тогда, когда выполняются все три условия:

- 1) структуры  $f_i, f_j$  принадлежат классу  $\mathbf{Hf}$ ;
- 2)  $2i + j \neq k$  или справедливы оба соотношения:  $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{h}$ ,  $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{i-j}$ ;
- 2)  $i + 2j \neq k$  или справедливы оба соотношения:  $[\mathfrak{m}_j, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{h}$ ,  $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{i-j}$ .

## Литература

1. Gray A. Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3 // J. Diff. Geometry.—1972.—Vol. 7, № 3–4.—P. 343–369.
2. Балащенко В. В. Однородные эрмитовы  $f$ -многообразия // Успехи мат. наук.—2001.—Т. 56, № 3.—С. 159–160.
3. Balashchenko V. V. Invariant nearly Kähler  $f$ -structures on homogeneous spaces // Contemporary Math.—2001.—Vol. 288.—P. 263–267.
4. Самсонов А. С. Приближенно келеровы и эрмитовы  $f$ -структуры на однородных  $\Phi$ -пространствах порядка 6 // Изв. вузов. Математика.—2011.—№ 4.—С. 89–98.
5. Балащенко В. В., Самсонов А. С. Приближенно келеровы и эрмитовы  $f$ -структуры на однородных  $k$ -симметрических пространствах // Докл. РАН.—2010.—Т. 432, № 3.—С. 295–298.
6. Феденко А. С. Пространства с симметриями.—Минск: Изд-во БелГУ, 1977.—168 с.
7. Степанов Н. А. Основные факты теории  $\varphi$ -пространств // Изв. вузов. Математика.—1967.—№ 3.—С. 88–95.
8. Балащенко В. В., Степанов Н. А. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных  $\Phi$ -пространствах // Мат. сб.—1995.—Т. 186, № 11.—С. 3–34.
9. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии.—1986.—Т. 18.—С. 25–71.

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛАМБЕРТА В ЗАДАЧАХ  
 ОБ ОЦЕНКАХ ХАРАКТЕРИСТИК РОСТА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

С. М. Ситник (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

В работе А. Ю. Попова [1] решены важные задачи об оценках некоторых достаточно тонких характеристик роста целых функций. При этом получены выражения и оценки этих характеристик через величину

$$C(p) = \max_{x>0} \frac{\ln(1+x)}{x^p}, \quad p \in (0, 1). \quad (3)$$

Эти исследования были продолжены в [2, 3].

Основным результатом доклада является тот факт, что характеристики роста целых функций из указанных работ [1–3] могут быть выражены через известную специальную функцию — функцию Ламберта [4, 5]. С помощью функции Ламберта получены асимптотические выражения и неравенства для указанных характеристик роста целых функций, при этом оценки из указанных работ выводятся единообразным методом, а некоторые из них удается усилить [6].

Приведем некоторые результаты.

**Теорема 1.** Величина  $x = x(p)$ , для которой достигается максимум в (1), выражается через функцию Ламберта по формуле

$$x(p) = -\frac{1}{p W\left(-\frac{1}{pe^{\frac{1}{p}}}\right)} - 1, \quad p \in (0; 1).$$

**Теорема 2.** Для величины  $x(p)$ , реализующей максимум в (1), справедлива формула

$$x(p) = \frac{W_{-1}(z)}{W_0(z)} - 1,$$

где  $W_{-1}$ ,  $W_0 = W$  — побочная и главная действительные ветви функции Ламберта при  $z \in (-\frac{1}{e}; 0)$ , а величины  $z$  и  $p \in (0; 1)$  связаны соотношениями

$$z = -\frac{1}{pe^{\frac{1}{p}}}, \quad -\frac{1}{p} = W_{-1}(z), \quad p = -\frac{1}{W_{-1}(z)}.$$

**Теорема 3.** При значениях  $p \in (0; 1)$  справедливы представления функции  $C(p)$ , определяемой соотношением (1), как функции аргумента  $p$  через функцию Ламберта по формуле

$$\begin{aligned} C(p) &= \frac{\frac{1}{p} + W(z)}{e\left(\frac{z}{W(z)} - e^{-\frac{1}{p}}\right)^p} = \frac{1}{pe} \cdot \frac{1 + p W(z)}{\left(\frac{z}{W(z)} - e^{-\frac{1}{p}}\right)^p} = \\ &= \frac{W(z) - W_{-1}(z)}{e\left(e^{W(z)} - e^{W_{-1}(z)}\right)^p}, \quad z = -\frac{1}{pe^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Также справедливо представление функции  $C(p)$ , определяемой соотношением (1), как функции аргумента  $z$  через функцию Ламберта по формуле

$$C(p) = C(p(z)) = (W(z) - W_{-1}(z)) \left( e^{W(z) - W_{-1}(z)} - 1 \right)^{\frac{1}{W_{-1}(z)}}.$$

Полученные представления через функцию Ламберта позволяют вывести новые неравенства для величин из [1–3], а ряд из них уточнить. Например, справедлива

**Теорема 4.** Для величины  $x(p)$  при  $p \in (0; 1)$  справедливы неравенства:

$$\exp\left(\frac{1}{p} - 1\right) - 1 \leq x(p) \leq \exp\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p} - 1 \leq \exp\left(\frac{1}{p}\right) - 1,$$

$$\frac{1}{p} - 1 \leq x(p) \leq \frac{1}{p^2} - 1,$$

а при  $p > 0,72$  неравенство для величины  $C(p)$  из (1)

$$C(p) \leq \left(\frac{1}{p^2} - 1\right)^{1-p}.$$

Отметим, что верхние оценки из теоремы 4 точнее соответствующих неравенств из работы [1] и справедливы в более широком диапазоне параметра. Аналогичные результаты получены для характеристик роста целых функций, рассматриваемых в работах [2, 3]. Также получен ряд новых неравенств для самой функции Ламберта.

Насколько известно автору, в данной работе впервые рассматриваются приложения функций Ламберта в комплексном анализе. Это подтверждает известное высказывание знаменитого математика Пола Турана, предложившего называть специальные функции другим термином — *полезные функции!*

## Литература

1. Попов А. Ю. Наименьший возможный тип при порядке  $\rho < 1$  канонических произведений с положительными нулями заданной верхней  $\rho$  плотности // Вестн. Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика.—2005.—№ 1.—С. 31–36.
2. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. О типе целой функции порядка  $\rho \in (0; 1)$  с нулями на луче // Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям / Под ред. Ю. Ф. Коробейника, А. Г. Кусраева.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2010.—С. 9–21.—(Итоги науки. Сер. мат. форум. Т. 4).
3. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. О наименьшем возможном типе целых функций порядка  $\rho \in (0; 1)$  с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. мат.—2011.—Т. 75, № 1.—С. 3–28.
4. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E. On the Lambert  $W$  function // Adv. Comput. Math.—1996.—Vol. 5.—P. 329–359.
5. Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К.  $W$  — функция Ламберта и ее применения в математических задачах физики.—Саров, 2006.—160 с.
6. Sitnik S. M. Application of Lambert function to estimation of growth of entire functions.—2011.—17 p.—(Preprint. Arhiv Math.).

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО  
УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА  
ПОСРЕДСТВОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

М. С. Султанахмедов (Россия, Махачкала; ЮМИ)

Рассматриваются неоднородные интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Они имеют вид:

$$g(t) = \int_a^b K(t, s) f(s) ds,$$

где  $K(t, s)$  — ядро интегрального уравнения,  $f(s)$  — искомый входной сигнал,  $g(t)$  — выходной сигнал.

Уравнения такого типа естественным образом возникают во многих задачах математической физики, как обращения дифференциальных уравнений. Впервые подробно они были исследованы в работе [1]. Тихоновым А. Н. был предложен метод решения с помощью процедуры регуляризации [2]. К недостаткам этого метода можно отнести низкую скорость сходимости последовательности приближенных решений к истинному решению.

Данная работа посвящена численному методу решения уравнений Фредгольма первого рода, основанному на применении классических полиномов Чебышева  $\tau_n^{\alpha, \beta}(x, N)$ , ортогональных на равномерных сетках  $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$  с весом

$$\rho(x) = \frac{\Gamma(x + \beta + 1)\Gamma(N - x + \alpha)}{\Gamma(x + 1)\Gamma(N - x)}.$$

Разработан устойчивый алгоритм осуществления прямого двумерного дискретного преобразования Фурье — Чебышева для ядра интегрального уравнения. Полученный метод применяется для решения конкретных интегральных уравнений первого рода. Кроме того, проводится проверка правильности применяемого метода на тестовых примерах.

### Литература

1. Fredholm E. I. Sur une classe d'equations fonctionnelles // Acta Math.—1903.—Vol. 27.—P. 365–390.
2. Тихонов А. Н., Гласко В. Б. О приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Журн. вычислительной мат-ки и мат. физики.—1964.—Т. 4, № 3.—С. 564–571.



## НЕКОТОРЫЕ УСТОЙЧИВЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ, И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Э. Ш. Султанов (Россия, Махачкала; ОМИ ДНЦ РАН)

Полиномы, ортогональные на конечных сетках числовой оси впервые были рассмотрены в целом ряде работ П. Л. Чебышева [1–5] в связи задачами математической статистики. Им были установлены трехчленные рекуррентные формулы для этих полиномов и получены некоторые важные следствия из них, такие, как формула Кристоффеля — Дарбу и выражения для коэффициентов разложения дискретной функции по базису полиномов, ортогональных на рассматриваемой сетке. Особенно подробно П. Л. Чебышев исследовал свойства полиномов, ортогональных на конечных равномерных сетках с некоторыми классическими весами. В этом случае им была разработана разностная теория рассматриваемых полиномов, вполне аналогичная дифференциальной теории классических полиномов Лежандра и Якоби. В частности, в работах [4, 5] для полиномов, ортогональных на равномерных сетках с классическими весами, получены аналоги формулы Родрига для полиномов Лежандра и обобщенной формулы Родрига для полиномов Якоби.

В настоящее время теория полиномов Чебышева, ортогональных на сетках, получила интенсивное развитие, вызванное многочисленными приложениями этих полиномов в таких областях, как математическая биология, квантовая механика, теория кодирования, численные методы, обработка сигналов и изображений. Большинство из этих приложений связано с разложением в ряд Фурье по указанным полиномам функций, заданных на рассматриваемой дискретной сетке. Эта задача сопряжена уже с необходимостью разработки вычислительных алгоритмов для устойчивого нахождения соответствующих ортогональных полиномов Чебышева в узлах рассматриваемой сетки. Ибо непосредственное применение известных рекуррентных соотношений для вычисления указанных полиномов в узлах соответствующей сетки часто приводит к неверным результатам, что связано с неустойчивостью счета, использующего эти соотношения.

В данной работе получены устойчивые методы вычисления значений полиномов Чебышева  $\tau_n^{\alpha, \beta}(x, N)$ , ортогональных на равномерной сетке  $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ , при  $0 \leq x, n \leq N$ . На основе этих методов разработан алгоритм прямого и обратного дискретного преобразования Фурье — Чебышева.

### Литература

1. Чебышев П. Л. О непрерывных дробях (1855) // Полн. собр. соч.—М.: Изд-во АН СССР, 1947.—Т. 2.—С. 103–126.
2. Чебышев П. Л. Об одном новом ряде // Полн. собр. соч.—М.: Изд-во АН СССР, 1947.—Т. 2.—С. 236–238.

3. Чебышев П. Л. Об интерполировании по способу наименьших квадратов (1859) // Полн. собр. соч.—М.: Изд-во АН СССР, 1947.—Т. 2.—С. 314–334.
4. Чебышев П. Л. Об интерполировании (1864) // Полн. собр. соч.—М.: Изд-во АН СССР, 1947.—Т. 2.—С. 357–374.
5. Чебышев П. Л. Об интерполировании величин равноотстоящих (1875) // Полн. собр. соч.—М.: Изд-во АН СССР, 1948.—Т. 3.—С. 66–87.

## КОНСТРУКЦИЯ КАЛЬДЕРОНА — ЛОЗАНОВСКОГО

Б. Б. Тасоев (Россия, Владикавказ, ЮМИ, СОГУ)

В современном функциональном анализе большое внимание уделяется исследованию пространств Кальдерона — Лозановского, представляющих собой важный и интересный класс банаховых решеток. Рассмотрим функцию  $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}_+$  такую, что  $\varphi(\cdot, \mathbf{s})$  измерима для любого  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{R}_+^N$ , а  $\varphi(\omega, \cdot)$  — суперлинейна для всех  $\omega \in \Omega$ , и набор идеальных пространств  $\bar{X} = (X_1, \dots, X_N)$  над пространством с мерой  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ . Пространство Кальдерона — Лозановского  $\varphi(\bar{X}) = \varphi(X_1, \dots, X_N)$  состоит из всех функций  $x(\cdot) \in L^0(\mu)$ , удовлетворяющих оценке  $|x(\cdot)| \leq \lambda \varphi(\cdot, |x_1(\cdot)|, \dots, |x_N(\cdot)|)$  для некоторых  $x_i \in X_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) и  $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ . Норма в этом пространстве вводится формулой

$$\|x\|_{\varphi(\bar{X})} = \inf\{\lambda > 0 : \|x(\cdot)\| \leq \lambda \varphi(\cdot, |x_1(\cdot)|, \dots, |x_N(\cdot)|), \|x_i\| \leq 1 \ (i = 1, \dots, N)\}.$$

В случае, когда  $\varphi(s, t) = s^{1-\theta}t^\theta$  ( $s, t \in \mathbb{R}_+$ ) для некоторого  $0 < \theta < 1$ , пространства  $\varphi(X_1, X_2)$  были введены Кальдероном [3]. Более общий случай, когда  $\varphi(\omega, \cdot) = \varphi(\cdot)$  для почти всех  $\omega \in \Omega$ , пространства  $\varphi(X_1, X_2)$  исследовал Г. Я. Лозановский в большом цикле работ, см., например, [1, 2]. Частным случаем пространства Кальдерона — Лозановского являются известные пространства Орлича и Муселяка — Орлича [4]. Из многочисленных работ на эту тему укажем еще [5].

Цель настоящей заметки — показать, что базовая конструкция Кальдерона — Лозановского допускает естественное обобщение в терминах суперлинейного оператора, действующего в векторных решетках, а основные результаты сводятся к известным фактам из теории двойственности выпуклых функций.

Пусть  $X$  — банахова решетка,  $Y$  — равномерно полная векторная решетка. Оператор  $\Phi : X_+ \rightarrow Y_+$  называют *суперлинейным*, если он удовлетворяет следующим двум условиям:

- (1)  $\Phi(x + y) \geq \Phi(x) + \Phi(y)$  для всех  $x, y \in X_+$  (супераддитивность);
- (2)  $\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x)$  для всех  $x \in X_+$  и  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  (положительная однородность).

Оператор  $\Phi$  называют *разложимым*, если для любых  $y_1, y_2 \in Y_+$ , удовлетворяющих неравенству  $y_1 + y_2 \leq \Phi(x)$  существуют  $x_1, x_2 \in X_+$  такие, что  $x = x_1 + x_2$  и  $\Phi(x_i) \geq y_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Обозначим через  $\Phi(X)$  — порядковый идеал в  $Y$ , порожденный множеством  $\Phi(X_+) = \{\Phi(x) : x \in X_+\}$ . Супераддитивность оператора влечет  $\Phi(X) = \bigcup_{x \in X_+} [-\Phi(x), \Phi(x)]$  или, что то же самое,  $\Phi(X) = \{y \in Y : (\exists x \in X_+) |y| \leq \Phi(x)\}$ . Определим функционал  $\|\cdot\|_\Phi : \Phi(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$  формулой

$$\|z\|_\Phi := \inf\{\|x\| : x \in X_+, \Phi(x) \geq |z|\} \quad (z \in \Phi(X)). \quad (4)$$

**Теорема 1.** Пусть  $X$  — банахова решетка,  $Y$  — равномерно полная векторная решетка и  $\Phi : X_+ \rightarrow Y_+$  — суперлинейный оператор. Тогда  $\|\cdot\|_\Phi$  есть монотонная норма на  $\Phi(X)$  и пара  $Z = (\Phi(X), \|\cdot\|_\Phi)$  является банаховой решеткой.

Пусть  $Z = (\Phi(X), \|\cdot\|_\Phi)$  из теоремы (1), причем,  $\Phi$  обладает свойством разложимости. Каждому элементу  $x^*$  поставим в соответствие функционал  $\Phi^*(x^*) : Z_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , действующий по правилу

$$\langle z, \Phi^*(x^*) \rangle := \inf\{\langle x, x^* \rangle : x \in X_+, \Phi(x) \geq z\} \quad (z \in Z_+). \quad (5)$$

Оказывается, что  $\Phi^*(x^*)$  — положительный функционал на  $\Phi(X)$ , а оператор  $\Phi^* : X^* \rightarrow \Phi(X)^*$ , действующий по правилу  $x^* \mapsto \Phi^*(x^*)$ , суперлинеен и положительно однороден. Тем самым к оператору  $\Phi^*$  применяется теорема 1 и получаем банахову решетку  $\Phi^*(X^*)$  с нормой  $\|\cdot\|_{\Phi^*}$ .

**Теорема 2.** Справедлива формула  $\Phi(X)^* = \Phi^*(X^*)$ , причем равенство означает совпадение банаховых решеток  $\Phi(X)^*$  и  $\Phi^*(X^*)$  как по составу элементов, так и по норме.

### Литература

1. Лозановский Г. Я. О некоторых банаховых структурах // Сиб. мат. журн.— 1969.—Т. 10, № 3.—С. 584–598.
2. Лозановский Г. Я. Преобразование банаховых идеальных пространств с помощью вогнутых функций // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений.—1978.—№ 3.—С. 122–148.
3. Calderon A. P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method // Studia Math.—1964.—Vol. 24.—С. 113–190.
4. Musielak J. Orlicz spaces and modular spaces.—Berlin: Springer-Verlag, 1983.—1034 с.
5. Raynaud Y. On duals of Calderon–Lozanovsky intermediate spaces // Studia Math.—1997.—Vol. 124, № 1.—P. 9–36.

НЕЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ  
 ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ  
 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

В. Г. Фетисов (Россия, Шахты; ЮРГУЭС, ЮМИ)

Обозначим через  $E(\Omega, \Sigma, \mu)$  —  $s$ -однородное симметрическое  $F$ -квазинормированное пространство  $\mu$ -измеримых классов эквивалентных функций на  $\Omega$ , для которого  $\|cu; E\| = |c|^s \cdot \|u; E\|$ , где  $c \in R$ ,  $0 < s \leq 1$ ,  $(\frac{1}{r}) = (\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \dots, \frac{1}{r_n})$ , через  $E_{(\frac{1}{r})}$  —  $F$ -квазинормированное пространство  $\mu$ -измеримых вектор-функций  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ , где

$$\|\vec{u}; E_{(\frac{1}{r})}\| = \left[ \sum_{i=1}^n \| |u_i|^{\frac{1}{r_i}} E \|^{2r_i} \right]^{\frac{1}{2}} < +\infty, \quad r_i = \frac{r_i}{r_i + s - r_i s}.$$

Нами рассматривается система нелинейных операторных уравнений

$$u_i(x) = [A_i(u_i(x), \lambda_i(x)) + B_i(\vec{u}(x), \vec{\lambda}(x))], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\vec{\lambda}(x) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)(x)$  — функциональный параметр,  $A_i$  — интегральный оператор Урысона,  $B_i$  — оператор Немыцкого,  $\vec{u}(x) = (u_1, u_2, \dots, u_n)(x)$  — искомая вектор-функция, принадлежащая пространству  $E_{(\frac{1}{r})}$ .

Конкретным примером является слабо связанная система нелинейных многомерных сингулярных функционально-интегральных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} u_i(x) &= \lambda_i [A_i u_i(x) + B_i \vec{u}(x)], \\ A_i u_i(x) &:= \int_{\Omega} a_i[x, y, u_i(y)] dy, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ B_i \vec{u}(x) &:= b_i(x, w_1(\vec{u}), w_2(\vec{u}), \dots, w_m(\vec{u})); \\ w_j(\vec{u}) &:= \int_{\Omega} |x - y|^{-k} K_j(x, y, u_1(y), u_2(y), \dots, u_n(y)) dy. \end{aligned}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Если исходная система уравнений при некотором значении функционального параметра  $\vec{\lambda}_0(x) = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, \dots, \lambda_{n0})(x)$  имеет отличное от нуля пространства  $E_{(\frac{1}{r})}$  решение  $\vec{u}_0(x)$ , то это решение назовем *собственной вектор-функцией*, а отвечающее ей значение параметра  $\vec{\lambda}_0(x) = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, \dots, \lambda_{n0})(x)$  — *характеристическим значением* системы в смысле Гремяченского.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Значение функционального параметра  $\vec{\nu}(x) = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)(x)$  назовем *точкой бифуркации* системы, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется собственная вектор-функция  $\vec{u}_0(x)$  системы в смысле Гремяченского,

для которой  $\|u\vec{0}; E_{(\frac{1}{r})}\| < \varepsilon$  и  $\|\vec{\lambda} - \vec{\nu}; E_{(\frac{1}{r})}\| < \varepsilon$ , где  $\vec{\lambda}(x) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)(x)$  — характеристическое значение системы в смысле Гремяченского.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** Будем говорить, что множество  $C$  собственных вектор-функций в некоторой области пространства  $E_{(\frac{1}{r})}$  образует *непрерывную ветвь*, выходящую из нуля пространства  $E_{(\frac{1}{r})}$ , если граница  $\Gamma$  каждого ограниченного открытого множества, содержащего нуль пространства  $E_{(\frac{1}{r})}$ , и содержащегося в данной области, имеет с  $C$  непустое пересечение.

Доказан ряд результатов, касающихся существования собственных вектор-функций, точек бифуркаций, непрерывных ветвей собственных вектор-функций рассматриваемой системы, анализа их строения и асимптотики в зависимости от изменения функциональных параметров.

### Литература

1. Фетисов В. Г. Открытые вопросы нелинейных мажорируемых операторов в локально ограниченных пространствах измеримых функций // Владикавк. мат. журн.—2003.— Т. 5, вып. 1.—С. 57–61.

## ОБОБЩЕННЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В. И. Филиппенко (Россия, Шахты; ЮРГУЭС, ЮМИ)

Пусть  $\mathcal{H}$  — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $\|\cdot\|$ . Через  $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, (a, b))$  обозначим гильбертово пространство измеримых по Бохнеру вектор-функций, заданных на конечном или бесконечном интервале  $I = (a, b)$ , принимающих значения в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  и суммируемых с квадратом нормы. Скалярное произведение в пространстве  $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, (a, b))$  определяется формулой  $\langle y, z \rangle = \int_a^b (y(t), z(t)) dt$ . Рассмотрим в  $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, (a, b))$  квазидифференциальное выражение

$$l[y] = (y^{[n-1]})' - \sum_{i=1}^n f_{ni} y^{[i-1]},$$

где  $y^{[i]} = f_{i,i+1}^{-1} ((y^{[i-1]})' - \sum_{j=1}^i f_{ij} y^{[j-1]})$  [1]. Дополнительно предположим, что операторнозначные функции  $f_{ij}$  удовлетворяют следующим условиям:

- 1)  $f_{ij} = 0$  в  $I$  для  $2 \leq i+1 < j \leq n$ ;
- 2)  $f_{ij} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, (\alpha, \beta))$  для всех  $i, j$  и всех  $\alpha, \beta \in I$ ;
- 3)  $f_{i,i+1}$  обратимы на  $I$  для  $1 \leq i \leq n-1$ .

Операторные функции  $f_{ij}$  при каждом  $t \in I$  являются ограниченными самосопряженными операторами в  $\mathcal{H}$ , причем  $f_{i,i+1}^{-1}$  существуют и ограничены. На множестве  $D$  вектор-функций  $y(t) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, (a, b))$ , которые имеют квазипроизводные до  $(n-1)$ -го порядка включительно, для которых  $l[y] \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, (a, b))$ , определим оператор  $L$  формулой  $Ly = l[y]$ . Обозначим через  $D'_0$  множество вектор-функций  $y(t) \in D$ , обращающихся в нуль вне какого-либо конечного замкнутого интервала  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ , вообще говоря, различного для различных вектор-функций. Пусть  $L'_0$  — сужение  $L$  на  $D'_0$ . Замыкание оператора  $L'_0$  обозначим через  $L_0$ . Если выполняется дополнительное условие  $F = -J^{-1}F^*J$ , где  $F = (f_{ij})_{i,j=1}^n$ , а  $J = ((-1)^i \delta_{i,n+1-j} E)$ ,  $\delta$  — символ Кронекера, то оператор  $L_0$  симметрический. ( $E$  тождественный оператор в  $\mathcal{H}$ .) Каждой вектор-функции  $y(t)$ , для которой  $l[y]$  имеет смысл, поставим в соответствие вектор-функцию  $\tilde{y}(t) = (y^{[0]}(t), \dots, y^{[n-1]}(t))$  со значениями из  $\mathcal{H}^n$ , которую удобно рассматривать как одностробцевую матрицу. Если  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_s(t))$  — какая-либо система вектор-функций, к которым применима операция  $l$ , то через  $\tilde{x}(t)$  будем обозначать матрицу,  $j$ -ым столбцом которой является  $\tilde{x}_j(t)$ . Аналогично вводятся такие же обозначения для операторных функций. В этих обозначениях для  $y(t), z(t) \in D$ ,  $a < \alpha < \beta < b$  тождество Лагранжа имеет вид

$$\int_{\alpha}^{\beta} (l[y], z) dt - \int_{\alpha}^{\beta} (y, l[z]) dt = (J\tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

Рассмотрим однородное квазидифференциальное уравнение  $l[y] = \lambda y$ , где  $\lambda$  — комплексное число. Зафиксируем какое-либо значение  $t_0$  в интервале  $(a, b)$ . Пусть  $U_1(t, \lambda), \dots, U_n(t, \lambda)$  — операторные решения уравнения  $l[y] = \lambda y$ , удовлетворяющие начальным условиям  $U_j^{[k-1]}(t_0, \lambda) = \delta_{jk}E$ ,  $j, k = 1, \dots, n$ . Через  $U(t, \lambda)$  обозначим операторную однострочную матрицу  $(U_1(t, \lambda), \dots, U_n(t, \lambda))$ . При каждом фиксированном  $t \in (a, b)$   $U(t, \lambda)$  является оператором из  $\mathcal{H}^n$  в  $\mathcal{H}$ .

Обобщенную резольвенту  $R_\lambda$  оператора  $L_0$  можно построить по обычной схеме (см. [2, 3]).

**Теорема.** Для любой вектор-функции  $f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, (a, b))$

$$\int_a^b \|f(t)\|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (d\rho(\sigma)\eta(f, \sigma), \eta(f, \sigma)),$$

где  $\rho(\sigma)$  — спектральная функция распределения оператора  $L_0$ , соответствующая его произвольной обобщенной резольвенте  $R_\lambda$ ,  $\eta(f, \sigma) = \int_a^b U^*(s, \sigma)f(s) ds$ ; при этом интеграл в последнем равенстве сходится в смысле метрики пространства  $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}^n, (-\infty, \infty), d\rho(\sigma))$ .

Обозначим через  $E_\xi$  ( $-\infty < \xi < \infty$ ) обобщенную спектральную функцию оператора  $L_0$ .  $E_\xi$  ( $-\infty < \xi < \infty$ ) предполагается непрерывной слева.

**Следствие.** Совокупность всех обобщенных спектральных функций  $E_\xi$  оператора  $L_0$  определяется формулой

$$E_{\alpha\beta}f = \int_{\alpha}^{\beta} U(t, \sigma) d\rho(\sigma) \eta(f, \sigma).$$

## Литература

1. Everitt W. N., Zettl A. Generalized symmetric ordinary differential. Expressions 1: The general theory // Nieuw Arch. voor Wiskunde.—1979.—Vol. 27, № 3.—P. 363–397.
2. Фетисов В. Г., Филищенко В. И., Козоброд В. Н. Операторы и уравнения в линейных топологических пространствах.—Владикавказ: ВНИЦ РАН и РСО-А, 2006.—432 с.
3. Штраус А. В. О спектральных разложениях регулярного симметрического оператора // Докл. АН СССР.—1972.—Т. 204, № 1.—С. 52–55.



КЛАССЫ  $W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(M, a, b)$  И КОМБИНИРОВАННЫЕ  
УСЛОЖНЕННЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

**И. И. Шарапудинов** (Россия, Махачкала; ЮМИ)

Пусть на измеримом множестве  $E$  задана измеримая функция  $p = p(x)$ , удовлетворяющая условиям:  $1 \leq p(x) \leq \bar{p}(E) < \infty$ , где  $\bar{p} = \sup\{p(x) : x \in E\}$ . Тогда через  $L^{p(x)}(E)$  обозначим пространство измеримых функций  $f = f(x)$ , заданных на  $E$ , для которых норма определяется следующим образом

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf \left\{ \alpha : \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

Далее, пусть функция  $r(x)$  задана на  $[a, b]$  и удовлетворяет условиям  $1 \leq r(x) \leq \bar{r}(E) < \infty$ . Через  $f^{(r(\cdot))}(x)$  мы обозначим дробную производную порядка  $r(x)$  функции  $f(x)$  в точке  $x$ , т. е.  $f_{r(\cdot)}(x) = f^{(r(x))}(x)$ . Обозначим через  $W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}(M, a, b)$  класс функций  $f = f(x)$ , дробная производная  $f^{(r(x)-1)}(x)$  которых абсолютно непрерывна на  $[a, b]$ ,  $f_{r(\cdot)}(x) \in L^{p(x)}([a, b])$  и  $\|f_{r(\cdot)}\|_{p(\cdot)}([a, b]) \leq M$ . Ставится задача о конструировании квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов от функций  $f(x) \in W_{p(\cdot)}^{r(\cdot)}([a, b])$ , учитывающих существенно переменное поведение ее гладкости.

ОБ АНАЛОГЕ НЕРАВЕНСТВА С. Н. БЕРНШТЕЙНА  
ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА  
В МЕТРИКЕ ПРОСТРАНСТВА  $L_{2\pi}^{p(x)}$

Т. Н. Шах-Эмиров (Россия, Махачкала; ЮМИ)

Пусть  $p(x) \geq 1$  —  $2\pi$ -периодическая измеримая функция, которая на  $[0, 2\pi]$  удовлетворяет условию Дини — Липшица

$$|p(x) - p(y)| \left| \ln \frac{1}{|x - y|} \right| \leq C, \quad x, y \in [0, 2\pi].$$

Через  $L_{2\pi}^{p(x)}$  обозначим пространство измеримых функций, для которых определена норма

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot)}([0, 2\pi]) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

Далее, пусть

$$S_h f = (S_h f)(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt$$

— оператор Стеклова для функции  $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ .

В настоящей работе доказано, что

$$\|(S_h T_n)'\|_{p(\cdot)} \leq C(p)n \|T_n\|_{p(\cdot)},$$

где  $T_n(x)$  — произвольный тригонометрический полином порядка  $n$ .

### Литература

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2.—М.: Мир, 1965.—537 с.
2. Натансон И. П. Конструктивная теория функций.—М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.—С. 123–126.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КРИВИЗНЫ РИЧЧИ  
ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК  
НА РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЛИ<sup>1</sup>

М. С. Чебарыков (Россия, Рубцовск; РИИ АлтГТУ)

Одной из важных проблем теории однородных римановых многообразий является задача определения возможных значений сигнатуры кривизны Риччи инвариантных метрик на заданном однородном пространстве.

Хорошо известен ряд принципиальных результатов в этом направлении. Например, Дж. Милнор в работе [4] определил возможные сигнатуры оператора Риччи левоинвариантных римановых метрик на всех группах Ли размерности, не превышающей 3. В статьях [1] и [2] А. Г. Кремлев и Ю. Г. Никоноров получили аналогичный результат для групп Ли размерности 4. Авторы работы [2] показали в частности, что оператор Риччи произвольной неунимодулярной разрешимой метрической алгебры Ли размерности  $\leq 4$  имеет как минимум два отрицательных собственных значения. В этой же работе была выдвинута гипотеза о том, что тем же свойством обладает оператор Риччи неунимодулярной разрешимой метрической алгебры Ли произвольной размерности. Эта гипотеза была частично (для алгебр размерности  $\leq 6$ ) доказана мною в работе [3]. Настоящий доклад посвящен результатам, являющимся непосредственным продолжением этих исследований.

В ходе работы над поставленной задачей была доказана

**Лемма.** Пусть неунимодулярная разрешимая алгебра Ли  $\mathfrak{s}$  имеет производную алгебру  $\mathfrak{n} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ . Предположим, что для любого дифференцирования  $T \in \text{Der}(\mathfrak{n})$  с ненулевым следом и произвольного скалярного произведения  $Q|_{\mathfrak{n}}$  на  $\mathfrak{n}$  выполнено неравенство

$$2\text{trace}(T^s \cdot T^s) \geq \text{trace}(T \cdot T'),$$

где  $T'$  — транспонированная матрица  $T$ ,  $T^s = \frac{1}{2}(T + T')$  — симметрическая часть дифференцирования  $T$ . Тогда для произвольного скалярного произведения  $Q$  на  $\mathfrak{s}$  оператор Риччи метрической алгебры Ли  $(\mathfrak{s}, Q)$  имеет по крайней мере два отрицательных собственных значения.

Данная лемма позволила доказать, что верна следующая

**Теорема.** Пусть  $(\mathfrak{s}, Q)$  — вполне разрешимая метрическая алгебра Ли. Тогда выполняется одно из трех взаимоисключающих утверждений:

- 1) алгебра Ли  $\mathfrak{s}$  коммутативна (т. е. кривизна Риччи нулевая);

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ Российской Федерации, проект № НШ-6613.2010.1, а также Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 02.740.11.0457.

2) алгебра Ли  $\mathfrak{s}$  метабелева с производной коммутативной алгеброй  $\mathfrak{n}$  размерности 1, а нетривиальный вектор  $x$  из  $Q$ -ортогонального дополнения к  $\mathfrak{n}$  в  $\mathfrak{s}$  таков, что оператор  $\text{ad}(x)$  нетривиален, симметричен относительно  $Q$  и имеет нулевой след (в этом случае оператор Риччи имеет одно отрицательное собственное значение, а остальные его собственные значения нулевые);

3) оператор Риччи  $\text{Ric}$  алгебры  $\mathfrak{s}$  имеет не менее двух отрицательных собственных значений.

В связи с выдвинутой в [2] гипотезой особый интерес представляет

**Следствие.** Пусть  $\mathfrak{s}$  — неунимодулярная вполне разрешимая алгебра Ли. Тогда для произвольного скалярного произведения  $Q$  на  $\mathfrak{s}$  оператор Риччи метрической алгебры Ли  $(\mathfrak{s}, Q)$  имеет по крайней мере два отрицательных собственных значения.

## Литература

1. Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // *Мат. тр.*—2008.—Т. 11, № 2.—С. 155–147.
2. Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // *Мат. тр.*—2009.—Т. 12, № 1.—С. 40–116.
3. Чебарыков М. С. О кривизне Риччи неунимодулярных разрешимых метрических алгебр Ли малой размерности // *Мат. тр.*—2010.—Т. 13, № 1.—С. 186–211.
4. Milnor J. Curvature of left invariant metrics on Lie groups // *Adv. Math.*—1976.—Vol. 21.—P. 293–329.

## ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ПОЧТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ<sup>1</sup>

Ю. Д. Чурбанов (Беларусь, Минск, БелГУ)

Пусть  $G/K$  — однородное пространство с инвариантной относительно действия группы Ли  $G$  структурой почти произведения  $P$ . Обозначим алгебры Ли групп  $G$  и  $K$  через  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{k}$  соответственно, касательное пространство к  $G/K$  в точке  $o = K$  через  $\mathfrak{m}$ . Обозначим так же ограничение оператора  $P$  на  $\mathfrak{m}$  через  $P_o$ , а собственные подпространства оператора  $P_o$ , отвечающие значениям 1 и -1 соответственно, через  $V$  и  $H$ .

Обозначим через  $(A, B, C)$  возможные включения скобок  $[V, V]_{\mathfrak{m}}$ ,  $[H, H]_{\mathfrak{m}}$ ,  $[V, H]_{\mathfrak{m}}$ , где на первом месте стоит распределение, в которое попадает подпространство  $[V, V]_{\mathfrak{m}}$ , на втором —  $[H, H]_{\mathfrak{m}}$ , на третьем —  $[V, H]_{\mathfrak{m}}$ . При этом будем обозначать символом  $\emptyset$ , если возможно попадание подпространства и в  $V$  и в  $H$ . Таким образом, например, тройка  $(V, H, \emptyset)$  обозначает, что  $[V, V]_{\mathfrak{m}} \subset V$ ,  $[H, H]_{\mathfrak{m}} \subset H$ ,  $[V, H]_{\mathfrak{m}} \subset V \oplus H$ . Если же  $A, B$  или  $C$  равны 0, то это означает, что скобка соответствующих подпространств равна 0. Всего возможно 64 таких троек. Кроме того, отождествим равенство

$$a_1 P_o[X, Y]_{\mathfrak{m}} = a_2 [X, Y]_{\mathfrak{m}} + a_3 [X, P_o Y]_{\mathfrak{m}} + a_4 [P_o X, Y]_{\mathfrak{m}} + a_5 [P_o X, P_o Y]_{\mathfrak{m}} + a_6 P_o [X, P_o Y]_{\mathfrak{m}} + a_7 P_o [P_o X, Y]_{\mathfrak{m}} + a_8 P_o [P_o X, P_o Y]_{\mathfrak{m}}$$

с набором  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$ , который назовем *сигнатурой* структуры  $P$ , где  $a_i$  — некоторые целые числа.

Описаны все 64 случая в терминах скобки Ли на касательном пространстве однородного пространства. А именно справедлива

**Теорема 1.** Пусть  $G/K$  — однородное пространство с инвариантной структурой почти произведения  $P$ . Имеют место следующие соотношения

$\epsilon$	(A,B,C)	сигнатура	$\epsilon$	(A,B,C)	сигнатура
1	(V,V,V)	(1,1,0,0,0,0,0,0)	33	(H,V,V)	(2,1,-1,-1,-1,0,0,0)
2	(V,V,H)	(1,0,0,0,1,0,0,0)	34	(H,V,H)	(2,-1,-1,-1,1,0,0,0)
3	(V,V,0)	(3,1,0,0,1,0,0,1)	35	(H,V,0)	(3,0,-1,-1,0,0,0,1)
4	(V,V, $\emptyset$ )	(3,1,0,0,1,0,0,-1)	36	(H,V, $\emptyset$ )	(1,0,-1,-1,0,0,0,-1)
5	(V,H,V)	(2,1,1,1,-1,0,0,0)	37	(H,H,V)	(1,0,0,0,-1,0,0,0)
6	(V,H,H)	(2,-1,1,1,1,0,0,0)	38	(H,H,H)	(1,-1,0,0,0,0,0,0)
7	(V,H,0)	(3,0,1,1,0,0,0,1)	39	(H,H,0)	(3,-1,0,0,-1,0,0,1)
8	(V,H, $\emptyset$ )	(1,0,1,1,0,0,0,-1)	40	(H,H, $\emptyset$ )	(1,-1,0,0,-1,0,0,-1)
9	(V,0,V)	(5,3,1,1,-1,1,1,-1)	41	(H,0,V)	(5,1,-1,-1,-3,1,1,-1)
10	(V,0,H)	(5,-1,1,1,3,1,1,-1)	42	(H,0,H)	(5,-3,-1,-1,1,1,1,-1)
11	(V,0,0)	(7,1,1,1,1,1,1,1)	43	(H,0,0)	(7,-1,-1,-1,-1,1,1,1)

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект № Ф10Р-132, в рамках совместного конкурса научных проектов РГНФ-БРФФИ.

12	(V,0,∅)	(3,1,1,1,1,1,-3)	44	(H,0,∅)	(3,-1,-1,-1,-1,1,-3)
13	(V,∅, V)	(3,3,1,1,-1,-1,-1,3)	45	(H,∅, V)	(3,1,-1,-1,-3,-1,-1,1)
14	(V,∅, H)	(3,-1,1,1,3,-1,-1,1)	46	(H,∅, H)	(3,-3, -1,-1,1,-1,-1,1)
ε	(A,B,C)	сигнатура	ε	(A,B,C)	сигнатура
15	(V,∅,0)	(5,1,1,1,1,-1,-1,3)	47	(H,∅,0)	(5,-1,-1,-1,-1,-1,-1,3)
16	(V,∅,∅)	(1,1,1,1,1,-1,-1,-1)	48	(H,∅,∅)	(1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1)
17	(∅, V, V)	(3,3,-1,-1,-1,1,1,1)	49	(0, V, V)	(5,3, -1,-1,-1,-1,-1,-1)
18	(∅, V, H)	(3,-1,-1,-1,3,1,1,1)	50	(0, V, H)	(5,-1,-1,-1,3, -1,-1,-1)
19	(∅, V, 0)	(5,1,-1,-1,1,1,1,3)	51	(0, V, 0)	(7,1,-1,-1,1,-1,-1,1)
20	(∅, V, ∅)	(1,1,-1,-1,1,1,1,-1)	52	(0, V, ∅)	(3,1,-1,-1,1,-1,-1,-3)
21	(∅, H, V)	(3,1,1,1,-3,1,1,1)	53	(0, H, V)	(5,1,1,1,-3,-1,-1,-1)
22	(∅, H, H)	(3,-3,1,1,1,1,1,1)	54	(0, H, H)	(5,-3,1,1,1,-1,-1,-1)
23	(∅, H, 0)	(5,-1,1,1,-1,1,1,3)	55	(0, H, 0)	(7,-1,1,1,-1,-1,-1,1)
24	(∅, H, ∅)	(1,-1,1,1,-1,1,1,-1)	56	(0, H, ∅)	(3,-1,1,1,-1,-1,-1,-3)
25	(∅, 0, V)	(2,1,0,0,-1,1,1,0)	57	(0, 0, V)	(3,1,0,0,-1,0,0,-1)
26	(∅, 0, H)	(2,-1,0,0,1,1,1,0)	58	(0, 0, H)	(3,-1,0,0,1,0,0,-1)
27	(∅, 0, 0)	(3,0,0,0,0,1,1,1)	59	(0, 0, 0)	(1,0,0,0,0,0,0,0)
28	(∅, 0, ∅)	(1,0,0,0,0,1,1,-1)	60	(0, 0, ∅)	(1,0,0,0,0,0,0,-1)
29	(∅, ∅, V)	(1,1,0,0,-1,0,0,1)	61	(0, ∅, V)	(2,1,0,0,-1,-1,-1,0)
30	(∅, ∅, H)	(1,-1,0,0,1,0,0,1)	62	(0, ∅, H)	(2,-1,0,0,1,-1,-1,0)
31	(∅, ∅, 0)	(1,0,0,0,0,0,0,1)	63	(0, ∅, 0)	(3,0,0,0,0,-1,-1,1)
32	(∅, ∅, ∅)	(1,1,0,0,0,0,0,0)	64	(0, ∅, ∅)	(1,0,0,0,0,-1,-1,-1)

**Теорема 2.** Пусть  $G/K$  — однородное пространство с инвариантной структурой почти произведения  $P$ , для которой  $[V, H]_{\mathfrak{m}} = 0$ . Если структура почти произведения  $P$  интегрируема, то имеют место совпадения следующих типов структур:

- 1)  $(V, V, 0) = (V, 0, 0) = (\emptyset, V, 0) = (\emptyset, 0, 0)$ ;
- 2)  $(V, H, 0) = (V, \emptyset, 0) = (\emptyset, \emptyset, 0) = (\emptyset, H, 0)$ ;
- 3)  $(0, V, 0) = (H, V, 0) = (H, 0, 0) = (0, 0, 0)$ ;
- 4)  $(H, H, 0) = (H, \emptyset, 0) = (0, H, 0) = (0, \emptyset, 0)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $G/K$  — однородное периодическое  $\Phi$ -пространство [1] порядка  $n \geq 5$  для которого  $\mathfrak{m}^\varphi \subset \mathfrak{k}$  ([2], с. 114). Тогда для любой существующей на нем канонической инвариантной структуры почти произведения [3]  $[V, H]_{\mathfrak{m}} = 0$ .

### Литература

1. Степанов Н. А. Основные факты теории  $\varphi$ -пространств // Изв. вузов. Математика.— 1967.—№ 3.—С. 89–95.
2. Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. Однородные пространства: теория и приложения. Монография.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
3. Балащенко В. В. Степанов Н. А. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных  $\Phi$ -пространствах // Мат. сб.—1995.—Т. 186.—№ 11.—С. 3–34.



## Секция II

### Комплексный анализ





О РАДИУСЕ ПОЛНОТЫ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ  
 С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Г. Г. Брайчев (Россия, Москва; МПГУ),  
 В. Б. Шерстюков (Россия, Москва; НИЯУ МИФИ)

Пусть  $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$  — последовательность комплексных чисел,  $\lambda_n \rightarrow \infty$ ;  $p_n$  — число вхождений точки  $\lambda_n$  в  $\Lambda$ ;  $E_{\Lambda} = \{z^k e^{\lambda_n z} : k = 0, 1, \dots, p_n - 1, \lambda_n \in \Lambda\}$  — порождаемая последовательностью  $\Lambda$  система (кратных) экспонент. Радиусом полноты  $R(\Lambda)$  системы  $E_{\Lambda}$  называется точная верхняя грань чисел  $R$  таких, что эта система полна в пространстве аналитических в круге  $|z| < R$  функций с топологией компактной сходимости. Известная проблема [1] нахождения точного выражения для радиуса полноты в общем случае до сих пор не имеет удовлетворительного решения. В связи с этим на первый план выдвигаются оценки величины  $R(\Lambda)$  в терминах классических характеристик распределения  $\Lambda$  на плоскости таких, например, как обычные и усредненные плотности:  $\underline{\Delta}(\Lambda) := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{\Lambda}(r)}{r}$ ,  $\overline{\Delta}^*(\Lambda) := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_{\Lambda}(r)}{r}$ , где  $n_{\Lambda}(r) = \sum_{|\lambda_n| \leq r} 1$ ,  $N_{\Lambda}(r) = \int_0^r \frac{n_{\Lambda}(t)}{t} dt$ .

В приложениях важен рассматриваемый всюду далее случай системы  $E_{\pm\Lambda}$  для положительной последовательности  $\Lambda$ . Благодаря недавним результатам Б. Н. Хабибуллина [2], с одной стороны, и точным решениям некоторых экстремальных задач для канонических произведений с нулями на луче из работ А. Ю. Попова [3] и авторов [4] и [5], с другой стороны, удастся установить ряд новых фактов о радиусе полноты  $R(\pm\Lambda)$ . Хорошо известны следующие неравенства, вытекающие из классических теорем теории целых функций:

$$2 \exp \{ \underline{\Delta}(\Lambda) / \overline{\Delta}(\Lambda) - 1 \} \leq R(\pm\Lambda) \leq \pi \overline{\Delta}(\Lambda). \quad (*)$$

Следуя работе [3], определим при фиксированном  $\beta > 0$  величину

$$R(\beta) := \inf \{ R(\pm\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \overline{\Delta}(\Lambda) = \beta \}.$$

Из результатов этой работы и определения  $R(\beta)$  вытекают оценки

$$0,73575 \dots \cdot \beta \leq R(\beta) < 0,8 \cdot \beta.$$

Определим также для  $\beta > 0$  и  $\alpha \in [0; \beta]$  величину

$$R(\alpha, \beta) := \inf \{ R(\pm\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}(\Lambda) \geq \alpha, \overline{\Delta}(\Lambda) = \beta \}.$$

Сочетание нижней оценки в (\*) с основными результатами работ [2] и [4] приводит к новым соотношениям:

$$\max \{ 2\beta \exp(\alpha/\beta - 1), \mu s(\alpha, \beta) \} \leq R(\alpha, \beta) \leq s(\alpha, \beta),$$

где  $\mu := \frac{\Gamma^2(3/4)}{\sqrt{\pi}} = 0,84721\dots$  (см. [2]),  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера, а

$$s(\alpha, \beta) = \pi\alpha + \max_{a>0} \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{a}} \ln \frac{1+a}{1+a(\alpha/\beta)^2} - 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{(\beta-\alpha)\sqrt{a}}{\beta+a\alpha} \right\}$$

(см. [4]). В терминах усредненной верхней плотности  $\Lambda$  точный результат о радиусе полноты принадлежит Б. Н. Хабибуллину [6]:

$$2\overline{\Delta}^*(\Lambda) \leq R(\pm\Lambda) \leq \pi\overline{\Delta}^*(\Lambda),$$

причем из точности оценки снизу следует равенство

$$R^*(\beta^*) := \inf \left\{ R(\pm\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \overline{\Delta}^*(\Lambda) = \beta^* \right\} = 2\beta^*.$$

Однако, точное значение величины

$$R^*(\alpha^*, \beta^*) := \inf \left\{ R(\pm\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}^*(\Lambda) \geq \alpha^*, \overline{\Delta}^*(\Lambda) = \beta^* \right\}$$

до сих пор не найдено. Наилучшие из известных оценок для нее вытекают из результатов Б. Н. Хабибуллина [2] и авторов [5]:

$$\max \{2\beta^*, \mu \cdot S(\alpha^*, \beta^*)\} \leq R^*(\alpha^*, \beta^*) \leq S(\alpha^*, \beta^*),$$

где  $\mu$  определено выше, а

$$S(\alpha^*, \beta^*) = \pi\alpha^* + \max_{a>0} \left\{ \frac{\beta^*}{\sqrt{a}} \ln \frac{1+aa_2^2}{1+aa_1^2} - 2\alpha^* \operatorname{arctg} \frac{a(a_2^2 - a_1^2)}{1+(aa_1a_2)^2} \right\}$$

и  $0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq e$  — корни уравнения  $a \ln \frac{e}{a} = \frac{\alpha^*}{\beta^*}$ .

## Литература

1. *Malliavin P., Rubel L. A.* On small entire functions of exponential type with given zeros // *Bull. Soc. Math. France.*—1961.—Vol. 89.—P. 175–206.
2. *Хабибуллин Б. Н.* Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции // *Мат. сб.*—2009.—Т. 200, № 2.—С. 129–158.
3. *Попов А. Ю.* О полноте в пространствах аналитических функций систем экспонент с вещественными показателями заданной верхней плотности // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика.*—1999.—№ 5.—С. 48–52.
4. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* О наименьшем возможном типе целых функций порядка  $\rho \in (0; 1)$  с положительными нулями // *Изв. РАН. Сер. мат.*—2011.—Т. 75, № 1.—С. 3–28.
5. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* Об экстремальных задачах для целых функций порядка  $\rho \in (0; 1)$  с положительными нулями // *Тезисы докл. Междунар. конф. «Теория приближений», посвященной 90-летию С. Б. Стечкина.*—Москва, 2010.—С. 12–14.
6. *Хабибуллин Б. Н.* О типе целых и мероморфных функций // *Мат. сб.*—1992.—Т. 183, № 11.—С. 35–44.

О КОЭФФИЦИЕНТАХ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ АНАЛИТИЧЕСКИХ  
 ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

В. А. Варзиев (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Пусть  $G$  — ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{C}$ . Определим  $(LB)$ -пространство  $A^{-\infty}(G)$  аналитических функций полиномиального роста вблизи границы  $G$ :

$$A^{-\infty}(G) := \{f \in A(G) \mid \exists n \in \mathbb{N} : \|f\|_n := \sup_{z \in G} |f(z)|(d_G(z))^n < \infty\},$$

где  $d_G(z) := \inf_{t \in \mathbb{C} \setminus G} |z - t|$ ,  $z \in G$ . Пусть  $K$  — выпуклый компакт в  $\mathbb{C}$ ; целая (в  $\mathbb{C}$ ) функция  $L$  удовлетворяет следующим условиям:

(i) существуют  $p_0 \in \mathbb{N}$ , постоянная  $C$  и последовательность  $R_k > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $R_k \uparrow +\infty$  такие, что

$$\log |L(z)| \leq H_G(z) + H_K(z) + p_0 \log(1 + |z|) + C, \quad z \in \mathbb{C},$$

и

$$\log |L(z)| \geq H_G(z) + H_K(z) - p_0 \log(1 + |z|), \quad |z| = R_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(ii)  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  — последовательность всех (попарно различных) нулей  $L$ , каждый нуль  $\lambda_j$  простой и

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log |L'(\lambda_k)| - H_G(\lambda_j) - H_K(\lambda_j)}{\log(1 + |\lambda_j|)} > -\infty.$$

( $H_G, H_K$  — опорные функции  $G$  и  $K$  соответственно.) Положим  $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$ ,  $\lambda, z \in \mathbb{C}$ .

Введем  $(LB)$ -пространство последовательностей

$$\Lambda^{-\infty}(G) := \left\{ c = (c_j) \subset \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} : \|c\|_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|c_j| \exp H_G(\lambda_j)}{(1 + |\lambda_j|)^n} < \infty \right\}.$$

Оператор представления  $\Pi(c) := \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{\lambda_j}$  линейно и непрерывно отображает  $\Lambda^{-\infty}(G)$  в  $A^{-\infty}(G)$ . Согласно [1] оператор  $\Pi : \Lambda^{-\infty}(G) \rightarrow A^{-\infty}(G)$  сюръективен, т. е.  $(e_{\lambda_j})_{j \in \mathbb{N}}$  — абсолютно представляющая система в  $A^{-\infty}(G)$ . В докладе идет речь об условиях, при которых оператор  $\Pi : \Lambda^{-\infty}(G) \rightarrow A^{-\infty}(G)$  имеет линейный непрерывный правый обратный. Ранее аналогичная «проблема коэффициентов» была решена для функций, аналитических в выпуклой ограниченной области в  $\mathbb{C}$  (без ограничений на их рост) в [2, 3].

**Теорема.** Следующие утверждения равносильны:

(i) Оператор  $\Pi : \Lambda^{-\infty}(G) \rightarrow A^{-\infty}(G)$  имеет линейный непрерывный правый обратный.

(ii) Существуют субгармонические в  $\mathbb{C}$  функции  $u_t, v_t, t \in \mathbb{C}$ , такие, что  $u_t(t) \geq 0$ ,  $v_t(z) \geq 0, t \in \mathbb{C}$ , и  $\forall n \exists m \exists C < \infty: \forall z, t \in \mathbb{C}$

$$(a) u_t(z) \leq H_G(z) - H_G(t) - n \log(1 + |z|) + m \log(1 + |t|) + C;$$

$$(b) v_t(z) \leq H_K(z) - H_K(t) - n \log(1 + |t|) + m \log(1 + |z|) + C.$$

Субгармонические функции  $u_t, t \in \mathbb{C}$ , как в (ii) (a), существуют для любой выпуклой ограниченной области  $G$ , а функции  $v_t, t \in \mathbb{C}$ , — в том и только в том случае, когда компакт  $K$  отличен от точки. Поэтому справедливо

**Следствие.** Оператор представления  $\Pi : \Lambda^{-\infty}(G) \rightarrow A^{-\infty}(G)$  имеет линейный непрерывный правый обратный тогда и только тогда, когда выпуклый компакт  $K$  отличен от точки.

### Литература

1. Abanin A. V., Le Hai Khoi, Nalbandyan Yu. S. Minimal absolutely representing systems of exponentials for  $A^{-\infty}(\Omega)$  // J. Approx. Theory.—2011.—(to appear.)
2. Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н. Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34.—С. 70–84.
3. Мелихов С. Н. Продолжение целых функций вполне регулярного роста и правый обратный для оператора представления аналитических функций рядами квазиполиномов // Мат. сб.—2000.—Т. 191, № 7.—С. 105–128.

УСТАНОВЛЕНИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ  
 УРАВНЕНИЕМ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА И БЕСКОНЕЧНОЙ  
 СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исраилов С. В. (Россия, Грозный; ЧГУ)

Если не считать работы [1], до сих пор отсутствует связь между теорией дифференциальных уравнений бесконечного порядка и теорией бесконечных систем дифференциальных уравнений.

Здесь обосновывается универсальный метод сведения дифференциального уравнения бесконечного порядка

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x), \dots) \quad (1)$$

с условием задачи типа Коши

$$y^{(k)} = d_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где  $P_k(x)$ ,  $f(x, y(x), y'(x), \dots)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , непрерывные функции в области  $D := \{|y^{(k)}| \leq l_k, x \in [a, b], k = 0, 1, \dots\}$ ,  $d_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , — данные числа к бесконечной системе дифференциальных уравнений с аналогичными условиями. Для этого между пространством  $C^\infty(a, b)$  функций  $y(x)$ , имеющих производные до бесконечного порядка на  $[a, b]$ , и пространством  $C_\infty(a, b)$  бесконечномерных непрерывных вектор функций  $\bar{y}(x) = (y_i(x))_{i=1}^\infty$ , имеющих непрерывные при  $x \in [a, b]$ , устанавливается взаимно однозначное соответствие с помощью линейных преобразований

$$y^{(i)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_{i+1,k} + \delta_{i+1,k}]y_k(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

путем задания невырожденной бесконечной матрицы  $A(x) = (a_{j,k}(x) + \delta_{i,k})_{j,k=1}^\infty$ ,  $\delta_{j,k} = 1$ ,  $k = i$ ;  $\delta_{j,k} = 0$ ,  $k \neq j$ , с непрерывно дифференцируемыми элементами. Допускается, что функции  $y_i(x)$ ,  $a_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$ , обеспечивают равномерную сходимость всех встречающихся функциональных рядов.

Последовательным дифференцированием каждого из равенства (3) и приравниванием с последующим получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} [a_{i+1,k}(x) + \delta_{i+1,k}]y'_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_{i+1,k}(x) + \delta_{i+1,k} - a'_{i,k}(x)]y_k(x), \quad i = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Теперь в первую часть уравнения (1) подставим выражения из (3), а в левую часть формулы

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_{1,k}(x) + \delta_{1,k}]y_k(x), \quad (5)$$

$$y^{(i)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_{i+1,k}(x) + \delta_{i+1,k}]y'_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [a'_{i+1,k}(x) + y_k(x)],$$

и после группировок получим еще одно уравнение

$$\sum_{k=1}^{\infty} [a_{0,k}(x) + \delta_{0,k}] y'_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k}(x) y_k(x) + f^*(x, y_1, y_2, \dots), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a_{0,k}(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} P_j(x) [a_{j,k}(x) + \delta_{j,k}], & C_{0,k}(x) &= - \sum_{j=1}^{\infty} P_{j,k}(x) a_{j,k}^*(x), \\ a_{j,k}^*(x) &= P_0(x) [a_{1,k}(x) + \delta_{1,k}], & j &= 0, \\ a_{j,k}^*(x) &= P_j(x) a'_{j,k}(x), & j &= 1, 2, \dots, \quad \delta_{0,1} = 1, \quad \delta_{0,k} = 0, \quad k = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} f^*(x, y_1(x), y_2(x), \dots) &= \\ &= f\left(x, \sum_{k=1}^{\infty} [a_{1,k}(x) + \delta_{1,k}] y_k(x), \sum_{k=1}^{\infty} [a_{2,k}(x) + \delta_{2,k}] y_k(x), \dots\right). \end{aligned}$$

После объединения (6) и (4) имеем бесконечную систему

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} [a_{j,k}(x) + \delta_{j,k}] y'_k(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} C_{j,k}(x) y_k(x) + f_j(x, y_1(x), y_2(x), \dots), \\ j &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $C_{j,k}(x) = a_{j+1,k}(x) + \delta_{j+1,k} - a'_{j,k}(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $f_0(x) = f^*(x, y_1(x), y_2(x), \dots)$ ,  $f_j(x, y_1(x), y_2(x), \dots) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , с бесконечным определителем из матрицы  $A^*(x) = (\tilde{a}_{i-1,k}(x) + \delta_{i-1,k})_{i,k=1}^{\infty}$ ,  $\tilde{a}_{i-1,k}(x) = a_{i-1,k}(x)$ ,  $k = i$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $\tilde{a}_{i-1,k}(x) = a_{i-1,k}(x)$ ,  $|i-1-k| > 1$ ,  $i \neq k$ ,  $i, k = 1, 2, \dots$ , который считается сходящимся и отличным от нуля, т. е. функции  $\tilde{a}_{i-1,k}(x)$ , как и функции  $\tilde{a}_{i+1,k}(x)$  удовлетворяют условиям Коха и Пуанкаре, что позволяет решить системы (5) и (8) относительно  $y'_1(x), y'_2(x), \dots$  и  $y_1(x), y_2(x), \dots$  при соответствующих ограничениях на правые части.

Поэтому из (8) получим

$$y'_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_{i,k}(x) y_k(x) + f_i^*(x, y_1(x), y_2(x), \dots), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{j,k}^*(x) &= \Delta^{-1}(x) \sum_{l=0}^{\infty} \Delta_{l,i}(x) C_{l,k}(x), \\ f^*(x, y_1(x), y_2(x), \dots) &= \Delta^{-1}(x) \sum_{l=0}^{\infty} \Delta_{l,k}(x) f_l(x, y_1(x), y_2(x), \dots), \\ i &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

$\Delta_{l,i}(x)$  — алгебраические дополнения определителя  $\Delta(x) = \det A^*(x)$ .

Если задача (1), (2) имеет решение  $y(x)$ , то согласно (3) при  $x = x_0$  получим систему алгебраических уравнений с неизвестными  $y_1(x_0), y_2(x_0), \dots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_{i,k}(x_0) + \delta_{i,k}] y_k(x_0) = d_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

которая также имеет единственное решение

$$y_i(x_0) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} A_{k,i}^*(x_0) d_{k-1} \right) (\det A(x_0))^{-1} = d_i^*, \quad i = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Это значит, что задача (1), (2) свелись к задаче (9), (12), которая исследована во многих работах [2, 3], что открывает новые пути для исследования краевых задач по отношению к уравнению (1).

### Литература

1. *Валеев К. Г., Жаутыков О. А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений.— Алма-Ата: Изд-во «Наука» Казахской ССР, 1974.—415 с.
2. *Исраилов С. В., Юшаев С. С.* Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.—Нальчик: Издат. центр «Эль-Фа», 2004.—445 с.
3. *Коробейник Ю. Ф.* Дифференциальные уравнения бесконечного порядка и бесконечные системы дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1970.—Т. 34.— С. 881–922.



ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СВЕДЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО  
 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО  
 ПОРЯДКА К БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ  
 ИНТЕГРАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Исраилов С. В., Сагитов А. А., Гацаева Р. С.-А.  
 (Россия, Грозный; ЧГУ)

Автор работы [1] для дифференциального уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(x) = f(x) \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами  $a_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , и данной функции  $f(x)$  на сегменте  $[a, b]$  записывает систему уравнений

$$\begin{cases} y'_k(x) = y_{k+1}(x), & k = 0, 1, 2, \dots; \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k y_k(x) = f(x), \end{cases} \quad (2)$$

положив  $y(x) = y_0(x)$ ,  $y'_0(x) = y_1(x)$ ,  $\dots$ ,  $y'_{n-1}(x) = y_n(x)$ ,  $\dots$ , которая является дифференциально-алгебраической, так как одно уравнение не содержит производных. Поэтому идет по другому пути для получения эквивалентной системы дифференциальных уравнений для поиска аналитического решения уравнения (1). Однако, систему (2) можно рассматривать как бесконечную систему интегрально-алгебраических уравнений относительно  $y_0(x), y_1(x), \dots$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} a_k y_k(x) = f(x); \\ y_i(x) = y_i(x_0) + \int_{x_0}^x y_{i+1}(s) ds, & i = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (2)$$

с бесконечным определителем из матрицы  $A = (a_{i,k} + \delta_{ik})_{i,k=1}^{\infty}$ ,  $\delta_{i,k} = 1$ ,  $i = k$ ;  $\delta_{i,k} = 0$ ,  $i \neq k$ ;  $a_{ii} = a_0 - 1$ ,  $i = 1$ ;  $a_{ii} = -1$ ,  $i = 2, 3, \dots$ ;  $a_{1i} = a_{i-1}$ ,  $i = 2, 3, \dots$ ;  $a_{i+1,i} = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ;  $a_{j,i} = 0$ ,  $i = j, j + 1, \dots$ ,  $j = 2, 3, \dots$ ;  $a_{j,i} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, j - 2$ ,  $j = 3, 4, \dots$

Если выполняется условие Коха и Пуанкаре [2] в отношении чисел  $a_{i,k}$ , то  $\det A$  сходится и нетрудно проверить равенство  $\det A = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n$ . Считаем, что  $\det A \neq 0$ . Тогда систему (3) можно решить при определенных ограничениях на правые части относительно  $y_0(x), y_1(x), \dots$

$$y_i(x) = f^*(x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_{i,k} y_{k-1}(x_0) + \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^{\infty} b_{i,k} y_n(s) ds, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где

$$f^*(x) = (\det A)^{-1} A_{0,i} f(x), \quad b_{i,k} = (\det A)^{-1} A_{k,i}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$A_{k,i}$  — алгебраические дополнения элементов  $\det A$ . Допустим, что приведенные замены устанавливают взаимнооднозначное соответствие между функциями  $y(x)$  из пространства непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  до бесконечного порядка функций  $C^\infty(a, b)$  и вектор-функциями  $\bar{y}(x) = (y_i(x))_{i=0}^\infty$  из пространства непрерывно дифференцируемых при  $x \in [a, b]$  вектор-функций  $C'^\infty(a, b)$  с соответствующими нормами и метриками.

Системы вида (4) и более сложных структур изучены в монографии [3] в плане доказательств теорем существования и единственности ограниченных решений многоточечных и функциональных краевых задач и обоснования приближенных методов их нахождения. По методу получения системы (4) видно, что каждое ее решение позволяет найти соответствующее решение уравнения (1) и выражения для его производных любого порядка. Если для уравнения (1) задать краевые условия задач Коши, Николетти и Валле-Пуссена или другие функциональные условия, то в силу сделанных замен можно найти им соответствующие условия для системы (4) и получить эквивалентную краевую задачу.

Предложенный здесь подход, как нам кажется, является еще одним шагом в долголетней попытке объединения изучения дифференциальных уравнений бесконечного порядка с более разработанной теорией бесконечных систем дифференциальных уравнений. К тому же он применим почти в неизменном виде и к дифференциальным уравнениям бесконечного порядка с переменными коэффициентами и нелинейными правыми частями в отличии от метода работы [1].

## Литература

1. Валеев К. Г., Жаутыков О. А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений.— Алма-Ата: Изд-во «Наука» Казахской ССР, 1974.—415 с.
2. Исраилов С. В., Юшаев С. С. Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.—Нальчик: Издат. центр «Эль-Фа», 2004.—445 с.
3. Коробейник Ю. Ф. Дифференциальные уравнения бесконечного порядка и бесконечные системы дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1970.—Т. 34.—С. 881–922.

## О РАЗРЕШИМОСТИ СОСТАВНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

**П. А. Иванов** (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть  $G$  — выпуклая область в  $\mathbb{C}$ , симметричная относительно 0;  $A(G)$  — пространство Фреше всех функций, аналитических в  $G$ . Для целых функций  $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ,  $b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$  типа 0 при порядке 1 положим

$$L(f)(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k f^{(k)}(-z), \quad z \in G, \quad f \in A(G).$$

Оператор  $L$  линейно и непрерывно отображает  $A(G)$  в  $A(G)$ .

Ю. А. Казьмин [1, 2] установил достаточные условия того, что оператор  $L$  — изоморфизм пространства функций, аналитических в круге  $|z| < R$  ( $0 < R \leq +\infty$ ). Ю. Ф. Коробейник [3] доказал необходимые и достаточные условия сюръективности и изоморфизма оператора  $L$  и более общих операторов (в обобщенных производных) в пространствах последовательностей, а также описал ядра таких операторов.

В настоящем докладе пойдет речь о свойствах оператора  $L$  в пространстве  $A(G)$ . Положим  $\eta(\lambda) := a(\lambda)a(-\lambda) - b(\lambda)b(-\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Доказаны (в терминах свойств функций  $\eta$ ) необходимые и достаточные условия сюръективности оператора  $L : A(G) \rightarrow A(G)$  и того, что  $L : A(G) \rightarrow A(G)$  является изоморфизмом; описано ядро  $L$ .

## Литература

1. Казьмин Ю. А. О полиномах Аппеля // Мат. заметки.—1969.—Т. 6, вып. 2.—С. 161–172.
2. Казьмин Ю. А. О разложениях в ряды по полиномам Аппеля // Мат. заметки.—1969.—Т. 5, вып. 5.—С. 509–520.
3. Коробейник Ю. Ф. Составные операторные уравнения в обобщенных производных и их приложения к последовательностям Аппеля // Мат. сб.—1977.—Т. 102(144), № 4—С. 475–498.

О ПРАВОМ ОБРАТНОМ К ОПЕРАТОРУ СВЕРТКИ  
 НА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ,  
 ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ СИЛЬНЫМ УТОЧНЕННЫМ ПОРЯДКОМ

О. А. Иванова (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть  $\rho(r)$  — сильный уточненный порядок для порядка  $\rho > 1$ ,  $h, k$  —  $\rho$ -тригонометрически выпуклые, ограниченные,  $2\pi$ -периодические функции, причем  $\inf_{\theta \in \mathbb{R}} [h(\theta) + h(\theta + \frac{\pi}{\rho})] > 0$ ,  $h$  — положительная функция, а  $h(\theta)r^\rho$  — выпуклая функция переменной  $z = re^{i\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{C}$ .

Сопряженным уточненным порядком [3] называется функция  $\rho^*(t) = \frac{\rho(t_1)}{\rho(t_1)-1}$ , где  $t_1$  — единственное решение уравнения  $r^{\rho(t)-1} = t$ ,  $t > 0$ .

Через  $[\rho^*(r), h^*(\theta)]$  обозначим пространство Фреше всех целых функций не выше нормального типа при уточненном порядке  $\rho^*(r)$  с индикатором, не превосходящим  $h^*(\theta) = \sup_{t \in \mathbb{C}} \{\operatorname{Re}(te^{i\theta}) - |t|^\rho h(\arg t)\}$ .

Согласно [2] существует специальная целая функция  $L$ , обладающая свойствами:

(i) для любого  $n \in \mathbb{N}$  найдется постоянная  $C > 0$  такая, что  $|L(z)| \leq C \exp(h(\arg z)|z|^{\rho(|z|)} + |z|^{\rho(|z|)}/n + k(\arg z)|z|^{\rho(|z|)})$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ;

(ii) существует последовательность  $R_s \uparrow \infty$  такая, что для любого  $m \in \mathbb{N}$   $\inf_{s \in \mathbb{N}} \inf_{|z|=R_s} |L(z)| \exp(-h(\arg z)|z|^{\rho(|z|)} + |z|^{\rho(|z|)}/m - k(\arg z)|z|^{\rho(|z|)}) > 0$ ;

(iii)  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  — последовательность всех (различных) нулей  $L$ , причем  $|\lambda_j| \leq |\lambda_{j+1}|$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , каждый из нулей  $\lambda_j$  простой и для любого  $m \in \mathbb{N}$   $\inf_{j \in \mathbb{N}} |L'(\lambda_j)| \exp(-h(\arg \lambda_j)|\lambda_j|^{\rho(|\lambda_j|)} + |\lambda_j|^{\rho(|\lambda_j|)}/m - k(\arg \lambda_j)|\lambda_j|^{\rho(|\lambda_j|)}) > 0$ .

Введем пространство Фреше числовых последовательностей:

$$\Lambda_1 = \operatorname{proj}_{\leftarrow n} \Lambda_{1,n};$$

$$\Lambda_{1,n} := \left\{ c = (c_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|c\|_n := \sum_{j \in \mathbb{N}} |c_j| \exp[(h(\arg \lambda_j) - \varepsilon_n)\lambda_j^{\rho(|\lambda_j|)}] < \infty \right\}.$$

Оператор представления

$$\Pi : \Lambda_1 \rightarrow [\rho^*(r), h^*(\theta)], \quad c \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{\lambda_j}$$

сюръективен [1]. Справедлива

**Лемма.** Пусть  $\rho(r)$  — сильный уточненный порядок для порядка  $\rho > 1$ , функции  $h, k, L$  такие, как выше.

(1) Если существует  $\alpha > 0$  такое, что  $h(\theta) - \alpha, k(\theta) - \alpha, \theta \in \mathbb{R}$ , являются  $\rho$ -тригонометрически выпуклыми функциями, то оператор представления  $\Pi : \Lambda_1 \rightarrow [\rho^*(r), h^*(\theta)]$  имеет линейный непрерывный правый обратный.

(2) Если функция  $k$  или  $h$  имеет хотя бы один интервал  $\rho$ -тригонометричности, то  $\Pi$  не имеет линейного непрерывного правого обратного.

Пусть  $a \in [\rho^*(r), g^*(\theta)]$  (функция  $g$  обладает всеми теми же свойствами, что и  $h$ ). Через  $\mathcal{F}^{-1}$  обозначим обратное преобразование Лапласа. Рассмотрим оператор свертки  $T_a$  с символом  $a$

$$T_a(f)(z) := \mathcal{F}^{-1}(a)(f(\cdot + z)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad f \in [\rho^*(r), h^*(\theta) + g(\theta)],$$

$T_a$  линейно и непрерывно отображает  $[\rho^*(r), h^*(\theta) + g(\theta)]$  в  $[\rho^*(r), h^*(\theta)]$ . Из леммы получаем следующий результат:

**Теорема.** Пусть  $\rho(r)$  — сильный уточненный порядок для порядка  $\rho > 1$ , функции  $a, g, h, k, L$  такие, как выше. Если существует  $\alpha > 0$  такое, что  $h(\theta) - \alpha, k(\theta) - \alpha, \theta \in \mathbb{R}$ , являются  $\rho$ -тригонометрически выпуклыми функциями, то любой сюръективный оператор свертки  $T_a$  имеет линейный непрерывный правый обратный.

## Литература

1. Абанин А. В. Распределение показателей представляющих систем обобщенных экспонент // Мат. заметки.—1991.—Т. 49, № 2.—С. 3–13.
2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.—634 с.
3. Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных.—М.: Мир, 1989.—348 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫСОТНОГО СООРУЖЕНИЯ:  
УСТОЙЧИВОСТЬ, КОЛЕБАНИЯ, ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

**В. А. Кабельков, А. Н. Кабельков, В. В. Нефедов**  
(Россия, Новочеркасск; ЮРГТУ(НПИ))

Получены уравнения движения высотного сооружения, подверженного действию неконсервативных нагрузок: ветровая нагрузка, сила Кармана. Уравнения выписаны по отношению к глобальной системе координат. Вариационными методами дифференциальные уравнения в частных производных сведены к системе обыкновенных нелинейных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами. Исследование устойчивости системы проведено на основе первого метода Ляпунова. Выявлены критические значения параметров, соответствующие поверхностям раздела областей устойчивости и неустойчивости. Амплитудно-частотные характеристики периодических режимов, отвечающих от основных состояний в окрестностях критических значений параметров системы, найдены на основе модифицированного метода Ляпунова — Шмидта. Для подавления колебаний и ограничения их амплитуд в высотное сооружение встроены системы управления. Значения управляющих воздействий получены на основе теории оптимального управления при квадратичном критерии качества

ПРОЕКТИВНОЕ ОПИСАНИЕ СЧЕТНЫХ ИНДУКТИВНЫХ  
 ПРЕДЕЛОВ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ  
 НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. В. Капитонова, С. Н. Мелихов  
 (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть  $h_n : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$  — положительные однородные степени 1 выпуклые функции такие, что  $h_n \leq h_{n+1}$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Предположим, что непрерывная неубывающая функция  $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  такова, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x) = +\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x)/x = 0$ . Положим  $\omega(z) := \omega(|z|)$ ,  $z \in \mathbb{C}^N$ .

Определим весовые функции

$$w_{nk}(z) := \exp(-h_n(\operatorname{Im} z) + k\omega(z)), \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad n, k \in \mathbb{N},$$

и введем весовые банаховы пространства непрерывных функций

$$C_{nk}(\mathbb{C}^N) := \left\{ f \in C(\mathbb{C}^N) \mid \|f\|_{nk} := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} |f(z)|w_{nk}(z) < +\infty \right\}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Положим  $WC(\mathbb{C}^N) := \operatorname{ind}_n \operatorname{proj}_k C_{nk}(\mathbb{C}^N)$ .

Ассоциированное с  $(w_{nk})_{n,k}$  семейство весов  $\overline{W}$  состоит из всех полунепрерывных сверху функций  $\overline{w} : \mathbb{C}^N \rightarrow [0, +\infty)$  таких, что для любого  $n$  существуют  $\alpha_n > 0$  и  $k = k(n)$ , для которых  $\overline{w} \leq \alpha_n w_{nk}$  на  $\mathbb{C}^N$ . Проективная оболочка индуктивного предела  $WC(\mathbb{C}^N)$  определяется следующим образом:

$$C\overline{W}(\mathbb{C}^N) := \left\{ f \in C(\mathbb{C}^N) \mid \|f\|_{\overline{w}} := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} |f(z)|\overline{w}(z) < +\infty \forall \overline{w} \in \overline{W} \right\}.$$

Локально выпуклая топология в  $C\overline{W}(\mathbb{C}^N)$  задается семейством преднорм  $\|\cdot\|_{\overline{w}}$ ,  $\overline{w} \in \overline{W}$ . Пространство  $WC(\mathbb{C}^N)$  непрерывно вложено в  $C\overline{W}(\mathbb{C}^N)$ . Из [1, теорема 1.3] следует, что индуктивная топология в  $WC(\mathbb{C}^N)$  совпадает с топологией, индуцированной из  $C\overline{W}(\mathbb{C}^N)$ .

В докладе идет речь об условиях алгебраического совпадения пространств  $WC(\mathbb{C}^N)$  и  $C\overline{W}(\mathbb{C}^N)$ . Согласно [2, утверждение 2.4, теорема 2.7], алгебраическое равенство  $WC(\mathbb{C}^N) = C\overline{W}(\mathbb{C}^N)$  равносильно выполнению условия (wQ):

$$\forall n \exists m, k \forall \mu, l \exists L, A : \forall |z| \geq A$$

$$(l - k)\omega(z) \leq h_m(\operatorname{Im} z) - h_n(\operatorname{Im} z)$$

или

$$h_\mu(\operatorname{Im} z) - h_m(\operatorname{Im} z) \leq (L - l)\omega(z).$$

Приводятся необходимые и достаточные условия того, что функции  $h_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $\omega$  удовлетворяют условию (wQ).

## Литература

1. Bierstedt K. D., Meise R., Summers W. H. A projective description of weighted inductive limits // Trans. Amer. Math. Soc.—1982.— Vol. 272.—P. 107–160.
2. Bierstedt K. D., Bonet J. Weighted (LF)-spaces of continuous functions // Math. Nachr.—1994.—Vol. 165.—P. 25–48.



КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА В КЛАССАХ  
СМИРНОВА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. Б. Климентов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Обозначим  $G$  ограниченную односвязную область в комплексной  $z$ -плоскости,  $z = x + iy$ ,  $i^2 = -1$ , со спрямляемой границей  $\Gamma = \partial G$ ;  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ ;  $A(z), B(z) \in L_s(\bar{G})$ ,  $s > 2$  (используются обозначения книги [1]), — заданные комплексные функции. Не ограничивая общности, будем считать, что точка  $z = 0$  расположена внутри  $G$ .

Рассмотрим в  $\bar{G}$  каноническую эллиптическую систему в комплексной записи

$$\partial_{\bar{z}}w + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0,$$

где  $w = w(z) = u(z) + iv(z)$  — искомая комплексная функция,  $u$  и  $v$  — ее действительная и мнимая части,  $\partial_{\bar{z}} = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$  — производная в смысле Соболева.

Решение  $w(z)$  этой системы называют *обобщенной аналитической функцией*.

В докладе рассматривается краевая задача Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функций в классах Смирнова  $E_p(A, B)$ ,  $p > 1$  [2]. Граница области  $G$  предполагается либо кривой Ляпунова, либо кривой Радона без точек заострения [3, 4]. Определение индекса задачи см. в [3, 4].

**Теорема 1.** Если  $\Gamma$  — кривая Ляпунова, то при неотрицательном индексе  $\varkappa \geq 0$  задача имеет точно  $2\varkappa + 1$  линейно независимых в вещественном смысле решений класса  $E_p(A, B)$ ,  $p > 1$ , а неоднородная задача разрешима в  $E_p(A, B)$  при любой правой части краевого условия из  $L_p(\Gamma)$ .

Если  $\varkappa < 0$ , то однородная задача не имеет в  $E_p(A, B)$  ненулевого решения, а неоднородная задача разрешима в  $E_p(A, B)$  единственным образом тогда и только тогда, когда выполнены  $-2\varkappa - 1$  (вещественных) условий на свободный член краевого условия.

**Теорема 2.** Если  $\Gamma$  — кривая Ляпунова или кривая Радона без точек заострения, а индекс задачи  $\varkappa^{(p)} \geq 0$ , однородная задача имеет точно  $\varkappa^{(p)} + 1$  линейно независимых в вещественном смысле решений класса  $E_p(A, B)$ ,  $p > 1$ , а неоднородная задача разрешима в  $E_p(A, B)$  при любой правой части краевого условия из  $L_p(\Gamma)$ .

Если  $\varkappa^{(p)} < 0$ , однородная задача не имеет ненулевых решений класса  $E_p(A, B)$ ,  $p > 1$ , а неоднородная разрешима единственным образом тогда и только тогда, когда выполнены  $-\varkappa^{(p)} - 1$  (вещественных) линейных условий на свободный член краевого условия.

Отметим, что при  $\varkappa^{(p)} = -1$  это означает однозначную безусловную разрешимость неоднородной задачи.

## Литература

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—628 с.
2. Климентов С. Б. Классы Смирнова обобщенных аналитических функций // Изв. вузов, Сев.-Кавк. регион. Сер. Естеств. науки.—2005.—№ 1.—С. 13–17.
3. Климентов С. Б. Задача Гильберта для голоморфных функций в классах Смирнова // Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2010.—С. 252–263.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 4.)
4. Климентов С. Б. Задача Гильберта для голоморфных функций в классах Смирнова в области с радоновской границей // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Сер. Естеств. науки.—2011.—№ 3.

МИНИМАЛЬНЫЕ АБСОЛЮТНО ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ  
 ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ  
 С ЗАДАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ГЛАДКОСТЬЮ

С. В. Петров (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)  
 А. В. Абанин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Обозначим через  $V$  семейство всех неубывающих выпуклых на  $[0, \infty)$  функций  $\varphi$ , для которых  $t = o(\varphi(t))$  при  $t \rightarrow \infty$ . Двойственная с  $\varphi \in V$  по Юнгу функция обозначается символом  $\varphi^*$ . Для выпуклой ограниченной области  $G$  комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  и  $\varphi$  из  $V$  образуем банахово пространство

$$A_\varphi(\bar{G}) := \left\{ f \in A^\infty(\bar{G}) : \|f\|_\varphi = \sup_{z \in G} \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|f^{(k)}(z)|}{k! e^{\varphi(k)}} < \infty \right\},$$

где  $A^\infty(\bar{G})$  — пространство всех функций, аналитических в  $G$  и бесконечно дифференцируемых вплоть до ее границы. Далее, для последовательности положительных чисел  $(p_n)_{n=1}^\infty$  с  $p_n \uparrow p \in (0, \infty]$  положим  $\varphi_n(t) := p_n \varphi(t/p_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) и образуем пространство  $A_{(\varphi)}^p(\bar{G}) = \bigcap_{n=1}^\infty A_{\varphi_n}(\bar{G})$ , наделенное топологией, задаваемой набором норм  $(\|\cdot\|_{\varphi_n})_{n=1}^\infty$ .

В [1] было доказано, что в тех случаях, когда сопряженное к  $A_{(\varphi)}^p(\bar{G})$  пространство допускает, так называемое, экспоненциальное описание, существуют абсолютно представляющие системы (АПС) экспонент в  $A_{(\varphi)}^p(\bar{G})$ . Поскольку в пространствах такого типа ни одна АПС экспонент не может составлять базиса [2], то любая АПС экспонент в  $A_{(\varphi)}^p(\bar{G})$  заведомо переполнена. В связи с этим традиционно ставится вопрос о минимальных, в определенном смысле, АПС (см. [3, 4]). В настоящей работе этот вопрос изучается для пространств  $A_{(\varphi)}^p(\bar{G})$ . Предварительно получено (при дополнительных ограничениях на  $\varphi$ ) более простое по сравнению с известным из [1] представление сильного сопряженного с  $A_{(\varphi)}^p(\bar{G})$  пространства как пространства целых функций

$$E_{(\varphi^*)}^p(G) = \left\{ g \in H(\mathbb{C}) : \exists n \in \mathbb{N} : \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{|g(\lambda)|}{\exp(H_G(\lambda) + p_n \varphi^*(\ln |\lambda|))} < \infty \right\},$$

наделенного естественной топологией внутреннего индуктивного предела (здесь и далее  $H_G(\lambda)$  — опорная функция  $G$ ).

Пусть  $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$  — последовательность попарно различных комплексных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности и  $\mathcal{E}(\Lambda) := (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$  — соответствующая ей система экспонент. В нашем случае общее понятие минимальной системы элементов, введенное в [4], интерпретируется так.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система  $\mathcal{E}(\Lambda)$  называется *минимальной* для  $A_{(\varphi)}^p(\bar{G})$ , если существует такая нетривиальная целая функция  $L$ , которая удовлетворяет следующим условиям:

- (a)  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists R_\varepsilon \geq 1): \ln |L(\lambda)| \leq H_G(\lambda) + (p + \varepsilon)\varphi^*(\ln |\lambda|), (|\lambda| \geq R_\varepsilon);$   
 (b)  $L$  имеет в точках  $\lambda_k$  простые нули (она может иметь нули произвольной кратности в других точках).

Совокупность всех таких функций обозначим символом  $\mathcal{L}_{\varphi^*}^p(G)$ .

Обозначим дополнительно через  $\widetilde{W}$  подкласс тех весов  $\varphi \in V$ , для которых преобразование Лапласа функционалов устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным к  $A_{(\varphi)}^p(\bar{G})$  пространством и  $E_{(\varphi^*)}^p(G)$  (для любой ограниченной выпуклой области  $G$ ), и удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t) - q\varphi(t/q)}{t \ln t} = +\infty \quad (\forall q > 1).$$

На основании общих результатов из [4] получены следующие необходимые и достаточные условия, при которых минимальная система экспонент является АПС в  $A_{(\varphi)}^p(\bar{G})$ .

**Теорема.** Пусть  $p \in (0, \infty)$ ,  $\varphi$  — вес из  $\widetilde{W}$ ,  $\mathcal{E}(\Lambda)$  — минимальная для  $A_{(\varphi)}^p(\bar{G})$  система и  $L \in \mathcal{L}_{\varphi^*}^p(G)$ . Для того чтобы  $\mathcal{E}(\Lambda)$  была АПС в  $A_{(\varphi)}^p(\bar{G})$ , необходимо, чтобы для некоторого нетривиального мультипликатора  $\mu$  пространства  $E_{(\varphi^*)}^p(G)$  выполнялись условия:

$$A) (\exists r_n \uparrow +\infty): \left| \frac{\mu(\lambda)}{L(\lambda)} \right| \leq e^{-H_G(\lambda) - p_n \varphi^*(\ln |\lambda|)}, (|\lambda| = r_n, n \in \mathbb{N});$$

$$B) \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi^*(\ln |\lambda_k|)} \left[ \ln \left| \frac{\mu(\lambda_k)}{L(\lambda_k)} \right| + H_G(\lambda_k) \right] \leq -p.$$

Эти же условия достаточны для того, чтобы  $\mathcal{E}(\Lambda)$  была АПС в  $A_{(\varphi)}^p(\bar{G})$ , если они выполняются для некоторого делителя пространства  $E_{(\varphi^*)}^p(G)$ .

**Следствие.** Пусть  $p \in (0, \infty)$ ,  $\varphi$  — вес из  $\widetilde{W}$ ,  $\mathcal{E}(\Lambda)$  — минимальная для  $A_{(\varphi)}^p(\bar{G})$  система и  $L \in \mathcal{L}_{\varphi^*}^p(G)$ . Если выполнены условия:

$$A) (\exists r_n \uparrow +\infty): \ln |L(\lambda)| \geq H_G(\lambda) + p_n \varphi^*(\ln |\lambda|), (|\lambda| = r_n, n \in \mathbb{N});$$

$$B) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |L'(\lambda_k)| - H_G(\lambda_k)}{\varphi^*(\ln |\lambda_k|)} = p,$$

то система  $\mathcal{E}(\Lambda)$  является АПС в  $A_{(\varphi)}^p(\bar{G})$ .

## Литература

1. Петров С. В. Существование абсолютно представляющих систем экспонент в пространствах аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки.—2010.—№ 5.—С. 25–31.
2. Абанин А. В., Петров С. В. Свойства абсолютно представляющих систем экспонент и простейших дробей в пространствах аналитических функций с заданной граничной гладкостью // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки.—2011.—(принята к печати).
3. Коробейник Ю. Ф. Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1980.—Т. 44, № 5.—С. 1066–1114.
4. Абанин А. В. Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы // Мат. заметки.—1995.—Т. 57, № 4.—С. 483–497.

## К ЗАДАЧАМ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ

Е. Г. Прилепкина (Россия, Владивосток; ИПМ ДВО РАН)

Задачи об экстремальном разбиении заключаются в определении верхней грани произведений вида  $R_1^{\alpha_1} R_2^{\alpha_2} \dots R_n^{\alpha_n}$ , где  $R_k$  — некоторые внутренние радиусы попарно неналегающих областей  $B_k$ , и числа  $\alpha_k$  удовлетворяют определенным условиям. Эти задачи восходят к М. А. Лаврентьеву и имеют богатую историю. Естественным обобщением внутреннего радиуса является радиус Робена [1].

Пусть область  $B$  ограничена конечным числом аналитических жордановых кривых и  $\Gamma$  — замкнутое подмножество  $\partial B$ , состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент. Функцией Робена с полюсом в точке  $z_0 \in B$  называется функция  $g(z) = g_B(z, z_0, \Gamma)$ , удовлетворяющая условиям:

- 1)  $g(z)$  непрерывная на  $\bar{B} \setminus \{z_0\}$ , непрерывно дифференцируемая на  $\bar{B} \setminus (\Gamma \cup \{z_0\})$  и гармоническая в  $B \setminus \{z_0\}$ ;
- 2)  $g(z) = 0$  при  $z \in \Gamma$ ;
- 3)  $\partial g / \partial n = 0$  при  $z \in \partial B \setminus (\Gamma \cup \{z_0\})$ ,
- 4)  $g(z) + \log |z - z_0|$  — гармоническая функция в окрестности точки  $z_0$  (здесь  $\partial g / \partial n$  означает дифференцирование вдоль внешней нормали к границе).

В случае произвольной конечносвязной области  $B$  функция Робена определяется с помощью конформного и однолистного отображения  $f$  на аналитическую жорданову область.

*Радиусом Робена* называется величина

$$r(B, \Gamma, z_0) := \exp \lim_{z \rightarrow z_0} ((g_B z, z_0, \Gamma) + \log |z - z_0|).$$

В настоящем докладе мы рассматриваем как верхние, так и нижние оценки для произведений радиусов Робена неналегающих областей. Большое внимание уделяется изучению случаев равенства. В качестве примера приведем следующий результат.

**Теорема.** Пусть непересекающиеся области  $B_1, B_2$  лежат в единичном круге  $U$ ,  $z_1 \in B_1$  и  $z_2 \in B_2$ , а граничные множества  $\Gamma_i \subset \partial B_i$  удовлетворяют условиям:  $\Gamma_i \subset \partial U$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда справедливо неравенство

$$r(B_1, \Gamma_1, z_1) r(B_2, \Gamma_2, z_2) \geq \frac{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)|1 - \bar{z}_1 z_2|^2}{|z_1 - z_2|^2}. \quad (1)$$

Равенство в (1) достигается тогда и только тогда, когда  $\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2 = \bar{U}$ ,  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial U$  и множество  $(\partial B_i) \cap U$ ,  $i = 1, 2$ , представляет из себя лежащую в круге  $U$  часть окружности или прямой, заданную параметрическим уравнением

$$z = z(t) = \frac{e^{i\varphi}(a + it) + z_1(1 + ati)}{1 + ati + e^{i\varphi}(a + it)\bar{z}_1},$$

где  $t$  — вещественный параметр,  $\varphi = \arg((z_2 - z_1)/(1 - \bar{z}_1 z_2))$ ,  $r = |(z_2 - z_1)/(1 - \bar{z}_1 z_2)|$ ,  $a = (1 - \sqrt{1 - r^2})/r$ .

### Литература

1. Дубинин В. Н., Кирилова Д. А. К задачам об экстремальном разбиении // Зап. науч. семин. ПОМИ.—2008.—Т. 357.—С. 54–74.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА  
ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ И БЕРГМАНА

В. Г. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),  
Г. Ю. Рябых (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Пространством Бергмана  $H'_p$  (Харди  $H_p$ ) назовем множество функций  $\varphi(z)$ , аналитических в  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  с конечным интегралом  $\iint_D |f(z)|^p d\sigma(z)$  ( $\int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^p |d\zeta|$ ),  $0 < p < \infty$ ,  $\mathbb{T} = \{\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1\}$ .

**Теорема 1.** Пространство  $H'_p$  ( $H_p$ ) равномерно выпукло при  $1 < p < \infty$  по норме  $L_p$ . При  $p = 1$  оба пространства не являются равномерно выпуклыми;  $H'_1$  строго нормировано, а  $H_1$  не является строго нормированным.

Аналитическое представление линейного функционала над пространством  $H'_1$  описано в [1], а над  $H'_p$ ,  $1 < p < \infty$ , — в [9].

Назовем функцию  $f$  экстремальной функцией (э. ф.) для функционала  $l \in B^*$  при  $l(f) = \|l\|$ ,  $\|f\| \leq 1$ .

Достаточным условием существования э. ф. для  $l_\omega \in H_1^*$  ( $l_\omega(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} d|\zeta|$ ) является принадлежность  $\omega$  пространству  $VMO \cap H_2$  [2], а для  $l_\omega \in (H'_1)^*$  — пространству  $C(\bar{D})$  [9]. Э. ф. линейного функционала из  $(H'_1)^*$ , если существует, то единственна [2]; для  $l_\omega \in H_1^*$  это не так. В [2, 3] приводится необходимое и достаточное условие существования э. ф. в  $H_1$ .

В [2] найдено линейное интегральное уравнение, через решения которого выражается любая э. ф. из  $H_1$ . В [10] изучаются качественные свойства э. ф. в  $H_1$ , исследование качественных свойств в  $H_p$ ,  $1 < p < \infty$ , проводится в [11].

**Теорема 2.** Для каждой функции  $\varphi \in H'_1$  можно найти функции  $\Phi, \Psi \in H'_2$ , так что  $\varphi(z) = \Phi(z)\Psi(z)$ .

**Теорема 3.** Если  $f$  — э. ф. функционала над  $H'_1$ , то  $f = \Phi\Psi$ , где  $\Phi, \Psi$  являются решениями системы линейных интегральных уравнений

$$\overline{\Psi(t)} = \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\Phi(z) \bar{\omega}(z) d\sigma(z)}{(1-zt)^2},$$
$$\overline{\Phi(t)} = \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\Psi(z) \bar{\omega}(z) d\sigma(z)}{(1-z\bar{t})^2}$$

Качественные свойства э. ф. в пространствах  $H'_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , изучались в [12].

Общий вид линейного функционала над  $H'_p$  ( $0 < p < 1$ ) найден в [4], а над  $H_p$  ( $0 < p < 1$ ) — в [5]. Общий вид линейного отображения из  $H'_1$  в себя получен в [1]. Линейные отображения из  $H'_p$  в  $H'_q$ ,  $0 < p, q < 1$ , получены Бурчаевым Х. Х. в его кандидатской диссертации (1981).

Проекторы из  $L_1$  в  $H'_1$  — в [6, 7].

## Литература

1. *Рябых В. Г.* Линейные ограниченные отображения в  $A_p$  // Изв. СКНЦ ВШ.—1982.— № 3.—С. 37–41.
2. *Рябых В. Г.* Необходимое и достаточное условие существования экстремальных функций линейного функционала над  $H_1$  и их представление // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 6.—С. 1351–1360.
3. *Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Норма линейного функционала над пространством  $H_1$  // Вестн. ТГПИ. Физ.-мат. и естеств. науки.—2008.—№ 1.—С. 59–64.
4. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г.* Общий вид линейного функционала в метрическом пространстве  $H'_p$ ,  $0 < p < 1$  // Сиб. мат. журн.—1974.—№ 730-75.
5. *Duren P. L., Romberg B., Shields H.* Linear function on  $H_p$  spaces with  $0 < p < 1$  // J. für die reine und angew. Math.—1969.—№ 23.—Р. 33–48.
6. *Джрбашян М. М.* К проблеме представимости аналитических функций // Сообщения ин-та математики и механики АН АрмССР.—1948.—Вып. 2.—С. 3–30.
7. *Рябых В. Г.* О коэффициентах аналитических функций, интегрируемых по площади // Материалы XIV научн. студ. конф.—Р/нД: Изд-во РГУ, 1961.
8. *Захарюта В. П., Юдович В. И.* Общий вид линейного функционала в  $H'_p$  // Успехи мат. наук.—1964.—Т. 19, № 2(116).—С. 139–142.
9. *Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Экстремальные задачи в пространствах аналитических функций // Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям.—Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2010.—С. 205–215.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 4).
10. *Carleson L., Jacobs S.* Best approximation by analytic functions // Arciv Math.—1972.— № 10.—Р. 219–229.
11. *Рябых В. Г.* Приближение неаналитических функций аналитическими // Мат. сб.—2006.—Т. 197, № 2.—С. 87–96.
12. *Рябых В. Г.* Экстремальные задачи для суммируемых аналитических функций // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 3.—С. 212–217.



## СВОЙСТВА БАЗИСОВ ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ

В. П. Кондаков, П. С. Сергунин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Согласно классическому результату Дынина и Митягина (см. [1]), всякий равномерно непрерывный базис ядерного локально выпуклого пространства является абсолютным. Приведём дополнительные факты, связанные с базисами в ядерных пространствах.

В пространстве Фреше  $A_R$  функций, аналитических в круге  $|z| < R$ , где  $0 < R < \infty$ , с естественной топологией равномерной сходимости на компактах, можно рассматривать более слабую топологию поточечной сходимости, которая определяет ядерное, но не метризуемое локально выпуклое пространство.

**Теорема 1.** Система степеней  $(z^n)$  является базисом в пространстве  $(A_R, s)$ , у которого коэффициентные функционалы не являются непрерывными в топологии  $s$ , т. е.  $(z^n)$  не будет шаудеровским.

Базис  $(e_n)$  локально выпуклого пространства  $E$  называют квазиэквивалентным базису  $(f_m)$  локально выпуклого пространства  $F$ , если существуют: последовательность  $(m(n))$  натуральных чисел без повторений, числа  $\lambda_n > 0$ ,  $n \in N$ , такие, что соответствие  $Te_n = \lambda_n f_{m(n)}$ ,  $n \in N$ , определяет изоморфизм в  $F$ .

**Теорема 2.** Базисы пространства  $A_R$  с исходной топологией, квазиэквивалентные базису  $(z^n)$  в топологии  $s$ , также будут базисами в  $(A_R, s)$ , не являющимися шаудеровскими.

**Теорема 3.** В ядерных пространствах, не являющихся пространствами Фреше, существуют условные базисы.

В качестве такого базиса можно взять условный базис неядерного пространства Кёте — Фреше  $E$  и рассмотреть его в ядерном пространстве  $(E, \sigma(E, E'))$ . Свойство базисности сохраняется в слабой топологии  $\sigma(E, E')$ .

## Литература

1. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства.—М.: Мир, 1967.—266 с.

О ТИПЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ПОРЯДКА МЕНЬШЕ  
 ЕДИНИЦЫ И ПОЛНОТЕ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ

О. В. Шерстюкова (Россия, Москва; НИЯУ МИФИ)

Пусть  $f(z)$  — целая функция с положительными нулями  $\Lambda = \Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ . Обозначаем, как обычно,

$$\sigma_\rho(f) := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)|$$

ее тип при порядке  $\rho > 0$ . Пусть, далее,

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho}, \quad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho}$$

суть верхняя и нижняя  $\rho$ -плотности, а  $h_\rho(\Lambda) := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1}^\rho - \lambda_n^\rho)$  —  $\rho$ -шаг последовательности  $\Lambda$ . Всегда выполняется неравенство  $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)h_\rho(\Lambda) \leq 1$ .

В недавней работе [1] для типа при порядке  $\rho \in (0; 1)$  целой функции  $f(z)$  с положительными нулями  $\Lambda$  была установлена следующая точная оценка:

$$\sigma_\rho(f) \geq \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \left\{ \frac{\pi k}{\sin \pi \rho} + \max_{a>0} \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right\},$$

где  $k = \underline{\Delta}_\rho(\Lambda)/\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \in [0, 1]$ . При  $k = 0$  (т. е.  $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0$ ) из нее получается основной результат статьи [2], заключенный в точном неравенстве

$$\sigma_\rho(f) \geq \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \max_{a>0} a^{-\rho} \ln(1 + a).$$

В заметке автора [3] продолжено изучение целых функций  $f(z)$  порядка меньше единицы с  $\Lambda = \Lambda_f \subset \mathbb{R}_+$  и доказано, что одновременный учет величин  $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)$  и  $h_\rho(\Lambda)$  приводит к оценке

$$\sigma_\rho(f) \geq h_\rho^{-1}(\Lambda) \sup_{a>0} \left\{ a^{-\rho} \ln \frac{1+a}{(1+as^{1/\rho})^{1/s}} + \int_a^{as^{1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \right\},$$

где  $s = (1 - \overline{\Delta}_\rho(\Lambda)h_\rho(\Lambda))^{-1}$ .

Справедлив такой общий результат, содержащий в себе приведенные выше.

**Теорема.** Пусть заданы четыре числа  $\rho \in (0; 1)$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha \in [0, \beta]$ ,  $h \in [0, \beta^{-1}]$ . Для любой целой функции  $f(z)$  с нулевым множеством  $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$  таким, что  $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$ ,  $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha$ ,  $h_\rho(\Lambda) \geq h$ , выполняется оценка

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\pi\alpha}{\sin \pi \rho} + \sup_{a>0} \left\{ \int_{a(\alpha/\beta)^{1/\rho}}^{as^{1/\rho}} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha \tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + h^{-1} \int_a^{as^{1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right\},$$

в которой  $s = \frac{1-\alpha h}{1-\beta h}$ . Существует целая функция с  $\rho$ -плотностями нулей  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно и  $\rho$ -шагом  $h$ , доставляющая в эту оценку равенство.

Из этой теоремы вытекает наличие формулы для вычисления  $\rho$ -типа целой функции  $f(z)$  с  $\Lambda = \Lambda_f \subset \mathbb{R}_+$  в ситуации  $\rho \in (0; 1)$  и  $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)h_\rho(\Lambda) = 1$ :

$$\sigma_\rho(f) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \overline{\Delta}_\rho(\Lambda).$$

Случай  $\rho = 1/m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ ) приведенной теоремы позволяет также получать новые оценки для радиуса полноты систем экспонент с показателями, расположенными симметрично на лучах  $\arg z = 2\pi j/m$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$ .

### Литература

1. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. О наименьшем возможном типе целых функций порядка  $\rho \in (0; 1)$  с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. мат.—2011.—Т. 75, № 1.—С. 3–28.
2. Попов А. Ю. Наименьший возможный тип при порядке  $\rho < 1$  канонических произведений с положительными нулями заданной верхней  $\rho$ -плотности // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика.—2005.—№ 1.—С. 31–36.
3. Шерстюкова О. В. О влиянии шага последовательности нулей целой функции порядка меньше единицы на величину ее типа // Наука в вузах: математика, информатика, физика, образование.—М.: МПГУ.—2010.—С. 192–195.

## СТЕПЕННЫЕ ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

М. А. Шубарин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В работах В. П. Захарюты и Т. Б. Шагиняна ([3], в последующем пространстве этого типа рассматривались, например, в [4–6]) введен широкий класс пространств Кёте.

Пусть дана бесконечная матрица  $A = (a_{p,n})_{p,n \geq 1}$  такая, что  $0 < a_{p,n} \leq a_{p+1,n}$ . Пространством Кёте называют векторное пространство

$$K(A) := \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1} : \|x\|_p := \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| a_{p,n} < +\infty \forall p \right\}.$$

Набор норм  $(\|\cdot\|_p)$  задает в  $K(A)$  топологию пространства Фреше (т. е. полного метризуемого локально выпуклого пространства).

Пространство Кёте  $K(A)$  называют *степенным пространством Кёте*, если матрица  $A = (a_{p,n})$  допускает представление  $a_{p,n} = \exp(h_p(n)a_n)$ , в котором  $a = (a_n)$  — произвольная положительная числовая последовательность, а семейство последовательностей  $h = (h_p(\cdot))$  удовлетворяет следующему условию:

$$(\forall p)(\exists q)(\exists C > 0)(\forall n) \quad C^{-1} < h_q(n) - h_p(n) < C.$$

Определение степенного пространства Кёте может быть сформулировано в терминах инвариантных классов  $(\Omega_j)$ ,  $j = 1, 2$ .

Пусть  $X$  — пространство Фреше, топология в котором задается набором норм  $(\|\cdot\|_p)$ . Говорят (см., например, [6]), что это пространство имеет тип  $(\Omega_1)$  или  $(\Omega_2)$ , если выполняется соответственно условие (1) или (2):

$$\begin{aligned} & (\forall p_0)(\exists p)(\forall p_1)(\exists \alpha \in (0, 1))(\exists C > 0) \\ & \|x'\|_p \leq C(\|x'\|_{p_0})^{1-\alpha}(\|x'\|_{p_1})^\alpha \quad (\forall x' \in X'), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} & (\exists p_0)(\forall p)(\exists p_1)(\exists \alpha \in (0, 1))(\exists C > 0) \\ & \|x\|_p \leq C\|x\|_{p_0}^\alpha \|x\|_{p_1}^{1-\alpha} \quad (\forall x \in X). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $(\|\cdot\|_p)$  — набор сопряженных норм в  $X'$ :  $\|x'\|_p := \sup\{x'(x) : \|x\|_p \leq 1\}$ .

**Теорема.** Шварцевское пространство Кёте  $X$  тогда и только тогда изоморфно подходящему степенному пространству Кёте тогда и только тогда, когда  $X \in (\Omega_1) \cap (\Omega_2)$ .

Пространства Фреше будем называть *степенными пространствами Фреше*, если оно содержится в  $(\Omega_1) \cap (\Omega_2)$ .

**Теорема.** Пространство Фреше  $X$  тогда и только тогда является степенным пространством Фреше, когда существует набор норм  $(\|\cdot\|_p)$ , задающий в  $X$  исходную топологию и такой, что

$$\begin{aligned} & (\forall q \in [1, \infty])(\forall p_0 < p < p_1)(\exists \tau_0, \tau_1 \in (0, 1)) \\ & X_{p_1} \subset (X_{p_0}, X_{p_1})_{\tau_1, q} \subset X_p \subset (X_{p_0}, X_{p_1})_{\tau_0, q} \subset X_{p_0}. \end{aligned}$$

Здесь  $X_s$  — пополнение  $X$  по норме  $\|\cdot\|_s$ ;  $(Y_0, Y_1)_{\tau, q}$  — пространство, построенное по паре банаховых пространств  $[Y_0, Y_1]$  методом вещественной интерполяции.

Пусть  $D$  — область в  $\mathbb{R}^n$ . Будем называть функцию  $F$  весовой (другие определения весовых функций в пространстве аналитических функций см. в [1, 2, 7]), если

i.  $F$  — полунепрерывна снизу и локально ограничена сверху.

ii.  $(\forall x \in D) (\exists R > 0) |F(x) - F(y)| < 1$   $(\forall y \in D), \|x - y\| < R$  (где  $\|\cdot\|$  — норма  $\mathbb{R}^n$ ).

Семейство  $\mathcal{F} = (F_p)$  весовых функций будем называть *весовым семейством*, таким, что для произвольной пары индексов  $p_0 < p_1$  выполняются условия

I.  $F_0(x) \leq F_1(x)$  для всех  $x \in D$ ,

II.  $\{x \in D : F_{p_1}(x) - F_{p_0}(x) \leq -\ln(\varepsilon)\} \Subset D$  для произвольного  $\varepsilon > 0$ .

Пусть  $\mathcal{F} = (F_p)$  — весовое семейство функций. Через  $C_0(D, \mathcal{F})$  обозначим множество всех непрерывных функций  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что  $|f(x)| = o(e^{F_p(x)})$  при  $x \rightarrow \partial D$ . Топология пространства Фреше в  $C_0(D, \mathcal{F})$  задается набором норм  $(\|\cdot\|_p)$ :  $\|f\|_p := \sup_{x \in D} |f(x)|e^{-F_p(x)}$ . Будем называть весовые семейства функций  $\mathcal{F} = (F_p)$  и  $\mathcal{G} = (G_p)$  эквивалентными, если  $C_0(D, \mathcal{F}) = C_0(D, \mathcal{G})$ .

**Теорема.** *Пространство  $C_0(D, \mathcal{F})$  является степенным пространством Фреше тогда и только тогда, когда найдется весовое семейство функций  $\mathcal{G} = (G_p)$ , эквивалентное  $\mathcal{F} = (F_p)$  и такое, что*

$$(\forall p_0 < p < p_1)(\exists C)(\forall x \in D) \quad C^{-1} < \frac{G_{p_0}(x) - G_p(x)}{G_{p_0}(x) - G_{p_1}(x)} < C.$$

## Литература

1. Абанин А. В. Весовые пространства непрерывных и голоморфных функций // Мат. анализ и мат. моделирование: тр. междунар. конф. молодых ученых.—Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН, 2010.—С. 15–20.
2. Жаринов В. В. Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 4.—С. 97–131
3. Шагинян Т. Б. Об одном классе пространств Кёте // Теория функций, дифференциальные операторы и их приложения.—Элиста: изд-во Калмыцкого гос. ун-та, 1976.—С. 128–137.
4. Шубарин М. А. Изоморфизмы степенных пространств: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 1994.—117 с.
5. Шубарин М. А. Классы пространств, порождаемые интерполяцией диагональных операторов // Изв. вузов. Сев. Кавк. регион. Сер. естеств. науки.—2006.—№ 1.—С. 24–27.
6. Aytuna A., Djakov P. B., Goncharov A. P., Terzioğlu T., Zahariuta V. P. Some open problem in the theory of locally convex spaces // Linear Topological Spaces and Complex Analysis.—1994.—С. 147–165.
7. Haslinger F., Smejkal M. Representation and duality in weighted Fréchet spaces of Entere function // Lect. Notes Math.—Vol. 1275.—168–196 p.

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

Е. В. Тюриков (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

В рамках мембранной теории выпуклых оболочек [1] изучается задача (*задача Т*) о реализации безмоментного напряженного состояния равновесия тонкой упругой оболочки, срединная поверхность  $S$  которой есть внутренняя часть овалоида  $S_0$  строго положительной гауссовой кривизны класса регулярности  $W^{3,p}$ ,  $p > 2$ , с кусочно-гладким краем  $L$ , состоящим из конечного числа дуг  $L_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) класса регулярности  $C^{1,\varepsilon}$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ . Предполагается, что в каждой точке дуги  $L_j$  задана проекция  $u(s)$  вектора *усилий* на направление принадлежащего поверхности  $S$  вектора  $\vec{r}(s) = \{\alpha(s), \beta(s)\}$  с касательной и нормальной составляющими  $\alpha, \beta$  соответственно, где  $s$  — натуральный параметр,  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , функции  $\alpha(s), \beta(s), u(s)$  гёльдеровы на каждой из дуг  $L_j$ ,  $\beta(s)$  — знакопостоянная на  $L$  функция, векторное поле  $\vec{r}$  как вектор-функция  $\vec{r}(c)$  точки  $c$  контура  $L$  имеет разрывы 1-го рода в угловых точках  $c_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). В дальнейшем такое векторное поле  $\vec{r}$  будем называть *допустимым*. Задача Т для срединной поверхности  $S$  с гладким краем при условии непрерывности на  $L$  векторного поля  $\vec{r}$ , а также *смешанная* граничная задача ( $\alpha \equiv 0$  на одной части границы,  $\beta \equiv 0$  — на другой) поставлены И. Н. Векуа [2]. Там же изучены ее простейшие частные случаи ( $\alpha \equiv 0$  или  $\beta \equiv 0$  на  $L$ ). Согласно [3], задача Т в математической постановке есть задача Римана — Гильберта с разрывным граничным условием (задача R) для эллиптической системы уравнений равновесия, решения которой отыскиваются в *гёльдеровых классах со степенным весом*, причем выбор *весовой функции* определен условием ограниченности *интеграла энергии растяжения* оболочки [4]. Как известно [1], в случае гладкой границы и непрерывности векторного поля  $\vec{r}$  безусловная разрешимость задачи Т возможна лишь для многосвязных поверхностей. В работе [3] изучен частный случай задачи Т для односвязной поверхности с кусочно-гладкой границей (все угловые точки  $c_j$  — омбилические точки поверхности  $S_0$ ) и получен геометрический критерий безусловной разрешимости. Перейдем к рассмотрению общего случая.

Пусть  $c_j$  — произвольно отмеченные (различные) точки поверхности  $S_0$ ,  $(\nu_j^{(1)}, \nu_j^{(2)})$  — пары различных направлений на поверхности в точке  $c_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Обозначим через  $S_\nu$ ,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ , семейство всех односвязных поверхностей с кусочно-гладким краем, являющихся частью овалоида  $S_0$ , для которых выполнены условия: любая угловая точка границы есть точка из числа точек  $c_j$  ( $j = 1, \dots, n$ );  $\nu_j\pi$  — величина внутреннего угла в угловой точке поверхности семейства  $S_\nu$  ( $0 < \nu_j < 2$ ); направления сходящихся в точке  $c_j$  дуг границы есть направления  $(\nu_j^{(1)}, \nu_j^{(2)})$ . Отметим, что набор точек  $c_j$  и набор пар  $(\nu_j^{(1)}, \nu_j^{(2)})$  задают конечное число семейств  $S_\nu$ .

**Теорема.** Пусть  $\nu_j^{(1)}$  — произвольно заданные направления в точках  $s_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) соответственно,  $m$  — произвольно фиксированное целое число,  $0 \leq m \leq 3n - 3$ . Тогда в каждой точке  $s_j$  можно указать направление  $\nu_j^{(2)}$  и соответствующее набору пар  $(\nu_j^{(1)}, \nu_j^{(2)})$  семейство  $S_\nu$  поверхностей, для которых задача  $R$  безусловно разрешима при любом непрерывном допустимом поле  $\vec{r}$ , а ее решение зависит точно от  $m$  вещественных параметров.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В формулировке теоремы направление  $\nu_j^{(2)}$  можно заменить некоторым связным семейством направлений  $\nu_j^{(2)}(\varepsilon)$ , непрерывно зависящим от вещественного параметра  $\varepsilon$  и включающим в себя направление  $\nu_j^{(2)}$ .

Рассмотрен также случай кусочно-непрерывного поля  $\vec{r}$ . Для некоторых частных случаев границ поверхности  $S$  и допустимых полей  $\vec{r}$  получены точные результаты в форме *геометрического критерия безусловной разрешимости* (см., например, [5]).

## Литература

1. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек.—М.: Наука, 1982.—288 с.
2. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—512 с.
3. Тюриков Е. В. Обобщенная граничная задача Гольденвейзера для безмоментных сферических куполов // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. XIV международного конф. Т. 2.—Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2010.—С. 290–293.
4. Лавдау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости.—М.: Наука, 1965.—204 с.
5. Тюриков Е. В. Геометрический аналог задачи Векуа — Гольденвейзера // Докл. РАН.—2009.—Т. 424, № 4.—С. 455–458.

## ВЕСОВЫЕ БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ СВОЙСТВА

Фам Тиен Чонг (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Пусть  $G$  — открытое множество в  $\mathbb{C}$  и  $v : G \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная положительная в  $G$  функция, называемая *весом*.

Образуем следующее весовое пространство голоморфных функций на  $G$ :

$$H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_v := \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < +\infty \right\},$$

которое является банаховым с нормой  $\|\cdot\|_v$ .

Данное пространство представляет значительный интерес и является предметом исследований многих математиков. При изучении многих задач, с ним связанных, существенную роль играет понятие ассоциированного веса, которое формулируется следующим образом (см. [1–3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть  $B_v(G)$  — единичный шар в  $H_v(G)$ . Функция

$$\tilde{v}(z) := \{|f(z)| : f \in B_v(G)\}, \quad z \in G,$$

называется *ассоциированным с  $v$  весом*.

К настоящему времени хорошо известны простейшие достаточные условия на веса, при которых соответствующие пространства обладают некоторым свойством (см., например, [4]). В частности, это касается вопроса о непрерывном или компактном вложении одного пространства в другое. Однако, в общем случае полные ответы до сих пор не были известны или содержали условия, которые практически непроверяемы [3]. В настоящем докладе будут представлены следующие результаты в данном направлении.

1. Критерий того, что пространство  $H_v(\mathbb{C})$  не исчезает в  $\mathbb{C}$ , когда вес  $v$  является радиальным, т. е.  $v(z) = v(|z|)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

Напомним, что класс  $E \subset H(G)$  называется *неисчезающим* в точке  $z_0 \in G$ , если существует функция  $f \in E$  с  $f(z_0) \neq 0$ . Назовем  $E$  *неисчезающим* на  $G$ , если он не исчезает в любой точке  $z \in G$ .

2. Критерий непрерывного вложения пространства  $H_v(G)$  в пространство  $H_w(G)$  в терминах ассоциированных весов.

В связи с этим приводится пример, показывающий, что критерий непрерывного вложения нельзя формулировать в терминах общих весов.

3. Необходимое условие компактного вложения пространства  $H_v(G)$  в пространство  $H_w(G)$  в терминах ассоциированных весов. Для весов специального вида установлен критерий компактного вложения.

В этой части также приводится пример, утверждающий, что известное достаточное условие  $\lim_{z \rightarrow \partial G} \frac{v(z)}{w(z)} = 0$  компактности вложения в общем случае не является необходимым.



В заключение отметим, что два последних результата справедливы и для многомерного случая, т. е. для пространства  $H_v(G)$ ,  $G$  — открытое множество в  $\mathbb{C}^N$ .

### Литература

1. *Коробейник Ю. Ф.* О мультипликаторах весовых функциональных пространств // *Anal. Math.*—1989.—Т. 15.—С. 105–114.
2. *Anderson J. M., Duncan J.* Duals of Banach spaces of entire functions // *Glasgow Math. J.*—1990.—Vol. 32.—P. 215–220.
3. *Bierstedt K. D., Bonet J., Taskien J.* Associated weights and spaces of holomorphic functions // *Studia Math.*—1998.—Vol. 32.—P. 137–168.
4. *Абанин А. В.* Весовые пространства непрерывных и голоморфных функций // *Мат. анализ и мат. моделирование. Тр. междунар. конф. молодых ученых.*—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2010.—С. 15–20.

## Секция III

Дифференциальные уравнения  
и математическое моделирование



АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА  
СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Н. А. Абиев (Казахстан, Тараз; ТарГУ)

Вопросы существования и асимптотического разложения решений задач Коши для широкого класса обыкновенных дифференциальных и обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений детально исследованы в работах различных авторов. Аналогичные вопросы для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных к настоящему моменту изучены недостаточно. Исходя из этих соображений и пользуясь результатами работ [1–4], в настоящей статье изучается следующий класс сингулярно-возмущенных задач:

$$\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + au(t, x) = \lambda \int_0^{\infty} K(t, s)u(s, x)ds + f(t, x) + \varepsilon g(t, x, u),$$
$$u(0, x) = \varphi(x).$$

Здесь и далее  $a > 0$ ,  $\lambda \neq 0$ , — вещественные числа;  $\varepsilon$  — малый положительный параметр;  $f(t, x) \in C([0, \infty) \times R)$ ,  $K(t, s) \in C([0, \infty)^2)$ ,  $g(t, x, u) \in C^1([0, \infty) \times R^2)$ ,  $\varphi(x) \in C([0, \infty))$ . Функция  $g(t, x, u)$  удовлетворяет условию Липшица:  $\|g(t, x, u_2) - g(t, x, u_1)\| \leq L\|u_2 - u_1\|$ ,  $0 < L < \infty$ . Норма определена формулой  $\|u\| = \sup_{t, x} |u(t, x)|$ ,  $(t, x) \in ([0, \infty) \times R)$ .

Наряду с исходным уравнением рассмотрим вырожденное интегро-дифференциальное уравнение  $av(t, x) = \int_0^{\infty} K(t, s)v(s, x) ds + f(t, x)$ .

Результатом исследований является доказательство следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть выполнены следующие условия:

- 1)  $K_0 = \sup_{t \geq 0} \int_0^{\infty} |K(t, s)| ds < \infty$ ;
- 2)  $(|\lambda|K_0 + \varepsilon L) a^{-1} \leq \alpha < 1$ .

Тогда исходная и вырожденная задачи однозначно разрешимы в заданном классе функций и эти решения связаны следующим асимптотическим соотношением:  $u(t, x, \varepsilon) = v(t, x) + \Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) + \varepsilon\xi(t, x, \varepsilon)$ , где  $\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right)$  — функция типа пограничного слоя,  $\xi(t, x, \varepsilon)$  — остаточный член асимптотического разложения. При этом  $|\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right)| \leq \Pi_0 e^{-at/\varepsilon}$ ,  $\|\xi(t, x, \varepsilon)\| \leq C_0$  с положительными постоянными  $\Pi_0, C_0$ , независящими от  $t, x, \varepsilon$ .

Условие 2) теоремы является существенным, хотя носит достаточный характер.

ПРИМЕР. Пусть рассматривается сингулярно-возмущенное уравнение

$$\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u(t, x) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-s} u(s, x) ds + e^{x-t}.$$

Очевидно, что условие 2) теоремы принимает вид:  $|\lambda| \leq \alpha < 1$ . Допустим, что это условие нарушено и  $\lambda = 1$ . Нетрудно заметить, что в таком случае заключение теоремы не имеет места.

### Литература

1. *Абиев Н. А.* Об асимптотическом разложении решения задачи Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // *Вестн. Кыргызск. гос. нац. ун-та.*—2001.—Вып. 6.—С. 249–252.—(Сер. 3. Естеств.-технич. науки).
2. *Васильева А. Б.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.*—1963.—Т. 3, № 4.—С. 611–642.
3. *Васильева А. Б.* Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // *Успехи мат. наук.*—1963.—Т. 18, № 3.—С. 15–86.
4. *Иманалиев М.* Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем.—Фрунзе: Илим, 1972.—356 с.

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ<sup>1</sup>

Г. Л. Афонин (Россия, Барнаул; АлтГТУ)

При описании течений растворов и расплавов линейных полимеров необходима формулировка реологического определяющего соотношения, которое устанавливает связь между кинематическими характеристиками течения и внутренними термодинамическими параметрами. В качестве такого соотношения возьмем реологическую модель Виноградова — Покровского. Эта модель ранее проверялась на соответствие вискозиметрическим течениям. В ходе численного эксперимента были исследованы реологические свойства полимеров. При сравнении полученных расчетных зависимостей с экспериментальными данными, взятыми из литературных источников, продемонстрировано качественное соответствие модели реальным течениям растворов и расплавов линейных полимеров. Также, было установлено, что параметры модели слабо зависят от молекулярной массы и концентрации полимеров, что может служить основой для учета в этой модели эффектов, связанных с влиянием полидисперсности полимерного образца на его реологические свойства.

В настоящей работе решается задача об определении на основе этой модели профиля скорости нелинейной вязкоупругой жидкости, движущейся в зазоре между параллельными плоскостями под действием постоянного перепада давления. В ходе работы обнаружен ненулевой перепад давления в направлении, перпендикулярном скорости течения, который, тем не менее, не приводит к появлению вторичных потоков.

При этом были найдены зависимости продольной скорости при фиксированном значении перепада давления для различных параметров наведенной анизотропии, которые показали, что с ростом значения параметров анизотропии увеличивается отклонение в поведении жидкости от параболического профиля. Результатом исследования влияния градиента давления на профиль продольной скорости и удельный расход, явилось то, что при увеличении перепада давления растет максимальное значение продольной скорости и также увеличивается отклонение в поведении жидкости от закона Пуазейля.

Также в работе проведено сравнение полученных результатов точного численного решения с приближенным аналитическим, полученным ранее. Установлено, что численное решение ведет себя подобно аналитическому. Но при этом численное решение приводит к более сильному отклонению от ньютоновского поведения, при одинаковых значениях параметров модели. Далее было выполнено сравнение теоретических зависимостей с экспериментальными данными. При этом значения градиента давления находили из зависимости удельного расхода.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-00293.

Таким образом, в рассмотренном случае плоского течения Пуазейля, система уравнений модифицированной модели Виноградова — Покровского описывает непараболический профиль скорости в зазоре между параллельными пластинами, что подтверждается экспериментальными данными. Полученные при этом зависимости могут быть использованы при разработке численных методов 2-мерных и 3-мерных течений в качестве начального приближения входного и выходного профилей, при моделировании течений полимерных жидкостей в зазоре между параллельными плоскостями, например, при формовании тонких пленок.

## ТРИМОДАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ НЕКОТОРЫХ БИМОДАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

**Е. В. Бабаева** (Украина, Харьков; ХГТУСА)

Работа посвящена кинетической теории газов. Основным средством изучения достаточно разреженного газа является кинетическое уравнение Больцмана [1]. Уравнение Больцмана для модели твердых сфер имеет вид:

$$\begin{aligned} D(f) &= Q(f, f), \\ D(f) &= \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x}, \\ Q(f, f) &= \frac{d^2}{2} \int_{R^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha B(v - v_1, \alpha) (f(t, v'_1, x) f(t, v', x) - \\ &\quad - f(t, v_1, x) f(t, v, x)), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $d$  — диаметр молекул,  $t \in R^1$  — время,  $x = (x^1, x^2, x^3)$  — координата частицы,  $v = (v^1, v^2, v^3)$  — ее скорость,  $f(t, v, x)$  — искомая функция распределения частиц,  $\Sigma$  — единичная сфера в  $R^3$ ,  $\alpha \in \Sigma$ ,  $v', v'_1$  — скорости частиц после столкновения.

В работах [2–4] построены явные приближенные решения уравнения Больцмана для твердых сфер, которые являются бимодальными. При этом использовалась «смешанная» невязка (равномерно-интегральная норма разности между  $D(f)$  и  $Q(f, f)$ ):

$$\Delta = \sup_{(t,x) \in R^4} \int_{R^3} |D(f) - Q(f, f)| dv, \tag{2}$$

Работа направлена на построение тримодальных приближенных решений уравнения Больцмана. Речь идет о функциях такого вида:

$$\begin{aligned} f(t, v, x) &= \sum_{i=1}^3 \varphi_i M_i, \quad \varphi_i = \varphi_i(t, x) \geq 0, \\ M_i &= M_i(v) = \rho_i \left( \frac{\beta_i}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp^{-\beta_i(v - \vec{v}_i)^2}. \end{aligned}$$

Параметры максвеллианов  $M_i$  таковы:  $\rho_i > 0$  — плотности,  $\beta_i = \frac{1}{2T_i}$  — обратные температуры,  $\vec{v}_i \in R^3$  — массовые скорости,  $i = 1, 2, 3$ .

Приближенные тримодальные решения ищутся с учетом обеспечения малости невязки (2) за счет соответствующего выбора коэффициентных функций и некоторых других параметров.

Результаты работы состоят в следующем: получены различные достаточные условия стремления к нулю равномерно-интегральной невязки между левой и



правой частями уравнения (1), тем самым построены некоторые новые приближенные решения уравнения Больцмана.

### Литература

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана.—М.: Мир, 1978.—495 с.
2. Mott-Smith H. M. The solution of the Boltzman equation for a shock wave // Phys. Rev.—1951.—Vol. 82, № 6.—P. 885–890.
3. Горdevский В. Д. Приближенное бимодальное решение уравнения Больцмана для твердых сфер // Мат. физика, анализ, геометрия.—1995.—Т. 2, № 2.—С. 168–176.
4. Горdevский В. Д. Критерий малости невязки для бимодального решения уравнения Больцмана // Мат. физика, анализ, геометрия.—1997.—Т. 4, № 1–2.—С.46–58.

## ИНДИКАТОР НЕОДНОРОДНОСТИ НЕИЗВЕСТНОЙ СРЕДЫ<sup>1</sup>

Е. Ю. Балакина (Россия, Новосибирск; НГУ, ИМ СО РАН)

Рассматривается процесс переноса частиц (в частности фотонов). В качестве математической модели взято линейное дифференциальное уравнение переноса:

$$\omega \nabla_r f(r, \omega) + \mu(r)f(r, \omega) = J(r, \omega). \quad (1)$$

Здесь  $r$  — пространственная переменная,  $r \in G \subset \mathbb{R}^3$ ;  $G$  — выпуклая ограниченная область;  $\omega$  — вектор, указывающий направление движения потока частиц,  $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$ .

В этом уравнении  $f(r, \omega)$  — плотность потока частиц в точке  $r$ , летящих в направлении  $\omega$ . Функции  $\mu$ ,  $J$  характеризуют среду  $G$ , при этом  $\mu(r)$  — коэффициент полного взаимодействия (эта величина обратна свободному пробегу и складывается из коэффициента рассеяния и коэффициента поглощения),  $J(r, \omega)$  — плотность внутренних источников.

Среда  $G$  — неоднородная. Для характеристики этой неоднородности введем в рассмотрение подмножество  $G_0$  области  $G$ . Множество  $G_0$  предполагается открытым в  $\mathbb{R}^3$ , плотным в  $G$  ( $\bar{G}_0 = \bar{G}$ ) и является объединением счетного числа областей:

$$G_0 = \bigcup_{i=1}^p G_i, \quad G_i \subset G; \quad G_j \cap G_l = \emptyset, \quad j \neq l.$$

Области  $G_i$  можно интерпретировать как части неоднородной среды  $G$ , заполненные  $i$ -ым веществом. Функции  $\mu$ ,  $J$  принадлежат классу  $C^2$  в каждом  $G_i$  и могут претерпевать скачок на  $\partial G_0$ .

К уравнению (1) можно присоединить граничное условие

$$f(\eta, \omega) = H(\eta, \omega), \quad (\eta, \omega) \in \Gamma^+,$$

либо граничное условие

$$f(\xi, \omega) = h(\xi, \omega), \quad (\xi, \omega) \in \Gamma^-.$$

Здесь функция  $H(\eta, \omega)$  — плотность выходящего потока частиц,  $h(\xi, \omega)$  — плотность падающего (входящего) потока, а  $\Gamma^-$  и  $\Gamma^+$  — некоторые подмножества  $\partial G \times \Omega$ .

В работе ставится следующая

ЗАДАЧА. Найти поверхность  $\partial G_0$  из уравнения

$$\omega \nabla_r f(r, \omega) + \mu(r)f(r, \omega) = J(r, \omega)$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 16.740.11.0127.

и краевых условий

$$\begin{aligned}f(\xi, \omega) &= h(\xi, \omega), \quad (\xi, \omega) \in \Gamma^-; \\f(\eta, \omega) &= H(\eta, \omega), \quad (\eta, \omega) \in \Gamma^+, \end{aligned}$$

где известными являются поверхность  $\partial G$  и функция  $H(\eta, \omega)$ .

В работе исследуется функция:

$$I(r) = \left| \nabla \int_{\Omega} H(r, \omega) d\omega \right|.$$

Используя специальное представление [1, 2] плотности потока  $f$ , доказывается, что функция  $I(r)$  может быть неограниченной только вблизи искомой поверхности. Это свойство и послужило основанием для названия этой функции индикатором неоднородности или индикатором контактных границ.

### Литература

1. Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров Н. В. Использование уравнения переноса в томографии.—М.: Логос, 2000.—224 с.
2. Балакина Е. Ю. Неклассическая краевая задача для уравнения переноса // Дифференциальные уравнения.—Т. 45, № 9.—С. 1219–1228.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ  
ОБЩЕСТВА В РСО-А И ЕЕ СВЯЗИ С ПРОТЕСТНОЙ  
АКТИВНОСТЬЮ НАСЕЛЕНИЯ

Е. К. Басаева, Е. С. Каменецкий, З. Х. Хосаева

(Россия, Владикавказ; ЮМИ),

Д. Челпалина (Россия, Ростов-на-Дону; ЮИЦ)

В Северо-Кавказском федеральном округе в настоящее время усиливается террористическая активность. Поэтому целесообразно выявить факторы, которые влияют на дестабилизацию общества. В настоящей работе для этого предлагается математическая модель. Изменение напряженности в каждой группе характеризуется дифференциальными уравнениями. Предполагается, что общество достаточно разделить на два слоя управляющую элиту (уравнения 1, 2) и трудящихся (уравнения 3, 4). Каждый слой делится в свою очередь на две группы, одну из которых составляет титульная национальность (уравнения 1, 3), а другую все остальные национальности (уравнения 2, 4). Состояние в каждой группе общества характеризуется одним параметром в качестве которого выбрана напряженность. Под напряженностью мы понимаем эмоциональное состояние группы или общества в целом, вызванное давлением окружающей природной или социальной среды [1].

$$\frac{dP_1}{dt} = -k_1 P_1 + \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_1^2 \exp\left(-\frac{P_1^2}{2\rho^2}\right)}{\rho^3} \right) \times \quad (1)$$

$$\times ((B_1 \dot{E} + D_1 I_B + W_1 + C_{12} P_2 + C_{13} P_3 + C_{14} P_4) * q),$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -k_2 P_2 + \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_2^2 \exp\left(-\frac{P_2^2}{2\rho^2}\right)}{\rho^3} \right) \times \quad (2)$$

$$\times ((B_2 \dot{E} + D_2 I_B + W_2 + C_{21} P_1 + C_{23} P_3 + C_{24} P_4) * q),$$

$$\frac{dP_3}{dt} = -k_3 P_3 + \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_3^2 \exp\left(-\frac{P_3^2}{2\rho^2}\right)}{\rho^3} \right) \times \quad (3)$$

$$\times ((B_3 \dot{E} + D_3 I_B + C_{31} P_1 + C_{32} P_2 + C_{34} P_4) * q),$$

$$\frac{dP_4}{dt} = -k_4 P_4 + \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P_4^2 \exp\left(-\frac{P_4^2}{2\rho^2}\right)}{\rho^3} \right) \times \quad (4)$$

$$\times ((B_4 \dot{E} + D_4 I_B + C_{41} P_1 + C_{42} P_2 + C_{43} P_3) * q).$$

Первые члены в правых частях уравнения определяют релаксационные процессы в обществе. Второе слагаемое учитывает влияние различных воздействий

на данную группу. Первый множитель второго слагаемого показывает изменение восприятия воздействий данной группой в зависимости от ее напряженности. Для описания изменения экономической ситуации ( $B_I \dot{E}$ ) использована работа [2], в которой на основе теории деловых циклов Й. Шумпетера описывается динамика экономической активности. Второе слагаемое в этом сомножителе отражает влияние внешней информации в которую включаются как регулярное воздействие СМИ, так и информация о чрезвычайных ситуациях (террактах, стихийных бедствиях и катастрофах), а также законодательные изменения положения отдельных частей общества. Помимо этого в информацию добавляются также кратковременное воздействие на соответствующую группу факторов существенных для нее. Будем считать, что элитные слои стремятся поддерживать существующий порядок, что описывается слагаемым  $W_I$ . Влияние внешней информации принимается пропорционально ранее описанному изменению экономической ситуации. Оставшиеся слагаемые в этом сомножителе определяют влияние других групп на данную. Коэффициенты взаимодействия между слоями нормировались таким образом, чтобы сумма была равна 1. Уравнения решались методом Рунге-Кутты с помощью пакета МАТЛАБ.

С помощью разработанной модели была сделана попытка прогноза состояния общества на период с 2008 по 2010 гг. Были выполнены два варианта расчетов. В первом варианте не учитывались экстремальные воздействия на общество. Результаты хорошо совпадают с уровнем протестной активности общества за этот период, кроме моментов кратковременного интенсивного воздействия на отдельные группы или все общество. Во втором варианте расчетов была попытка смоделировать шоковое воздействие на напряженность в обществе. Предлагаемая модель не позволяет удовлетворительно оценить влияние таких воздействий так как слабые кратковременные воздействия не проявляются, а напряженность после сильных воздействий спадает слишком медленно.

## Литература

1. Аклаев А. Р. Этнополитическая конфликтология. Анализ и менеджмент.—М.: Дело, 2008.—480 с.
2. Акаев А. А. Анализ экономических циклов с помощью математической модели марковских случайных процессов // Экономические и математические методы.—2007.—Т. 43, № 1.—С. 27–37.

## СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЕ ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА В ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

**В. А. Богачев** (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ),  
**Т. В. Богачев** (Россия, Ростов-на-Дону; РГЭУ (РИНХ))

Рассматривается использование пакета *Maple* в качестве эвристического инструмента в теоретико-вероятностных исследованиях. Именно, для строго возрастающих последовательностей натуральных чисел  $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$  исследуется поведение при  $k \rightarrow \infty$  вероятностей событий, состоящих в том, что выбранные из  $\{n_i\}_{i=1}^k$  ( $k \geq 4$ ) наугад три числа окажутся длинами сторон треугольника.

Результаты эксперимента с псевдослучайными числами, получаемыми посредством функции **randcomb()** из пакета **combinat**, позволяют предположить, что в ряде случаев для вероятностей  $p_k$  указанных событий имеет место равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0,5. \quad (1)$$

Например, один из результатов, полученных для  $k = 100, \dots, 800$ , выглядит следующим образом:

0,58468; 0,49782; 0,49083; 0,53480; 0,48799; 0,48755; 0; 49906; 0,50103.

Конечно, такая тенденция не может иметь общий характер. Например, для последовательности чисел Фибоначчи все указанные вероятности равны нулю.

В случае, когда  $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$  представляет собой арифметическую прогрессию, получен следующий результат. Найдена формула, дающая явное выражение указанных вероятностей для  $k \geq 4$ , которая имеет вид:

$$p_k = \frac{(2k-3)(2k^2-6k+1) + 3(-1)^k}{8k(k-1)(k-2)}.$$

Из нее следует, что в данном случае действительно выполняется равенство (1), причем последовательность  $\{p_k\}_{k=4}^{\infty}$  возрастает.

Приводятся последовательности  $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$  более сложной структуры, чем арифметическая прогрессия, для которых также выполняется равенство (1), однако последовательность  $\{p_k\}_{k=4}^{\infty}$  оказывается убывающей.

Выделены также последовательности, для которых при любом  $p_k > 0$   $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0$ . А также последовательности, для которых  $0 < \lim_{k \rightarrow \infty} p_k < 0,5$ .

В общем случае исследована связь между асимптотическим поведением вероятностей  $p_k$  и используемыми, например, в теории целых функций характеристиками разреженности последовательностей  $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ .

Дана, полученная обращением к закону больших чисел, статистическая иллюстрация рассмотренных вопросов.

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОДНОРОДНОГО ПО ТОЛЩИНЕ СЛОЯ

И. В. Богачев, А. О. Ватульян (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассмотрена задача об идентификации неоднородных вязкоупругих характеристик слоистой среды. В рамках линейно неоднородной вязкоупругости рассмотрены установившиеся колебания с частотой  $\omega$  вязкоупругого изотропного неоднородного по толщине слоя, занимающего область  $S = \{x_1, x_2 \in (-\infty, \infty), x_3 \in [0, h]\}$  в условиях плоской деформации. Нижняя грань слоя жестко закреплена, на части верхней грани приложены нагрузки, определяемые вектором  $p = (p_1, p_3)$ .

С помощью интегрального преобразования Фурье по координате  $x_1$  с параметром  $\alpha_1 = 0$  и составления двух краевых задач получены две несвязанные краевые задачи относительно усредненных характеристик смещений, в одну из которых входит неизвестная комплекснозначная функция  $\mu = \mu(x_3, i\omega)$ , а во вторую  $\lambda(x_3, i\omega) + 2\mu(x_3, i\omega)$ .

ЗАДАЧА 1.

$$\begin{aligned} (\mu U_{1,3})_{,3} + \rho \omega^2 U_1 &= 0, \\ U_1|_{x_3=0} &= 0, \quad \mu U_{1,3}|_{x_3=h} = \tilde{p}_1. \end{aligned} \quad (1)$$

ЗАДАЧА 2.

$$\begin{aligned} ((\lambda + 2\mu)U_{3,3})_{,3} + \rho \omega^2 U_3 &= 0, \\ U_3|_{x_3=0} &= 0, \quad (\lambda + 2\mu)U_{3,3}|_{x_3=h} = \tilde{p}_3, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $U_i(x_3, i\omega) = U_i(0, x_3, i\omega)$ ,  $i = 1, 3$ .

Для описания динамического поведения вязкоупругого материала использована модель стандартного вязкоупругого тела [1], на основании которой  $\mu(x_3, i\omega) = \frac{i\omega\mu_2(x_3) + \mu_1(x_3)}{1 + i\omega}$ ,  $\lambda(x_3, i\omega) = \frac{i\omega\lambda_2(x_3) + \lambda_1(x_3)}{1 + i\omega}$ , а  $\rho(x_3)$  — плотность неоднородного слоя.

Обратная коэффициентная задача [2] решается на основе информации об интегральных характеристиках полей смещений, измеренных на верхней границе слоя для задач 1, 2. Восстановление законов изменения комплексных функций по данным о спектральных свойствах решений сводится к последовательному решению двух однотипных обратных коэффициентных задач.

**Обратная задача 1 (ОЗ 1).** Определить пару функций  $\mu_1(x_3)$ ,  $\mu_2(x_3)$  из (1) по информации

$$U_1(h, i\omega) = f_1(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (3)$$

Далее, считая  $\mu_1(x_3)$  и  $\mu_2(x_3)$  известными, можно сформулировать вторую обратную задачу.

**Обратная задача 2 (ОЗ 2).** Определить пару функций  $\lambda_1(x_3)$ ,  $\lambda_2(x_3)$  из (2) по информации

$$U_3(h, i\omega) = f_3(\omega), \quad \omega \in [\omega_3, \omega_4]. \quad (4)$$

Итерационный процесс, подобный описанному в [3], построен путем последовательного решения систем интегральных уравнений Фредгольма 1-го и 2-го рода, полученных с использованием метода линеаризации.

Исследован вопрос выбора начального приближения. Предложен итерационный подход для построения решений в классе простых функций, позволяющий быстро и с высокой степенью точности находить начальные приближения.

Далее приведены численные эксперименты по восстановлению монотонных функций (рис. 1, 2):  $\mu_1(x_3) = 1 + 1.5x_3^2$ ,  $\mu_2(x_3) = 5 - 2x_3^2$ ,  $\lambda_1(x_3) = 2 - x_3^2$ ,  $\lambda_2(x_3) = 2.1 + 0.5x_3^2$ . Начальные приближения найдены в виде  $\mu_1^0(x_3) = 0.45 + 0.85x_3$ ,  $\mu_2^0(x_3) = -1.6x_3 + 3.2$ ,  $\lambda_1^0(x_3) = 2.9 + 0.6x_3$  и  $\lambda_2^0(x_3) = -1.7x_3 + 8.2$ . Для восстановления были выбраны частотные диапазоны  $\kappa \in [6.3, 8.5]$  и  $\kappa \in [7.5, 11.5]$ , потребовалось 11 и 20 итераций соответственно.

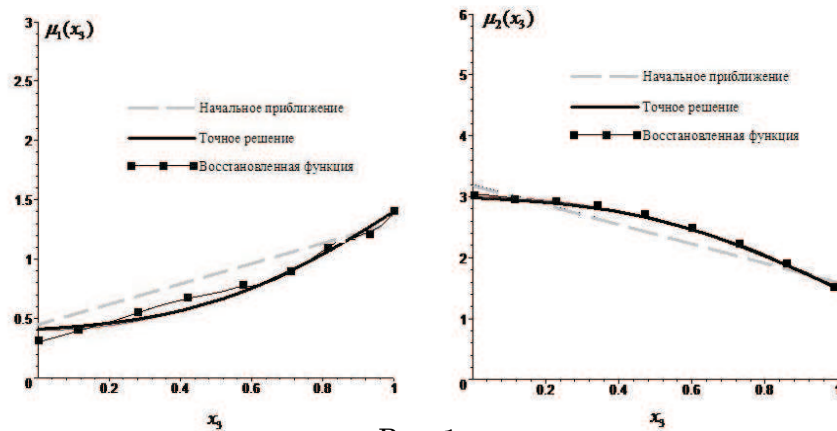


Рис. 1.

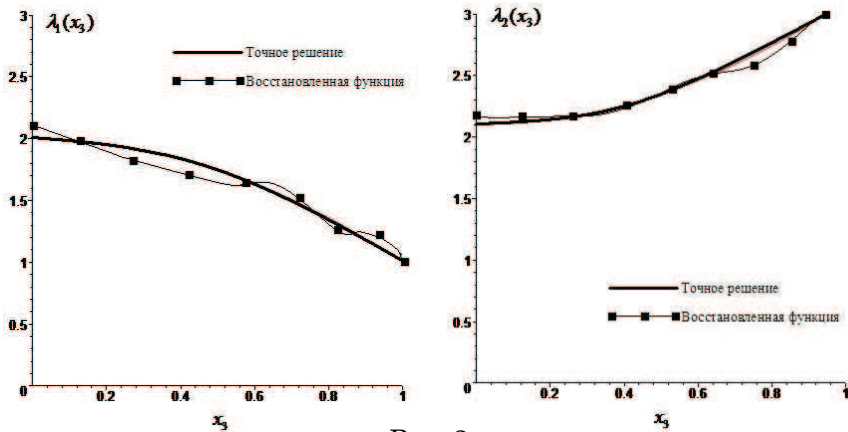


Рис. 2.

## Литература

1. Кристенсен Р. Введение в механику композитов.—М.: Мир, 1974.—338 с.
2. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.—М.: Физматлит, 2007.—223 с.
3. Аникина Т. А., Богачев И. В., Ватульян А. О. Об определении неоднородных реологических свойств балок // Вестн. ДГТУ.—2011.—Т. 10, № 7.—С. 1016–1023.



## ЗАДАЧА КРУЧЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРА С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ СЕЧЕНИЕМ В СЛУЧАЕ РОМБОЭДРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ

**К. А. Ватульян** (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Задачи Сен-Венана для анизотропных стержней с произвольной анизотропией могут быть исследованы с помощью подхода, описанного в [1]. Задача о кручении полого цилиндра с ромбоэдрической анизотропией уже была рассмотрена в работах [2–4], однако в [2, 3] было представлено только сведение исходной задачи к краевой задаче на сечении, а в [4] было приведено численное решение задачи кручения в случае прямоугольного поперечного сечения. В настоящей работе представлено аналитическое решение для случая эллиптического поперечного сечения цилиндра с ромбоэдрической анизотропией (неортоаннизотропный случай).

Рассмотрим кручение цилиндра эллиптического поперечного сечения с полуосями  $d_1$  и  $d_2$ .

В соответствии с [1] смещение ищем в виде:

$$\mathbf{u} = \alpha x \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1,$$

$$\mathbf{a}_0 = (-x_2, x_1, 0)^T, \quad \mathbf{a}_1 = (a_1, a_2, a_3)^T \quad a_i = a_i(x_1, x_2),$$

где  $\alpha$  — относительный угол закручивания (произвольная постоянная).

Подставляя указанный выше вид смещения в уравнения равновесия и граничные условия на боковой поверхности, которые были приведены в работах [2–4], получили следующую краевую задачу относительно компонент смещения  $a_1, a_2, a_3$ :

$$(c_{11}\partial_1^2 + c_{66}\partial_2^2) a_1 + (c_{12} + c_{66}) \partial_1 \partial_2 a_2 + 2c_{14} \partial_1 \partial_2 a_3 = 0;$$

$$(c_{12} + c_{66}) \partial_1 \partial_2 a_1 + (c_{66}\partial_1^2 + c_{11}\partial_2^2) a_2 + c_{14}(\partial_1^2 - \partial_2^2) a_3 = 0;$$

$$2c_{14} \partial_1 \partial_2 a_1 + c_{14}(\partial_1^2 - \partial_2^2) a_2 + c_{44}(\partial_1^2 + \partial_2^2) a_3 = 0;$$

$$\begin{aligned} n_1(c_{11}\partial_1 a_1 + c_{12}\partial_2 a_2 + c_{14}\partial_2 a_3) + n_2(c_{14}\partial_1 a_3 + c_{66}(\partial_1 a_2 + \partial_2 a_1)) = \\ = -\alpha c_{14}(n_1 x_1 - n_2 x_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1(c_{14}\partial_1 a_3 + c_{66}(\partial_1 a_2 + \partial_2 a_1)) + n_2(c_{12}\partial_1 a_1 + c_{11}\partial_2 a_2 - c_{14}\partial_2 a_3) = \\ = \alpha c_{14}(n_1 x_2 + n_2 x_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1(c_{44}\partial_1 a_3 + c_{14}(\partial_1 a_2 + \partial_2 a_1)) + n_2(c_{14}(\partial_1 a_1 - \partial_2 a_2) + c_{44}\partial_2 a_3) = \\ = -\alpha c_{44}(-n_1 x_2 + n_2 x_1). \end{aligned}$$

Здесь  $c_{ij}$  — модули упругости,  $n_1, n_2$  — компоненты вектора нормали к поперечному сечению цилиндра. Из приведенных уравнений видно, что функция  $a_3$  описывает деформацию поперечного сечения, а функции  $a_1, a_2$  — напряженно-деформированное состояние плоской задачи.

Решение полученной краевой задачи отыскивалось в виде многочленов второй степени:

$$a_1 = c_{14}(b_1x_1^2 + b_3x_2^2), \quad a_2 = c_{14}x_1x_2 \cdot 2c_2, \quad a_3 = Ax_1x_2.$$

Здесь  $b_1, b_3, c_2, A$  — неизвестные постоянные, которые определяются при удовлетворении уравнений и граничных условий.

В результате преобразований и подстановки этого вида решения в систему уравнений и граничных условий была построена система четырех линейных уравнений относительно искомых постоянных  $b_1, b_3, c_2, A$ , причем после нахождения постоянных и подстановки их в выражения для  $a_1, a_2, a_3$  получим окончательный вид решения:

$$u_1 = \alpha \left( -x_2x + \frac{c_{14}}{2c_{66}} (-D_2x_1^2 + (2D_1 - D_2)x_2^2) \right),$$

$$u_2 = \alpha \left( \frac{c_{14}}{c_{66}} D_2x_1x_2 + x_1x \right),$$

$$u_3 = \alpha(D_2 - D_1)x_1x_2,$$

где

$$D_1 = \frac{d_1^2}{d_1^2 + d_2^2}, \quad D_2 = \frac{d_2^2}{d_1^2 + d_2^2}.$$

Отметим следующие особенности полученного решения: по сравнению с классическим решением задачи кручения для изотропного стержня в формулах для смещений  $u_1$  и  $u_2$  имеются дополнительные слагаемые, пропорциональные модулю  $c_{14}$ ; формула для смещения  $u_3$ , характеризующего деформацию сечения стержня, не зависит от этой постоянной и имеет такой же вид, как и в случае стержня из изотропного материала. Кроме того, отметим, что у стержня с круговым сечением в рассматриваемом случае анизотропии деформация отсутствует.

## Литература

1. Устинов Ю. А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров.—М.: Наука, 2003.—128 с.
2. Ватульян К. А. Задача Сен-Венана кручения цилиндрического анизотропного стержня // Мат. моделирование, вычислительная механика и геофизика. Тр. V школы-семинара (Ростов-на-Дону, 18–21 декабря 2006 г.).—2007.—С. 56–58.
3. Устинов Ю. А., Ватульян К. А. Решения задач Сен-Венана для призмы с ромбоэдрической анизотропией // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, вып. 4.—С. 23–30.
4. Устинов Ю. А., Ватульян К. А. Задача Сен-Венана для прямоугольной призмы с ромбоэдрической анизотропией // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. XIII междунар. конф. (Ростов-на-Дону, 12–15 октября 2009 г.).—2009.—С. 52–56.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВОЗДУХА В УЛИЧНЫХ КАНЬОНАХ С РАЗНОЙ ВЫСОТОЙ ДОМОВ

М. В. Волик (Россия, Владикавказ; ЮМИ)

Для моделирования течения воздуха в уличных каньонах и непосредственно над ними использовались уравнения гидродинамики в переменных вихрь ( $\omega$ )-функция тока ( $\psi$ ) [1]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -U_y \frac{\partial \omega}{\partial y} - U_z \frac{\partial \omega}{\partial z} - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \langle U_y U_z \rangle + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$\omega = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

где  $\langle U_y U_z \rangle = \nu_t (\partial U_y / \partial z + \partial U_z / \partial y)$  в соответствии с моделью турбулентности уровня 1 [2],  $Re$  — число Рейнольдса, ось  $Y$  направлена перпендикулярно улице, а ось  $Z$  — вертикально вверх. Составляющие средней скорости ветра имеют вид:

$$U_y = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad U_z = -\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_t$  рассчитывался по формуле  $\nu_t = \sqrt{K}l$  с использованием  $K$  модели турбулентности, в которой энергия турбулентности  $K$  вычислялась из уравнения:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -U_y \frac{\partial K}{\partial y} - U_z \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_t \frac{\partial K}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_t \frac{\partial K}{\partial z} \right) + P_k - \epsilon. \quad (3)$$

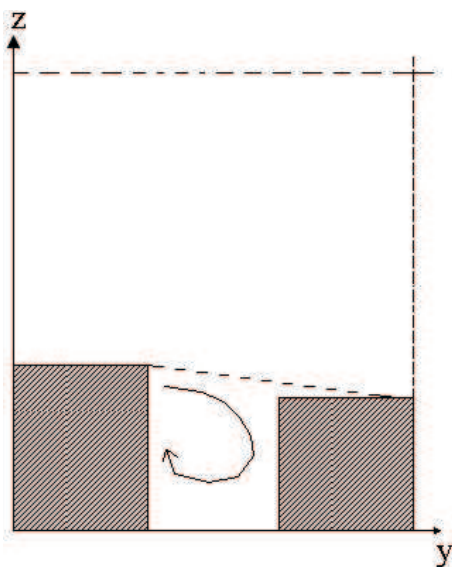
Для расчета поля течения уравнения (1)–(3) решались методом конечных разностей. Расчеты проводились по явной схеме с временным шагом  $\Delta t = 0,0005$ . Использовалась равномерная сетка с числом точек по вертикали равным 61, а по горизонтали — от 91 до 111 в зависимости от ширины улицы. Уравнения приводились к безразмерному виду. В качестве масштаба длины использовалась высота дома, а масштаба скорости — скорость на верхней границе расчетной области.

В работе сравниваются картины течения для улиц с домами разной высоты.

В расчетах получен режим «скользящего течения», причем внутри уличного каньона образуется один основной вихрь и в подветренном углу — вторичный вихрь.

Изменение скорости воздуха удовлетворительно описывается предлагаемой моделью, но в непосредственной близости от дна уличного каньона во всех вариантах расчетов скорость воздуха заметно занижена. Распределение энергии турбулентности в уличном каньоне описывается моделью удовлетворительно, но величина этой энергии несколько занижается вблизи дна уличного каньона и завывает в верхней его части.

Если дома на наветренной стороне имеют меньшую высоту, то вихрь распространяется над этими домами (рис. 1). Распределение горизонтальных и вертикальных скоростей внутри уличного каньона заметно изменяются, увеличивается энергия турбулентности и меняются размеры вторичного вихря.



**Рис. 1.** Схема течения воздуха в уличном каньоне.

### Литература

1. *Ибрагимов М. Х., Субботин В. И. и др.* Структура турбулентного потока и механизм теплообмена в каналах.— М.: Атомиздат, 1978.—296 с.
2. *Mellor G. L., Yamada T.* A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers // *J. of the atmospheric sciences.*—1974.—Vol. 31.—P. 1791–1806.

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ К  
ИССЛЕДОВАНИЮ ИНВАРИАНТНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ НА  
ОДНОРОДНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ<sup>1</sup>

**Д. С. Воронов** (Россия, Барнаул; АлтГПА),  
**О. П. Гладунова** (Россия, Барнаул; АлтГУ),  
**Е. Д. Родионов** (Россия, Барнаул; АлтГПА),  
**В. В. Славский** (Россия, Ханты-Мансийск; ЮНИИИТ)

Пакеты символьных вычислений являются одним из основных вычислительных инструментов компьютерного моделирования. Они хорошо зарекомендовали себя при исследовании инвариантных тензорных полей на однородных римановых многообразиях и, в частности, на группах Ли, поскольку изучение этих полей может быть сведено к их исследованию в алгебрах Ли.

В данной работе разработаны алгоритмы и комплексы программ в системах аналитических расчетов Maple и Mathematica, позволяющие вычислять компоненты связности, тензоров кривизны Римана, Риччи, скалярной кривизны, тензора одномерной кривизны, тензора Вейля и матриц его автодуальной и антиавтодуальной составляющих на конечномерных группах Ли с левоинвариантными римановыми метриками.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 08-01-98001, № 10-01-90000-Бел\_а, Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ Российской Федерации, проект № НШ-6613.2010.1, а также Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 02.740.11.0457.

## ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЦИРКАДИАННОГО РИТМА АРТЕРИАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

М. С. Гаврилова (Россия, Ульяновск; УлГУ)

Артериальная гипертензия (АГ) относится к числу наиболее распространенных неинфекционных заболеваний. В России более 40 млн. человек страдают АГ. Данное заболевание представляет собой хроническое повышение артериального давления (АД) от 140/90 мм рт. ст. и выше. Учитывая тот факт, что резкие и значительные колебания АД способствуют развитию различных осложнений АГ (инсульты, инфаркты миокарда и т. д.), актуальным является построение математических моделей биологических процессов, характеризующих динамику АД.

Как правило, выделяют два вида колебаний АД: резкие, случайные изменения (вариабельность) и медленные, периодические, регулярные ритмы. Важнейшую роль для организма человека играет циркадианный, или околосуточный ритм. Циркадианный ритм (ЦР) АД представляет собой двухфазные колебания день-ночь с периодом  $T = 24 \pm 4$  часа.

Часто при решении прикладных задач, связанных с исследованием динамики ЦР, необходимо построить его компьютерную имитационную модель. На практике для решения этой проблемы широко используется математический метод, который заключается в аппроксимации ЦР АД идеальной синусоидой или косинусоидой. Такое приближение удобно в практическом применении ввиду простоты формул.

Однако при обработке экспериментальных данных легко заметить, что кривая ЦР АД значительно отличается от графика идеального синуса и косинуса. В настоящей работе предложен новый подход к моделированию кривой ЦР.

В нашей модели ЦР АД описывается несколькими функциями. В модели необходимо учесть наличие дневного и ночного промежутков стабилизации АД (см. [1]). Процесс перехода ЦР от одного стабильного уровня к другому задается с помощью экспоненты  $f(t) = \alpha \exp(\beta t + \gamma) + \rho$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ . Тогда математическая модель динамики ЦР АД имеет вид:  $C(t) = A \cdot F(t) + R$ , где

$$F(t) = \begin{cases} k_1 t, & 0 \leq t < t_1; \\ m_1, & t_1 \leq t \leq t_2; \\ f(t), & t_2 < t < t_3; \\ m_2, & t_3 \leq t \leq t_4; \\ k_2 t + b_2, & t_4 < t \leq T. \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 218.

В данной модели отрезки  $[t_1, t_2]$  и  $[t_3, t_4]$  — дневной и ночной промежутки стабилизации АД. Параметры модели:  $k_1 = m_1/t_1$ ,  $k_2 = -m_2/(T - t_4)$ ,  $b_2 = m_2T/(T - t_4)$ . Коэффициенты  $m_1$ ,  $m_2$  рассчитываются как выборочные средние экспериментальных значений АД на дневном и ночном промежутках стабилизации соответственно. Параметры функции  $f(t)$   $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$  определяются с помощью методов многомерной оптимизации (например, метода наименьших квадратов) при условиях непрерывности функции  $F(t)$ :  $f(t_2) = m_1$ ,  $f(t_3) = m_2$ . Коэффициент  $R > 0$  — выборочное среднее всех экспериментальных значений АД на  $[0, T]$ ;  $A > 0$  — параметр нормировки данных перед построением модели.

Функцию  $F(t)$ , а значит, и  $C(t)$ , можно продолжить на любой промежуток времени  $[0, H]$ , где  $H > T$ . Если  $N = [H/T]$ , то  $F(t) = F(t - iT)$  на каждом промежутке  $[iT, (i + 1)T]$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Предложенная в работе математическая модель ЦР АД удобна при анализе экспериментальных данных. В отличие от классической синусоиды, уравнения новой модели более адекватно описывают кривую ЦР, так как учитывают наличие промежутков стабилизации АД.

### Литература

1. Гаврилова М. С., Бутов А. А., Разин В. А. Статистический анализ значений систолического артериального давления у больных гипертонической болезнью второй стадии // Тр. всероссийской научно-практической конф. «Актуальные вопросы внутренней медицины (кардиологии, пульмонологии, гастроэнтерологии и эндокринологии)». — СПб., 2010. — С. 134–135.

ПРИМЕНЕНИЕ ВЫПУКЛОЙ ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА  
ЛОБАЧЕВСКОГО В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА<sup>1</sup>

О. П. Гладунова (Россия, Барнаул; АлтГУ),  
Е. Д. Родионов (Россия, Барнаул; АлтГПА),  
В. В. Славский (Россия, Ханты-Мансийск; ЮНИИИТ)

В математическом анализе важную роль играет выпуклая геометрия Евклидова пространства. Естественным расширением Евклидовой выпуклой геометрии служит выпуклая геометрия  $(n + 1)$ -мерного пространства Лобачевского  $H_\kappa^{n+1}$  кривизны  $(-\kappa)$ , здесь  $\kappa$  — положительное. Произвольному замкнутому выпуклому подмножеству  $Q \subset H_\kappa^{n+1}$  можно сопоставить [1, 2] неотрицательную функцию  $f \in C^{1,1}(\bar{R}^n)$  такую, что конформно-плоская метрика  $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ ,  $x \in \bar{R}^n$ , имеет ограниченную обобщенную одномерную секционную кривизну:

$$K_{1/2}(f, x, \xi) = f(x) \frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2} |\nabla f(x)|^2 \in [-\kappa/2, \kappa/2],$$

в каждой точке, где  $f(x) > 0$  и для каждого единичного направления  $\xi$ . Риманова кривизна метрики в точке  $x \in R^n$  в двумерном направлении  $\xi \wedge \eta$  при этом вычисляется по формуле:  $K(f, x, \xi \wedge \eta) = K_{1/2}(f, x, \xi) + K_{1/2}(f, x, \eta)$ , здесь  $\xi, \eta$  — единичные взаимно перпендикулярные направления в  $R^n$ . Функцию  $f(x)$  можно рассматривать как аналог опорной функции выпуклого множества в евклидовом пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию  $f$  — отвечающую выпуклому подмножеству  $Q \subset H_\kappa^{n+1}$  будем называть *опорной функцией* выпуклого множества и обозначать как  $f = h_Q$ . Выпуклое подмножество  $Q \subset H_\kappa^{n+1}$  отвечающее конформно-плоской метрике  $\frac{dx^2}{f^2(x)}$  с одномерной кривизной  $K_{1/2}(f, x, \xi) \in [-\kappa/2, \kappa/2]$  будем называть  *$\kappa$ -сферическим изображением метрики* и обозначать  $Q = P_f$ .

Наиболее важные в практическом отношении выпуклые множества — выпуклые многогранники. В работе изучаются соответствующие им конформно-плоские метрики, более подробно разбирается случай выпуклых многоугольников на плоскости Лобачевского. Отвечающие им числовые функции на прямой класса  $C^{1,1}$  составлены из кусков парабол. Естественно такие функции назвать конформными сплайн-функциями. В работе даются алгоритмы построения таких функций.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 08-01-98001, № 10-01-90000-Бел\_а, Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ Российской Федерации, проект № НШ-6613.2010.1, а также Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 02.740.11.0457.



Если  $f(x)$  функция заданная на числовой прямой, то выражение  $\frac{dx^2}{f^2(x)}$  можно формально рассматривать как одномерную конформно плоскую метрику. Тогда условие ограниченности одномерной секционной кривизны примет вид дифференциального включения:

$$K_{1/2}(f, x) = f(x) \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{2} \left| \frac{df}{dx} \right|^2 \in [-\kappa/2, \kappa/2].$$

**Теорема.** Пусть  $f(x) > 0$  и  $|K_{1/2}(f, x)| < \kappa/2$ , тогда сферическое  $\kappa$ -изображение  $Q = P_f \subset H_\kappa^2$  одномерной конформно-плоской метрики — строго выпуклое подмножество плоскости Лобачевского с регулярной границей и справедливы формулы:

$$L = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{f(x)} - \frac{1}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{1/2}(f, x) dx}{f(x)},$$

$$\kappa F = \frac{\sqrt{\kappa}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{f(x)} + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{1/2}(f, x) dx}{f(x)} - 2\pi,$$

где  $L$  — длина границы  $P_f$  в  $H_\kappa^2$ ,  $F$  — площадь  $P_f \subset H_\kappa^2$ .

**Следствие.** Изопериметрическое неравенство  $L^2 - 4\pi F - \kappa F^2 \geq 0$  для плоскости Лобачевского  $H_\kappa^2$  влечет неравенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{f(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_{1/2}(f, x) dx}{f(x)} \leq 2\pi^2,$$

при условии  $\sup |K_{1/2}(f, x)| < \infty$ .

**Теорема.** Пусть  $Q \subset H^2$  — выпуклый многоугольник в плоскости Лобачевского кривизны  $(-\kappa)$ , тогда ему отвечает кусочно-гладкая класса  $C^{1,1}$  положительная опорная функция  $h_Q(x)$  с непрерывной производной, график которой составлен из дуг парабол и для которых  $K_{1/2}(f, x) = \pm\kappa/2$ .

## Литература

1. Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. Однородные пространства: теория и приложения.—Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.—280 с.
2. Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavskii V. V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // J. of Math. Sciences.—2007.—Vol. 146, № 6.—P. 6313–6390.
3. Гладунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В. Конформные сплайн-функции // Междунар. конф. «Метрическая геометрия поверхностей и многогранников», посвящ. 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова.—М.: Манс-пресс, 2010.—С. 18–19.
4. Славский В. В. Конформно плоские метрики ограниченной кривизны на  $n$ -мерной сфере // Исследования по геометрии «в целом» и математическому анализу.—Новосибирск: Наука, 1987.—Том 9.—С. 183–199.
5. Slavskii V. V. Conformally flat metrics and the geometry of the pseudo-Euclidean space // Siberian Math. J.—1994.—Vol. 35.—№ 3.—P. 674–682.

МГД ЗАДАЧА ЛАМБА О ВОЛНАХ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ  
 КОНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ  
 ПРИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ МАГНИТНОМ  
 И ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

М. Н. Гулов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Рассматривается плоская линейная задача о собственных колебаниях тяжелой однородной вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины граничащей с вакуумом. На систему наложено стационарное горизонтальное магнитное поле постоянной напряженности. Задача описывается системой магнитогидродинамических (МГД) уравнений движения, неразрывности, индукции и отсутствия магнитных зарядов.

После стандартной процедуры линеаризации, разыскивая решения вида  $f = F(z)e^{\sigma t - ix}$ , задачу удается свести к следующей неклассической краевой задаче:

$$\frac{1}{RmRg} (Z^{VI} - 3Z^{IV} + 3Z'' - Z) - \left( \frac{\sigma}{Rm} + \frac{\sigma}{Rg} \right) (Z^{IV} - 2Z'' + Z) + (\sigma^2 + A) (Z'' - Z) = 0;$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{RmRg} (Z^V(0) - 4Z'''(0) + 3Z'(0)) - \frac{\sigma}{Rg} (Z'''(0) - 3Z'(0)) - \\ & - \frac{1}{Rm} \left( \sigma (Z'''(0) - Z'(0)) + \frac{1}{\sigma} (Z''(0) - Z(0)) \right) + \\ & + \sigma^2 Z'(0) + Z(0) + A (Z'(0) + Z(0)) = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{Rm} (Z'''(0) - Z(0)) - \sigma (Z''(0) + Z(0)) = 0; \quad Z''(0) - Z(0) = 0,$$

где  $\sigma$  — искомый спектральный параметр,  $Rg$  — гидродинамическое число Рейнольдса,  $Rm$  — магнитное число Рейнольдса,  $A$  — число Альфвена,  $Z$  — амплитуда возмущения горизонтальной компоненты индуцированного магнитного поля.

Для данной задачи, считая оба числа Рейнольдса ( $Rm, Rg$ ) достаточно большими, вводя малый параметр  $\varepsilon$  следующим образом:  $\frac{1}{Rg} = \varepsilon^2$ ,  $\frac{1}{Rm} = k\varepsilon^2$ , с помощью метода Вишика — Люстерника проведен асимптотический анализ спектрального параметра  $\sigma$ . В рамках выбранного порядка приближения пара собственных чисел, определяющих спектр поверхностной волны, задается асимптотической формулой

$$\sigma = \pm i\sqrt{1 + 2A} - 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2).$$

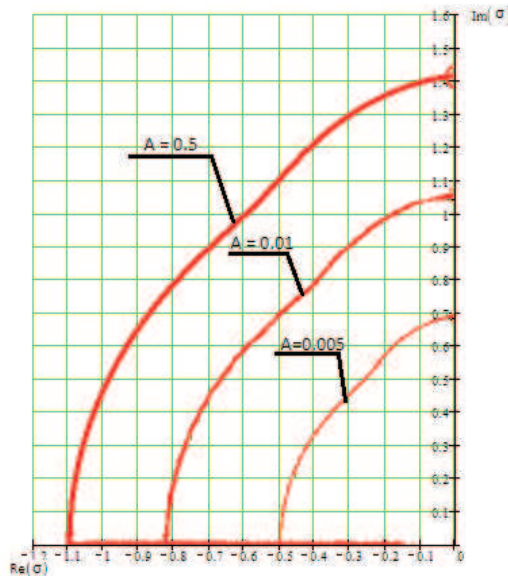
Обратим внимание на то, что частота колебаний асимптотически совпадает с частотой колебаний идеальной жидкости, а декремент затухания не зависит

от числа Альфвена, характеризующего величину напряженности МП. Более того, найденный декремент затухания совпадает с декрементом затухания для немагнитной жидкости в классической задаче Ламба [1]. Построенная асимптотика помимо того, что содержит информацию о поведении решения при весьма больших числах Рейнольдса, служит еще и достаточно хорошим начальным приближением для численного нахождения корней точного дисперсионного (частотного) уравнения. Его вывод не вызывает принципиальных затруднений. Характеристическое уравнение для исходного ОДУ имеет вид:

$$(\theta^2 - 1) \left( (\theta^2 - 1)^2 - (k + 1) \sigma R (\theta^2 - 1) + k R^2 (\sigma^2 + A) \right) = 0;$$

$$Z(z) = C e^z + C_p e^{\theta_p z} + C_m e^{\theta_m z},$$

где  $\theta_{p,m} = \sqrt{\frac{2+(1+k)R\sigma \pm \sqrt{R^2(\sigma^2(k-1)^2 - 4Ak)}}{2}}$  и, естественно,  $\Re(\theta_{p,m}) > 0$ . Обычная процедура подстановки  $Z(z)$  в краевые условия и приравнивания к нулю детерминанта полученной однородной алгебраической системы приводит к точному уравнению частот, вид которого вследствие определенной громоздкости здесь не выписывается. Приведем лишь некоторые результаты численных расчетов, выполненных в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса  $Rm = Rg = R$  для различных значений параметра  $A$ , характеризующего величину натяжения магнитных силовых линий, «вмороженных» в жидкую среду. Графическая иллюстрация проведенных расчетов приведена на нижеследующем графике.



## Литература

1. Ламб Г. Гидродинамика.—М.—Л.: ГИТТЛ, 1947.—928 с.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук.—1957.—Т. 12, № 5(77).—С. 3–122.

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ<sup>1</sup>

В. В. Дударев (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Предварительными (остаточными) напряжениями называют такие напряжения, которые существуют в теле при отсутствии силовых, температурных и других внешних нагрузках [1]. Остаточные напряжения практически всегда возникают в результате различных технологических операций: литья, сварки,ковки, крутки и т. п. Высокая концентрация предварительных напряжений в малой окрестности обуславливается наличием трещин, включений, полостей и прочих дефектов структуры материала. В силу своей природы подобные напряжения проявляют себя лишь при наложении докритических нагрузок на объект, приводя к внезапным разрушениям. Переход современных производственных технологий на качественно новый уровень вызывает необходимость разработки более точных методов контроля, моделирования и диагностики предварительных напряжений в твердых телах. Стоит отметить, что задача идентификации однородного предварительного напряженного состояния достаточно хорошо исследована с помощью акустических методов основанных на изменении скорости продольных и поперечных волн от величины предварительных напряжений [2]. С другой стороны проблема диагностики существенно неоднородного предварительного напряженного состояния носит актуальный характер, поскольку она рассмотрена лишь с позиции разрушающих и полуразрушающих методов.

В настоящей работе представлено решение ряда задач, посвященных идентификации предварительного напряженного состояния в твердых телах. Рассмотрены задачи о крутильных, изгибных и продольных колебаниях консольно закрепленного стержня при наличии неоднородного одноосного предварительного напряженного состояния. Колебания указанных выше тел описываются дифференциальными уравнениями четвертого или второго порядка с переменными коэффициентами. Решения прямых задач сведены к решению соответствующих интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывными ядрами. Численное решение осуществлено на основе метода коллокаций с использованием квадратурных формул Симпсона или трапеций с постоянным шагом. В серии тестовых примеров проведено сравнение точности реализованных численных решений с соответствующими аналитическими решениями при постоянных коэффициентах. Изучено влияние величины одноосного предварительного напряженного состояния на амплитудно-частотные характеристики.

Решение задачи о колебаниях полосы, жестко закрепленной у основания, с помощью аппарата преобразования Фурье сведено к изучению более простых

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 10-01-00194, Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № П596.

уравнений для стержня, построенных для трансформант компонент перемещений. Представлены рекомендации по способу нагружения на верхней границе полосы для оценки возможности проведения успешной процедуры реконструкции.

Обратная задача в рамках рассматриваемой проблемы заключается в нахождении неизвестного закона распределения предварительного напряженного состояния по некоторой дополнительной информации. В качестве метода идентификации выбран способ амплитудно-частотного зондирования, хорошо зарекомендовавший себя при решении других коэффициентных обратных задач [3]. Дополнительная информация — значения компонент вектора смещения на свободной части поверхности для заданного набора частот.

Численное решение обратных задач реализовано с помощью метода построения итерационных процессов. Для определения поправок компонент тензора предварительных напряжений на каждой итерации сформулировано интегральное уравнение Фредгольма первого рода. При рассмотрении конкретных задач обсуждены особенности и свойства ядра этого интегрального оператора. Для преодоления некорректности использован метод регуляризации А. Н. Тихонова с автоматическим выбором параметра регуляризации [4]. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А. О. Ватульяну за внимание к проблеме исследования.

## Литература

1. Чернышев Г. Н., Попов А. Л., Козинцев В. М., Пономарев И. И. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах.—М.: Наука, 1996.—240 с.
2. Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуца О. И. Введение в акустоупругость.—Киев: Наукова думка, 1977.—152 с.
3. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.—М.: Физматлит, 2007.—223 с.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1979.—288 с.
5. Ватульян А. О., Дударев В. В., Недин Р. Д., Саакян Я. Г. О некоторых задачах идентификации предварительных напряжений // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. XIV междунар. конф.—2010.—Т. 1.—С. 86–90.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА ПОЯВЛЕНИЯ ВТОРОЙ ПИКИ  
ДАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ВИНКЛЕРА  
С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОДАТЛИВОСТИ

**А. И. Задорожный** (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ),  
**Е. О. Лагунова** (Россия, Ростов-на-Дону; РГУПС)

В одномерных задачах эластогидродинамической теории смазки ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости наибольшее распространение получили две модели Буссинеска и Винклера. Более общая модель Буссинеска сводит задачу определения давления в смазочном слое к решению нелинейного интегродифференциального уравнения вида:

$$\frac{p(x)}{x} = \frac{h(x) - 1}{h^3(x)} \exp \{Lp(x)\},$$
$$h(x) = 1 + x^2 - c^2 + D \int_a^c p(\xi) \ln \frac{c - \xi}{|\xi - x|} d\xi, \quad (1)$$

где  $p(a) = p(c) = 0$ ,  $D$  — коэффициент податливости.

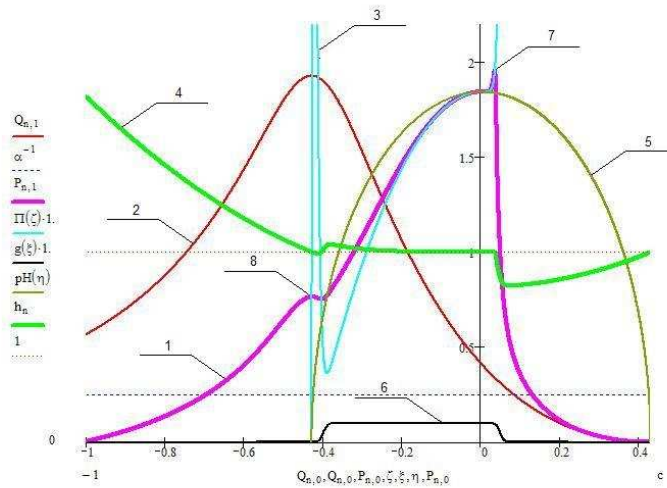
Для выписанной краевой задачи доказана теорема существования единственности решения и возможность решения задачи методом последовательных приближений [1].

Основным методом решения указанной задачи является, однако, численный метод, реализованный многими авторами, среди которых, в первую очередь, отметим Галахова М. А. и его сотрудников [1, 2], Коднира Д. С. [3, 4], а также еще целым рядом авторов, указанных в вышеперечисленных монографиях или опубликовавших более поздние статьи. Из физических соображений совершенно очевидно наличие одного (основного) максимума давления внутри смазочного слоя  $x \in [a, c]$ , где  $a$  — входная и  $c$  — выходная границы области контакта. Интересный факт: в работах Д. С. Коднира указанный максимум  $p(x)$  оказывается единственным, в работах же представителей школы М. А. Галахова при определенных значениях параметров обнаруживается второй «острый» максимум называемый пикой (пиком) давления. Впервые внимание на возможность наличия второго пика обратил внимание Эртель, что было доложено в его докладах в ИМАШ в 1939–1940 гг. Теоретически существование второй пика давления впервые показал, правда, для случая сжимаемого смазочного материала, А. И. Петрусевиц в своей докторской диссертации 1950 г., краткое содержание которой изложено в статье [5]. Асимптотическим методом наличие второго пика установил В. М. Александров и соавторы [6]. Были, однако, попытки доказать, что в классическом случае при использовании гипотезы о том, что толщина смазочного слоя на выходе совпадает с его толщиной в точке основного максимума давления второй пик отсутствует [7]. Ошибка в [7] была обнаружена в

работе [8], что, впрочем, не является доказательством обязательности наличия второго максимума. Отсутствие пики давления при выполнении вышеупомянутой гипотезы все-таки доказано в статье [9]. При отказе от указанной гипотезы картина в корне меняется и вопрос остается открытым. В [3, 4] дано обоснование того, что для приближенных расчетов вместо модели Буссинеска может успешно использоваться модель Винклера. Приведем ее для случая

$$\frac{dp}{dx} = W \exp\{\alpha p\} \frac{\gamma - 1 + x^2 - c^2 + Dp(x)}{(1 + x^2 - c^2 + Dp(x))^3}. \quad (2)$$

Как видно, произведена замена интеграла выражением  $Dp(x)$ , причем считается, что  $D = \text{const}$ . Вполне естественной представляется возможность выбора  $D(x)$  способом, который лучше аппроксимирует вклад упругой деформации шипа в общую толщину смазочного слоя. Таковой является функция практически постоянная внутри области контакта и «спадающая» к нулю при приближении к его границам. Не выписывая ее конкретного вида приведем результаты расчета модельной задачи.



**Рис. 1.** Иллюстрация наличия второй пики давления.

1 — график численного решения уравнения (2) при  $D(x)$  (кривая 6) и  $\delta \neq 1$ ; 2 — график  $p(x)$  при  $D = 0$  (абсолютно твердый вал); 3 — кривая экстремумов для уравнения (2); 4 — график толщины смазочного слоя  $h(x)$ ; 5 — распределение давления по Герцу; 6 — график коэффициента податливости  $D(x)$ ; 7 — второй пик давления (ср. [1]).

В заключение обратим внимание на наличие и третьего локального максимума давления обозначенного как (8) на рис. 1, который появлялся и при расчетах в [10].

## Литература

1. *Галахов М. А., Гусятников П. Б., Новиков А. П.* Математические модели контактной гидродинамики.—М.: Наука, 1985.—296 с.
2. *Галахов М. А., Усов П. П.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения.—М.: Наука, 1990.—280 с.
3. *Коднир Д. С.* Контактная гидродинамика смазки деталей машин.—М.: Машиностроение, 1976.—304 с.
4. *Коднир Д. С., Жидков Е. П., Байбородов Ю. И.* Эластогидродинамический расчет деталей машин.—М.: Машиностроение, 1988.—160 с.
5. *Петрусевич А. И.* Основные выводы из контактно-гидродинамической теории смазки // Изв. АН СССР.—1951.—№ 2.—С. 201–223.
6. *Александров В. М., Кудиш И. И., Никулинская Л. К.* О постановке и решение контактно-гидродинамических задач теории смазки // Трение и износ.—1982.—Т. 3, № 1.—С. 51–63.
7. *Пулькин С. П.* К вопросу о существовании второй пики давления в смазочном слое // Докл. АН СССР.—1965.—Т. 164, № 4.
8. *Галахов М. А.* К вопросу о существовании второго максимума давления в слое смазки // Машиноведение.—1973.—№ 5.—С. 80–82.
9. *Задорожный А. И.* Теорема единственности пика давления в задаче теории ЭГД-смазки в приближении Буссинеска // Мат. моделирование и краевые задачи. Тр. Всероссийской науч. конф. 26–28 мая 2004 г.—Ч. 3.—С. 110–113.
10. *Фелдмане Э. Г.* О расчете линейного УГД-контакта с учетом неньютоновских свойств смазки // Тр. ин-та / Рижский политех. ин-т.—1987.—Вып. 16.—С. 11–21.



ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ  
В ЦЕНТРОБЕЖНОЙ МЕЛЬНИЦЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ТИПА  
С ПОМОЩЬЮ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

**Е. С. Каменецкий** (Россия, Владикавказ; ЮМИ),  
**Д. Г. Минасян** (Россия, Владикавказ; ЮМИ),  
**В. Н. Хетагуров** (Россия, Владикавказ; СКГМИ)

С использованием пакета OpenFOAM проведено компьютерное моделирование движения сыпучей среды в центробежной мельнице вертикального типа. Рассматривались разные скорости вращения ротора и наличие или отсутствие ребер. Решались уравнения импульса и неразрывности:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} (\mu \vec{\nabla} \vec{V}),$$
$$\vec{\nabla} \vec{V} = 0.$$

Цилиндрический корпус мельницы неподвижен и на нем задавалось условие прилипания, т. е. отсутствие относительной скорости движения измельчаемого материала

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Условия прилипания задавались также на всей поверхности ротора:

$$u = 0, \quad v = \omega r, \quad w = 0.$$

На верхней поверхности столба материала, которая принималась горизонтальной, вертикальная составляющая скорости считалась равной нулю  $w = 0$ , а для горизонтальных составляющих скорости использовались условия:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

В первой модели сыпучая среда рассматривалась как вязкая ньютоновская жидкость, а во второй — как неньютоновская жидкость, коэффициент вязкости которой зависит от давления ( $\mu = \mu_0 + k \cdot P$ , где  $\mu_0$  — коэффициент вязкости среды в ньютоновской модели,  $k$  — константа). Результаты вычислений сравнивались с экспериментальными данными, полученными на модели мельницы. Сравнение двух моделей показало, что модель с коэффициентом вязкости, зависящим от давления точнее отражает процессы, происходящие в полости центробежной мельницы вертикального типа. Была установлена зависимость времени выхода мельницы на стационарный режим от вязкости. В случае ньютоновской жидкости с коэффициентом вязкости  $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$  время выхода на стационарный режим для модели центробежной мельницы с диаметром корпуса 0.2 м. Составляет примерно 35 мин. Увеличение размеров мельницы в полтора раза

не существенно изменяет это время. При учете зависимости коэффициента вязкости от давления время выхода на режим уменьшалось в среднем на 2–3 мин. При изменении коэффициента вязкости  $\mu$  в широких пределах, время выхода на режим изменялось приблизительно пропорционально величине этого коэффициента.

### Литература

1. Хетагуров В. Н. Разработка и проектирование центробежных мельниц вертикального типа.— Владикавказ: Терек, 1999.—225 с.
2. Каменецкий Е. С., Тедеева С. Р., Хетагуров В. Н. Совершенствование модели быстрого движения сыпучего материала // Современные методы физико-математических наук. Тр. междунар. конф.—Орел, 2006.—Т. 2.—С. 36–39.

## ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОРПОРАТИВНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ MICROSOFT НА МЕХМАТЕ ЮФУ

**М. И. Карякин, Д. К. Надолин, К. А. Надолин,  
О. А. Цывенкова** (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Представленный доклад носит обзорный характер и содержит информацию о деятельности Учебного центра ИТ-Академии мехмата ЮФУ и Softline Academy [1].

Учебный центр ИТ-Академии мехмата ЮФУ и Softline Academy — совместный проект Южного федерального университета и компании Софтлайн — одного из ведущих поставщиков программного обеспечения в учебные заведения Российской Федерации. Проект направлен на повышение качества дополнительного профессионального образования в области информационных технологий, подготовку, переподготовку и повышение квалификации специалистов в ИТ-сфере.

Факультет математики, механики и компьютерных наук давно и плодотворно сотрудничает с компанией Софтлайн. Результатом этих партнерских отношений стало создание в 2009 г. Учебного центра Softline Academy на базе образованной ранее в 2007 г. ИТ-Академии мехмата ЮФУ, реализующей партнерскую программу Microsoft IT Academy Program.

Основными направлениями деятельности Учебного центра является разработка и реализация учебных программ дополнительного профессионального образования в области информационных технологий, разработка учебно-методических материалов, пособий и учебных планов по дисциплинам специализации, разработка и апробирование новых образовательных технологий в области профессионального образования. Например, использование курсов Microsoft e-Learning [2] и других электронных корпоративных образовательных ресурсов дистанционного обучения позволит повысить уровень подготовки ИТ-специалистов.

В рамках сотрудничества факультета и компании Софтлайн подготовлены учебные материалы и начато обучение по двум образовательным трекам: «Администратор баз данных» и «Системный администратор» — на основе курсов-модулей: «Основы сетевых технологий и TCP/IP» (курс AMS-110); «Установка и настройка Microsoft Windows Vista и приложений» (курс MS-5115); «Управление и поддержка среды Microsoft Windows Server 2003» (курс MS-2273); «Язык SQL и основы баз данных» (курс AMS-272); «Внедрение и поддержка баз данных Microsoft SQL Server 2005» (курс MS-2779); «Базовые технологии информационной безопасности» (курс AMS-120).

По инициативе и при финансовой поддержке Российского представительства корпорации Microsoft дважды (в 2008 и 2010 гг.) были проведены бесплатные краткосрочные курсы повышения квалификации для профессорско-преподавательского состава высших учебных заведений России [3, 4]. Организа-

тором и координатором курсов выступила компания Софтлайн. Обучение проходило на базе Учебных центров Microsoft IT Academy и Softline Academy в Москве, Санкт-Петербурге, Казани, Томске, Ростове-на-Дону, Екатеринбурге, Нижнем Новгороде, Самаре, Новосибирске, Перми и в ряде других городов. Отметим, что планируется данное мероприятие сделать традиционным.

На курсы приглашались преподаватели, проводящие занятия по информационным технологиям в рамках обязательной программы вуза и желающие обновить свой учебный курс с использованием технологий и продуктов Microsoft. Программы курсов предполагали 72-часовую подготовку по очно-заочной форме обучения. Продолжительность очного цикла обучения для каждого курса составляла 15 часов по следующим направлениям подготовки: веб-технологии и современные средства разработки; компьютерные сети; базы данных. Направление подготовки выбиралось либо руководителями университетов, которые могли направить группу своих преподавателей, либо самими преподавателями, в случае индивидуальной инициативы. Курсы могли быть выбраны из числа предлагаемых в каждом конкретном городе.

В Учебном центре ИТ-Академии мехмата ЮФУ и Softline Academy прошли занятия по всем трем направлениям подготовки. Курсы завершались экзаменационным тестом Национальной системы тестирования и сертификации Alltests [5]. По результатам сдачи экзаменационного теста выдавались сертификаты Softline Academy и Alltests об успешном прохождении курсов повышения квалификации. В Учебном центре ИТ-Академии мехмата ЮФУ и Softline Academy прошли обучение преподаватели вузов Ростова-на-Дону (ЮФУ, ДГТУ, РГЭУ-РИНХ, РЮИ МВД РФ), Новочеркасска (ФГОУ СПО НТТИ Росздрава), Таганрога (ТТИ ЮФУ). В 2010 г. количество преподавателей, желающих пройти бесплатные краткосрочные курсы повышения квалификации в Ростове-на-Дону, оказалось столь велико, что пришлось организовать два потока — в июне и в сентябре.

Чтобы выяснить мнение слушателей о мероприятии, при завершении обучения был проведен анонимный опрос. По итогам анкетирования большая часть слушателей отметила хорошую организацию занятий, а также актуальность полученной информации для обновления своих учебных курсов по компьютерным дисциплинам. Также слушатели отметили высокий методический уровень подачи нового материала, доступность изложения, удачные практически примеры. Все это свидетельствует о высоком профессиональном уровне преподавателей Учебного центра, которые имеют сертификаты MCP (Microsoft Certified Professional), MCAD (Microsoft Certified Applications Developer) и даже MCT (Microsoft Certified Trainer).

## Литература

1. Учебный центр ЮФУ & Softline Academy.—URL: <http://rostov.it-academy.ru>.
2. Microsoft E-Learning Course Catalog.—URL: <http://www.microsoftlearning.com/catalog/>.
3. Бесплатное повышение квалификации преподавателей вузов. Ростов-на-Дону (2008 г.).—URL: <http://www.it-academy.ru/index.php?id=762>.

4. Бесплатные курсы повышения квалификации для преподавателей IT-дисциплин (2010 г.).—URL: <http://www.it-academy.ru/index.php?id=921>.
5. Национальная система тестирования и сертификации специалистов.—URL: <http://www.alltests.ru/>.

## О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ КОНЕЧНОГО СИГНАЛА В СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ<sup>1</sup>

**М. С. Козаченко** (Россия, Ханты-Мансийск; ЮГУ),  
**В. В. Славский** (Россия, Ханты-Мансийск; ЮНИИИТ)

Современная прикладная теория спектрального анализа сигналов находит применение во многих естественно-научных областях: экономика, биология, геофизика и т. д. Так или иначе, она базируется на преобразовании Фурье, определенном для сигналов заданных на всей числовой прямой. На практике сигнал определен не на всей числовой прямой, а на конечном интервале, и в этом случае общего подхода к определению спектрального разложения нет, а предлагаются различные рецепты для определения и вычисления спектра. В данной работе предлагается метод выделения периодической составляющей из конечного непрерывного сигнала принадлежащего пространству С. Л. Соболева, основанный на вариационном принципе.

В работе решается следующая проблема: пусть дана функция комплекснозначная  $f : [a, b] \rightarrow C$  из пространства С. Л. Соболева  $W_2^n [a, b]$ , где  $n$  — число обобщенных производных функции  $f(x)$  и задано число  $0 < T < b - a$ . Требуется найти комплексную функцию  $g : [a, b] \rightarrow C$  класса  $W_2^n [a, b]$ , имеющую период  $T$  на отрезке  $[a, b]$ , т. е. такую, что  $g(t) = g(t + T)$ , при условии  $t, t + T \in [a, b]$ , и наилучшим образом аппроксимирующую функцию  $f(x)$  относительно нормы пространства  $W_2^n [a, b]$ .

В работе указаны явные формулы для нахождения функции  $g : [a, b] \rightarrow C$ . Исследованы свойства данной аппроксимации. Ранее в работе [1] был исследован случай пространства Лебега  $L_2[a, b]$ .

### Литература

1. Козаченко М. С., Славский В. В. Вариационный метод выделения периодической составляющей конечного непрерывного сигнала // Межрегиональная научно-практическая конф. молодых ученых и студентов «Научный потенциал молодежи — будущему России» (Волгодонск, 23 апреля 2010 г.).—С. 14–16.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 08-01-98001, № 10-01-90000-Бел\_а, Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ Российской Федерации, проект № НШ-6613.2010.1, а также Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 02.740.11.0457.

## О ПРОГРЕССИВНОМ ПОДОХОДНОМ НАЛОГЕ В РОССИИ<sup>1</sup>

Е. Ю. Кутищева, В. А. Родин (Россия, Воронеж; ВГУ)

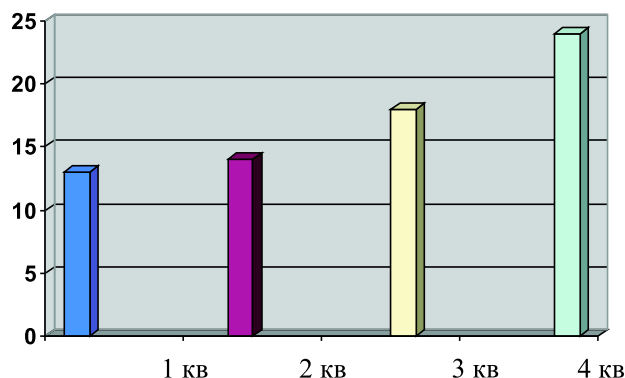
Введение прогрессивного налога не эффективно в стране с логнормальным распределением в случае когда: 1) не достаточно развит средний класс; 2) лица с большим доходом составляют малую часть населения. Эти интуитивно понятные требования в докладе полностью и количественно подтверждены. Социальная защита в определенной мере должна касаться и богатых слоев населения, так как в основной массе эти слои определяют развитие страны. Заметим, что по данным за 2008 г. значение параметра для Москвы превышает 1,5 в распределении

$$\rho_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \ln \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Следовательно, в современной действительности, даже если учитывать распределение только легальных доходов населения, введя «достаточно мягкую» прогрессивную шкалу можно увеличить сбор суммы налогов в 2 раза. При этом малоимущие слои населения вообще будут освобождены от налога и основная нагрузка налоговая ляжет на плечи таких слоев населения, у которых даже с вычетом налоговой суммы заработок будет в несколько раз выше среднего значения.

Естественным является процесс постепенного перехода к прогрессивной шкале, тщательно взвешивая значения координат управляющего вектора  $\vec{T}$  и просматривая текущую статистику, убедиться, что среднеквадратичное отклонение в достаточно населенных районах страны не мало. Возможна региональная политика.

Диаграмма сбора налоговой суммы  
при различных видах налоговой шкалы



<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 08-01-00226.

1 кв — единый подоходный налог в 13%; 2 кв — прогрессивный налог с входным вектором  $\vec{T}_1 = \{0, 0.13, 0.15, 0.2, 0.4\}$  для логнормального распределения с параметром характеризующим разброс  $\sigma = 0.6$ ; 3 кв — прогрессивный налог с входным вектором  $\vec{T}_2 = \{0, 0.13, 0.15, 0.2, 0.4, 0.5\}$  и распределение имеет параметр  $\sigma = 0.9$ ; 4 кв — прогрессивный налог с входным вектором  $\vec{T}_3 = \{0, 0.13, 0.15, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$  и распределение имеет параметр  $\sigma = 1.2$ . Кривая роста суммы вогнута, это значит, что введение прогрессивного налога тем эффективней, чем больше значение параметра  $\sigma$ .

### Литература

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2.—М.: Мир, 1965.—537 с.
2. Кутищева Е. Ю., Терновский В. А. Подоходный налог и оценка глобального распределения доходов в России // Теория и практика функционирования финансовой и денежно-кредитной системы России: сб. статей междунар. научно-практической конф.—Воронеж: «Научная книга», 2010.—С. 225–228
3. Колмаков И. Б. Прогнозирование показателей дифференциации денежных доходов населения // Проблемы прогнозирования.—2006.—№ 1.—С. 136–162.
4. Скрыль С. В., Тростянский С. Н. Безопасность социоинформационных процессов. Теория синтеза прогностических моделей.—Воронеж: ВИ МВД России, 2008.—155 с.



АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В. В. Лукашев, В. Н. Попов (Россия, Архангельск; С(А)ФУ),  
А. А. Юшканов (Россия, Москва; МГОУ)

Математическое моделирование процессов, протекающих в плоских каналах с бесконечными параллельными стенками, приводит к необходимости построения решений краевых задач для неоднородных дифференциальных уравнений с частными производными [1]. До недавнего времени аналитические методы решения такого рода задач отсутствовали. В представленной работе построено аналитическое (в виде ряда Неймана) решение краевой задачи

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu) + 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2) Z(x, \tau) d\tau, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$Z(d, \mu) = (1 - q)Z(d, -\mu), \quad \mu < 0, \quad (2)$$

$$Z(-d, \mu) = (1 - q)Z(-d, -\mu), \quad \mu > 0, \quad (3)$$

где  $q$  — числовой параметр, принимающий значения на промежутке  $(0; 1]$ .

В качестве метода решения краевой задачи (1)–(3) предложено обобщение метода Кейза [2] на случай решения задач с ограниченной геометрией. Суть метода следующая. Общее решение (1) найдено в пространстве обобщенных функций в виде разложения по собственным векторам непрерывного и дискретного спектров характеристического уравнения, к которому после разделения переменных сводится уравнение (1). Подстановка в построенное общее решение граничных условий (2), (3) приводит к системе двух незацепленных сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши. Решение последней сводится к краевой задаче Римана на действительной положительной полуоси. Коэффициенты в разложении решения задачи (1)–(3) по собственным векторам дискретного спектра находятся из условия разрешимости построенной краевой задачи. Использование формул Сохоцкого-Племеля для нахождения коэффициентов в разложении решения задачи по собственным векторам непрерывного спектра приводит к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, решение которого ищется в виде степенного ряда. С использованием построенного решения получено аналитическое (в виде ряда Неймана) выражение для потока массы газа, приходящегося на единицу ширины канала. Полученные результаты с высокой степенью точности, совпадают с аналогичными результатами в [3–5], полученными на основе прямого численного моделирования.

## Литература

1. Попов В. Н., Тестова И. В., Юшканов А. А. Аналитическое решение задачи о течении Куэтта в плоском канале с бесконечными параллельными стенками // Журн. технической физики.—2011.—Т. 81, № 1.—С. 53–58.
2. Латышев А. В., Юшканов А. А. Аналитические решения граничных задач для кинетических уравнений.—М.: МГОУ, 2004.—286 с.
3. Baricello L. B., Camargo M., Podrigues P., Siewert C. E. Unified solutions to classical flow problems based on the BGK model // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik.—2001.—Vol. 52.—С. 517–534.
4. Siewert C. E. Poiseuille, thermal creep and couette flow // European J. of Mechanics B/Fluids.—2002.—Vol. 21.—С. 579–597.
5. Siewert C. E. The linearized Boltzmann equation: concise and accurate solutions to basic flow problems // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik.—2003.—Vol. 54.—С. 273–303.

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОРОУПРУГОГО СЛОЯ<sup>1</sup>

А. А. Ляпин (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ)

Использование моделей пороупругости для описания динамического поведения грунтов, водонасыщенных пород, мягких и твердых биологических тканей в последние годы весьма распространено. Пороупругая среда состоит из упругого скелета и заполняющей его поры жидкости или газа. Задачами для таких сред исследователи начали заниматься относительно недавно. Первые работы принадлежат М. А. Био и датируются 1956 г. [1]. Явные интегральные представления волновых полей в пористых средах для задач с простой геометрией типа слоя, полупространства были получены ранее в работах [2–6]. Сложность динамических процессов, протекающих в такой среде, привела к тому, существует ряд математических моделей, отличающихся учетом или неучетом тех или иных слагаемых в модели двухфазной сплошной среды. Отметим, что общеупотребительной модели для описания пороупругой насыщенной среды до сих пор не существует. С другой стороны неучет параметра пористости, взаимодействия фаз, тепло- и массообмена приводит к значительным погрешностям в описании динамического поведения.

В настоящей работе обсуждены вопросы динамического поведения пористоупругого слоя при: 1) силовом нагружении на границе; 2) сосредоточенном нагружении внутри. Представление решения второй задачи необходимо для использования идей метода граничных интегральных уравнений для исследования колебаний слоя с полостью или включением [6].

Рассмотрена задача об установившихся колебаниях с частотой  $\omega$  трансверсально-изотропного пороупругого слоя толщиной  $H$ , жесткозакрепленного на нижней границе, с заданными силовыми усилиями на верхней границе и под действием сосредоточенной нагрузки в точке  $(\xi_1, \xi_3)$ .

В рамках модели Био определяющие соотношения для пороупругого материала представимы в следующем виде [2]:  $\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} - A_{ij}p$ .

Система уравнений для построения фундаментальных решений такой среды имеет вид [7]:

$$\begin{aligned} (C_{ijkl}u_{k,l}^{(m)})_{,j} - (A_{ij}p^{(m)})_{,j} + \rho\omega^2 u_i^{(m)} + \delta_{im}\delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_3 - \xi_3) &= 0, \quad i = 1, 2; \\ -i\omega \frac{\phi^2}{R} p^{(m)} - (K_{ij}p^{(m)})_{,j} - i\omega A_{ij}u_{i,j}^{(m)} + \omega^2 (K_{ij}\rho_f u_i^{(m)})_{,j} + \\ + \delta_{3m}\delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_3 - \xi_3) &= 0, \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00194-а, Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракты № П596, и Южного математического института г. Владикавказ.

В случае трансверсально-изотропного материала структура тензоров  $C_{ijkl}$ ,  $A_{ij}$ ,  $K_{ij}$  определяется группой симметрии материала [8], и система уравнений будет иметь вид:

$$C_{11}u_{1,11}^{(m)} + C_{13}(u_{3,31}^{(m)} + u_{1,33}^{(m)}) + C_{55}(u_{1,33}^{(m)} + u_{3,13}^{(m)}) - A_{11}p_{,1}^{(m)} + \rho\omega^2 + \delta_{1m}\delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_3 - \xi_3) = 0,$$

$$C_{13}u_{1,13}^{(m)} + C_{33}(u_{3,33}^{(m)} + u_{1,31}^{(m)} + u_{3,11}^{(m)}) - A_{33}p_{,3}^{(m)} + \rho\omega^2 + \delta_{2m}\delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_3 - \xi_3) = 0,$$

$$-i\omega \frac{\phi^2}{R} p^{(m)} - (K_{11}p_{,11}^{(m)} + K_{33}p_{,33}^{(m)}) - i\omega(A_{11}u_{1,1}^{(m)} + A_{33}u_{3,3}^{(m)}) + \\ + \rho_f\omega^2(K_{11}u_{1,1}^{(m)} + K_{33}u_{3,3}^{(m)}) + \delta_{3m}\delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_3 - \xi_3) = 0, \quad m = 1, 2, 3,$$

где  $C_{11}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{55}$  — компоненты тензора упругости,  $A_{11}$ ,  $A_{33}$  — компоненты тензора Био,  $R$  — гидростатическая постоянная,  $\rho$ ,  $\rho_f$  — общая плотность среды и плотность жидкости соответственно,  $u_1$ ,  $u_3$  — компоненты вектора перемещений среды,  $p$  — давление жидкости в порах.

Граничные условия задачи имеют вид:

$$\sigma_{11}^{(m)} = 0, \sigma_{13}^{(m)} = 0, p^{(m)} = 0, \text{ при } x = H \left( \frac{\partial p^{(m)}}{\partial x_3} = 0 \text{ в случае открытых пор} \right); \\ u_1^{(m)} = 0, u_3^{(m)} = 0, p^{(m)} = 0, \text{ при } x = 0 \left( \frac{\partial p^{(m)}}{\partial x_3} = 0 \text{ в случае открытых пор} \right).$$

Построено решение поставленной задачи с помощью интегрального преобразования Фурье в виде суммы решений двух задач: задачи об установившихся колебаниях плоскости с сосредоточенной нагрузкой и задачи о колебаниях слоя с представленными выше граничными условиями. Для обеих задач построены интегральные представления перемещений, а также построены и исследованы дисперсионные множества.

## Литература

1. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid // J. Acoustic. Soc. Am.—1956.—P. 168–178.
2. Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах.—Киев: Наука думка, 1990.—224 с.
3. Krauklis P. V. New guided wave in a poroacoustic layer proceedings // International Seminar, Day on Diffraction.—1999.—P. 113–117.
4. Gubaidullin A. A., Kuchugurina O. Yu. One-dimensional linear waves with axial and central symmetries in saturated porous media // Transport in Porous Media.—1996.—Vol. 22.—P. 73–90.
5. Губайдуллин А. А., Болдырева О. Ю. Распространение волн вдоль границы насыщенной пористой среды и жидкости // Акустический журн.—2006.—Т. 52.—С. 201–211.
6. Ватульян А. О., Ляпин А. А. Динамическая теорема взаимности и фундаментальные решения для пороупругих сред // Вестн. ЧЭС.—2010.—Т. 4.—С. 23–28.
7. Маслов Л. Б. Математическое моделирование колебаний пороупругих систем.—Иваново: ГОУВПО ИГЭУ им. В. И. Ленина, 2010.—264 с.
8. Шаскольская М. П. Акустические кристаллы. Справочник.—М.: Наука, 1971.—359 с.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ  
РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ<sup>1</sup>

И. И. Матвеева (Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН, НГУ)

Рассматриваются системы квазилинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + F(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t > \tau > 0, \quad (1)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  — матрицы с непрерывными  $T$ -периодическими элементами,  $T > \tau$ ,  $F(t, u, v)$  — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по  $u$ , при этом

$$\|F(t, u, v)\| \leq q_1 \|u\|^{1+\omega_1} + q_2 \|v\|^{1+\omega_2}, \quad q_1, q_2, \omega_1, \omega_2 \geq 0 — \text{постоянные.}$$

В работе исследуется асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1). Используя подход, развитый в работах [1–3], мы устанавливаем оценки решений системы (1), характеризующие скорость убывания при  $t \rightarrow \infty$ , и получаем области притяжения без нахождения корней квазимногочленов. Указанный подход основан на использовании матричного дифференциального неравенства типа Риккати

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + H(t)B(t)K^{-1}(\tau)B^*(t)H(t) < -K(0), \\ t \in [0, T],$$

$$K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0, \tau].$$

### Литература

1. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн.—2004.—Т. 45, № 6.—С. 1271–1284.
2. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика.—2005.—Т. 5, вып. 3.—С. 20–28.
3. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 5.—С. 1025–1040.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00035, Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракты № 02.740.11.0429, № 16.740.11.0127, и Сибирского отделения Российской академии наук, проект № 85.

О СВЯЗЯХ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ СИСТЕМ  
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
И УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ<sup>1</sup>

И. А. Мельник (Россия, Новосибирск; НГУ, ИМ СО РАН)

В работе мы продолжаем исследование связей между решениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений больших размеров и решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, возникающих при моделировании многостадийного синтеза вещества. Первый результат в этом направлении был получен Г. В. Демиденко в [1] при изучении системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{n-1}{\tau}x_1 + g(t, x_n), & t > 0, \\ \frac{dx_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau}(x_{j-1} - x_j), & j = 2, \dots, n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{n-1}{\tau}x_{n-1} - \theta x_n. \end{cases} \quad (1)$$

Размерность  $n$  системы определяется числом стадий,  $\tau > 0$  — время протекания процесса,  $x_j(t)$  — концентрация вещества на  $j$ -ой стадии. При очень большом числе стадий  $n \gg 1$  возникает сложная задача нахождения концентрации продукта синтеза  $x_n(t)$ . Способ решения этой «проблемы большой размерности» был предложен в [1] и основан на доказательстве теорем о предельном переходе от системы (1) к уравнению с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)).$$

В дальнейших работах (см., например, [2, 3]) были установлены аналогичные результаты для более широкого класса систем.

В данной работе мы рассматриваем систему нелинейных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{n-1}{\tau} \frac{x_1}{1+\rho x_1^\gamma} + g(t, x_n), & t > 0, \\ \frac{dx_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau} \left( \frac{x_{j-1}}{1+\rho x_{j-1}^\gamma} - \frac{x_j}{1+\rho x_j^\gamma} \right), & j = 2, \dots, n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{n-1}{\tau} \frac{x_{n-1}}{1+\rho x_{n-1}^\gamma} - \theta x_n, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\theta \geq 0$ ,  $\tau, \rho, \gamma > 0$ . Системы вида (2) возникают при моделировании многостадийного синтеза с учетом нелинейности динамики процесса. Будем предполагать, что функция  $g(t, z) \in C(\mathbb{R}_2)$  неотрицательна, ограничена  $0 \leq g(t, z) \leq G$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 10-01-00035, Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 16.740.11.0127.

и удовлетворяет условию Липшица  $|g(t, z_1) - g(t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ . Будем неограниченно увеличивать число уравнений системы и рассматривать последовательности функций  $\{x_j^n(t)\}$ , составленные из  $j$ -ых компонент решений задач Коши для систем вида (2) с нулевыми начальными данными  $x|_{t=0} = 0$ . Установлены следующие предельные свойства этих последовательностей.

**Теорема 1.** Существует  $n_1 > 0$  такое, что при всех  $n > n_1$  имеют место оценки

$$0 \leq x_j^n(t) < \frac{\tau G(1 + \rho)}{n - 1}, \quad j = 1, \dots, n - 1, \quad t > 0.$$

**Теорема 2.** Последовательность  $\{x_n^n(t)\}$  равномерно сходится на любом отрезке  $[0, T]$ ,  $T > \tau$ :

$$x_n^n(t) \rightarrow y(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Предельная функция  $y(t)$  является решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), & t > \tau, \\ y(t) \equiv 0, & 0 \leq t \leq \tau. \end{cases}$$

**Теорема 3.** При  $\gamma \geq 3/4$  имеет место оценка

$$\max_{t \in [0, T]} |x_n^n(t) - y(t)| \leq \frac{c}{n^{1/4}}, \quad n \geq n_0,$$

при  $0 < \gamma < 3/4$  имеет место оценка

$$\max_{t \in [0, T]} |x_n^n(t) - y(t)| \leq \frac{c}{n^{\gamma/3}}, \quad n \geq n_0(\gamma).$$

Из теорем 2, 3 мы получаем эффективный метод для приближенного нахождения последней компоненты решения системы (2) при  $n \gg 1$  с использованием уравнения с запаздывающим аргументом.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Г. В. Демиденко и к. ф.-м. н. И. И. Матвеевой за полезные дискуссии и интерес к работе.

## Литература

1. Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г. Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. математики.—2004.—Т. 7, № 1.—С. 73–94.
2. Демиденко Г. В., Лихошвай В. А. О дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн.—2005.—Т. 46, № 3.—С. 538–552.
3. Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е. Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 1.—С. 58–68.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА  
ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ СТОПЫ ЧЕЛОВЕКА  
ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

**А. Б. Михайлов, С. А. Данильченко, В. Т. Прохоров,  
И. Д. Михайлова, Т. М. Осина** (Россия, Шахты; ЮРГУЭС)

Важной задачей легкой промышленности, выпускающей обувь массового производства, является возможность всесторонней объективной оценки ее потребительских свойств. Для зимней обуви, особенно для районов с суровой и продолжительной зимой, определяющую роль играют теплозащитные свойства обуви. Была построена модель ботинка с помощью следующих геометрических объектов: многослойные пластина, полый цилиндр, сфера. Для различных участков обуви ставится краевая задача, которая решается методом Фурье.

Для практического применения построенной математической модели была написана программа в оболочке MATLAB 7.0, которая дает возможность рассчитать динамику изменения температуры внутриобувного пространства при воздействии на обувь низких температур окружающей среды. Программа позволяет сформировать необходимые многослойные пакеты, материалы для которых выбираются из базы данных программы. Каждый материал содержится в базе данных вместе со своими теплофизическими характеристиками (коэффициенты теплопроводности и температуропроводности), число слоев пакета и их толщину пользователь определяет сам. Разумеется, всегда есть возможность пополнять базу данных новыми материалами. Также для расчетов задаются температура окружающей среды, коэффициент теплоотдачи на поверхности обуви и плотность теплового потока стопы человека. Результаты расчетов выводятся на экран в виде графика зависимости температуры внутриобувного пространства от времени. Значение температуры в любой момент времени можно вывести в соответствующее окно.

Разработанное программное обеспечение позволяет еще на стадии проектирования обоснованно выбирать пакеты материалов для различных конструктивных элементов обуви, чтобы обеспечивать комфортные условия стопе при воздействии на нее низких температур



## ПОСТРОЕНИЕ ПЛАНА ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ УЧЕБНОГО ПЛАНА ОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

**Н. А. Михайлова** (Россия, Шахты; ЮРГУЭС, ИМЦА)

Важной задачей в сфере информационных технологий в образовании является построение плана заочной формы обучения с соблюдением всех требований федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС) [1], если план по той же специальности очной формы обучения уже построен.

Разработан математический алгоритм решения данной задачи. Сейчас в программном комплексе «ПЛАНЫ» и «ПЛАНЫ-МИНИ» доступна процедура, достаточно корректно реализующая возможность построения плана заочной формы обучения на базе очной. При этом возникают принципиальные отличия в процессе формирования плана для различных форм обучения. Основные из них это возможное увеличение срока обучения и уменьшение аудиторной нагрузки. При увеличении срока обучения могут быть изменены некоторые основные характеристики учебного плана. Например, при реализации бакалавра в очной форме обучения трудоемкость в каждом учебном году должна быть равна 60 зачетных единиц. Если следовать рекомендациям разработчикам ООП [2], то при реализации аналогичного направления бакалавра в заочной форме обучения трудоемкость в каждом учебном году должна составлять 48 зачетных единиц.

В процессе построения плана для заочной формы обучения пользователь должен ввести срок обучения и проценты пересчета аудиторных часов по циклам. Далее, существует возможность автоматического переноса из плана очной формы обучения следующих компонент: титульный лист, график учебного процесса, информации о дисциплинах и итоговой государственной аттестации, распределение практик и научно-исследовательской работы и др., которые пользователь указывает по желанию.

### Литература

1. Федеральные государственные образовательные стандарты высшего профессионального образования нового поколения.—URL: <http://www.edu.ru/db/portal/spe/index.htm>.
2. Разъяснения разработчикам основных образовательных программ для реализации федеральных государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования.—URL: <http://sfedu.ru/docs/obrazov/remorenko.pdf>.

АНАЛИЗ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ МАШИННОГО  
ОБОРУДОВАНИЯ И ВЫЯВЛЕНИЕ НЕИСПРАВНОСТЕЙ  
ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОНИ

**Г. В. Мишугова** (Россия, Ростов-на-Дону; ДГТУ)

Анализ механических колебаний необходим для получения важной информации о состоянии машинного оборудования, имеющего вращающиеся части.

Подшипники качения служат в качестве опор и фиксируют положение валов в машине. Чаще всего неисправности подшипников качения возникают вследствие увеличения неровностей обойм или вращающихся элементов. Со временем неровности расширяются и, если подшипники служат достаточно долго, износ может стать более равномерным. Неисправность подшипников качения может быть выявлена до их выхода из строя.

Самым простым методом выявления неисправностей является проведение на корпусе подшипника регулярных измерений общего уровня механических колебаний. Однако, предупреждение на самой ранней стадии может быть получено путем регулярного сравнения содержащих полосы с постоянной относительной (процентной) шириной спектров механических колебаний [1]. Неисправности подшипников проявляются в этих спектрах в виде роста амплитуд составляющих с высокими частотами. Чем больше известно о неисправности, тем больше уверенность, с которой можно предсказать выход из строя машинного оборудования.

Рассматриваются механические колебания шарикового подшипника, и применяются метод Фурье и метод Прони для анализа процессов.

Результат преобразования Фурье — амплитудно-частотный спектр, по которому можно определить присутствие некоторой частоты в исследуемом сигнале [2]. Данный метод имеет недостатки, так как нестационарный сигнал имеет высокочастотные компоненты в течение короткого промежутка времени и низкочастотные колебания при рассмотрении больших временных масштабов; оконные преобразования позволяют проанализировать либо высокие частоты в коротком окне времени, либо низкочастотную компоненту, но не оба колебания одновременно.

С помощью метода Прони осуществляется аппроксимация данных с использованием некоторой детерминированной (определенной) экспоненциальной модели [3]. Спектральную интерпретацию метода Прони можно получить, вычисляя спектральную плотность энергии (СПЭ) в случае детерминированной экспоненциальной модели. При обработке сигнала с помощью метода Прони строится модель, которая не является периодограммой. Методом наименьших квадратов выделяется конечное число параметров базовых функций. Задача сводится к отысканию корней многочленов весьма высокой степени. Метод Прони сводит

нелинейные аспекты модели к процедуре факторизации многочленов, делая возможным применение быстрых вычислительных алгоритмов. В результате обработки из исходного сигнала выделяется конечное число доминирующих характеристик с высокой точностью, второстепенные составляющие сигнала относятся к шуму.

### Литература

1. Русов В. А. Спектральная вибродиагностика.—Пермь: «Вибро-Центр», 1996.—174 с.
2. Дженкинс Г., Ватс Д. Спектральный анализ и его приложения. Вып. 1 / Пер. с англ. В. П. Писаренко.—М.: Мир, 1971.—317 с.
3. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения.—М.: Мир, 1990.—584 с.

ОБ ОДНОЙ ГЕНЕТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ  
В МОДЕЛЯХ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Н. Б. Нарзиев, С. Н. Нишанов (Узбекистан, Ташкент, НУУз)

Класс генетических алгебр является весьма общим понятием и, как правило, трудно поддается математическому изучению, в частности, задача классификации таких алгебр с точностью до изоморфизма остается открытой проблемой. В последние годы «об эволюционной алгебре» были опубликованы много научных работ, например см. [1–3].

В настоящей работе изучается конечномерная коммутативная, но вообще говоря, неассоциативная алгебра, описывающая эволюцию одной модели популяционной генетики построенной при помощи стохастической матрицы. А также рассматривается проблема описание идеалов, подалгебр, классификация в случаях малых размерностей и описание дифференцирований этой алгебры.

Пусть  $T = (t_{ij})$  — стохастическая матрица, т. е.  $t_{ij} \geq 0$  и  $\sum_{j=1}^n t_{ij} = 1$ . Положим

$$p_{ij,k} = \frac{t_{ik} + t_{jk}}{2}, \quad (1)$$

где  $p_{ij,k}$  в популяционной генетике означает вероятность рождения  $k$ -го вида при скрещивании  $i$ -го и  $j$ -го видов [4].

Очевидно,  $p_{ij,k} = p_{ji,k} \geq 0$  и  $\sum_{k=1}^n p_{ij,k} = 1$ . Числа  $\{p_{ij,k}\}$  называются *коэффициентами наследственности* данной популяции состоящей из  $n$  видов. При помощи  $\{p_{ij,k}\}$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  определим умножение по формуле:

$$(x \circ y)_k = \sum_{i,j=1}^n p_{ij,k} x_i y_j, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Легко проверяется, что  $x \circ y = y \circ x$ . Однако, вообще говоря,  $(x \circ y) \circ z \neq x \circ (y \circ z)$ . Также легко заметить, что введенное умножение « $\circ$ » действительно является дистрибутивным относительно обычных векторных операций определенных в  $\mathbb{R}^n$ :

$$(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z, \quad (\lambda x) \circ y = \lambda(x \circ y).$$

Таким образом,  $\mathbb{R}^n$  с введенной (2) операцией умножения является вещественной коммутативной, но, вообще говоря, неассоциативной алгеброй, которую мы обозначим через  $LGA(n) = (R^n, \circ)$ .

Для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  рассмотрим линейный функционал  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемый равенством  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ . Тогда имеем следующие предложения:

**Предложение.** Если  $p_{ij,k} = \frac{t_{ik} + t_{jk}}{2}$ , то

$$(x \circ y)_k = \frac{1}{2} \left( \varphi(x) \sum_{i=1}^n t_{ik} y_i + \varphi(y) \sum_{i=1}^n t_{ik} x_i \right). \quad (3)$$

Положим, также  $H_0 = \{x \in R^n : \varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$  и  $H_1 = \{x \in R^n : \varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ.  $H_0$  является идеалом генетической алгебры  $LGA(n)$ .

**Утверждение.**  $H_1$  является замкнутым подмножеством относительно « $\circ$ » в  $LGA(n)$ .

При  $n \geq 3$  описание генетических алгебр  $LGA(n)$  является довольно сложной задачей связанной с системой нелинейных уравнений. Так как мы столкнемся с трудными (громоздкими) вычислениями мы рассмотрим в случае малых размерностей. Точнее, мы рассмотрим двумерную генетическую алгебру  $LGA(2)$ .

В случае  $n = 2$  оператор эволюции имеет вид:

$$V := \begin{cases} x'_1 = t_{11}x_1^2 + \frac{t_{11}+t_{21}}{2}x_1x_2 + t_{21}x_2^2, \\ x'_2 = (1-t_{11})x_1^2 + \left(1 - \frac{t_{11}+t_{21}}{2}\right)x_1x_2 + (1-t_{21})x_2^2. \end{cases}$$

Следовательно, по (3)  $x \circ y = ((x \circ y)_1, (x \circ y)_2)$ , где

$$\begin{aligned} (x \circ y)_1 &= t_{11}x_1y_1 + \frac{t_{11}+t_{21}}{2}x_1y_2 + \frac{t_{11}+t_{21}}{2}x_2y_1 + t_{21}x_2y_2, \\ (x \circ y)_2 &= (1-t_{11})x_1y_1 + \left(1 - \frac{t_{11}+t_{21}}{2}\right)x_1y_2 + \\ &+ \left(1 - \frac{t_{11}+t_{21}}{2}\right)x_2y_1 + (1-t_{21})x_2y_2. \end{aligned}$$

В этом случае для двумерной генетической алгебры  $LGA(2)$  имеет место следующая

**Теорема.** Генетическая алгебра  $LGA(2)$  является ассоциативной тогда и только тогда, когда  $t_{11} = t_{21}$  и  $t_{11} = t_{21} + 2$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейное отображение  $D : LGA(n) \rightarrow LGA(n)$  называется дифференцированием, если

$$D(x \circ y) = D(x) \circ y + x \circ D(y)$$

для любых  $x, y \in LGA(n)$ .

В случае  $n = 2$  имеет место следующая

**Теорема.** В генетической алгебре  $LGA(2)$  существует оператор дифференцирования, имеющий вид:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & \frac{t_{21}-1}{t_{11}-1}\lambda \\ -\lambda & -\frac{t_{21}}{t_{11}-1}\lambda \end{pmatrix},$$

где  $t_{11} \neq 1$  и  $\lambda \in R$ .

## Литература

1. Casas J. M., Ladra M., Omirov B. A., Rozikov U. A. On evolution algebras.—2010.—arXiv:1004.1050v1.
2. Ladra M., Rozikov U. A. Evolution algebra of a bisexual population.—2010.—arXiv:1003.2541v1.

3. *Reed M. L.* Algebraic structure of genetic inheritance // Bull. of AMS.—1997.—Vol. 34, № 2.—P. 107–130.
4. *Ганиходжаев Р. Н.* Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры // Мат. сб.—1992.—Т. 183, № 8.—С. 121–140.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ  
ФИКЕ НА ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Ю. В. Никонорова (Россия, Волгоград; ВИС ГОУ ВПО «ЮРГУЭС»)

Для множества  $A$  на евклидовой плоскости будем через  $\partial(A)$  и  $\text{int}(A)$  обозначать соответственно его границу и внутренность, а для произвольной спрямляемой кривой  $\gamma$  через  $\text{length}(\gamma)$  будем обозначать длину этой кривой.

В статье [2] (см. также [1, p. 25]) Дж. В. Фике (J. W. Fickett) поставил следующую задачу: Правда ли, что выполнено неравенство

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\text{length}(\partial(K) \cap K')}{\text{length}(\partial(K') \cap K)} \leq 3$$

для произвольных пересекающихся конгруэнтных прямоугольников  $K$  и  $K'$  на евклидовой плоскости?

Это неравенство было доказано в работе [4], где было установлено даже несколько более сильное неравенство

$$\frac{1}{3} < \frac{\text{length}(\partial(K) \cap \text{int}(K'))}{\text{length}(\partial(K') \cap \text{int}(K))} < 3.$$

Отметим, что последнее неравенство неумлучшаемо для произвольных прямоугольников, отличных от квадратов. В качестве примера, где нижняя и верхняя оценка почти достигается, можно рассмотреть прямоугольники  $K$  и  $K'$  с вершинами  $(\pm a, \pm b)$  и  $(\pm b, \pm a) - (0, a - b + \varepsilon)$  соответственно для  $a > b > 0$  и достаточно малого  $\varepsilon > 0$  (относительно некоторой прямоугольной системы координат на плоскости). В случае же, когда  $K$  и  $K'$  являются конгруэнтными квадратами, приведенное неравенство можно усилить до неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{\text{length}(\partial(K) \cap K')}{\text{length}(\partial(K') \cap K)} \leq \sqrt{2}.$$

Экстремальное значение  $\sqrt{2}$  соответствует (в частности) такому расположению квадратов, когда вершина одного квадрата расположена в центре другого, а стороны, инцидентные этой вершине, проходят через две смежные вершины второго квадрата.

Задача Дж. В. Фике естественно переносится на случай произвольных выпуклых конгруэнтных пересекающихся фигур на плоскости (см. [1]).

**Общая задача Дж. В. Фике на евклидовой плоскости:** Для заданной выпуклой фигуры  $K$  на евклидовой плоскости определить наименьшее число  $\alpha$  такое, что для любой фигуры  $K'$ , конгруэнтной  $K$ , выполняется неравенство

$$\text{length}(\partial(K) \cap K') \leq \alpha \cdot \text{length}(\partial(K') \cap K).$$

Отметим, что таким образом сформулированная *общая задача Дж. В. Фике* может быть рассмотрена и для некоторых невыпуклых фигур  $K$ , например, для невыпуклых многоугольников.

Кроме известного значения  $\alpha = 3$  для конгруэнтных прямоугольников, отличных от квадратов ( $\alpha = \sqrt{2}$  для конгруэнтных квадратов), отметим известное значение  $\alpha = 2$  для случая правильных треугольников [5]. Понятно также, что в (самом простом) случае конгруэнтных кругов имеет место равенство  $\alpha = 1$ .

Несмотря на простоту постановки задачи Дж. В. Фике для прямоугольников  $K$  и  $K'$ , решение этой задачи не было известно вплоть до публикации [4]. В цитируемой работе предложено решение этой задачи, по существу сводящееся к исследованию различных возможностей для комбинаторного строения многоугольника  $S = K \cap K'$ .

Следуя в целом работе [4] и несколько модифицированному изложению соответствующего вопроса в [3], в докладе описывается некоторый общий подход к решению задачи Дж. В. Фике для произвольного выпуклого многоугольника на плоскости. При этом все по сути сводится к конкретному и простому алгоритму. Также в докладе обсуждаются возможные подходы к решению задачи Дж. В. Фике для случая более общих выпуклых фигур.

## Литература

1. Croft H. T., Falconer K. J., Guy R. K. Unsolved problems in geometry. Corrected reprint.— Berlin: Springer-Verlag, 1994.—xvi+198 p.
2. Fickett J. W. Overlapping congruent convex bodies // Amer. Math. Monthly.—1980.— Vol. 87.—P. 814–815.
3. Никонов Ю. Г., Никонорова Ю. В. Применение системы Maple к решению геометрических задач: Учебное пособие, 2-е изд. доп.—Рубцовск: Изд-во Алтайского гос. ун-та, 2005.—80 с.
4. Никонорова Ю. В. Об одной экстремальной задаче на евклидовой плоскости // Математические труды.—2001.—Т. 4, № 1.—С. 111–121.
5. Рассказова Н. В. Задача Дж. В. Фике для треугольников // Известия АГУ. Специальный выпуск, посвященный пятилетию краевой конференции по математике.—Барнаул: Изд-во Алтайского гос. ун-та, 2002.—С. 26–28.



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРООЖИЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАКОНА ДАРСИ

Н. С. Орлова (Россия, Владикавказ, ЮМИ)

Виброожижение сыпучего материала используется, в основном, в устройствах для очистки газов [1]. Под действием вибраций слой частиц может переходить в состояние виброожижения, а при более интенсивном воздействии - в состояние виброкипения [2, 3].

Исследуется двухжидкостная модель виброожижения, в которой движение слоя рассматривается как движение двух взаимодействующих континуумов, связанных с газом и частицами. Для описания взаимодействия газа с частицами решаются следующие уравнения, записанные в проекции на ось  $z$  [3]:

$$\frac{\partial(\rho_s \alpha_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_s \alpha_s V_s)}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_s \alpha_s V_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_s \alpha_s V_s V_s)}{\partial z} = -\alpha_s \frac{\partial P}{\partial z} - G(\alpha_g) \frac{\partial \alpha_s}{\partial z} - \rho_s \alpha_s g - B; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_g \mu_g} \cdot \frac{\partial(\rho_g \alpha_g k \frac{\partial P}{\partial z})}{\partial z} - \frac{\rho_g}{\alpha_g} \cdot \frac{\partial V_s}{\partial z} - V_s \frac{\partial \rho_g}{\partial z}; \quad (3)$$

$$V_g = V_s - \frac{k}{\mu_g} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (4)$$

где  $\rho_g, V_g, \alpha_g$  — плотность, скорость, объемная доля газа;  $\rho_s, V_s, \alpha_s$  — плотность, скорость, объемная доля твердых частиц, соответственно;  $P$  — давление газовой фазы;  $B$  — функция сопротивления (коэффициент обмена импульсами на поверхности раздела двух фаз);  $G(\alpha_g)$  — модуль упругости твердой фазы (коэффициент межчастичного взаимодействия);  $k$  — проницаемость слоя твердых частиц;  $g$  — ускорение свободного падения в проекции на ось  $z$ ;  $\mu_g$  — динамическая вязкость газа. Уравнение (4) было выведено с помощью закона Дарси [3].

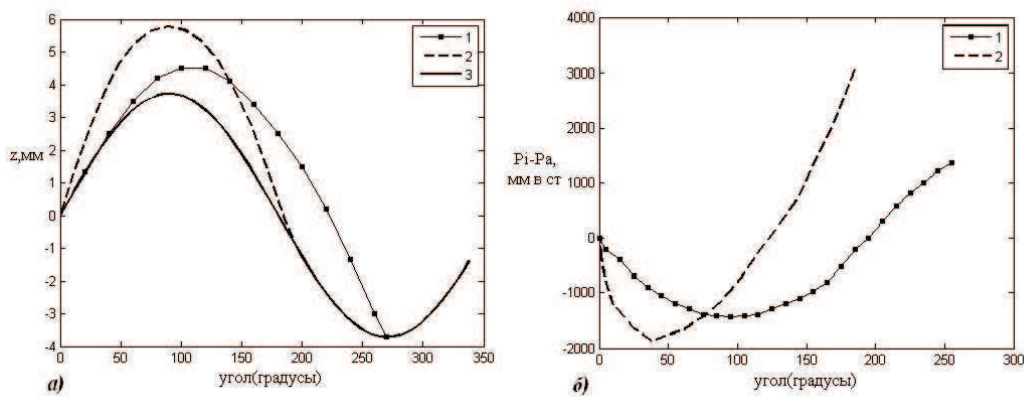
Уравнения записываются в конечно-разностном виде. На каждом временном слое применяется метод итераций. Следует отметить, что такие величины, как  $P, \rho_g, \alpha_g$  ( $\alpha_g = 1 - \alpha_s$ ),  $\alpha_s$ , рассчитываются в центре вычислительной ячейки, а скорости обеих фаз — на границах.

Внутри слоя в начальный момент времени значение  $\alpha_s$  равно значению при «плотной упаковке слоя»; плотность газа равна плотности воздуха при температуре  $20^{\circ}\text{C}$  и атмосферном давлении, скорость газа равна скорости твердых частиц. Рассматривались частицы стекла, диаметром от 0,13 до 0,29 мм.

Полка колеблется по закону  $z_w = A \sin(2\pi ft)$ , что приводит к перемещению нижней границы расчетной области. Таким образом, размер нижней вычислительной ячейки меняется при колебаниях полки. Значение объемной доли частиц в этой ячейке находится с помощью уравнения неразрывности при условии, что поток через нижнюю границу ячейки равен нулю.

На нижней границе скорость газа и скорость частиц равны скорости полки. На верхней границе, расположенной на высоте 300 мм над средним положением полки, плотность газа равна плотности воздуха при температуре  $20^{\circ}\text{C}$  и атмосферном давлении, объемная доля частиц равна нулю.

На рис. 1 представлены графики изменения положения нижней границы слоя частиц *а*), полученные в экспериментах [4] (кривая 1) и в расчетах (кривая 2) относительно колеблющейся полки (кривая 3), и графики изменения разности давления газа под слоем частиц и атмосферного давления ( $P_i - P_a$ ) *б*), также полученные в экспериментах [4] (кривая 1) и в расчетах (кривая 2), при значениях амплитуды и частоты колебаний полки  $A = 3,72$  мм и  $f = 23,3$  Гц соответственно.



**Рис. 1.** Изменение положения нижней границы слоя частиц *а*) и изменение разности давления газа под слоем частиц и атмосферного давления ( $P_i - P_a$ ) *б*).

Расчеты показали, что двухжидкостная модель качественно верно описывает наблюдаемое движение слоя мелких частиц и давление под этим слоем при виброоживлении, но нуждается в совершенствовании для улучшения количественного совпадения расчетов с экспериментальными данными.

## Литература

1. Гельперин Н. И., Айнштейн В. Г., Кваша В. Б. Основы техники псевдооживления.—М.: Химия, 1967.—664 с.
2. Членов В. А., Михайлов Н. В. Виброкипящий слой.—М.: Наука, 1972.—343 с.
3. Русанов С. А., Луняка К. В., Клюев О. I., Глухов Г. М. Математичне моделювання робочого процесу в апаратах з віброкиплячим шаром та розробка систем автоматизованого моделювання гідродинаміки віброкиплячих шарів // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы.—2009.—№ 1(23).—С. 15–24.
4. Kroll W. Uber das Verhalten von Schuttguf in lotrecht schwingenden Gefaben // Forschung—1954.—Bd. 20, Heft 1.—P. 2–15.

## ХААРОВСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ НА ДЕФОРМИРОВАННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ БАЗИСАХ

И. В. Павлов, О. В. Назарько (Россия, Ростов-на-Дону; РГСУ)

Метод хааровских интерполяций (см. [1, 2]) позволяет сводить модели безарбитражных финансовых рынков к моделям безарбитражных и полных рынков, на которых по хорошо известным формулам можно рассчитывать справедливую цену платежных обязательств, вычислять совершенные хеджи и т. д. Все эти вычисления производятся с помощью мартингальных мер, эквивалентных исходной (физической) вероятностной мере, входящей в состав стохастического базиса, на котором изначально задается рынок. В работе [3] показано, что финансовые рынки, находящиеся в неустойчивом состоянии (например, в период скупки акций или в период кризиса) естественно рассматривать на так называемых деформированных стохастических базисах 1-го рода. Если  $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$  — фильтрация на пространстве элементарных событий  $\Omega$ , то семейство  $(Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$  вероятностных мер  $Q^{(n)}$ , определенных на  $\mathcal{F}_n$ , называется деформацией 1-го рода, если для любого  $n \geq 0$  ограничение меры  $Q^{(n+1)}$  на  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{F}_n$  абсолютно непрерывно относительно  $Q^{(n)}$ , т. е.  $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \ll Q^{(n)}$ . Деформированным стохастическим базисом 1-го рода называется фильтрованное пространство, снабженное деформацией 1-го рода. Если деформация  $(Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$  слабая (т. е. если для любого  $n \geq 0$   $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \sim Q^{(n)}$ ), то, как легко видеть, существует согласованная последовательность вероятностных мер, эквивалентная данной деформации. Поэтому для такого рода моделей финансовых рынков метод хааровских интерполяций продолжает работать.

Целью данного доклада является изучение случая, когда деформация  $(Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$  является сильной (т. е. если существует  $n \geq 0$  такой, что  $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \approx Q^{(n)}$ ). Ясно, что в этой ситуации не существует согласованной последовательности вероятностных мер, эквивалентной данной деформации.

Пусть каждая из  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_n$  порождена разбиением  $\Omega$  на не более чем счетное число атомов, причем  $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ . Введем процесс плотностей  $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$  следующим образом:  $dQ^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} = h_n dQ^{(n)}$ . Зафиксируем момент остановки  $\tau = \inf\{n \geq 0 : h_n = 0\}$ . Пусть  $n \geq 0$ . Рассмотрим меру  $Q^{(\tau \wedge n)}$  (см. [4]).

**Теорема.** Мера  $Q^{(\tau \wedge n)}$  нагружает все атомы  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_{\tau \wedge n}$ .

Легко видеть, что  $0 < Q^{(\tau \wedge n)}(\Omega) < \infty$ . Обозначим  $R^{(n)} = \frac{1}{Q^{(\tau \wedge n)}(\Omega)} Q^{(\tau \wedge n)}$ .

Деформацию  $(R^{(n)}, \mathcal{F}_{\tau \wedge n})_{n=0}^\infty$  будем называть слабой деформацией, ассоциированной с сильной деформацией 1-го рода  $(Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ .

Рассмотрим некоторый процесс  $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ , мыслимый нами как дисконтированная цена акции. Так как при  $n > \tau$  деформация  $(R^{(n)}, \mathcal{F}_{\tau \wedge n})_{n=0}^\infty$  «не различает» значения данного процесса, то естественно вместо него рассматривать процесс  $(Z_{\tau \wedge n}, \mathcal{F}_{\tau \wedge n})_{n=0}^\infty$ , а вместо исходной сильной деформации 1-го рода рассматривать ассоциированную с ней слабую деформацию  $(R^{(n)}, \mathcal{F}_{\tau \wedge n})_{n=0}^\infty$ . Таким

образом, хааровская интерполяция процесса  $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$  на строго деформированном стохастическом базисе сводится к хааровской интерполяции ассоциированного с ним остановленного процесса на слабо деформированном стохастическом базисе.

В докладе (с помощью созданного программного комплекса) будут представлены вычисления справедливых цен и хеджирующих портфелей для финансовых рынков, заданных на сильно деформированном стохастическом базисе 1-го рода, снабженном обобщенной специальной хааровской фильтрацией.

### Литература

1. Богачева М. Н., Павлов И. В. О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных // Успехи мат. наук.—2002.—Т. 57, вып. 3.—С. 143–144.
2. Богачева М. Н., Павлов И. В. О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2002.—№ 3.—С. 16–24.
3. Назарько О. В.  $(B, S)$ -рынки на деформированных стохастических базисах // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2008.—№ 3.—С. 19–21.
4. Назарько О. В., Павлов И. В. Теорема Дуба о преобразовании свободного выбора для деформированных мартингалов // Обзорение прикладной и промышленной мат-ки.—2010.—Т. 17, вып. 2.—С. 239–240.

О НЕТЕРОВОСТИ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА СВЕРТКИ  
 В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. Э. Пасенчук (Россия, Ростов-на-Дону; ЮРГТУ (НПИ))

Пусть  $B$  — рефлексивное банахово пространство, положим

$$l\{\infty, B\} = \left\{ \phi = \{\phi_j\}_{j \in \mathbb{Z}} : \phi_j \in B; \sum (|j| + 1)^m \|\phi_j\| < \infty \forall m \right\}$$

и будем рассматривать  $l\{\infty, B\}$  как счетно-нормированное пространство с покоординатными линейными операциями и производящей системой норм  $|\phi|_m = \sum (|j| + 1)^m \|\phi_j\|$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Через  $l\{-\infty, B\}$  обозначим сопряженное пространство, снабженное сильной топологией. Операторы проектирования  $P_{\pm}\{\phi_j\} = \{\frac{1}{2}(1 \pm \text{sign } j)\phi_j\}$ ,  $\{\phi_j\} \in l\{\pm\infty, B\}$ , где  $\text{sign } 0 = 1$ , порождают подпространства  $l_{\pm}\{\pm\infty, B\} = P_{\pm}(l\{\pm\infty, B\})$  и разложения  $l\{\pm\infty, B\} = l_{+}\{\pm\infty, B\} \oplus l_{-}\{\pm\infty, B\}$ . В линейных пространствах  $\pi(B) = l_{-}\{-\infty, B\} \oplus l_{+}\{\infty, B\}$ ,  $\pi^*(B) = l_{-}\{\infty, B\} \oplus l_{+}\{-\infty, B\}$  может быть введена топология и в том случае, когда  $B$  есть банахова алгебра, структура топологической алгебры с операцией свертывания в качестве умножения.

**Теорема 1.** Оператор свертывания  $C(\alpha) : (C(\alpha)\{\phi_j\})_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{k-j}\phi_j$ , действующий в пространстве  $\pi(C^n)$  ( $\pi^*(C^n)$ ), ограничен тогда и только тогда, когда  $\alpha \in \pi(M_n)$  ( $\pi^*(M_n)$ ), где  $M_n$  — банахова алгебра матриц порядка  $n$ .

Последовательности  $\alpha = \{\alpha_k\} \in \pi(B)$  поставим в соответствие пару матриц-функций  $A(\xi) = (A^-(\xi), A^+(\xi))$ ,  $A^-(\xi) = \sum_{j < 0} \alpha_j \xi^j$ ,  $|\xi| > 1$ ;  $A^+(\xi) = \sum_{j \geq 0} \alpha_j \xi^j$ ,  $|\xi| \leq 1$ , которую назовем символом оператора свертки  $C(\alpha)$ , порождаемого этой последовательностью. Множество символов, порождаемых последовательностями из  $\pi(M_n)$  ( $\pi^*(M_n)$ ), будем обозначать  $M_n(\Pi)$  ( $M_n(\Pi^*)$ ),  $M_1(\Pi) = \Pi$  ( $M_1(\Pi^*) = \Pi^*$ ). Во множествах  $\Pi$ ,  $\Pi^*$  может быть введена структура коммутативной топологической алгебры с единицей. Отметим, что в  $\Pi$ ,  $\Pi^*$  содержатся функции вида  $P(\xi)Q^{-1}(\xi)$ , где  $P(\xi), Q(\xi)$  гладкие на  $\Gamma = \{\xi \in C : |\xi| = 1\}$  функции, при условии, что  $Q(\xi)$  имеет не более чем конечное число нулей конечных порядков. Обозначим множество таких функций через  $R\Pi$  ( $R\Pi^*$ ).

**Теорема 2.** Для оператора Винера — Хопфа

$$W = P_+ C(\alpha) P_+ : l_{+}\{\pm\infty, C^n\} \rightarrow l_{+}\{\pm\infty, C^n\}$$

с символом  $A(\xi) \in M_n(\Pi)$  ( $M_n(\Pi^*)$ ) следующие условия равносильны:

- 1) оператор  $W$  нетеров;
- 2) матрица-функция  $A(\xi)$  обратима в алгебре  $M_n(\Pi)$  ( $M_n(\Pi^*)$ );
- 3) определитель  $\det A(\xi)$  матрицы-функции  $A(\xi)$  обратим в алгебре  $\Pi$  ( $\Pi^*$ ).

Если при этом  $\det A(\xi) = P(\xi)Q^{-1}(\xi) \in R\Pi$  ( $R\Pi^*$ ), то каждая из функций  $P(\xi), Q(\xi)$  имеет на  $\Gamma$  не более чем конечное число нулей конечных порядков, а индекс оператора  $W$  может быть найден по формуле  $\text{ind } W = \kappa_c(P) + n(P) - \kappa_c(Q) - n(Q)$  ( $\text{ind } W = \kappa_c(P) - n(P) - \kappa_c(Q) + n(Q)$ ). Здесь  $\kappa_c(H)$  — сингулярный индекс функции  $H$ , а  $n(H)$  — число ее нулей.

## СПРОС НА НАЛИЧНЫЕ ДЕНЬГИ В УСЛОВИЯХ ИНФЛЯЦИОННОЙ ЭКОНОМИКИ

**В. П. Семенов** (Россия, Москва; РЭУ им. Г. В. Плеханова),  
**В. А. Попов** (Россия, Москва; МФЭИ)

Рассматривается задача управления денежной наличностью. Обозначим через  $m$  число обращений в банк для получения наличных денег в течение одного периода (обычно года), через  $i$  — банковский процент, а через  $H$  и  $h$  — номинальную и эффективную ставки соответственно,  $h = (1 + \frac{H}{m})^m - 1$ ,  $H = m (\sqrt[m]{1+h} - 1)$ . Каждое снятие со счета в банке ведет к потере процентных денег и непосредственным издержкам  $F$ , связанным с каждым посещением банка. Приведем основные формулы и методы вычисления оптимального значения  $m$ , при котором издержки минимальны.

В случае игнорирования инфляции деньги переводятся в наличные равными суммами  $Y_1$ . Тогда совокупные издержки вычисляются по формуле  $J_1 = \frac{iY_1}{2m} + Fm$ . Приравняв к нулю производную по  $m$ , найдем оптимальное значение  $m$  и оптимальное среднее значение  $\frac{Y_1}{2m_0}$  имеющейся на руках наличности.  $m_0 = \sqrt{\frac{iY_1}{2F}}$ ,  $\frac{Y_1}{2m_0} = \sqrt{\frac{Y_1 F}{2i}}$ . Последние формулы являются ключевыми формулами управления денежной наличностью по модели Баумоля — Тобина [1].

При учете инфляции сумма денег, обналичиваемая в  $k$ -ый раз составляет величину  $\frac{N_0}{m} (1 + \frac{H}{m})^{k-1}$ , а общая сумма обналиченных денег  $Y_2 = \frac{N_0((1 + \frac{H}{m})^m - 1)}{H}$ . Здесь  $N_0$  — стоимость потребительской корзины в начале периода. В этом случае потери процентных денег составят величину  $\frac{Y_2}{2m} \left(1 - \frac{1}{(1 + \frac{H}{m})^m}\right)$ , а общие издержки  $J_2 = \frac{Y_2}{2m} \left(1 - \frac{1}{(1 + \frac{H}{m})^m}\right) + Fm$ . Приближенное решение уравнения  $\frac{dJ_2}{dm} = 0$  дает оптимальное значение числа обращений в банк  $\tilde{m}_0 = \sqrt{\frac{Y_2 H}{2F}}$  и среднюю сумму денег в наличии  $\frac{Y_2}{2\tilde{m}_0} = \sqrt{\frac{Y_2 F}{2H}}$ .

### Литература

1. *Tobin J.* The interest elasticity of transactions demand for cash // *Review of Economics and Statistics.*—1956.—Vol. 38, № 3.—P. 241–247.

## ОБ УЧЕТЕ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ<sup>1</sup>

**И. Г. Пышнограй, Хайдер Надом Азиз**  
(Россия, Барнаул; АлтГТУ)

Задача математического моделирования течений растворов и расплавов линейных полимеров является одной из важнейших задач современного естествознания. Ее решение включает в себя ряд этапов: получение реологического определяющего соотношения и запись на его основе системы уравнений в частных производных для описания динамики полимерных жидкостей; постановка начальных и граничных условий для конкретной задачи и решение полученной краевой задачи. На каждом из этих этапов полимерные среды демонстрируют ряд специфических особенностей отличающих их от обычных, ньютоновских жидкостей. В частности, это аномалия вязкости, первая и вторая разности нормальных напряжений, немонотонное установление сдвиговых напряжений и прочее. Эти особенности могут быть учтены при формулировке реологического определяющего соотношения и достаточно хорошо изучены, например, на основе модифицированной реологической модели Покровского — Виноградова. Вместе с тем некоторые полимеры демонстрируют аномальное поведение при взаимодействии с поверхностями раздела, а именно, проскальзывание. Этот эффект может быть учтен при формулировке граничных условий на этапе математической постановки задачи. В данной работе это сделано для задачи о плоскопараллельном течении полимерной жидкости с учетом проскальзывания.

При этом, следует отметить, что изучению этого вопроса посвящено большое количество работ, где отмечается наличие двух подходов к изучению этого явления.

Первый подход заключается в детальном изучении и учете молекулярных свойств контактирующих сред, формулировке механизма возникновения проскальзывания и проверке адекватности предложенного подхода. При этом результаты для разных физических систем имеют много общего, что указывает на возможность единого подхода к исследованию этого эффекта.

Второй подход заключается в задании в явном виде скорости скольжения на стенке, которая в общем случае является функцией напряжения на стенке, геометрических размеров и температуры. При этом указанная зависимость скорости скольжения на стенке от перечисленных факторов находится из вискозиметрических измерений.

С математической точки зрения результат каждого из подходов приводит к зависимостям, которые берутся из обрабатываемых экспериментальных данных. При этом в качестве аргумента можно выбрать не только напряжение на стенке,

---

<sup>11</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-00293.

но и градиент давления или удельный расход и выбор той или иной функции в исследуемой зависимости определяется удобством использования этого закона в расчетах.

При моделировании течений растворов и расплавов линейных полимеров важную роль играет формулировка реологического определяющего соотношения, которое устанавливает связь между кинематическими характеристиками потока и внутренними термодинамическими параметрами. Ранее была предложена, исходя из микроструктурных представлений, простая реологическая модель, которая названа модифицированная реологическая модель Покровского — Виноградова. Эта модель проверялась на соответствие вискозиметрическим течениям реальных полимерных жидкостей, что показало качественное соответствие теории и эксперимента.

В настоящей работе была решена задача об определении профиля скорости нелинейной вязкоупругой жидкости, движущейся в зазоре между параллельными плоскостями под действием постоянного перепада давления при наличии проскальзывания.

При этом, было рассмотрено теперь как влияют параметры модели на вид получаемых зависимостей. Для этого были зафиксированы масштабные параметры и варьировались параметры учитывающие в уравнениях динамики макромолекулы размеры и форму макромолекулярного клубка. Результаты расчетов зависимости расхода от градиента давления при различных значениях параметра анизотропии показывают, что с его ростом растет отклонение зависимости расхода от закона Пуазейля. При этом на зависимостях соответствующих учету проскальзывания появляется излом, который связан с используемой аппроксимацией для значений скорости на стенке. При этом кривые соответствующие учету проскальзывания расположены выше кривых построенных с учетом прилипания на стенке.

Для того чтобы провести сравнение с экспериментальными данными, заметим, что часто в работах отсутствуют данные о значениях градиента давления и поэтому для его определения следует использовать зависимости удельного расхода от перепада давления и по известным значениям расхода определять значения градиента давления, а затем с его помощью рассчитать профили скорости. В работе приведено сравнение экспериментальных и теоретических зависимостей для профиля скорости в зазоре между параллельными плоскостями.

Таким образом, в рассмотренном случае плоского течения Пуазейля при учете проскальзывания полимерного материала на границе, система уравнений модифицированной модели Виноградова — Покровского описывает непараболический профиль скорости в зазоре между параллельными пластинами, что подтверждается экспериментальными данными. Полученные при этом зависимости могут быть использованы при разработке численных методов 2-мерных и 3-мерных течений в качестве начального приближения входного и выходного профилей, при моделировании течений полимерных жидкостей в зазоре между параллельными плоскостями, например, при формировании тонких пленок.



ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ MAPLE  
ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ О ТРЕУГОЛЬНИКАХ

Н. В. Рассказова (Россия, Рубцовск; РИИ АлтГТУ)

Обозначим через  $\partial(A)$  и  $\text{int}(A)$  соответственно границу и внутренность множества  $A$  на евклидовой плоскости, через  $\text{length}(\gamma)$  — длину произвольной спрямляемой кривой  $\gamma$ .

В [5, 6] сформулирована следующая задача, поставленная Дж. В. Фике (J. W. Fickett):

Пусть  $K$  и  $K'$  произвольные конгруэнтные пересекающиеся прямоугольники, такие что  $K \neq K'$ . Справедливо ли для любого пересечения следующее неравенство

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\text{length}(\partial(K) \cap K')}{\text{length}(\partial(K') \cap K)} \leq 3?$$

Решение задачи для произвольных прямоугольников, отличных от квадратов, было получено Ю. В. Никоноровой в работе [3], где было доказано неравенство

$$\frac{1}{3} < \frac{\text{length}(\partial(K) \cap \text{int}(K'))}{\text{length}(\partial(K') \cap \text{int}(K))} < 3.$$

Постановка задачи Дж. В. Фике для треугольников следующая [5, 6]:

Пусть  $K$  и  $K'$  произвольные конгруэнтные треугольники с наименьшим углом  $\psi$ . Является ли справедливым следующее неравенство

$$\sin(\psi/2) \leq \frac{\text{length}(\partial(K) \cap K')}{\text{length}(\partial(K') \cap K)} \leq 1/\sin(\psi/2)? \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В целом предположение Дж. В. Фике оказалось не справедливым, а именно, для равнобедренных треугольников с наименьшим углом  $\psi$  между боковыми сторонами, при  $2 \arcsin(1/4) < \psi < \pi/3$  неравенство (1) не выполняется в случаях расположения треугольников, для которых в пересечении получается четырехугольник, и основание одного из треугольников касается боковой стороны и основания другого треугольника.

В [1] Ю. Г. Никоноровым и Ю. В. Никоноровой была сформулирована **общая задача Дж. В. Фике на евклидовой плоскости**: Для заданной выпуклой фигуры  $K$  на евклидовой плоскости определить наименьшее число  $\alpha$  такое, что для любой фигуры  $K'$ , конгруэнтной  $K$ , выполняется неравенство

$$\text{length}(\partial(K) \cap K') \leq \alpha \cdot \text{length}(\partial(K') \cap K).$$

Также в работе [1] приведен алгоритм решения общей задачи Фике для выпуклого многоугольника  $K$ , обладающего осью симметрии.

Используя результаты, полученные Ю. Г. Никоноровым и Ю. В. Никоноровой в [1–3], была доказана следующая

**Теорема.** Пусть  $K$  и  $K'$  — два конгруэнтных равнобедренных пересекающихся треугольника на евклидовой плоскости с наименьшим углом  $\psi \in (0, \pi/3)$ , расположенным между боковыми сторонами. Пусть  $L_1$  — длина части границы треугольника  $K$ , которая лежит во внутренности треугольника  $K'$ ,  $L_2$  — длина части границы треугольника  $K'$ , которая лежит во внутренности треугольника  $K$ . Справедливо неравенство

$$\frac{1}{Q} \leq \frac{L_1}{L_2} \leq Q,$$

где

$$Q = \begin{cases} 1/\sin(\psi/2), & 0 < \psi \leq 2 \arcsin(1/4), \\ 3 + 4 \sin(\psi/2), & 2 \arcsin(1/4) \leq \psi < \pi/3. \end{cases}$$

Таким образом, по теореме 2 [1] решением задачи Дж. В. Фике для равнобедренных треугольников с наименьшим углом  $\psi$  между боковыми сторонами является число  $\alpha' = \max\{3 + 4 \sin(\psi/2), 1/\sin(\psi/2)\}$ .

Для равнобедренных треугольников с наименьшим углом  $\psi$  при основании с помощью математической системы Maple найдены следующие оценки

$$\frac{1}{Q} \leq \frac{L_1}{L_2} \leq Q,$$

где

$$Q = \begin{cases} 1/\sin(\psi/2), & 0 < \psi \leq 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}\right), \\ 8 \cos^2(\psi/2) - 1, & 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}\right) \leq \psi < \pi/3. \end{cases}$$

## Литература

1. Никоноров Ю. Г., Никонорова Ю. В. Об одном подходе к решению задачи Дж. В. Фике о пересекающихся конгруэнтных многоугольниках.—(В печати).
2. Никоноров Ю. Г., Никонорова Ю. В. Применение системы Maple к решению геометрических задач: Учебное пособие. 2-е изд. доп.—Рубцовск: Изд-во АлтГУ, 2005.—79 с.
3. Никонорова Ю. В. Об одной экстремальной задаче на евклидовой плоскости // Мат. тр.—2001.—Т. 4, № 1.—С. 111–121.
4. Рассказова Н. В. Задача Дж. В. Фике для треугольников // Изв. АГУ. Спец. выпуск, посвящ. пятилетию краевой конф. по мат-ке. Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2002.—С. 26–28.
5. Croft H. T., Falconer K. J., Guy R. K. Unsolved problems in geometry. Corrected reprint.—New York: Springer-Verlag, 1994.
6. Fickett J. W. Overlapping congruent convex bodies // Amer. Math. Monthly.—1980.—№ 87.—Р. 814–815.

## ДЛИННОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

С. В. Ревина (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Для исследования устойчивости двумерного течения вязкой несжимаемой жидкости вида

$$\mathbf{V} = (0, V(x))$$

рассматривается линейная спектральная задача

$$\begin{aligned} \sigma \varphi_1 + \alpha V \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \nu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x}, \\ \sigma \varphi_3 + \alpha V \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \varphi_1 \frac{\partial V}{\partial x} - \nu \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) &= -\alpha \frac{\partial P}{\partial z}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= 0, \quad \langle\langle \varphi \rangle\rangle = 0. \end{aligned}$$

Поле скорости  $\mathbf{v}$  периодически по пространственным переменным  $x_1, x_2$  с периодами  $L_1, L_2$ . Предполагается, что один из пространственных периодов стремится к бесконечности  $L_2 = 2\pi/\alpha$ , когда волновое число  $\alpha \rightarrow 0$ . К рассматриваемому классу принадлежит течение Колмогорова с синусоидальным профилем скорости, имеющее важные геофизические приложения [1].

$$\mathbf{V} = (0, \gamma \sin x).$$

Критическим называется такое значение параметра  $\nu$  (вязкости), при котором одно или несколько собственных значений  $\sigma$  выходят на мнимую ось.

В настоящей работе рассмотрена задача устойчивости стационарного течения в двух случаях: когда среднее продольной компоненты скорости вдоль длинного периода равно нулю  $\langle V \rangle = 0$  и когда оно отлично от нуля  $\langle V \rangle \neq 0$ .

Собственные значения, собственные функции, а также критическое значение вязкости, будем разыскивать в виде рядов по степеням параметра  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \alpha^k, \quad \nu = \nu^* + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \alpha^k, \\ \varphi &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k \alpha^k, \quad P = \sum_{k=0}^{\infty} P^k \alpha^k. \end{aligned}$$

Для произвольных сдвиговых течений в работе доказана следующая

**Теорема.** Для сдвигового течения критические собственные значения  $\sigma$  являются нечетными функциями волнового числа, а критическое значение вязкости  $\nu$  — четной функцией волнового числа.

Для течений с нулевым средним указаны условия, при которых происходит монотонная потеря устойчивости.

**Следствие.** Если основной профиль скорости в некоторой точке обращается в ноль и является нечетной функцией относительно этого нуля, то происходит монотонная потеря устойчивости.

Найдены явные выражения нескольких первых членов длинноволновой асимптотики через вспомогательную функцию  $\theta$ , характеризующую отклонение скорости от ее среднего значения  $\frac{d^2\theta}{dx^2} = V - \langle V \rangle$ ,  $\langle \theta \rangle = 0$ . Дан алгоритм нахождения  $k$ -го члена асимптотики через предыдущие.

Полученные результаты можно обобщить на случай трехмерных течений, а также применить при исследовании устойчивости периодических по времени течений.

### Литература

1. Юдович В. И. О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений // Численные методы решения задач математической физики.—М: Наука, 1966.—С. 242–249.
2. Юдович В. И. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений // Изв. АН СССР. МЖГ.—1973.—№ 1.—С. 32–35.
3. Юдович В. И. Неустойчивость длинноволновых течений вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.—1990.—№ 4.—С. 31–35.
4. Ревина С. В., Юдович В. И. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических трехмерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ.—2001.—№ 2.—С. 29–41.
5. Мелехов А. П., Ревина С. В. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических двумерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ.—2008.—№ 2.—С. 41–56.
6. Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости.—Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1984.—192 с.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРЕХОДОВ  
МЕЖДУ СТАЦИОНАРНЫМИ РЕЖИМАМИ  
СИСТЕМЫ НАВЬЕ – СТОКСА ВО ВСЕМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л. И. Сазонов (Россия, Ростов-на-Дону; ЮФУ, ЮМИ)

Пусть  $v_{a_1}, v_{a_2}$  – стационарные решения системы Навье – Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla)u = \Delta u - \nabla p + f, \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (1)$$

во всем пространстве  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 2$ ) с заданными условиями на бесконечности  $v_{a_1}|_{\infty} = a_1 e$ ,  $v_{a_2}|_{\infty} = a_2 e$ , где  $e$  – единичный вектор.

Задачей о переходе между стационарными режимами  $v_{a_1}$  и  $v_{a_2}$  будем называть задачу об определении решения  $v(t, x)$  нестационарной системы Навье – Стокса (1), удовлетворяющего начальному условию  $v|_{t=0} = v_{a_1}$  и предельному соотношению  $\lim_{t \rightarrow \infty} v = v_{a_2}$ , причем в определенном смысле при любом  $t$  существует  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} v = a(t) e$ , где  $a(t)$  – функция с условиями  $a(0) = a_1$ ,  $a(\infty) = a_2$ .

В случае  $a_1 = 0$  получается задача, впервые рассмотренная Р. Финном [1] и названная им «стартовой проблемой». О работах, посвященных этой задаче и имеющихся здесь трудностях, смотрите [2], где доказано существование в подходящем банаховом пространстве решения стартовой проблемы при достаточно малом  $a_2$ .

В данной работе установлено существование решения задачи о переходе в предположении, что система (1) имеет семейство стационарных решений  $v_a$  ( $v_a|_{\infty} = a e$ ), гладко зависящих от параметра  $a$  при  $a \in [a_1, a_2] \subset (0, \infty)$ , принадлежащих некоторому банахову пространству и удовлетворяющих определенному условию устойчивости. Доказательство основано на оценках возмущенной полугруппы Озеена, полученных автором в [3, 4].

### Литература

1. Finn R. Stationary solutions of the Navier–Stokes equations // Proc. Symp. Appl. Math.—Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1965.—Vol. 17.—P. 121–153.
2. Galdi G. P., Heywood J. G., Shibata Y. On the global existence and convergence to steady state of Navier–Stokes flow past an obstacle that is started from rest // Arch. Rational Mech. Anal.—1997.—Vol. 138.—P. 307–318.
3. Сазонов Л. И. Оценки возмущенной полугруппы Озеена // Владикавк. мат. журн.—2009.—Т. 11, вып. 3.—С. 51–61.
4. Сазонов Л. И. Оценки возмущенной полугруппы Озеена в  $\mathbb{R}^n$  и устойчивость стационарных решений системы Навье – Стокса // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, вып. 3.—С. 71–82.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ТРИ-ТКАНИ В. БЛЯШКЕ  
В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ<sup>1</sup>

О. В. Самарина, В. В. Славский  
(Россия, Ханты-Мансийск; ЮГУ, ЮНИИИТ)

С математической точки зрения, если не учитывать дискретность, цифровое трехканальное RGB-изображение задается в виде трех неотрицательных функций  $u_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , в некоторой области на плоскости. С точностью до цветовой коррекции такое изображение определяется семействами линий уровня функций  $u_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Кроме того, часто изображение определено с точностью до некоторого диффеоморфизма области  $D$ .

Если рассматривать наиболее широкий класс таких преобразований, то получится объект, который был введен в конце 20-х годов прошлого столетия немецким геометром В. Бляшке под названием три-ткани. В книге В. Бляшке «Введение в геометрию тканей» помимо определения три-ткани было дано определение функции три-ткани и ее канонического представления [1].

Представим трехканальное RGB-изображение в виде трех неотрицательных функций  $u_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , в некоторой области  $D$  на плоскости. Семейства линий уровня этих функций тогда будут иметь вид:

$$\begin{aligned}L_1 &= \{(x, y) : u_1(x, y) = \text{const}\}, \\L_2 &= \{(x, y) : u_2(x, y) = \text{const}\}, \\L_3 &= \{(x, y) : u_3(x, y) = \text{const}\}.\end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем называть эти три семейства линий *топографической сеткой* (или *три-тканью*) данного изображения (см. [1, 2]). *Функцией три-ткани* называется любая функция  $W(u_1, u_2, u_3)$  нетождественно равная константе, такая что в области  $D$  выполняется тождество:

$$W(u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y)) \equiv 0.$$

Эта функция выражает зависимость, связывающую три функции в окрестности данной точки. Предположим, что в точке  $P_0$  выполняется условие  $u_1(P_0) = u_2(P_0) = u_3(P_0) = 0$ . Разложим функцию ткани  $W$  в степенной ряд по  $\{u_1, u_2, u_3\}$ :

$$W = W_1 u_1 + W_2 u_2 + W_3 u_3 + \frac{1}{2} W_{11} u_1^2 + W_{12} u_1 u_2 + \dots$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 08-01-98001, № 10-01-90000-Бел\_а, Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ Российской Федерации, проект № НШ-6613.2010.1, а также Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 02.740.11.0457.

Применив к функции  $W$  ряд преобразований, можно перейти к каноническому представлению функции три-ткани ([1, с. 53]), зависящему от параметров  $a, b_1, b_2, b_3$ :

$$W(u_1, u_2, u_3) = u_1 + u_2 + u_3 + a(u_1^2 u_2 + u_1 u_3^2 + u_3 u_2^2) + \dots + \\ + (b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) u_1 u_2 u_3 + \dots$$

В данной работе предложен и реализован алгоритм в системе MatLab фактически вычисляющий каноническое представление функции три-ткани, учитывающий дискретность пиксельного представления растрового трехканального цифрового RGB-изображения.

Каноническое представление функции три-ткани является наиболее общим инвариантом (см. [3, 4]) цифрового RGB-изображения и может быть использовано при решении широкого класса задач цифровой обработки изображений, таких как задача дистанционного зондирования, особенно при анализе биомедицинских изображений, геологических исследованиях, в задачах распознавания образов и многих других.

### Литература

1. Бляшке В. Введение в геометрию тканей.—М.: Физмат, 1959.—144 с.
2. Самарина О. В., Славский В. В. Понятие триткани В. Бляшке и инварианты трехканального изображения // Тр. XI Всероссийской конф. молодых ученых по мат. моделированию и информационным технологиям (Электронный ресурс).—URL: <http://conf.nsc.ru/УМ2010/ru/reportview/28885>.
3. Самарина О. В. Инварианты одноканального изображения // Вестн. НГУ. Сер. Информационные технологии.—Т. 6, вып. 1.—С. 69–79.
4. Самарина О. В. Групповые инварианты изображения.—Germany: Lambert Academic Publishing, 2010.—79 с.

## ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА<sup>1</sup>

М. А. Скворцова (Россия, Новосибирск; ИМ СО РАН, НГУ)

Рассмотрим начальную задачу для системы квазилинейных уравнений нейтрального типа следующего вида

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t - \tau)) = Ay(t) + By(t - \tau) + F(t, y(t), y(t - \tau)), & t > \tau, \\ y(t) = \varphi(t), & t \in [0, \tau], \end{cases} \quad (1)$$

где  $A, B, D$  — вещественные постоянные матрицы,  $\tau > 0$  — постоянный параметр запаздывания,  $F(t, u, v)$  — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по  $u$  и оценке  $\|F(t, u, v)\| \leq q_1 \|u\|^{1+\omega_1} + q_2 \|v\|^{1+\omega_2}$ ,  $q_1, q_2 > 0$ ,  $\omega_1, \omega_2 > 0$ ,  $\varphi(t)$  — вещественнозначная непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Будем предполагать, что  $y(\tau + 0) = \varphi(\tau)$ .

Целью настоящей работы является изучение асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1), установление оценок решений, характеризующих скорость убывания на бесконечности, а также получение областей притяжения нулевого решения. Работа является продолжением исследований [1].

В последние годы в литературе появились модифицированные функционалы Ляпунова — Красовского, которые позволяют при доказательстве асимптотической устойчивости решений систем уравнений с запаздывающим аргументом получать оценки экспоненциального убывания решений (см., например, [2–6]).

Для квазилинейных систем вида (1) при  $D = 0$  в работе [4] авторами был предложен модифицированный функционал Ляпунова — Красовского, с помощью которого были получены оценки решений, а также указаны области притяжения нулевого решения. В случае ненулевой матрицы  $D$  мы используем обобщение этого функционала

$$v(t, y) = \langle H(y(t) + Dy(t - \tau)), (y(t) + Dy(t - \tau)) \rangle + \int_{t-\tau}^t \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle ds,$$

где  $H = H^* > 0$ ,  $K(s) = K^*(s) > 0$ ,  $s \in [0, \tau]$  (см. также [1, 6]).

Предположим, что выполнены следующие условия:

(I) Существуют матрицы  $H = H^* > 0$  и  $K(s) \in C^1[0, \tau]$  такие, что  $K(s) = K^*(s) > 0$ ,  $\frac{d}{ds}K(s) < 0$ ,  $s \in [0, \tau]$ , и

$$C = - \begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB + A^*HD \\ B^*H + D^*HA & D^*HB + B^*HD - K(\tau) \end{pmatrix} > 0.$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 16.740.11.0127.



(II)  $\tilde{c}_1 = \lambda_{\min}(C) - \|H\|(\|D\| + \sqrt{1 + \|D\|^2})(q_1\|D\|(1 + \|D\|)^{\omega_1} + q_2) > 0$ .

Обозначим через  $k > 0$  максимальное число такое, что  $\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0$ ,  
 $\varepsilon = \min \left\{ \frac{\tilde{c}_1}{1 + \|D\|^2}, k\|H\| \right\}$ ,  $p = \exp \left( \frac{\varepsilon\tau}{2\|H\|} \right)$ .

**Теорема.** Пусть выполнены условия (I), (II) и  $p^{-1} < \|D\| < 1$ . Тогда множество вещественнозначных вектор-функций

$$\Omega = \left\{ \varphi(t) \in C^1[0, \tau] : v(\tau, \varphi) < \left( \frac{\varepsilon}{2q_1\|H\|^2\|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2}(1 + \|D\|)^{\omega_1}} \right)^{2/\omega_1}, \right. \\ \left. \|\varphi\|_{\infty} \leq \left( M\Upsilon p\|D\|(p\|D\| - 1)^{-1} + \|D\| \right)^{-1} \right\}$$

является множеством притяжения нулевого решения системы (1), где

$$\Upsilon = \left( 1 - \frac{2q_1\|H\|^2\|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2}(1 + \|D\|)^{\omega_1}}{\varepsilon} v^{\omega_1/2}(\tau, \varphi) \right)^{-1/\omega_1} > 1,$$

$$M = \sqrt{\|H^{-1}\|(\|H\|(1 + \|D\|)^2 + \tau\|K\|_{\infty})},$$

$$\|K\|_{\infty} = \max_{s \in [0, \tau]} \|K(s)\|, \quad \|\varphi\|_{\infty} = \max_{s \in [0, \tau]} \|\varphi(s)\|.$$

При этом для решения начальной задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \exp \left( \frac{(t - \tau)}{\tau} \ln \|D\| \right) \left( M\Upsilon p\|D\|(p\|D\| - 1)^{-1} + 1 \right) \|\varphi\|_{\infty}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Для случая  $\|D\| \leq p^{-1}$  имеют место аналогичные результаты.

**Следствие.** Пусть выполнены условия (I), (II) и  $\|D\| < 1$ . Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук профессору Г. В. Демиденко за постановку задачи и помощь в работе.

## Литература

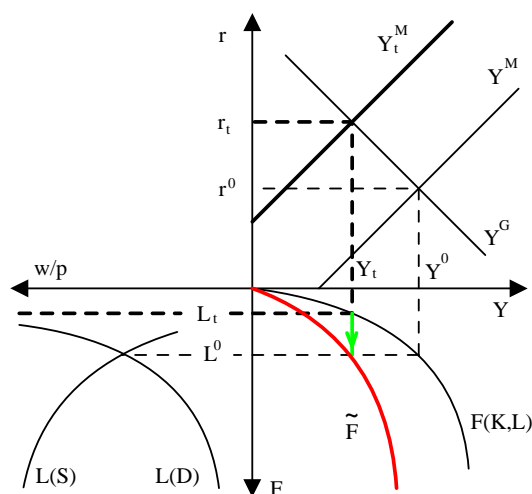
1. Демиденко Г. В., Котова Т. В., Скворцова М. А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений нейтрального типа // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика.—2010.—Т. 10, № 3.—С. 17–29.
2. Kharitonov V. L., Hinrichsen D. Exponential estimates for time-delay systems // Systems Control Lett.—2004.—Vol. 53, № 5.—Р. 395–405.
3. Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т. Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения.—2005.—Т. 41, № 8.—С. 1137–1140.
4. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика.—2005.—Т. 5, № 3.—С. 20–28.
5. Melchor-Aguilar D., Niculescu S. I. Estimates of the attraction region for a class of nonlinear time-delay systems // IMA J. Math. Control Inform.—2007.—Vol. 24, № 4.—Р. 523–550.
6. Demidenko G. V. Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl.—2009.—Vol. 7, № 3.—Р. 119–130.

## МОДЕЛИ НАЛОГООБЛОЖЕНИЯ В СХЕМАХ ПРОИЗВОДСТВА, ПОТРЕБЛЕНИЯ И РЫНКОВ

В. А. Терновский (Россия, Воронеж; ВИ МВД)

Доклад посвящен построению и анализу математических моделей налогообложения для различных классических экономических схем производственной и рыночной деятельности. В работе рассматриваются уже известные модели публикаций [1–3] и новые, основанные на известных теоретических схемах взаимодействия потребителей, рынка и производства. Рассмотрены модели налогообложения экономических схем: Неймана и Солоу, Эванса, Вальраса и Кейнса. Все анализируемые модели показывают, что для проведения *социально направленной политики налогообложения* государство в той или иной форме и степени должно на определенном этапе регулировать налоговую политику в стране.

Приведем заключительный анализ в совместной модели трех рынков Кейнса (см. рисунок).



Совокупное равновесие на рынке денег и товаров однозначно определяет фактическую потребность в рабочей силе  $Y^0 = F(R, L^0)$ . Если точка с координатами  $(L^0, Y^0)$  еще и лежит на кривой, определяющей производственную функцию, и  $L^0$  соответствует точке пересечения кривых спроса и предложения рабочей силы, то справедлива полная картина равновесия рынков. Автоматической тенденции к полной занятости в этой общей картине нет.

Введение налога на рынке товаров, как известно, увеличивает цену на товар, в том числе и равновесную цену. Новое — равновесное для  $p_t > p$  значение  $r_t$  — будет больше, чем  $r^0$ . На рисунке видно, что производство товаров снизится:  $Y_t < Y^0$ . Упадет уровень занятости:  $L_t < L^0$ . Кривая спроса  $L(D)$  и

ставка заработной платы  $w_t < w$  упадет. Модель не предполагает автоматического установления нового баланса (равновесия). Следовательно, для перехода к полной занятости нужна специальная государственная политика. Например, изменение кривой производственной функции экономики  $F(K, L)$  на другую, растущую быстрее. Эта кривая на рисунке обозначена красным цветом. Видна необходимость перевооружения экономики. Прирост экономический должен составить отрезок обозначенный зеленым цветом.

**Вывод.** Малая и контролируемая государством инфляция (именно такая ситуация наблюдается сейчас в нашей стране) предполагает справедливость модели Кейнса [2]. А для нормального сбора налогов в этой ситуации необходима реконструкция экономики, что должно привести как к более быстрому росту производственной функции, так и увеличению сбора налогов. Простое увеличение налогов вызовет дестабилизацию всех основных рынков.

### Литература

1. Мальхин В. И. Экономико-математическое моделирование налогообложения.—М.: ЮНИТИ, 2003.—98 с.
2. Колемаев В. А. Математическая экономика.—М.: ЮНИТИ, 2005.—400 с.
3. Мальхин В. И., Моисеев С. И., Родин В. А. Финансовая математика и модели налогообложения.—Воронеж: ИММиФ, 2008.—278 с.

## ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ МАКРОМОЛЕКУЛЫ В МОДЕЛИ ГАУССОВЫХ СУБЦЕПЕЙ<sup>1</sup>

Ю. Б. Трегубова (Россия, Барнаул; АлтГТУ)

В механическом поведении полимерных систем проявляется упругость твердого тела и текучесть жидкости. Такое поведение определяют как вязкоупругое [1]. Это свойство является одним из проявлений медленных релаксационных процессов, которые связывают, прежде всего, с перестройкой отдельной макромолекулы в системе (см. [2, 3]).

Работа посвящена изучению динамики полимерных жидкостей на основе имитационного моделирования поведения макромолекулы.

Всякая макромолекула может быть эффективно представлена в виде цепочки связанных броуновских частиц (так называемая модель гауссовых субцепей или «бусинок и пружинок» [1]). При этом макромолекула разбивается на  $N$  субцепей длиной  $M/N$  каждая, а поведение макромолекулы описывается движением линейной цепочки из  $N + 1$  броуновских частиц, связанных между собой последовательно упругими силами.

Пренебрегая взаимным гидродинамическим взаимодействием частиц в линейном по скоростям приближении, динамика единичной цепочки может быть описана набором стохастических уравнений [5]

$$m \frac{d^2 r_i^\alpha}{dt^2} = -\zeta \dot{r}_i^\alpha + F_i^\alpha + G_i^\alpha - 2\mu T A_{\alpha\gamma} r_i^\gamma + \phi_i^\alpha(t), \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где  $m$  — масса броуновской частицы, связанной с кусочком макромолекулы длины  $M/N$ ;  $r^\alpha$  и  $\dot{r}^\alpha$  — координаты и скорость броуновской частицы;  $\zeta \dot{r}_i^\alpha$  — сопротивление «мономерной» жидкости;  $F_i^\alpha$  и  $G_i^\alpha$  представляют эффективные силы соседних макромолекул:  $F_i^\alpha$  — сила внешнего сопротивления,  $G_i^\alpha$  — сила внутреннего сопротивления;  $\phi_i^\alpha$  — случайная сила;  $2T\mu$  — коэффициент упругости пружины между соседними частицами;  $T$  — температура в энергетических единицах. Матрица  $A_{\alpha\gamma}$  описывает соединение броуновских частиц в единую цепочку. Случайная сила в уравнениях (1) может быть представлена как сумма двух независимых процессов

$$\phi_i^\alpha(t) = \bar{\phi}_i^\alpha(t) + \tilde{\phi}_i^\alpha(t), \quad (2)$$

причем первое слагаемое — это гауссовский процесс с корреляцией

$$\langle \bar{\phi}_i^\gamma(t) \bar{\phi}_j^\mu(t') \rangle = 2T\zeta \delta_{\gamma\mu} \delta_{ij} \delta(t - t') \quad (3)$$

и второе — также гауссовский, но не дельта-коррелированный процесс.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-00293.

Применяя случайные силы, распределенные по законам (2) и (3), были получены статистические характеристики решений уравнений (1) в виде значений величины смещения центра масс макромолекулы. Решение уравнений (1) проводилось методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Зависимости результатов вычислений от числа  $N$  (для  $N > 10$ ) субцепей в моделируемой макромолекуле выявлено не было, что позволяет говорить о достаточной точности выбранной модели макромолекулы и схемы описания динамики ее поведения.

На рисунке 1 представлено среднее смещение центра масс макромолекулы (моделирование проводилось для  $N = 20$ ).

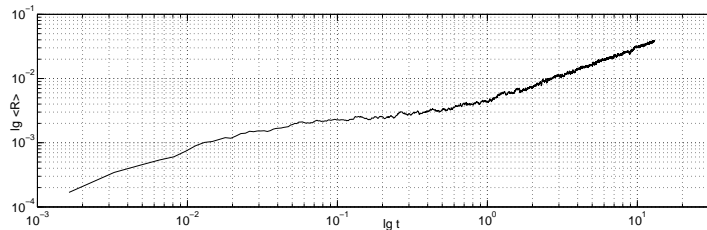


Рис. 1. Среднее смещение центра масс макромолекулы во времени.

Смещение как функция времени имеет горизонтальный участок (плато). Этот участок тем длиннее, чем длиннее макромолекула. Поэтому, результаты моделирования обнаруживают существование в теории характерного масштаба, который можно интерпретировать как диаметр «трубки» в рептационной теории Д'Жена (см. [2]). Таким образом подтверждается наличие диффузного механизма движения макромолекулы, и становится возможным введение в рассмотрение времен релаксации  $\tau_\nu$ .

Аналитическое выражение для вычисления среднего смещения центра масс макромолекулы имеет вид

$$\langle R \rangle = 6D_0 \frac{\tau}{B} \left( \frac{t}{\tau} + 1 - e^{-tB/\tau} \right), \quad (4)$$

где  $D_0$  — коэффициент диффузии,  $B$  — мера увеличения коэффициента трения частицы,  $\tau$  — время релаксации среды.

Как следует из выражения (4) и рис. 1, для модели полимерной системы правомерно введение некоторого единого характерного времени релаксации, что не противоречит известным экспериментальным и теоретическим данным (см. [6]).

## Литература

1. Ferry J. D. Viscoelastic properties of polymers.—3rd ed.—London: Wiley, 1980.
2. De Gennes P. G. Scaling concepts in polymer physics.—Ithaca, NY: Cornell Univ. Press, 1979.
3. Doi M., Edwards S. F. The theory of polymer dynamics.—Oxford: Oxford Univ. Press, 1986.
4. Покровский В. Н. Динамика слабо связанных линейных макромолекул // Успехи физических наук.—1992.—Т. 162, № 5.—С. 87–121.

5. *Pokrovskii V. N.* A justification of the reptation-tube dynamics of a linear macromolecule in the mesoscopic approach // *Physica*.—2006.—Vol. A366.—P. 88–106.
6. *Покровский В. Н.* Reptation and diffusive modes of motion of linear macromolecules // *ЖЭТФ*.—2008.—Т. 133, № 3.—С. 696–700.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФОРМОВАНИЯ  
ПОЛИМЕРНЫХ ПЛЕНОК В УСЛОВИЯХ ДВУОСНОГО  
РАСТЯЖЕНИЯ С УЧЕТОМ ТЕПЛОПЕРЕНОСА<sup>2</sup>

И. В. Третьяков (Россия, Барнаул; АлтГТУ)

В работе было рассмотрено течение полимерной жидкости в одномерном приближении соответствующее процессу формования полимерной пленки.

При описании процесса формования полимерной пленки учтено, что получаемая пленка охлаждается и, одновременно, подвергается растяжению. Поэтому, при математическом моделировании этих процессов, необходимо совместное решение уравнений для напряжений и теплопереноса.

Для нахождения установившихся напряжений при растяжении была использована обобщенная реологическая модель Виноградова — Покровского [1], параметры которой являются известными функциями температуры.

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 3\frac{\eta_0}{\tau_0} a_{ik};$$

$$\frac{d}{dt} a_{ik} - \nu_{ij} a_{jk} - \nu_{kj} a_{ji} + \frac{1 + (\kappa - \beta)I}{\tau_0} a_{ik} = \frac{2}{3} \gamma_{ik} - 3\frac{\beta}{\tau_0} a_{ij} a_{jk},$$

где  $\sigma_{ik}$  — тензор напряжений;  $p$  — гидростатическое давление;  $\eta_0$  и  $\tau_0$  — начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации;  $\nu_{ik}$  — тензор градиентов скорости;  $a_{ik}$  — симметричный тензор анизотропии второго ранга;  $I = a_{jj}$  — первый инвариант тензора анизотропии;  $\gamma_{ik} = \frac{1}{2}(\nu_{ik} + \nu_{ki})$  — симметризованный тензор градиентов скорости;  $\kappa, \beta$  — феноменологические параметры модели, учитывающие в уравнениях динамики макромолекулы размеры и форму молекулярного клубка.

Была показана возможность использования модифицированной реологической модели Виноградова — Покровского для описания течений расплавов линейных полимеров в различных режимах деформирования [2].

Система уравнений динамики записана в одномерном приближении, с учетом теплопереноса, когда продольная скорость, температура, скорость удлинения, ненулевые компоненты тензора напряжений являются функциями только продольной координаты, а параметры реологической модели являются известными функциями температуры.

Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для зависимости полуширины и толщины пленки от ее продольной скорости в случае двuosного растяжения. Было осуществлено так называемое обезразмеривание задачи, т. е. приведение всех уравнений системы, граничных условий и так далее к безразмерному виду. Что предоставило возможность ввести в рассмотрение безразмерные числа: Прандтля, Нуссельта, Рейнольдса и Вайсенберга —

---

<sup>2</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-00293.

параметры модели. В результате преобразованная система была решена и исследовано влияние параметров на полуширину пленки и ее скорость. Так же было рассмотрено влияние параметра анизотропии растяжения потока.

Исследовано влияние параметров модели, таких как: начальная сдвиговая вязкость, начальное время релаксации, коэффициент температуропроводности, коэффициент теплообмена, коэффициенты наведенной анизотропии и коэффициент анизотропии потока на вид получаемых зависимостей продольной скорости, температуры, ненулевых компонент тензора напряжений от расстояния до выхода из экструдера.

Проведено сравнение с имеющимися в литературе экспериментальными данными по замерам полуширины различных образцов полимерной пленки, и показана необходимость учета анизотропии потока при моделировании процесса формирования полимерных пленок в одномерном приближении.

### Литература

1. *Пышнограй Г. В., Покровский В. Н., Яновский Ю. Г. и др.* Определяющее уравнение нелинейных вязкоупругих (полимерных) сред в нулевом приближении по параметрам молекулярной теории и следствия для сдвига и растяжения // Докл. АН.—1994.—Т. 339, № 5.—С. 612–615.
2. *Pyshnograï G. V., Gusev A. S., Pokrovskii V. N.* Constitutive equations for weakly entangled linear polymers // J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics.—2009.—Vol. 163, № 1–3.—P. 17–28.



## ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОДВЕСНОЙ ЧАСТИ СТИРАЛЬНОЙ МАШИНЫ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

**И. В. Фетисов** (Россия, Москва; ООО «Пневмакс», ЮРГУЭС),  
**С. Н. Алехин** (Россия, Шахты; ЮРГУЭС),  
**В. Г. Фетисов** (Россия, Шахты; ЮРГУЭС, ЮМИ)

Одним из наиболее виброактивных механизмов в сфере бытовой техники является стиральная машина барабанного типа с горизонтально расположенным неуравновешенным ротором. Процесс динамики стиральных машин подробно изучен на основе представления внешних возмущающих нагрузок как детерминированных воздействий. Вопросы теории и практики случайных колебаний неуравновешенного ротора подвесной части машины, нашедшие большое применение при проектировании изделий бытовой техники, исследованы недостаточно. Особенно сложными являются задачи синтеза вышеуказанных динамических систем.

Как известно, существуют несколько методов решения задач динамики случайных процессов, основными из которых являются: метод статистической линеаризации, метод марковских процессов и метод статистических испытаний (так называемый метод Монте-Карло).

Статистическая линеаризация, основанная на замене всех существенно нелинейных элементов динамической системы такими линейными звеньями, которые статистически эквивалентны в смысле минимума среднего квадратического отклонения нелинейным элементам для колебательного движения подвешенного блока стиральной машины барабанного типа, была исследована в работе [1].

Рассматривается задача оптимизации параметров подвесной части стиральной машины, где ранее в работе [2] была предложена математическая модель в виде следующей слабо связанной системы дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned}M\ddot{\zeta} + Nb_z\dot{\zeta} + Nc_z\zeta &= U_1(t)\omega^2 \sin \omega t; \\J_z\ddot{\gamma} + N(b_y\xi_1^2 + b_x\eta_1^2)\dot{\gamma} + N(c_y\xi_1^2 + c_x\eta_1^2)\gamma &= U_2(t)\omega^2 J_x \cos \omega t; \\M\ddot{\xi} + Nb_x\dot{\xi} + Nc_x\xi &= 0; \\J_y\ddot{\beta} + N(b_x\zeta_1^2 + b_z\xi_1^2)\dot{\beta} + N(c_x\zeta_1^2 + c_z\xi_1^2)\beta &= U_2(t)\omega^2 J_x \sin \omega t; \\M\ddot{\eta} + Nb_y\dot{\eta} + Nc_y\eta &= U_1(t)\omega^2 \cos \omega t; \\J_x\ddot{\alpha} + N(b_z\eta_1^2 + b_y\zeta_1^2)\dot{\alpha} + N(c_z\eta_1^2 + c_y\zeta_1^2)\alpha &= 0.\end{aligned}$$

Нами построен испытательный стенд для экспериментального исследования процесса снижения виброактивности по различным выходным вероятностным характеристикам в подвесной части стиральной машины в различных пробных точках и на различных значениях эксцентриситета, массы белья при отжиге,

жесткости пружин и других конструктивных и технологических параметров подвесной части.

Основу предлагаемого алгоритма составляет численное зондирование четырехмерного пространства параметров рассматриваемой динамической системы блока, а расчет проводился в три этапа.

Обобщенными координатами служили линейные перемещения центра масс всей подвесной части  $q_1 = \xi$ ,  $q_2 = \eta$ ,  $q_3 = \zeta$  и три угла поворота  $q_4 = \alpha$ ,  $q_5 = \beta$ ,  $q_6 = \gamma$ . Как видим, данная расчетная схема соответствует всем конструктивным схемам подвески моечного узла стиральных машин барабанного типа. Система имеет шесть степеней свободы.

В качестве варьируемых рассматривались следующие семь параметров:  $M$ ,  $b_i$ ,  $c_k$ ,  $I_x$ ,  $N$ ,  $\omega$  и  $e$ . Здесь  $M$  — масса,  $b_i$  — коэффициенты демпфирования,  $c_k$  — коэффициенты жесткости упругих элементов,  $I_x$  — перемещение вдоль горизонтальной оси  $Ox$ ,  $N$  — число демпферов и пружин,  $\omega$  — частота колебаний вынуждающей силы,  $e$  — эксцентриситет.

Из условия обеспечения максимальной надежности на рабочем периоде времени  $T$  была решена многокритериальная задача оптимизации параметров подвесной части, где для стационарного процесса критерий максимальной надежности эквивалентен критерию минимума интенсивности выбросов.

## Литература

1. Фетисов В. Г., Алехин С. Н., Фетисов И. В. Модельная задача о поведении подвесного блока стиральной машины, подверженного случайным воздействиям // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию.—Владикавказ: ВНИЦ РАН и РСО-А, 2009.—С. 137–144.
2. Фетисов В. Г., Алехин С. Н., Фетисов И. В., Махов Д. П., Алехин А. С. Математическое моделирование снижения виброактивности стиральных машин барабанного типа методом дискретизации: монография.—Шахты: ГОУ ВПО «ЮРГУЭС», 2009.—135 с.

БЕСКОНЕЧНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ  
 ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ФИНАНСОВОГО РЫНКА  
 СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

В. В. Шамраева, И. В. Цветкова (Россия, Ростов-на-Дону; РГСУ)

Рассмотрим одношаговый финансовый рынок, заданный на стохастическом базисе  $(\Omega, \mathbf{F})$ , где  $\mathbf{F} = (F_0, F_1)$  — одношаговая фильтрация, причем  $F_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ , а  $F_1$  — порождена разбиением  $\Omega$  на счетное число атомов  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Рассмотрим  $\mathbf{F}$ -адаптированный случайный процесс, который мы мыслим как дисконтированную стоимость акции. Введем следующие множества вероятностных мер:  $\tilde{P} = \{P = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots) : p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots\}$ ,  $Z_0|_{\Omega} = a$ ,  $Z_1|_{A_i} = b_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ),  $\tilde{P}(Z, F) = \{P \in \tilde{P} : \sum_{i=1}^{\infty} b_i p_i < \infty, \sum_{i=1}^{\infty} b_i p_i = a\}$ . Пусть,  $f(P) = (C, P) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i p_i$  цена финансового обязательства  $f_1 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i I_{A_i}$ , вычисленная по мартингальной мере  $P \in \tilde{P}(Z, F)$ .

Таким образом, мы приходим к следующей задаче  $\mathbf{I} : f(P) = (C, P) \rightarrow \sup(\inf)$  при

$$\tilde{P} := \begin{cases} p_1 + p_2 + \dots + p_i + \dots = 1, \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + \dots + b_i p_i + \dots, \\ p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Исследование финансовых рынков со счетным числом состояний было проведено в [1]. При этом использовался принципиально новый метод перехода от неполных рынков к полным — метод интерполяции, оперирующий такими понятиями как СУХЕ (свойство универсальной хааровской единственности) и ОСУХЕ (ослабленное свойство универсальной хааровской единственности). Однако в упомянутой работе остался нерешенным вопрос о нахождение достаточных условий (на  $a, b_1, b_2, \dots$ ), гарантирующих существование мартингальных мер  $P$ , удовлетворяющих СУХЕ (ОСУХЕ). В данных тезисах анонсируется подход к решению этой проблемы при помощи построения двойственной к  $\mathbf{I}$  задачи  $\mathbf{II} : g(U) = u_1 + a \cdot u_2 \rightarrow \inf(\sup)$  при  $\tilde{U} = \{u_1 + b_j u_2 \geq c_j, j = 1, 2, \dots\}$ .

Приведем результат, который получен на данный момент, и наметим дальнейшие пути решения поставленной задачи.

**Теорема.** Пусть задача  $\mathbf{II}$  имеет финитно-определенную систему ограничений. Тогда 1) если  $N > -\infty$ , то задача  $\mathbf{I}$  разрешима, при этом  $N = M$ ; 2) если задача  $\mathbf{I}$  разрешима, то  $N > -\infty$  и тогда  $N = M$ .

Следовательно, условия на  $a, b_1, b_2, \dots$ , гарантирующие финитно-определенность системы ограничений задачи  $\mathbf{II}$ , дадут вместе с тем и условия разрешимости задачи  $\mathbf{I}$ . Кроме того, имея условия на эти же коэффициенты, найденные в работе [1], можно изучить некую между ними взаимосвязь. Что даст возможность найти ряд еще одних условий (возможно, отличных от условий, предложенных в [1]), гарантирующих существование мартингальных мер  $P$ , удовлетворяющих СУХЕ (ОСУХЕ). Что, в конечном итоге, позволит преобразовывать

неполные и безарбитражные рынки в полные безарбитражные, что в финансовой математике является весьма актуальной задачей.

### **Литература**

1. Данекянц А. Г. Моделирование безарбитражных финансовых рынков с помощью хааровских интерполяций на счетном вероятностном пространстве: Дис...к.ф.-м.н.— Ростов-на-Дону, 2005.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- METU — Middle East Technical University  
АлтГПА — Алтайская государственная педагогическая академия  
АлтГТУ — Алтайский государственный технический университет  
АлтГУ — Алтайский государственный университет  
БелГУ — Белорусский государственный университет  
ВГТУ — Воронежский государственный технический университет  
ВГУ — ГОУ ВПО «Воронежский государственный университет»  
ВИ МВД — Воронежский институт МВД России  
ВИС ЮРГУЭС — Волгодонский институт сервиса (филиал) Южно-Российского госуниверситета экономики и сервиса  
ДГТУ — Донской государственный технический университет  
ДГУ — Дагестанский государственный университет  
ИМЦА — Информационно-методический центр по аттестации образовательных организаций  
ИМ СО РАН — Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН  
ИПМ ДВО РАН — Учреждение Российской академии наук Институт прикладной математики Дальневосточного отделения РАН  
МПГУ — Московский педагогический государственный университет  
МФЭИ — Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации  
НГУ — Новосибирский государственный университет  
НИЯУ МИФИ — Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
НУУз — Национальный университет Узбекистана  
ОМИ ДНЦ РАН — Отдел математики и информатики Дагестанского научного центра РАН  
ОФИМ СО РАН — Омский филиал Учреждения Российской академии наук Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН  
РГСУ — Ростовский государственный строительный университет  
РГУПС — Ростовский государственный университет путей сообщения  
РГЭУ (РИНХ) — Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)  
РИИ АлтГТУ — Рубцовский индустриальный институт (филиал) Алтайского государственного технического университета им. Ползунова И. И.  
РЭУ им. Г. В. Плеханова — Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова  
С(А)ФУ — Северный (Арктический) федеральный университет  
СГУ — Ставропольский государственный университет (СтавГУ)  
СКГМИ — Северо-Кавказский горно-металлургический институт  
СОГУ — ГОУ ВПО «Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова»  
ТарГУ — Таразский государственный университет им. М. Х. Дулати  
ХГТУСА — Харьковский государственный технический университет строительства и архитектуры  
ЧГУ — Чеченский государственный университет

ЮГУ — Югорский государственный университет  
ЮМИ — Учреждение Российской академии наук Южный математический институт ВЦ РАН и РСО-А  
ЮНИИИТ — Югорский научно-исследовательский институт информационных технологий  
ЮРГТУ (НПИ) — Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт)  
ЮРГТУ (НПУ) — Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт)  
ЮРГУЭС — Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса  
ЮФУ — ГОУ ВПО «Южный федеральный университет».

**ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ,  
КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Тезисы докладов  
международной научной конференции  
(Волгодонск, Россия, 4–8 июля 2011 г.)

*Компьютерная верстка: В. В. Кибизова*

Южный математический институт ВНЦ РАН  
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

ISBN 978-5-904695-06-4



9 785904 695064