

Радионов А. А. Математическая модель крупных вихревых возмущений в стратифицированном слое сжимаемой бароклинной жидкости.—Владикавказ, 2015.—29 с.—(Препринт / ЮМИ ВЦ РАН; № 3).

В работе выводятся нелинейные математические уравнения для не малых по своей амплитуде сжимаемых осесимметричных вихревых возмущений с вертикально ориентированной осью в стратифицированном слое сжимаемой бароклинной жидкости. Найдены приближенные аналитические решения этих уравнений, которые могут быть применены для анализа возникновения крупных торнадо-подобных вихрей в атмосфере. Показаны условия возникновения неустойчивости.

Ключевые слова: динамика сжимаемой жидкости, крупные вихри, торнадо, устойчивость вихревого течения, атмосферные молнии.

Библиогр. 11.

Received May 20, 2015

Radionoff A. A. Mathematical model of large vortex disturbances in stratified layer of compressible baroclinic fluid.—Vladikavkaz, 2015.—29 p.—(Preprint / SMI VSC RAS; № 3).

Nonlinear mathematical equations for compressible axisymmetric vortex with a vertically oriented axis in the stratified atmospheric layer are written in the paper. The approximate analytical solutions of these equations, which can be used for analysis of large tornado-like vortices appearance in the atmosphere, were found. The conditions of the instability appearance are shown.

Mathematics Subject Classification (2000): 76N15.

Keywords: compressible fluids dynamics, large vortices, tornado, stability of vortex flow, atmospheric lighthing.

Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН
РСО-Алания, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

© Южный математический институт
ВЦ РАН, 2015
© А. А. Радионов, 2015

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
КРУПНЫХ ВИХРЕВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ СЛОЕ
СЖИМАЕМОЙ БАРОКЛИННОЙ ЖИДКОСТИ**

А. А. Радионов

1. Введение	3
2. Вывод управляющих уравнений	3
3. Решения	12
3.1. Стационарное приближение	12
3.2. Линейное приближение	19
4. Выводы	25
5. Гипотезы дальнейших исследований	26
Заключение	28
Литература	28

1. ВВЕДЕНИЕ

О динамике крупных вихрей твердо установлено, что она удовлетворяет уравнениям Навье-Стокса [1]. Некоторые модели крупных вихрей, а также основополагающие представления и наиболее значимые монографии представлены в работе [2]. Современные представления о физических процессах возникновения крупных вихрей, таких как торнадо, представлены в монографии [3].

Ознакомление с представлениями о физике крупных вихрей оставляет чувство неудовлетворенности. Наиболее туманным кажется вопрос о причинах возникновения и условиях существования таких явлений в атмосфере.

Математические модели, предназначенные для проведения вычислительных экспериментов и описывающие результаты расчетов крупные торнадо-подобные вихри, представлены в [3]. Зачастую это вычисленные модели, в которых изучается существование и эволюция вращающейся массы жидкости, заданной в качестве начального условия. Выполненные расчеты не отвечают на наиболее интересные вопросы об условиях, приводящих к возникновению крупных вихрей, о причинах, поддерживающих их существование и приводящих к разрушению. Обзор используемых математических моделей для исследования крупных вихрей, а также имеющихся данных наблюдений этих явлений в атмосфере и лабораторных условиях представлен в [2, 3].

Далее в работе крупные вихри будут изучаться теоретически при помощи рассмотрения нелинейных уравнений, описывающих динамику вихрей в сжимаемой стратифицированной жидкости. Предпринята попытка учета нелинейных слагаемых, что позволяет рассмотреть процессы приводящие к наблюдению вихревых течений, наблюдающихся в атмосфере, не воспроизводящиеся при использовании для их описания линейной теории.

Вначале выведена система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которым подчиняются осесимметричные вихревые возмущения бароклинной сжимаемой жидкости, называемые в [2] колоннообразными, после чего рассмотрены различные упрощающие допущения, позволяющие в частных случаях получить аналитические решения. Каждое из принимаемых упрощений сужает область физических процессов, которые описывают рассматриваемые уравнения, что будет обсуждаться при использовании этих упрощений.

2. ВЫВОД УПРАВЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим возмущения плотности, связанные с вихревым движением идеальной сжимаемой бароклинной жидкости. Для примера представим себе вихрь в безвязкой атмосфере достаточно удаленный от твердых границ. Возмущение плотности (или давления), движущееся вместе с вихрем с его скоростью, может оказаться отрицательным или положительным, другими словами циклоническим или антициклоническим, вращение жидкости для этих возмущений также может иметь различное направление. Вихревое возмущение существует на фоне некоторого основного (или фонового) состояния жидкости не связанного с вихревым движением и находящегося в некотором равновесном состоянии.

Для удобства описания выделим вихревое возмущение полагая, что уравнения Навье–Стокса описывают как фоновое состояние, так и фоновое состояние в сумме с вихревым возмущением. Для получения уравнений, описывающих только вихревое возмущение, следует вычесть из уравнений для возмущенного течения жидкости уравнения, описывающие невозмущенное состояние. Аналогичный подход используется при получении уравнений, описывающих волновые возмущения в атмосфере [4].

Введем неподвижную цилиндрическую систему координат (r, ϕ, z) , связанную с осью вращения вихревого возмущения. Величины, характеризующие возмущенное течение, будем обозначать малыми буквами, а характеризующие фоновое течение — малыми буквами с индексом 0. Время обозначим t . Введем следующие обозначения: нижними индексами r, ϕ, z, t будем обозначать частное дифференцирование по соответствующей координате и времени, $\vec{v} = (u, v, w)$ — компоненты вектора скорости возмущения, $\vec{v}_0 = (u_0, v_0, w_0)$ — компоненты вектора скорости фонового течения, p, ρ, T — давление, плотность и температура возмущения, p_0, ρ_0, T_0 — давление, плотность и температура фонового течения, дивергенцию скорости возмущения обозначим $d(r, \phi, z, t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$, вертикальную компоненту завихренности возмущения обозначим $\xi = r^{-1}(rv)_r - r^{-1}u_\phi$, примем $f = 2\Omega_E \sin(\Phi)$, $f_2 = 2\Omega_E \cos(\Phi)$ — параметры Кориолиса, где Ω_E — угловая скорость вращения Земли, Φ — географическая широта места расположения системы координат.

Малости характеристик возмущенного течения не предполагаем. Кроме того будем рассматривать идеальную жидкость, т. е. не будем выписывать вязкие слагаемые, имеющиеся в уравнениях Навье–Стокса. Это также означает пренебрежение процессами турбулентного перемешивания наиболее интенсивно протекающими в приземном слое атмосферы.

Возмущенные уравнения для вектора скорости жидкости, для краткости записанные в векторном виде, есть:

$$(\vec{v}_0 + \vec{v})_t + (\vec{v}_0 + \vec{v}) \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}) \right) = -\frac{1}{(\rho_0 + \rho)} \vec{\nabla}(p_0 + p) - \vec{f} \times (\vec{v}_0 + \vec{v}) + \vec{g}. \quad (1)$$

Здесь и далее пренебрегаем слагаемыми, возникающими вследствие воздействия силы Кориолиса на вертикальные потоки жидкости, т. е. принимаем $f_2 = 0$.

Будем считать, что для фонового течения, для величин с индексом 0 выполняются аналогичные уравнения движения в векторном виде:

$$\vec{v}_{0t} + \vec{v}_0 \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 \right) = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p_0 - \vec{f} \times \vec{v}_0 + \vec{g}. \quad (2)$$

Фоновое течение выделяем по той причине, что о нем мы можем строить определенные предположения. Сделаем следующее предположение: все характеристики фонового течения зависят только от вертикальной координаты. Это означает также, что рассматриваются вихревые возмущения с вертикальной осью вращения. Для фонового состояния в пределах тропосферы на масштабах порядка 2–6 километров, возможны инверсионные условия устойчивые, либо не устойчивые. Изменение стратификации не приводит к появлению значительных вертикальных потоков фонового состояния и влияет только на явления турбулентного перемешивания здесь не учитываемых. Горизонтальными компонентами скорости фонового состояния на рассматриваемых пространственных

и временных масштабах также пренебрежем. Имеет значение также временной интервал в пределах которого существует это самое фоновое состояние — оно должно быть значительно больше времени, в течении которого мы интересуемся возмущениями, именно это позволяет использовать представление об адиабатичности процессов протекающих в фоновом состоянии.

Получим уравнение, которому подчиняется дивергенция скорости вихревого возмущения в цилиндрических координатах, выражение для которой:

$$d = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = u_r + \frac{1}{r}v_\phi + w_z + \frac{u}{r}. \quad (3)$$

Для этого вычисляем дивергенцию разности уравнений возмущенного состояния (1) и уравнения невозмущенного состояния (2), в результате получится искомое выражение. Опуская громоздкие выкладки запишем результат:

$$\begin{aligned} & d_t + ud_r + \frac{v}{r}d_\phi + wd_z + d^2 - 2\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \phi)} \\ & - 2\frac{\partial(u, w)}{\partial(r, z)} - 2\frac{\partial(v, w)}{\partial(\phi, z)} - 2\frac{ud}{r} + 2\frac{u^2}{r^2} - 2\frac{u_\phi v}{r^2} - 2\frac{vv_r}{r} \\ & = \frac{1}{\rho_0(\rho_0 + \rho)} \left[-\rho_0 \left(p_{rr} + \frac{p_{\phi\phi}}{r^2} + p_{zz} + \frac{p_r}{r} \right) - \rho_{0z}p_z + \rho_z p_{0z} + \rho p_{0zz} + \frac{\rho p_{0r}}{r} \right] \\ & + \frac{1}{\rho_0(\rho_0 + \rho)^2} \left(+\rho_0 p_z \rho_z + \rho_0 p_r \rho_r + \frac{\rho_0 p_\phi \rho_\phi}{r^2} - \rho p_{0z} \rho_z \right) + f\xi. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь якобианы векторной нелинейности представлены выражениями

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \phi)} = \frac{u_r v_\phi}{r} - \frac{v_r u_\phi}{r}, \quad \frac{\partial(v, w)}{\partial(\phi, z)} = \frac{w_z v_\phi}{r} - \frac{v_z w_\phi}{r}, \quad \frac{\partial(u, w)}{\partial(r, z)} = w_z u_r - w_r u_z,$$

скалярная нелинейность представлена квадратом дивергенции.

Уравнение для радиальной компоненты скорости возмущения:

$$u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\phi + wu_z - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho}p_r + fv. \quad (5)$$

Уравнение для тангенциальной составляющей скорости возмущения:

$$v_t + uv_r + \frac{v}{r}v_\phi + wv_z + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r(\rho_0 + \rho)}p_\phi - fu. \quad (6)$$

Уравнение для вертикальной компоненты скорости возмущения:

$$w_t + uw_r + \frac{v}{r}w_\phi + ww_z = +\frac{\rho}{\rho_0(\rho_0 + \rho)}p_{0z} - \frac{1}{\rho_0 + \rho}p_z. \quad (7)$$

Уравнение неразрывности:

$$\rho_t + (\rho_0 + \rho)d + u(\rho_0 + \rho)_r + \frac{v}{r}(\rho_0 + \rho)_\phi + w(\rho_0 + \rho)_z = 0. \quad (8)$$

Система нелинейных уравнений (4)–(8) является слишком сложной для получения аналитического решения и нуждается в упрощении. Для этого необходимо использовать симметрию возмущения. Положим, что все характеристики рассматриваемого вихревого возмущения как и фонового состояния не зависят от угловой координаты.

Кроме этого примем, что вертикальная скорость возмущения как и все прочие характеризующие возмущение величины не зависят от вертикальной координаты, что позволяет принять $p_z = 0$, $w_z = 0$. Это означает, что рассматриваемое вихревое возмущение не меняется вдоль оси вращения, что возможно если рассматривать это возмущение вдали от твердых границ. Ранее предполагалось также, что фоновое состояние напротив зависит только от вертикальной координаты и не зависит от радиальной координаты, что для неподвижного фонового состояния вполне естественно. Для фонового состояния на рассматриваемых высотах можно принять выполнение гидростатического соотношения $p_{0z} = -\rho_0 g$.

В результате этих предположений якобианы в (4) тождественно равняются нулю и в уравнениях (3)–(8) исчезает зависимость от угловой координаты.

При рассмотрении крупных вихрей на некотором начальном этапе их развития вполне допустимо пренебречь радиальной скоростью вихря [2], т. е. принять $u = 0$. Величиной u_r нельзя пренебрегать, поскольку именно она определяет поведение дивергенции и соответственно плотности возмущения, в сделанных предположениях дивергенция скорости возмущения определяется именно этой величиной: $d = u_r$. Отметим, что радиальную производную радиальной скорости необходимо учитывать, а вот саму величину радиальной скорости учитывать не обязательно, поскольку она мала и не определяет рассматриваемые явления. Тангенциальная компонента скорости возмущения остается значительной.

Применяя сделанные допущения к уравнению неразрывности (8) имеем:

$$\rho_t + (\rho_0 + \rho)d + w\rho_{0z} = 0. \quad (9)$$

Уравнение для тангенциальной составляющей скорости возмущения (6) принимает вид:

$$v_t = 0, \quad (10)$$

откуда можно сделать вывод, что тангенциальная составляющая скорости вихря явно от времени не зависит.

Принимая сделанные предположения к (7) получим простое равенство для зависимости осевой компоненты скорости вихря вдали от твердых границ

$$w_t = -\frac{\rho}{\rho_0 + \rho} g. \quad (11)$$

Очевидным следствием выражения (11) является прямая пропорциональность скорости изменения вертикальной скорости возмущения его плотности, по крайней мере на некотором начальном этапе развития вихревого возмущения. В случае, если динамика процесса такова, что плотность растет во времени, скажем экспоненциально, то осевая компонента скорости вихревого возмущения растет пропорционально плотности возмущения $w_t \sim -\rho g$. На позднем этапе такой динамики, когда плотностью фонового состояния можно пренебречь по сравнению с плотностью возмущения, осевая скорость вихря утратит зависимость от плотности возмущения $w_t \sim -g$.

Обозначим $\Omega = vr^{-1}$ угловую скорость вихревого возмущения. Уравнение для радиальной компоненты скорости возмущения (5) с учетом принимаемых упрощений принимает вид:

$$\Omega^2 + f\Omega = \frac{1}{\rho_0 + \rho} \frac{c_0^2}{r} \rho_r. \quad (12)$$

Уравнение (12) показывает, что зависимость от времени для угловой скорости возмущения (или же тангенциальной скорости) опосредована зависимостью плотности от времени.

Запишем уравнение состояния для вихревых возмущений эволюционирующих адиабатически. Есть все основания считать таковыми вихревые структуры в идеальной жидкости, поскольку время жизни вихря относительно мало. Для возмущенного состояния можно записать $p_0 + p = A(\rho_0 + \rho)^\gamma$, тогда $p = A(\rho_0 + \rho)^\gamma - A(\rho_0)^\gamma$, считая что адиабатическими является как фоновое состояние само, так и в сумме с возмущением. Разлагая в ряд Тейлора первое слагаемое вблизи $\rho = 0$ для давления возмущения получим: $p = A(\rho_0)^{\gamma-1}\gamma\rho + 2^{-1}A(\rho_0)^{\gamma-2}\gamma(\gamma-1)\rho^2 + \dots$, обозначим скорость звука фонового течения $c_0^2 = A\gamma(\rho_0)^{\gamma-1} = \gamma RT_0$ и ограничимся линейным членом этого разложения:

$$p = c_0^2\rho. \quad (13)$$

Упростим уравнение (4) согласно сделанным предположениям:

$$d_t + d^2 - \frac{2vv_r}{r} = -\frac{1}{(\rho_0 + \rho)} \left(p_{rr} + \frac{p_r}{r} \right) + \frac{\rho p_{0zz}}{\rho_0(\rho_0 + \rho)} + \frac{p_r \rho_r}{(\rho_0 + \rho)^2} + f\xi. \quad (14)$$

Конечно полученная система уравнений (9)–(14) является приближением. В реальности и радиальная скорость отлична от нуля и имеется зависимость возмущения от вертикальной координаты хотя бы в силу граничных условий на поверхности земли. Вероятно также и вязкость играет заметную роль при значительных скоростях движения. Рассмотрение простейшей модели вихревого движения в идеальной жидкости должно показать основные физические процессы являющиеся причинами возникновения крупных вихрей.

Отметим, что ранее нигде не предполагалось малости величины вихревого возмущения, за исключением уравнения состояния (13), которому подчиняется лишь малое возмущение. В этом уравнении состояния был сохранен единственный член разложения возмущенной плотности вблизи основного состояния. При плотности возмущения значительно превосходящих плотность основного состояния конечно необходимо привлекать старшие члены разложения (13). В этом исследовании ограничимся одним членом разложения, планируя в дальнейших исследованиях исправить этот недостаток.

Далее без ограничений общности можем положить плотность основного состояния равной единице. Для атмосферного воздуха принятие $\rho_0 = 1$ является хорошим приближением, в случае других жидкостей в получаемых уравнениях следует уточнить определение скорости звука фонового состояния. Не меняя в дальнейшем изложения обозначений, перейдем к безразмерной плотности, нормированной на плотность основного состояния. Уравнение (14) для дальнейших выкладок запишем для такого вертикального слоя атмосферы, в котором величина p_{0zz} может быть принята постоянной, либо параметрически зависящей от вертикальной координаты. Обозначим $\beta = \rho_{0z}$, $\alpha = p_{0zz}\rho_0^{-1}$, перепишем (14), используя уравнение состояния (13) и уравнение неразрывности (9), в виде нелинейного уравнения второго порядка в частных производных для

плотности вихревого возмущения:

$$\begin{aligned} -\rho_{tt} + 2\frac{\rho_t^2}{1+\rho} + \frac{3w\beta\rho_t}{1+\rho} + \frac{g\beta\rho}{1+\rho} + \frac{w^2\beta^2}{1+\rho} - (1+\rho)\frac{2vv_r}{r} \\ = -c_0^2\rho_{rr} - c_0^2\frac{\rho_r}{r} + c_0^2\frac{\rho_r^2}{1+\rho} + \alpha\rho + f\xi(1+\rho). \end{aligned} \quad (15)$$

Слагаемое $r^{-1}vv_r$ уравнения (15) необходимо выразить посредством плотности вихревого возмущения.

Одной из возможностей для этого является использование уравнения для вертикальной компоненты завихренности, поскольку в ее определение входит величина v_r . Уравнение для вертикальной компоненты завихренности с учетом принимаемых допущений является нестационарным и имеет вид

$$(1+\rho)\xi_t - \rho_t(\xi + f - 2\Omega) = 0. \quad (16)$$

С учетом выражения (10) становится понятно, что в процессе развития крупного вихря явно от времени может зависеть только его вертикальная компонента завихренности. Угловая же скорость может зависеть от времени лишь посредством зависимости от времени плотности вихревого возмущения.

Второй возможностью является использование уравнения, приведенного в [2], с использованием принимаемых упрощающих предположений имеющего вид

$$vv_r = -\Omega^2 r - ww_r. \quad (17)$$

Это уравнение связывает слагаемое $r^{-1}vv_r$ уравнения (15) с квадратом угловой скорости и осевой компонентой скорости вихревого возмущения.

Осевую компоненту скорости вихревого возмущения можно получить проинтегрировав по времени выражение (11):

$$w(r, t) = -g \int \frac{\rho}{1+\rho} dt + \hat{w}(r), \quad (18)$$

где $\hat{w}(r)$ — произвольная функция расстояния от оси вращения. В случае, если плотность вихревого возмущения явно не зависит от времени, либо эта зависимость является пренебрежимо малой, получится:

$$w(r, t) = -\frac{\rho}{1+\rho} gt + \hat{w}(r). \quad (19)$$

В том случае, когда плотность вихревого возмущения не существенно зависит от времени, осевая скорость этого возмущения зависит от времени явно. Учет вязкости изменит вид этого решения, но его рост во времени останется столь же существенным. Принимая произвольную функцию радиуса $\hat{w}(r)$ равной нулю, как частный случай, получим:

$$ww_r = (gt)^2 \frac{\rho\rho_r}{(1+\rho)^3}. \quad (20)$$

Уравнение (15) показывает, что имеется лишь два физических механизма, способных влиять на вихревое колоннообразное возмущение в жидкости, например в атмосфере, с осевой компонентой скорости подчиняющейся (19) и вертикальной осью вращения, для которого выполняются все принятые при

выводе системы уравнений (12), (15), (16), упрощающие предположения. Это сила Кориолиса и сила, описывающая взаимодействие вихря с фоновым течением, характеризуемая величиной α .

Уравнения (12) и (15) показывают насколько сложно влияние силы Кориолиса на развитие вихревого возмущения. В уравнение для плотности (15) входит параметр Кориолиса, умноженный на вертикальную компоненту завихренности. Наблюдения в природе и в лабораторных экспериментах [3] свидетельствуют о заметном влиянии силы Кориолиса на развитие крупных вихрей. Учет силы Кориолиса представляет собой самостоятельную задачу.

Далее в работе пренебрегается силой Кориолиса. С физической точки зрения пренебрежение силой Кориолиса ограничивает нас рассмотрением крупных вихрей, возникающих вблизи экватора планеты. Отсутствие силы Кориолиса позволяет выявить влияние взаимодействия вихревого возмущения со стратифицированным фоновым течением. Это взаимодействие является основным механизмом, который может приводить к усилению вихревого течения.

Пользуясь (12), (17), (20) и пренебрегая силой Кориолиса запишем:

$$\begin{aligned} -\rho_{tt} + 2\frac{\rho_t^2}{1+\rho} + \frac{2}{r}(1+\rho)ww_r + \frac{3w\beta\rho_t}{1+\rho} + \frac{w^2\beta^2}{1+\rho} \\ = -c_0^2\rho_{rr} + c_0^2\frac{\rho_r^2}{1+\rho} - 3\frac{c_0^2}{r}\rho_r - \frac{g\beta\rho}{1+\rho} + \alpha\rho. \end{aligned} \quad (21)$$

Получено нелинейное уравнение второго порядка в частных производных для плотности вихревого возмущения. Решить это уравнение не удастся. Некоторые аналитические решения можно получить если использовать дополнительные упрощающие предположения. В той физической ситуации когда зависимость плотности вихревого возмущения от времени является достаточно медленной настолько, что можно пренебречь скоростями изменения этой плотности и вторыми производными по времени от нее, можно переписать с учетом (20):

$$\frac{2}{r}(gt)^2\frac{\rho\rho_r}{(1+\rho)^2} + \beta^2(gt)^2\frac{\rho^2}{(1+\rho)^3} = -c_0^2\rho_{rr} + c_0^2\frac{\rho_r^2}{1+\rho} - 3\frac{c_0^2}{r}\rho_r - \frac{g\beta\rho}{1+\rho} + \alpha\rho. \quad (22)$$

Прежде чем заняться решением уравнений (21), (22) обсудим значения вошедших в них параметров и имеющиеся возможности постановки граничных условий.

В полученное уравнение вошла скорость звука c_0 , построенная на характеристиках фонового состояния, которую можно принять постоянной для атмосферы в пределах тропосферы, а также величина $p_{0zz}\rho_0^{-1}$, которая описывает стратификацию основного состояния. Найдем связь между давлением и температурой фонового состояния. Полагая плотность фонового состояния неизменной из уравнения состояния идеального газа находим равенство $p_{0zz}\rho_0^{-1} \approx R_a T_{0zz}$, где $R_a = RM_a^{-1}$, R — универсальная газовая постоянная, $M_a \approx 29 \cdot 10^{-3}$ — молярный вес воздуха. Заметим, что при значительных вертикальных градиентах температуры, наблюдаемых в устойчиво стратифицированной, либо в неустойчиво стратифицированной атмосфере, могут оказаться значительными значения второй производной температуры фонового состояния по высоте.

Выражение $R_a T_{0zz}$ имеет зависимость от вертикальной координаты. Оценим его значение в стратифицированных слоях реализующихся в природных

условиях. Вторая производная по высоте абсолютной температуры мало отличается от второй производной по высоте потенциальной температуры для фонового состояния, поэтому отличать друг от друга эти величины нет необходимости. Примем зависимость температуры от высоты характерную для некоторого инверсионного слоя, которая может быть аппроксимирована гиперболическим тангенсом, изображенным на рис. 1.1. Распределение температуры соответствует росту температуры внутри некоторого интервала высот на определенную величину. Зададимся значением указанного интервала в 50 м и величиной изменения температуры в 10° . Пусть это изменение температуры происходит на некоторой высоте в 3000 м. На рис. 1.2 изобразим вторую производную этой же зависимости. Принятые значения соответствуют не только облачной инверсии, такой перепад температуры может характеризовать приземную ночную инверсию, в грозовых облаках и перепад температуры выше и интервал высот изменения температуры вероятно меньше. Для величины $R_a T_{0zz}$ может быть принята оценка порядка $\sim \pm 10$.

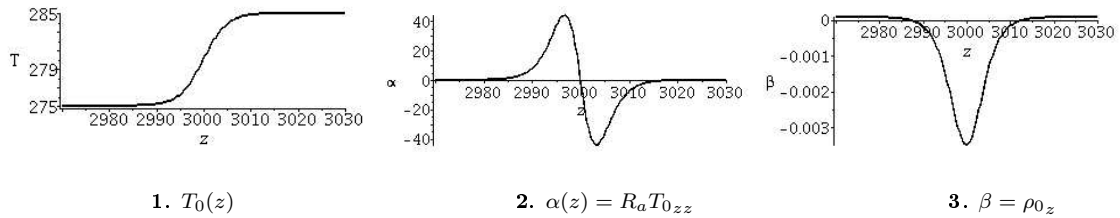


Рис. 1. График гиперболического тангенса температуры T_0 и величин $\alpha = R_a T_{0zz}$ и $\beta = \rho_{0z}$. Принят перепад потенциальной температуры в 10 градусов на 50 метров высоты при значении температуры основного состояния в 280° .

На рис. 1.3 изобразим величину $\beta = \rho_{0z} \approx -\theta_0^{-1} \theta_{0z} + g c_0^{-2}$ для принимаемого распределения температуры. Для β может быть принята оценка ± 0.003 , которая на порядки меньше оценки для величины α . Также величина $g\beta$ более чем на порядок меньше величины α . Конечно возможно, что принимаемое распределение температуры фонового состояния имеет слишком значительный перепад температуры на чрезвычайно малом интервале высот, что и приводит к столь значительным различиям в порядках величин α и β . Однако, указанное различие сохраняется и для значительно меньших перепадов температуры фонового состояния на гораздо более протяженных интервалах высот. Величина β становится существенной лишь для линейного по высоте распределения температуры фонового состояния на рассматриваемом интервале высот.

Аналогичное распределение температуры может возникать при дневном нагреве равнины, впрочем как и над поверхностью водоемов. В течении суток нагрев и выхолаживание равнины вполне вероятно делает отличной от нуля вторую производную температуры по высоте вблизи инверсии.

Подчеркнем, что значение величины $\alpha = R_a T_{0zz}$ в рассматриваемом случае описывает физический процесс и на разных высотах непременно будет иметь как отрицательные значения, так и положительные значения. Невозможно отказать от одного из знаков, положительного или отрицательного, этой величины мотивируя тем, что один из знаков приводит к нефизичному решению. На разных высотах оба знака этой величины реализуются и определяют физику явления.

Чтобы определиться с начальными и граничными условиями попытаемся представить себе начальную стадию предполагаемого динамического процесса.

В рассматриваемый стратифицированный слой попадает некое вихревое возмущение. Еще с большей вероятностью вихревое возмущение возникает в таком слое вследствие действия разнообразнейших механизмов их турбулентной генерации. В большом количестве вихревых возмущений найдутся вихри самых различных размеров и форм. Все эти вихри, попадающие в рассматриваемый слой или возникающие в нем, ограничены некоторым максимальным радиусом. Из всего этого множества мы, согласно сделанным предположениям, рассматриваем только вихревые возмущения с вертикально ориентированной осью вращения.

В уравнениях (12), (17) $\Omega = \Omega(r)$ может быть принята как заданная функция, известная например из экспериментальных данных. Некоторые экспериментальные данные представлены в монографии [2]. Если следовать им, то в структуре экспериментально наблюдаемых крупных вихрей распределение угловой скорости по радиусу довольно сложное. В центре наблюдается ядро вихря, в котором закономерности вращения близки к закономерностям вращающегося твердого тела. При радиусах больших некоторой точки перегиба (в радиальной зависимости тангенциальной компоненты скорости вращения) выделяется внешняя часть вихря, в которой тангенциальная скорость падает с увеличением радиуса, обратно пропорционально квадрату расстояния от оси вращения.

По данным лабораторных экспериментов, в которых искусственно формируется вихревое течение, давление в центре придонной области колоннообразного вихря имеет довольно острый минимум (максимума в экспериментальных данных не имеется), после вычитания фонового давления это означает что отрицательное возмущение давления практически локализовано в ядре вихря.

Одним из возможных путей решения уравнения (15) является использование экспериментально определенных зависимостей для величины $r^{-1}vv_r$, которую можно выразить через угловую и осевую скорости. Конечно эта возможность оставляет место для сомнений, поскольку экспериментальными данными описывается полностью развитое течение вязкой ньютоновской жидкости, помещенной в лаборатории в специальные условия. Результат, полученный теоретически для идеальной жидкости, наиболее корректно сравнить с экспериментом, проведенным в идеальной жидкости, либо в жидкости, в которой влияние вязкости не существенно.

Другой возможностью является аналитическое решение уравнения (21) или (22) для плотности вихревого возмущения и вычисления из полученного выражения всех характеристик вихря, характерных для идеальной жидкости. Далее развивается именно такой подход.

В качестве первого начального условия может быть принято начальное распределение плотности вихревого возмущения $\rho_n = \rho_n(r)$, которое есть некоторая функция, связанная с радиальным распределением угловой скорости $\Omega(r)$. Вновь обращаясь к экспериментальным данным [2] выясняем, что имеется связь между максимальным значением возмущения плотности в вихре и максимальным значением его угловой скорости. В [2] указывается следующее эмпирическое соотношение $v_m = \sqrt{\Delta p_n \rho_0^{-1}}$, которое связывает максимальное значение перепада давления в вихре с максимумом его тангенциальной скорости. Согласно (13) можно переписать для плотности возмущения $v_m = \sqrt{c_0^2 \rho_n \rho_0^{-1}}$.

Вторым начальным условием можно принять равенство нулю производной по времени от плотности возмущения $(\rho_n)_t = 0$. Что предполагает в начальный момент вихревое возмущение не увеличивается и не уменьшается под действием например вязких слагаемых не учтенных при выводе уравнений (21), (22).

Возможным граничным условием для возмущения плотности в вихре может являться равенство $\rho(r = 0, t = 0) = \rho_{n0}$ — некоторое возмущение плотности в начальный момент времени. Вторым граничным условием может быть принято условие на бесконечности $\rho_n(r \rightarrow \infty) = 0$. Конечно прежде чем будет достигнута бесконечность наверняка встретится другой вихрь, но все же здесь рассматриваются модельные представления о вихре. Более корректно равенство нулю вихревого возмущения плотности можно требовать на некотором радиусе r_m , но с последним трудно определиться. Другой возможностью для принятия второго граничного условия является заданный градиент плотности возмущения $\rho_r(r = 0, t = 0) = \rho_{nr}$ на оси вращения, это условие может характеризовать интенсивность вихря.

3. РЕШЕНИЯ

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение (21) или (22) является слишком сложным для непосредственного решения, поэтому для получения аналитических решений примем дополнительные упрощающие предположения.

Далее используются два различных упрощающих предположения, при которых удастся получить аналитические выражения, в той или иной степени приближенно описывающие поведение искомого решения. Первыми показаны решения уравнения (22), полученные с помощью предположения о стационарности вихревого возмущения, с учетом и без учета осевой скорости. Далее следуют решения нестационарного уравнения (21), полученные в предположении о малости плотности вихревого возмущения с помощью линеаризации исходного уравнения (21). Найдены некоторые сходные черты в получаемых решениях и отмечены их недостатки.

3.1. СТАЦИОНАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим стационарное решение уравнения (22), которое получается, если принять наиболее простое выражение для осевой скорости в виде $w(r, t) = 0$, что возможно при равенстве нулю произвольной функции $\hat{w}(r)$, а также для случая вихревых возмущений с горизонтально расположенной осью вращения, для которых $g = 0$ (в этом случае сила тяжести должна учитываться в уравнениях для радиальной и тангенциальной компонент скорости вихревого возмущения, где ее значение не существенно). Также в уравнении (22) опустим слагаемое описывающее взаимодействие с стратификацией фонового течения: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, что возможно при однородном распределении температуры фонового состояния.

При этих предположениях уравнение (22) принимает вид:

$$\rho_{rr} + \frac{3}{r}\rho_r + \frac{\rho_r^2}{1 + \rho} = 0. \quad (23)$$

Решение получаемое в этом приближении хорошо известно и называется свободным или потенциальным вихрем [2] и записывается в виде

$$\rho(r) = -1 + C_2 \exp\left(-\frac{C_1}{2r^2}\right). \quad (24)$$

Обе постоянные интегрирования C_1 и C_2 не определяют амплитуду возмущения плотности. При $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ выражение (24) описывает вихревое возмущение плотности с минимумом плотности на оси вращения, где плотность достигает минимального значения $\rho(r \rightarrow 0) \rightarrow -1$, плотность вихревого возмущения остается ограниченной на всех расстояниях до оси вращения. При $C_1 < 0$ и $C_2 > 0$ выражение (24) описывает положительное возмущение плотности, имеющее бесконечное значение на оси вращения. Значение констант $C_1 > 0$, $C_2 < 0$ не приемлемо, поскольку приводит к распределению $\rho(r)$ не стремящемуся к нулю с увеличением расстояния от оси вращения. График выражения (24) приведен на рис. 2 со значениями постоянных интегрирования $C_1 = 1$ и $C_2 = 1$.

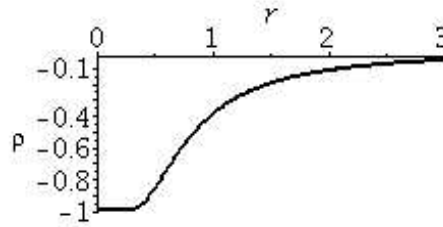


Рис. 2. Распределение плотности, вычисленное по (24) при значениях постоянных интегрирования $C_1 = 1$ и $C_2 = 1$.

Квадрат угловой скорости, вычисленный по (12), (24), для этого решения убывает обратно пропорционально четвертой степени расстояния до оси вращения, допускает вращение как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки относительно оси вращения и имеет вид:

$$\Omega^2(r) = \frac{c_0^2 C_1}{r^4}. \quad (25)$$

Осевая скорость, вычисленная согласно (24), (19) достигает бесконечных положительных значений на оси вращения. По этой причине решение (24), (25) с физической точки зрения не приемлемо для идеальной жидкости, однако для вязкой жидкости это утверждение может измениться.

Неудовлетворительность решения (24), (25) означает, что пренебрежение осевой скоростью вихревого возмущения является слишком грубым с физической точки зрения в стационарном варианте уравнения (22). Необходимо учитывать осевую компоненту скорости вихревого возмущения.

Предполагая плотность вихревого возмущения достаточно медленно зависящей от времени так, что можно пренебречь производными по времени в уравнении (21) и при отсутствующей стратификации $\alpha = 0$, $\beta = 0$ (что означает однородное распределение по высоте температуры жидкости фонового состояния), для вертикально ориентированной оси вращения вихря перепишем уравнение (22) в виде

$$\frac{1}{r} \left[3 + 2 \frac{(gt)^2}{c_0^2} \frac{\rho}{(1+\rho)^2} \right] \rho_r = -\rho_{rr} + \frac{\rho_r^2}{1+\rho}. \quad (26)$$

Это уравнение соответствует полностью развитой осевой компоненте скорости в вихревом возмущении, в том смысле, что вертикально ориентированная осевая скорость при условии $\hat{w}(r) = 0$ удовлетворяет выражению (19). Пренебрежение величиной $\hat{w}(r)$ может означать, что уравнение (26) описывает поздние стадии развития вихревого возмущения.

Уравнение (26) есть нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, аналитическое решение которого найти не удастся в явном виде. Решение уравнения (26) можно записать неявно в виде квадратуры [5]:

$$\ln(r) - C_2 + \int^{\rho(r)} \frac{c_0^2(1+x) dx}{(2\ln(1+x) - C_1)c_0^2(x+1)^2 - (gt)^2(2x+1)} = 0. \quad (27)$$

Выражение (27) в начальный момент времени (при $gt = 0$) переходит в решение (24). Получить выражение для плотности отсюда не удастся, впрочем как и вычислить значение квадратуры.

Строгие математические выводы в стационарном приближении заканчиваются получением выражения (27). Далее используем два различных подхода, позволяющих приближенно понять поведение возмущения плотности (27), хотя бы в предельных случаях, даже в ущерб математической строгости.

Во-первых, заметим, что величина $(gt)^2$ является большой величиной, особенно на поздних стадиях развития. По этой причине значение выражения (27) определяется в основном слагаемым в знаменателе с множителем $(gt)^2$. В соответствии с этим замечанием положим, что в знаменателе квадратуры (27) можно пренебречь слагаемым не содержащим множителя $(gt)^2$. В результате получится:

$$\ln(r) - \frac{c_0^2}{(gt)^2} \int^{\rho(r)} \frac{(1+x) dx}{(2x+1)} - C_2 = 0.$$

Заметим, что проделанная операция лишает выражение (27) зависимости от одной из постоянных интегрирования C_1 . Полученное выражение можно проинтегрировать и выразить плотность вихревого возмущения в виде зависимости от расстояния до оси вращения:

$$\rho(r) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp \left(-D(r) + 4 \ln(r) \frac{(gt)^2}{c_0^2} + 1 - 4C_2 \frac{(gt)^2}{c_0^2} \right), \quad (28)$$

где для краткости обозначено $D(r) = W \left(\exp \left(4 \ln(r) (gt)^2 c_0^{-2} + 1 - 4C_2 (gt)^2 c_0^{-2} \right) \right)$ и введено обозначение [5] для функции Ламберта, определенной как решение уравнения $W(x) \exp(W(x)) = x$.

На рис. 3 нарисуем график выражения (28) при значениях постоянных $C_2 = 1$ и $gt = 10^3$. На оси вращения и вплоть до некоторого расстояния $r \approx r_1$, зависящего от значений величин C_2 и gt , значение выражения (28) не меняется и равняется $\rho(r < r_1) = -0.5$. На расстояниях от оси вращения $r > r_1$ плотность возрастает, на больших расстояниях от оси вращения рост замедляется и стремится к некоторой постоянной величине. Из приведенного на рис. 3 графике видно, что плотность вихревого возмущения растет до значительных величин, но рост не превышает значения $\rho(r \rightarrow \infty) \leq \rho_{\max} \approx 200$ на физически разумных больших расстояниях. Но эта величина крайне велика и такое решение с физической точки зрения сомнительно. С течением времени, с ростом величины gt , максимальные значения плотности ρ_{\max} еще более возрастают.

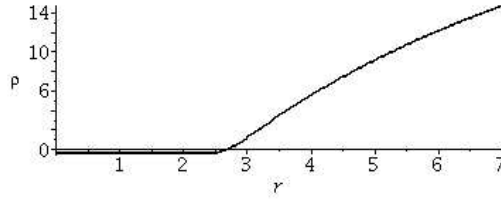


Рис. 3. Зависимость плотности от расстояния до оси вращения (28) при значениях постоянных $C_2 = 1$ и $gt = 10^3$.

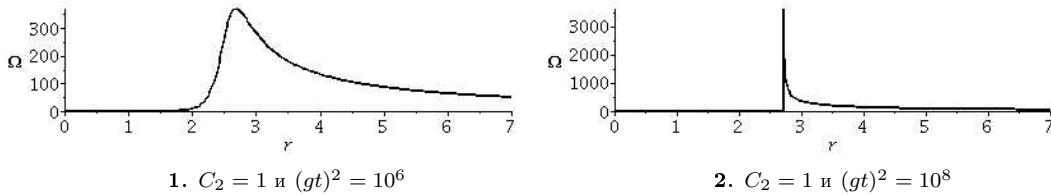
Осевая скорость, вычисленная из (19), (28) положительна при $r < r_1$ и отрицательна при $r > r_1$, не стремится к нулю на значительных расстояниях от оси вращения и значительно возрастает с течением времени. Такое поведение решения не позволяет говорить о приемлемости полученных радиальных распределений для физических приложений, но все же они отражают некоторые свойства искомых решений, что видно из анализа поведения угловой скорости.

Выражение для квадрата угловой скорости вычисленной из (12), (28) есть:

$$\Omega^2(r) = \frac{4(gt)^2 \exp(-D + 4 \ln(r)(gt)^2 c_0^{-2} + 1 - 4C_2(gt)^2 c_0^{-2})}{r^2 (1 + \exp(-D + 4 \ln(r)(gt)^2 c_0^{-2} + 1 - 4C_2(gt)^2 c_0^{-2})) (1 + D)}. \quad (29)$$

График выражения (29) представлен на рис. 4 для двух различных моментов времени.

С течением времени, с увеличением величины gt , увеличение угловой скорости происходящем на расстоянии $r \approx r_1$ становится все более быстрым, а величина, до которой растет угловая скорость — все больше. Уменьшение постоянной C_2 сдвигает точку начала роста r_1 влево, а увеличение — вправо. При уменьшении C_2 также возрастает максимальное значение, которого достигает угловая скорость. На малых временах ($gt < 100$) на оси вращения возникает бесконечное положительное значение угловой скорости. Похожие радиальные распределения возникают при втором подходе к анализу поведения квадратуры (27).



1. $C_2 = 1$ и $(gt)^2 = 10^6$

2. $C_2 = 1$ и $(gt)^2 = 10^8$

Рис. 4. Зависимость угловой скорости от расстояния до оси вращения (29) при значениях постоянных $C_2 = 1$ и $gt = 10^8$.

Вторая возможность упрощения уравнения (26) состоит в следующем. При упрощении уравнения (26) старшими производными пренебрегать нельзя, также нельзя пренебрегать градиентами искомой величины, можно пренебречь лишь некоторым изменением самой искомой величины. Согласно этому замечанию примем в левой части вместо значения плотности в квадратных скобках некоторую функцию $\tilde{\rho}(r)$ и перепишем уравнение в виде:

$$-\rho_{rr} - \frac{1}{r} \left[3 + 2 \frac{(gt)^2}{c_0^2} \frac{\tilde{\rho}}{(1 + \tilde{\rho})^2} \right] \rho_r + \frac{\rho_r^2}{1 + \rho} = 0. \quad (30)$$

В таком виде это нелинейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, аналитическое решение которого, обозначая для краткости

$\beta(r) = \tilde{\rho}(1 + \tilde{\rho})^{-2}$, записывается в виде:

$$\rho(r, t) = -1 + C_2 \exp \left(C_1 \int \exp \left(- \int \left(\frac{2(gt)^2 \beta(r)}{rc_0^2} + \frac{3}{r} \right) dr \right) dr \right). \quad (31)$$

В решение (31) упрощенного уравнения вошла функция $\beta(r)$, которая не может быть принята полностью произвольной, поскольку она связана с радиальным распределением осевой скорости. Значение $\beta(r)$ можно оценить из решения (31) в начальный момент времени $t = 0$, в результате получается выражение

$$\beta(r) = \left(\exp \left(-\frac{C_1}{2r^2} \right) C_2 - 1 \right) \left(\exp \left(-\frac{C_1}{2r^2} \right) \right)^{-2} C_2^{-2}. \quad (32)$$

После подстановки (32) в (31) запишем полученное выражение в виде:

$$\rho(r, t) = -1 + C_2 \exp \left(C_1 \int \exp \left(-\frac{(gt)^2}{c_0^2 C_2} Ei \left(1, -\frac{C_1}{2r^2} \right) + \frac{(gt)^2}{c_0^2 C_2^2} Ei \left(1, -\frac{C_1}{r^2} \right) - 3 \ln(r) \right) dr \right). \quad (33)$$

Здесь сохранены обозначения для экспоненциальных интегралов $Ei(a, z) = z^{a-1} \Gamma(1-a, z)$ из [5]. Выражение (33) имеет сложный вид, аналитически записать интеграл в правой части не удается.

Физический смысл постоянных интегрирования в (33) можно выяснить лишь в начальный момент времени, постоянные интегрирования оказываются аналогичными решению (24), а выражение (33) переходит в (24).

Из предполагаемых граничных условий понятно, что правая часть выражения (33) должна стремиться к нулю при больших расстояниях до оси вращения, что можно использовать для получения связи между постоянными интегрирования C_1, C_2 . Полученные выражения для плотности вихревого возмущения (28) и (33) показывают ее рост с увеличением расстояния до оси вращения и граничному условию на больших расстояниях до оси вращения не удовлетворяют. Интеграл в правой части (33) чувствителен к точности вычислений, само же выражение (33) не удается изобразить в виде графика при произвольных значениях C_1, C_2 на вещественной полуоси r . На рис. 5 изображен график плотности, вычисленный по (33). С физической точки зрения радиальные распределения представленные на рис. 5 и рис. 3 сомнительны, и существенно отличаются от представленных на рис. 2. Следовательно упрощение применяемое для получения (30) из (26), а также упрощение сделанное при получении (28), нуждаются в уточнении. Однако получаемые из (33), (12) угловые скорости имеют свойства, удовлетворительно описывающие имеющиеся данные наблюдений.

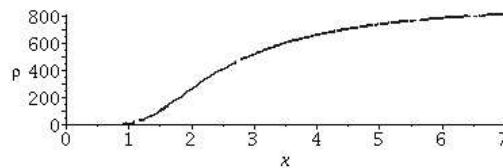


Рис. 5. Радиальная зависимость выражения (33) для значений постоянных $C_1 = 10, C_2 = 1, gt = 1$. Неопределенный интеграл в правой части (33) заменялся на определенный с пределами интегрирования $(0, x)$ и численно интегрировался.

Выражение для квадрата угловой скорости, вычисленной из (12), (33) имеет вид:

$$\Omega^2(r, t) = \frac{c_0^2 C_1}{r} \exp \left(-\frac{(gt)^2}{C_2 c_0^2} Ei \left(1, -\frac{C_1}{2r^2} \right) - \frac{(gt)^2}{C_2^2 c_0^2} Ei \left(1, -\frac{C_1}{r^2} \right) + 3 \ln(r) \right). \quad (34)$$

Из (33), (34) определить значения констант не представляется возможным. Однако их значения можно подобрать так, чтобы полученное выражение (34) соответствовало предполагаемой физике явления. Угловая скорость является экспериментально наблюдаемой величиной, и сравнение выражений (29), (34) с экспериментальными данными является единственным критерием приемлемости модели.

Вычисляя графики выражения (34) при различных значениях постоянных интегрирования можно увидеть, что C_1 и C_2 связаны друг с другом и влияют на радиальное распределение (34) изменяя максимальное значение достигаемого угловой скоростью и изменяя положение точки $r = r_1$. В выражении (28) имеется единственная постоянная C_2 , аналогичным образом влияющая на получаемое распределение.

На рис. 6 представлены графики положительного значения корня из выражения (34) при различных значениях постоянных C_1, C_2 и в различные моменты времени. При значениях $C_2 \neq 1$ появляется не равная нулю мнимая часть решения, не значительная по величине, повторяющая график угловой скорости (рис. 6).

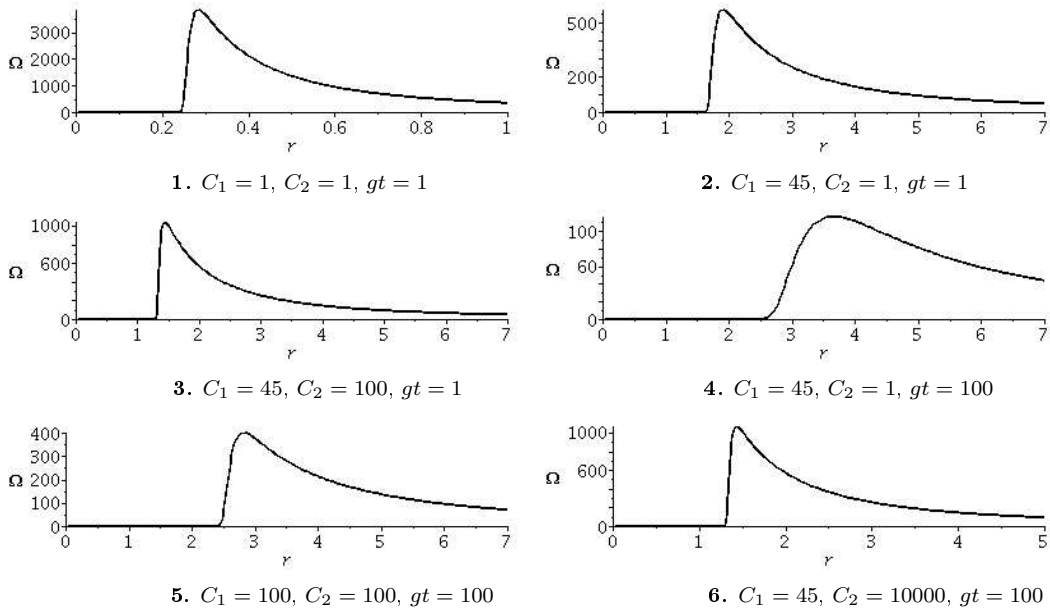


Рис. 6. Радиальное распределение угловой скорости (34) при различных значениях постоянных интегрирования и в различные моменты времени.

Форма графиков на рисунках 6 и 4 показывает, что непосредственно на оси вращения при $r = 0$ и вплоть до некоторого, зависящего от значений постоянных интегрирования, расстояния $r \approx r_1$ угловая скорость остается равной нулю. Аналогичная особенность распределения по радиусу наблюдается экспериментально для крупных вихрей в атмосфере и называется «глазом» вихря [3]. В случае вихрей достаточно малого размера такой особенности экспериментально не наблюдается в отличие от рис. 6 и рис. 4, а отмечается существование

«ядра» вихря, в котором угловая скорость вращения остается приблизительно неизменной на расстоянии от оси вращения до некоторого расстояния $r \approx r_2$ [2].

На расстояниях от оси вращения $r > r_1$, согласно рис. 6 и рис. 4 начинается практически скачкообразный рост величины угловой скорости. При меньших значениях постоянной C_1 в (34) угловая скорость достигает больших величин, а при больших значениях C_1 — меньших. Квадрат угловой скорости (34) достигает на расстоянии $r \approx r_2$ максимального значения и остается ограниченным на любом расстоянии до оси вращения при положительных значениях постоянной C_1 и $C_2 > 0.0022$. При отрицательных значениях постоянной C_1 угловая скорость неограниченно уменьшается на оси вращения, что не приемлемо с физической точки зрения и является поводом отказаться от отрицательных C_1 . Изменение знака постоянной C_2 не изменяет представленные на рис. 6 графики.

На расстояниях $r > r_2$, где r_2 — некоторая точка перегиба на графиках рис. 6, величина угловой скорости монотонно уменьшается с ростом расстояния. В начальный момент времени, согласно (25), угловая скорость обратно пропорциональна квадрату расстояния до оси вращения. В зависимости от значений постоянных интегрирования выражение (34) может довольно медленно уменьшаться с ростом расстояния от оси вращения.

С ростом C_1 (рис. 6) уменьшаются максимальные значения угловой скорости, но форма распределения меняется не существенно. При этом увеличивается расстояние от оси вращения на котором начинается значительный рост угловой скорости, т. е. величина r_1 увеличивается с ростом C_1 . Вправо сдвигается и величина r_2 с ростом C_1 .

С течением времени радиальное распределение (34) меняется, уменьшается максимальное значение и расширяется по радиусу (увеличивается r_1), пик угловой скорости сглаживается, «глаз» вихря увеличивается. В этом отличие от выражения (29), где с течением времени максимальные значения угловой скорости растут без изменения величины «глаза» вихря. Поведение (34) во времени зависит от значений постоянных интегрирования, с ростом C_2 меняется на увеличение угловой скорости во времени.

Значения тангенциальной скорости, соответствующие представленным на рис. 6 угловым скоростям при некоторых значениях постоянных интегрирования превосходят скорость звука. Сверхзвуковые скорости возникают в (34) для вихревых возмущений не большого размера, при значениях $C_1 < 45$, с ростом C_2 максимальные тангенциальные скорости вихря увеличиваются. Вероятно тангенциальная скорость вращения вихрей, характеризуемых такими размерами и значениями постоянных интегрирования, не может превысить скорость звука, поскольку формирование вихрей есть некий процесс, доступный наблюдению лишь на позднем этапе развития. Трудно представить себе процесс приводящий к возникновению вихрей, вращающихся с сверхзвуковой скоростью.

Имеется диапазон значений постоянных интегрирования, при которых тангенциальные скорости вращения вихря не превышают скорость звука и остаются довольно значительными. При значении $C_2 = 1$ тангенциальные скорости вычисленные по (34) становятся меньше скорости звука при значениях постоянной $C_1 > 45$. Такие вихри становятся достаточно большими и внутренняя стенка вихря располагается на расстоянии от оси вращения не меньше 1.8 м.

В данных наблюдений зачастую фигурируют именно такие минимальные размеры возникающих торнадо или смерчей (водяных или пылевых) [3]. При

увеличении значения постоянной C_1 увеличивается размер вихря и уменьшаются тангенциальные скорости вращения, а при увеличении значения постоянной C_2 уменьшается размер вихря и увеличиваются максимальные тангенциальные скорости, а также внутренняя стенка «глаза» вихря становится более выраженной. Подбором двух значений постоянных C_1 и C_2 в (34) можно описать различные наблюдающиеся в природе конфигурации крупных вихрей.

Изучая графики рис. 6 можно заключить, что модельное выражение (34) на качественном уровне приемлемо описывает некоторые свойства крупных вихревых возмущений, наблюдаемых в атмосфере [3]. Выражение (33) не является решением уравнения (26), поскольку получено при довольно спорном предположении, однако может быть использовано в качестве модельного, также как и выражение (28). Найденное выражение (34) или (29) можно назвать моделью полностью развитого вихря с вертикальной осью вращения, моделирующую позднюю стадию развития вихревого возмущения.

Выражения (28), (33) делают очевидной необходимость аккуратного учета осевой скорости, позволяющего избежать возникновения бесконечности на оси вращения. Вероятно на начальной стадии развития вихревого возмущения важным является учет функции $\hat{w}(r) \neq 0$, которая является начальным входным параметром модели.

Влияние вязкости на протекающие явления нуждается в изучении. Здесь можно лишь строить предположения. Возможно именно вязкое трение мешает угловой скорости достичь крайне высоких значений на оси вращения. Возможно также для вихрей небольшого размера «глаз» вихря в виде нулевых угловых скоростей вращения наблюдаться может лишь в идеальной жидкости, а в вязкой жидкости вероятнее наблюдение «ядра» вихря. Действительно, для меньших вихрей должны наблюдаться большие значения угловой скорости близко к оси вращения, градиенты тангенциальной скорости вблизи оси вращения велики и вязкие явления проявляются в том, что радиальное распределение угловой скорости выравнивается, в результате «глаза» вихря не наблюдается, а наблюдается «ядро» вихря. Для крупных вихрей влияние вязкости вероятно слабее и не приводит к преобразованию «глаза» вихря в его «ядро».

3.2. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

При выводе (28), (33) непосредственно не использовались слагаемые $\alpha\rho$ и $g\beta\rho(1+\rho)^{-1}$ уравнения (22), характеризующее взаимодействие вихря с стратификацией фонового состояния, которое является физической причиной усиления вихревого возмущения. Конечно это делает выражения (28), (33) весьма приближенными и лишь частично описывающими структуру крупного вихря и только на каком-то позднем этапе его развития. На начальных этапах единственной причиной увеличения угловых скоростей вихревого возмущения, согласно уравнению (21), является взаимодействие с фоновым течением, в результате крупные вихри могут стать наблюдаемыми в виде торнадо, смерчей или тропических циклонов. Без учета слагаемого $\alpha\rho$ уравнения (22) невозможно говорить хотя бы о качественном описании изучаемых крупных вихрей возникающих в атмосфере. В случае почти стационарного поведения изучаемого вихревого течения, согласно уравнению (22), слагаемое $\alpha\rho$ учесть не удастся.

Все же очень важно иметь хотя-бы качественное представление о влиянии слагаемого $\alpha\rho$ уравнения (21) на решение. Такое представление можно получить, если привлечь для решения уравнения (21) упрощающее предположение о малости плотности вихревого возмущения. Это предположение подразумевает рассмотрение только наиболее значимых линейных слагаемых уравнения (21). При линеаризации уравнения (21) квадраты градиентов и скоростей изменения плотности должны быть приняты равными нулю, что также приводит к исчезновению слагаемых вида $(1 + \rho)$, стоящих в знаменателе квадратичных по плотности слагаемых. Знаменатели вида $(1 + \rho)$ в квадратичных слагаемых уравнения (21) могут ограничивать значительный рост по модулю плотности вихревого возмущения на оси вращения. В результате линеаризации удастся получить решение уравнения (21) для плотности, которое имеет особенность первого рода на оси вращения, а в некоторых случаях еще и в определенной точке удаленной от оси вращения. Получаемые решения линеаризованных уравнений заведомо противоречат принимаемому при их выводе предположению о малости вихревого возмущения плотности. Все же будем надеяться, что некоторый начальный этап развития вихревого возмущения такое приближение описывает. Как было показано при выводе выражений (24), (28), (33) бесконечности на оси вращения могут исчезать при аккуратном учете осевой скорости вихревого движения. Иными словами речь идет об исследовании устойчивости во времени. По пространственной координате в некоторой совокупности точек при этом может наблюдаться бесконечность.

Линеаризуем уравнение (21). Об осевой скорости будем предполагать, что она удовлетворяет решению (12) при условии $\hat{w}(r) = 0$. При этих условиях осевой скоростью можно пренебречь. Выражение (20) является квадратичным по плотности и должно быть принято бесконечно малым, так что требование отсутствия явной зависимости плотности возмущения от времени для линеаризованного случая не реализуется. Линеаризация позволяет лишь описать устойчивость вихревого течения и начальные этапы его развития. При выводе выражения (33) показано что учет осевой компоненты скорости вихря может приводить к исчезновению особенности на оси вращения для плотности вихревого возмущения, возможно и для линейного случая уравнения (21) удастся найти форму записи осевой скорости такую, что бесконечность на оси вращения возникать не будет.

Из уравнения (21) получаем для малых возмущений плотности:

$$\rho_{tt} + (\alpha - g\beta)\rho = c_0^2\rho_{rr} + 3\frac{c_0^2}{r}\rho_r. \quad (35)$$

Уравнение (35) решается с помощью метода разделения переменных [6]. Отметим, что слагаемое $(\alpha - g\beta)\rho$ записывается в той части уравнения, которая описывает зависимость от времени [5]. Далее для краткости примем $\alpha - g\beta \approx \alpha$, поскольку $g\beta$ минимум на два порядка меньше, чем α , хоть, вероятно, в некоторых слоях стратифицированной жидкости это различие может оказаться существенным. В результате разделения переменных при помощи подстановки $\rho(r, t) = F(t)G(r)$ получится два уравнения с общим произвольным числовым параметром λ :

$$F_{tt} + \alpha F = \lambda F, \quad (36)$$

$$c_0^2 G_{rr} + 3\frac{c_0^2}{r} G_r = \lambda G. \quad (37)$$

Решение уравнения (36), описывающего зависимость от времени плотности вихревого возмущения, есть

$$F(t) = C_3 \sin(\sqrt{\alpha - c_0^2 \lambda t}) + C_4 \cos(\sqrt{\alpha - c_0^2 \lambda t}),$$

которое можно переписать в виде

$$F(t) = C_4 \cos(\sqrt{\alpha - c_0^2 \lambda t} + \phi_0), \quad (38)$$

где ϕ_0 — некоторая постоянная, имеющая смысл начальной фазы.

Очевидно, что решение (38) при отрицательных значениях α и достаточно малых λ величинах может иметь как экспоненциально растущее во времени выражение, так и экспоненциально затухающее во времени. При положительных значениях α и достаточно малых величинах λ решение (38) является гармонической функцией.

Посмотрим сначала случай решения уравнения (37) при нулевом значении λ , являющийся частным случаем. Он интересен тем, что получаемые аналитические решения имеют простой и наглядный вид. Решение уравнения (37) при $\lambda = 0$ есть [5]:

$$G(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^2}.$$

Для плотности, переопределяя постоянные интегрирования, запишем:

$$\rho(r, t) = \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) \cos(\sqrt{\alpha - c_0^2 \lambda t} + \phi_0). \quad (39)$$

Таков наиболее простой вид плотности вихревого возмущения, проанализируем его. При $r = 0$ это решение обращается в бесконечность, что является его несомненным недостатком, поскольку предположение о малости вихревого возмущения нарушается вблизи оси вращения. По этой причине понятно, что приемлемых граничных условий поставить не удастся, поэтому будем ориентироваться не на строгие граничные условия, а на качественное поведение искомого решения. Отмечаем, что для удовлетворения условий на бесконечности, где плотность возмущения должна стремиться к нулю, необходимо принять $C_1 = 0$. Выражение (39) убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до оси вращения при $C_1 = 0$. Сохраним эту постоянную, которая может иметь малое, но не нулевое значение, имея ввиду приближенность рассматриваемого выражения.

Постоянная интегрирования C_2 является по смыслу амплитудной и может иметь как отрицательные значения, так и положительные, что описывает два различных вида геофизических вихревых возмущений, характеризующихся положительной и отрицательной аномалией плотности.

Квадрат угловой скорости, вычисленный согласно (12) и (39), при $C_1 \neq 0$ есть

$$\Omega^2(r) = -\frac{2c_0^2 F(t) C_2}{(C_1 r^2 + C_2) F(t) r^2 + r^4}. \quad (40)$$

Выражение (40), как и решение (25), обратно пропорционально четвертой степени расстояния от оси вращения, но несколько сложнее в связи с возникновением зависимости от времени. График распределения (40) в зависимости от расстояния до оси вращения приведен на рис. 7 для значений констант $C_1 = 0.0$, $C_2 = \pm 1.0$, $c_0 = 340$, $F(t) = 10.0$ и для различных знаков постоянной C_2 .

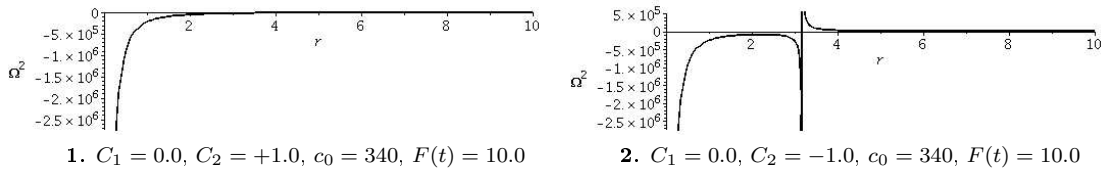


Рис. 7. Квадрат угловой скорости (40) для положительно (слева) и отрицательно (справа) возмущенных вихрей.

Если при положительных значениях постоянной C_2 график квадрата угловой скорости имеет единственную особенность при $r = 0$, то при отрицательных значениях постоянной C_2 имеется две особенности: при $r = 0$ и при значении $r = r_* = (C_1 F(t) + 1)^{-1} \sqrt{-(C_1 F(t) + 1) F(t) C_2}$, которое положительным может оказаться только при отрицательном значении константы C_2 . В этом случае при $r < r_*$ квадрат угловой скорости отрицателен, что означает мнимость самой угловой скорости, т. е. угловая скорость является не наблюдаемой при этих значениях радиуса. Вероятно, этот недостаток решения связан с тем, что в линейном приближении пренебрежено слагаемыми, которые становятся существенными при стремлении $\rho(R, t) \rightarrow -1$ сверху.

При увеличении модуля постоянной C_2 точка, в которой возникают положительные значения угловой скорости, смещается вправо, координата, в которой график пересекает ось абсцисс есть $r_* = \sqrt{-F(t) C_2 (C_1 F(t) + 1)^{-1}}$. В случае, если зависимость от времени является экспоненциально растущей функцией, точка пересечения стремится к $r_* \rightarrow \sqrt{-C_2 C_1^{-1}}$, что означает стационарность этой точки в процессе роста плотности возмущения со временем. При условии $C_1 = 0$ положение точки r_* будет зависеть от времени. Значение постоянной C_1 влияет на положение точки r_* и ее изменение во времени.

Возникновение положительных значений квадрата угловой скорости в решении (40) правее точки r_* можно интерпретировать как появление вихревого вращательного движения при $r > r_*$. Левее точки r_* вращательного движения жидкости не наблюдается и область $0 < r < r_*$ можно назвать «глазом» вихря. Эти выводы качественно соотносятся с выводами представляемыми модельным выражением (29), (34). К сожалению выражение (40) показывает особенности первого рода, что с физической точки зрения не приемлемо для малых вихревых возмущений, в то время как выражения (29), (34) остаются ограниченными с ростом расстояния от оси вращения.

При положительных значениях постоянной C_2 квадрат угловой скорости отрицателен. Это означает, что положительные возмущения плотности вихревого возмущения имеют только мнимую угловую скорость вращения, другими словами в линейном приближении такие вихревые возмущения не проявляются в виде вращающейся жидкости, либо это означает неприемлемость принимаемых упрощающих предположений (например, пренебрежение осевой скоростью) в этом случае.

Перечисленные недостатки обусловлены грубостью линейного приближения, возможно учет осевой скорости и вязких явлений может изменить эти особенности.

При $\lambda \neq 0$ общим решением уравнения (37) является выражение

$$G(r) = \frac{C_1}{r} J\left(1, \sqrt{-\lambda} R\right) + \frac{C_2}{r} Y\left(1, \sqrt{-\lambda} R\right), \quad (41)$$

где $J(1, x)$, $Y(1, x)$ — функции Бесселя первого и второго рода [5], выражение

для плотности в этом случае есть

$$\rho(r, t) = \left[\frac{C_1}{r} J(1, \sqrt{-\lambda}R) + \frac{C_2}{r} Y(1, \sqrt{-\lambda}R) \right] \cos(\sqrt{\alpha - c_0^2 \lambda} t + \phi_0). \quad (42)$$

При $C_2 \neq 0$ решение (41) достигает бесконечности на оси вращения, при $C_2 = 0$ бесконечности не наблюдается, но решение остается приблизительно постоянным с ростом расстояния от оси вращения. Нестационарное поведение решения (41) возможно при $\lambda \neq 0$, даже в отсутствии стратификации фонового состояния при $\alpha = 0$. Кроме того, очевидно, что положительные значения параметра λ не приемлемы.

Экспоненциальный рост решения во времени начинается при условии $\alpha - c_0^2 \lambda < 0$, иначе говоря при некотором значении α_0 и отрицательном λ имеется пороговое значение стратификации фонового состояния $\alpha_0 < |c_0^2 \lambda|$, при котором могут возникнуть условия для экспоненциального роста во времени плотности вихревого возмущения. Действительно, при не существенной стратификации фонового течения значительного роста вихревых возмущений не наблюдается, следовательно, реализуются в атмосфере отрицательные значения параметра λ вероятно малые по модулю и отличные от нуля. Возможно для каждого вихревого возмущения величина λ обуславливается механизмом возникновения этого возмущения и может варьироваться в каких-то пределах.

Квадрат угловой скорости, вычисленный из (12) и (42), имеет не сложный, но громоздкий вид, и здесь не приводится. Вид радиальной распределения для него имеет зависимость от постоянных интегрирования аналогичную выражению (40) с изменением знака постоянной C_2 на противоположный, и приобретает некоторую зависимость от параметра λ , сохраняя зависимость от постоянной C_1 . Чем больше модуль отрицательного значения параметра λ , тем ближе к оси вращения располагается точка r_* , значение которой можно получить численно, задаваясь числовыми значениями параметров. С ростом временной части решения точка r_* в графике угловой скорости сдвигается в сторону больших радиусов. Пример графика квадрата угловой скорости качественно аналогичен представленному на рис. 7, несколько отличаются лишь значения постоянных.

Бесконечные значения решения (42) на оси вращения не позволяют поставить приемлемые граничные условия, возможно лишь подобрать числовые значения параметров решения, интересуясь диапазонами числовых значений для них, сопоставив полученное решение с экспериментальными данными. Качественное поведение решения (42) не отличается от такового для решения (39).

Можно заключить, что качественное поведение линеаризованного решения (39) или (42) отслеживает некоторые особенности модельного решения (28), (33). Для отрицательно возмущенного вихревого возмущения имеется «глаз» вихря, достигающий в точке r_* бесконечного значения. Бесконечные значения (40) при $r = 0$ и $r = r_*$ являются недостатком решения, вытекающим из линеаризации уравнения (21) и пренебрежения осевой скоростью.

Вместе с тем, в решениях (42), (39) прослеживается влияние слагаемого αr уравнения (21). При отрицательных α плотность вихревого возмущения может расти экспоненциально во времени. И, вероятно, может достигнуть весьма внушительных величин. В этой динамике должно проявляться отличие между вихревыми возмущениями с положительной и отрицательной аномалиями плотности. Положительно возмущенным вихрям ничего не мешает увеличивать значение своей плотности во времени в соответствующем слое атмосферы.

А для отрицательно возмущенных вихрей рост вниз ограничен плотностью фонового состояния, ведь сумма плотностей возмущения и фонового состояния не может быть меньше нуля.

Рост во времени для обоих типов вихрей дополнительно ограничивается неучтенными квадратичным по скорости роста плотности вихревого возмущения слагаемым уравнения (21). В результате этого ограничения бесконечных значений плотность вихря вероятно не достигнет при экспоненциальном росте во времени. На поздних этапах этого роста можно ожидать нарушение соотношения (13) или изменение уравнения состояния, кроме этого, возможно нарушение условий адиабатичности вихревого возмущения, поскольку увеличение плотности во времени может выражаться в соответствующем увеличении температуры возмущения.

При положительных α плотность вихревого возмущения является ограниченной и знакопеременной во времени величиной. В слоях атмосферы, где выполняется это условие возможны колебательные изменения плотности во времени. При этом квадрат угловой скорости, согласно (40), также может оказаться знакопеременной величиной, что может приводить к исчезновению вихря при отрицательном квадрате угловой скорости, и с течением времени к его внезапному появлению при положительном значении квадрата угловой скорости. Вихрь в таком слое будет возникать, усиливаться, затем ослабевать и исчезать на некоторое время, по прошествии которого вновь возникнет. Впрочем это так на основе линейного анализа, который может оказаться весьма не точным.

На усиление вихревого возмущения во времени определяющее влияние имеет величина $(\alpha - g\beta)$, описывающая стратификацию фонового состояния. Развитие крупного вихревого возмущения, поздние стадии которой представлены выражениями (29), (34), определяет в основном вторая производная температуры фонового состояния, приводя к усилению вихря до значительных величин. В инверсионных слоях атмосферы должны наблюдаться как отрицательные значения величины α , так и ее положительные значения, причем одновременно, но на разной высоте. Например в верхней части грозового облака, в инверсионном слое, наблюдаются оба знака величины α . Такие условия возможны и вблизи поверхности.

Представленные размышления можно использовать для объяснения механизма образования торнадо-подобных крупных вихрей в атмосфере.

Каждый из огромного числа разнообразных вихрей всегда имеющих место в турбулентной атмосфере, характеризуется пусть даже незначительным возмущением плотности, в неоднородно стратифицированном атмосферном слое подчиняется уравнению (21). Это означает что плотность этих вихревых возмущений в тех слоях, где наблюдаются значительные отрицательные α , за конечное время, пропорциональное $\sqrt{-\alpha}$, достигнет заметных значений. Такой вывод можно сделать из анализа линеаризованного уравнения (35). На поздних стадиях этого процесса либо влияние вязкости, либо изменение уравнения состояния остановят процесс роста плотности. Торнадо (водяными или пыльными смерчами) становятся только достаточно крупные вихри, имевшие первоначально отрицательное возмущение плотности. Единственная причина их усиления до значительных величин состоит в стратификации слоя атмосферы, в котором они формируются.

Свойства крупных вихрей, известные из наблюдений и лабораторных экспериментов [3], как, например, зависимость характера внутренней стенки тор-

надо-подобного вихря от размера, которая всегда более резкая, чем внешняя, причем для меньшего размера вихря это различие усиливается, качественно совпадает с представленными модельными результатами (29), (34), (40).

В данных наблюдений отмечается очень низкое давление в центре торнадо, в области «глаза» вихря. Это наблюдение согласуется с радиальным распределением плотности крупного вихря (24) или (28) в начальный момент времени, представленного на рис. 2, 3.

Условия наблюдения крупных вихревых структур в атмосфере позволяют предполагать наличие неоднородной стратификации ($\alpha \neq 0$) фонового состояния атмосферы. Распределение температуры по вертикали в грозовых облаках предполагают выполнения условие $\alpha \neq 0$ в вертикальных слоях внутри облака. Именно там отмечается возникновение воронки вихря, которая далее может усиливаясь опускаться к поверхности. Такие условия возможны и вблизи поверхности поскольку там значительны изменения температуры (особенно во время грозы), тогда воронка вихря может расти от поверхности. Не редко наблюдается, что растущий сверху и снизу торнадо объединяется в один вихрь, в этом случае вероятно один и тот же вихрь усиливается на разных высотах не равномерно, а пропорционально величине α . Аналогичные, значительно менее масштабные вихревые структуры наблюдаются и вблизи поверхности водоемов, вполне вероятно возникновение таких условий ($\alpha \neq 0$) и над заснеженной поверхностью [3]. При возникновении торнадо вблизи извергающегося вулкана также можно предполагать значительные и неоднородные перепады температур около поднимающегося столба вулканических выбросов. Во всех случаях можно утверждать, что выполняется условие $\alpha \neq 0$.

Также модельное выражение (34) можно использовать и для описания крупномасштабных явлений в атмосфере таких, как тропические циклоны и тайфуны. Однако ввиду значительных вертикальных масштабов здесь необходимо учитывать влияние водяного пара и тепла выделяемого при его конденсации. Поскольку в основном тропические циклоны формируются над прогретыми водами мирового океана и при значительных возмущениях температуры в верхней части тропосферы можно предположить, что параметр α также играет важную роль и в формировании тропических циклонов и тайфунов.

4. Выводы

В работе выводятся уравнения (21), (22), описывающие вихревое возмущение сжимаемой бароклинной жидкости, находящееся в стратифицированном фоновом течении.

Стационарное решение уравнения (22) без учета осевой скорости является известным решением (24), называемым «потенциальным» вихрем. Учет осевой скорости для поздних этапов развития вихря приводит к квадратуре (27), которая в неявном виде описывает распределение плотности в вихре. Представлены две попытки упрощения решения (27), которые приводят к модельным выражениям (28) и (34). Решение (24) и выражение (28) имеют отрицательное значение на оси вращения вплоть до некоторого расстояния, правее которого начинается рост плотности.

Модельная угловая скорость (29) и (34), соответствующая распределениям плотности (28) и (34), имеет нулевое значение на оси вращения, на расстояниях

превышающих некоторое $r \approx r_1$ скачкообразно возрастает, и далее после точки перегиба $r = r_2$ монотонно стремится к нулю, приблизительно обратно пропорционально квадрату расстояния до оси вращения (рис. 6). Такое радиальное распределение угловой скорости можно интерпретировать как возникновение «глаза» вихря. Зависимость (29), (34) от постоянного интегрирования позволяет описать различные конфигурации вихрей, при этом зависимость от времени может приводить как к уменьшению, так и к возрастанию угловой скорости во времени, при не существенно меняющемся радиальном распределении.

Качественно похожее поведение также демонстрирует и решения линеаризованного уравнения (35). Без учета осевой скорости в решении (39), (42) на оси вращения возникают бесконечные значения плотности. При условии $\alpha < 0$ возможен экспоненциальный рост плотности вихревого возмущения во времени, при $\alpha \geq 0$ возможны колебания плотности вихревого возмущения во времени. Для первоначально отрицательно возмущенных вихрей радиальное распределение угловой скорости (40) в нестационарных режимах показывает возникновение «глаза» вихря, в линейном случае это область мнимых значений вблизи оси вращения. В точке $r = r_*$ возникновения положительных значений квадрата угловой скорости также возникают бесконечные значения угловой скорости. Для первоначально положительно возмущенных вихрей радиальное распределение квадрата угловой скорости (40) является отрицательным.

Влияние вязкости на представленные решения не исследовалось. Возможно именно вязкое трение мешает угловой скорости достичь бесконечных значений на оси вращения или в некоторой точке $r = r_*$. Возможно также для вихрей небольшого размера «глаз» вихря наблюдаться может лишь в идеальной жидкости, а в вязкой жидкости вероятнее наблюдение «ядра» вихря.

Влияние еще одной действующей силы — силы Кориолиса — не изучалось, но по физическому смыслу этой силы она не может приводить к усилению вихревого возмущения, влияние на форму вихря и направление вращения остается возможным.

5. ГИПОТЕЗЫ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Далее будет обсуждаться предположение о связи решения (42), (34) и процессов ионизации, в частности начальной стадии образования молниевых лидеров, возникающих в природных условиях в атмосфере вблизи грозовой ячейки. Процессы приводящие к возникновению нисходящего лидера [8] вблизи нижнего края грозового облака, ступенчатого или непрерывного, кажутся не достаточно объясненными. Продвижение же лидера к поверхности Земли или к отдаленной области грозового облака, а также главная стадия молниевых разряда, описаны достаточно подробно.

Если действительно в стратифицированных слоях при $\alpha < 0$ наблюдается усиление вертикальных вихревых возмущений, то эти возмущения малого радиуса с вертикально ориентированной осью вращения могут вырасти до весьма внушительных величин. Линейное решение (42) подсказывает, что экспоненциальное усиление во времени плотности вихревого возмущения возможно и при вращении вокруг оси произвольно ориентированной в пространстве.

Вихри, в начальный момент времени характеризующиеся положительным возмущением плотности, имеющие ядро малого радиуса в неоднородных стра-

тифицированных слоях с $\alpha < 0$ (например, во время грозы) за конечное время пропорциональное величине α могут достигнуть состояния с значительными величинами плотности вихревого возмущения. Значительные плотности, согласно уравнению состояния идеального газа для адиабатических процессов, эквивалентны значительным температурам вблизи оси вращения: $\rho_1^{\gamma-1} T_1^{-1} \rho^{\gamma-1} = T$, где величины с индексом «1» отмечают некоторое начальное состояние вихревого возмущения. Согласно решению (42) температура со временем меняется как $T \sim \rho_1^{\gamma-1} T_1^{-1} \rho_n^{\gamma-1} \exp((\gamma-1)\sqrt{\alpha}t)$, где ρ_n — положительное начальное возмущение плотности в вихре. Время требуемое вихревому возмущению для достижения температуры в 5000 К (приблизительно такие температуры фиксируются при возникновении дугового разряда [8]) можно оценить приняв $\rho_1 \approx 1$, $T_1 \approx 280$, $\rho_n \approx 0.1$, при $\alpha \approx \pm 10$ необходимое время достижения таких температур порядка первых десятков секунд (19 сек для принятых значений, $\ln(TT_1\rho_n^{-\gamma+1})((\gamma-1)\sqrt{\alpha})^{-1} \approx t$), учитывая неопределенность связанную с неизвестностью начальной амплитуды вихревого возмущения.

Еще один механизм нагрева связан с тем, что вихревым возмущениям меньшего радиуса соответствуют большие угловые скорости вращения, согласно (34), в случае когда вихрь имеет начальное отрицательное возмущение плотности. Значительные скорости вращения могут посредством вязкого трения приводить к повышению температуры, локализованном вблизи ядра вихревого возмущения. В результате некоторая область вблизи оси вращения вихревого возмущения нагревается. В силу приближенности решения (34) трудно уверенно утверждать, что в этой области достигается состояние близкое к ионизации воздуха, но о некотором нагреве речь идти может.

Одной из возможностей для ограничения процесса роста плотности вихревого возмущения в слое с $\alpha < 0$ является возникновение ситуации когда нарушается уравнение состояния жидкости. В случае атмосферы воздух может существенно изменить свои свойства вблизи ядра вихревого возмущения. Вероятно, вблизи оси вращения может возникнуть ионизированная область.

Возникновение ионизированной разогретой области вблизи ядра вихревого возмущения образует канал вдоль оси вихря, в котором возникает или продвигается лидер молнии. Ступенчатость продвижения большинства лидеров наблюдаемых молний и сложность траектории распространения лидера между грозовым облаком и землей могут свидетельствовать о существовании множества таких каналов на пути распространения лидера молнии. Продвижение лидера последовательно по нескольким таким каналам вероятно регистрируется как его ступенчатость.

Такой механизм возникновения молний объясняет ряд их свойств не понятных в рамках других механизмов возникновения молниевых лидеров. Молния довольно редко наблюдается в отсутствие облачного покрова при безоблачном небе [11]. Иногда наблюдается разряд молнии не вниз к земле, а вверх от облака. Разряды между облаком и поверхностью земли не являются наиболее распространенными, более частыми разряды молний наблюдаются между двумя разными грозовыми облаками, а наибольшее количество молниевых разрядов фиксируется внутри одного грозового облака. Если полагать условие $\alpha \neq 0$ условием значительного усиления плотности вихревых возмущений вплоть до значений температур ионизированного газа и, следовательно, условием возникновения молниевых разрядов, то такие закономерности возникновения молний представляются вполне естественными. Разумеется для формирования основ-

ного разряда молнии остается необходимой разность зарядов областей, которые соединяет траектория лидера.

Отметим также наблюдающееся увеличение содержания озона в атмосфере при прохождении грозových облаков. Имеются данные измерений [7], что в верхней части различных (не только грозových) облаков в непосредственной близости инверсионного слоя, отмечается повышенное содержание озона. Это означает, что в этих областях протекают процессы ионизации атмосферного воздуха.

Вероятно множество мелких вихревых возмущений с произвольно ориентированной осью вращения в том слое грозového облака, где выполняется условие $\alpha < 0$, достигая состояния ионизированного газа, могут обеспечить наблюдаемое повышенное содержание озона. Этот механизм может приводить к ионизации облака и являться поставщиком ионов для последующего пространственного разделения зарядов.

В вполне аналогичной ситуации оказываются вихревые возмущения в той части стратосферы, где выполняется условие $\alpha < 0$. Таковым может оказаться слой в несколько километров вблизи тропопаузы, с широтной зависимостью последней, возможно аналогичное условие выполнится также вблизи стратосферного максимума температуры. Именно на этих высотах, по данным наблюдений [10], отмечается значительный рост содержания озона. Нет оснований считать, что вихревой механизм ионизации атмосферного воздуха на этих высотах является единственным, поскольку там значительно коротковолновое солнечное излучение. Возможно лишь, что влияние названного механизма ионизации не является пренебрежимо малым.

Конечно указанные совпадения увеличенных значений содержания озона и условия $\alpha < 0$ в некоторых слоях атмосферы является лишь косвенным аргументом в пользу развиваемых предположений качественного характера. Нужны прямые и непосредственные измерения. Приведенные гипотетические рассуждения указывают на необходимость дальнейших исследований в этой области и возможное направление этих исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе нелинейных уравнений механики сжимаемой жидкости рассмотрена динамика вихревых возмущений. Показано влияние стратификации фонового состояния атмосферы на динамику крупных вихрей в ней.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учебное пособие. Т. VI. Гидродинамика.—М.: Наука, 1988.—736 с.
2. Алексеенко С. В., Куйбин П. А., Окулов В. Л. Введение в теорию концентрированных вихрей.—Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.—504 с.
3. Вараксин А. Ю., Ромаш М. Э., Копейцев В. Н. Торнадо.—М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.—344 с.
4. Госсард Э. Э., Хук У. Х. Волны в атмосфере. Инфразвук и гравитационные волны в атмосфере — их возникновение и распространение.—М.: Изд-во «Мир», 1978.—532 с.
5. <http://www.maplesoft.com/contact>.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1966.—724 с.

7. *Матвеев Л. Т.* Динамика облаков.—Л.: Гидрометеиздат, 1981.—311 с.
8. *Базелян Э. М., Райзер Ю. П.* Физика молнии и молниезащиты.—М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.—320 с.
9. *Френкель Я. И.* Теория явлений атмосферного электричества. Изд. 2-е, испр.—М.: КомКнига, 2007.—160 с.
10. *Моханкумар К.* Взаимодействие стратосферы и тропосферы.—М.: Физматлит, 2011.—452 с.
11. *Юман М. А.* Молния.—М.: Мир, 1972.—327 с.

Радионов Анатолий Анатольевич
Южный математический институт ВЦ РАН
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: aaR200772@mail.ru

Радионов Анатолий Анатольевич

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
КРУПНЫХ ВИХРЕВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ СЛОЕ
СЖИМАЕМОЙ БАРОКЛИННОЙ ЖИДКОСТИ**

Ответственный за выпуск
Биченова М. С.

Подписано в печать 07.08.2015.
Формат $60 \times 84 \frac{1}{8}$. Усл. п. л. 3,37. Тираж 75 экз.