

Дата поступления 15 мая 2015 г.

Радионон А. А. О механизме возникновения ночных низкоуровневых струйных течений.— Владикавказ, 2015.—17 с.—(Препринт / ЮМИ ВЦ РАН; № 2).

Рассматриваются нелинейные математические уравнения, которым подчиняются плоские возмущения сжимаемой стратифицированной жидкости не малые по своей амплитуде. Найдено и проанализировано приближенное аналитическое решение для пространственно однородных возмущений. Решения рассмотренных уравнений применяются к изучению ночных низкоуровневых струйных течений (НСТ). Показано, что НСТ могут быть обусловлены ростом амплитуды плоских возмущений в инверсионных слоях, в которых наблюдаются отрицательные значения второй производной потенциальной температуры во высоте.

Ключевые слова: динамика сжимаемой жидкости, низкоуровневые струйные течения, ночные инверсии в атмосфере.

Библиогр. 10.

Received May 15, 2015

Radionoff A. A. About the origin of the nocturnal low-level jet.—Vladikavkaz, 2015.—17 p.—(Preprint / SMI VSC RAS; № 2).

Nonlinear mathematical equations that govern the plane disturbance of compressible stratified fluid are considered. Approximate analytical solution for spatially homogeneous disturbances was found and analyzed. The solution of the equations is applied to the study of nocturnal low-level jet (LLJ). It is shown that LLJ may produced due to increase in the amplitude of plane disturbances in the inversion layers if there are negative values of the second derivative of potential temperature.

Keywords: compressible fluids dynamics, low-level jets, nocturnal inversion in the atmosphere.

Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН
РСО-Алания, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

© Южный математический институт
ВЦ РАН, 2015
© А. А. Радионон, 2015

О МЕХАНИЗМЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ НОЧНЫХ НИЗКОУРОВНЕВЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

А. А. РАДИОНОВ

1. Введение	3
2. Математическая модель	4
3. Заключение	16
Литература	17

1. ВВЕДЕНИЕ

При ночном радиационном выхолаживании земной поверхности над равнинной территорией появляется горизонтально направленный поток воздуха без возникновения заметных вертикальных движений. Этот поток воздуха имеет максимум горизонтальной скорости ветра приблизительно на той высоте, где расположена возникающая ночью инверсия температуры и, вероятно, не появляется в отсутствие инверсии температуры. Такой поток называется ночным *низкоуровневым струйным течением* (НСТ) [1, 2]. Экспериментальным исследованиям этого явления посвящено множество работ [2–6] теоретические представления развиваются в работе [1].

Направление ветра в струе воздуха НСТ поворачивается в горизонтальной плоскости по часовой стрелке в северном полушарии, наибольшее изменение направления наблюдается для максимальной скорости ветра на высоте порядка 150–300 м над поверхностью. Высота, на которой расположен максимум скорости ветра, и величина этого максимума зависят от подстилающей поверхности и величины инверсии температуры [2].

Предложенное объяснение физических явлений [1], приводящих к появлению НСТ, заключается в том, что ночной профиль скорости ветра, формирующийся при малом турбулентном трении, не соответствует дневному профилю, сформированному в условиях значительного трения. При ночном уменьшении трения разница между дневным и ночным профилями является возмущением скорости ветра. Это возмущение с течением времени вращается под действием силы Кориолиса и по прохождении инерционного периода времени приводит к увеличению скорости ветра на той высоте, где трение минимально, т. е. на высоте инверсии. При действии такого механизма возникновения НСТ достаточно учитывать только силу Кориолиса, барический градиент и суточные изменения турбулентного трения. В такой постановке задачи для описания этого явления достаточно одномерного подхода с зависимостью от единственной вертикальной пространственной переменной и времени. Такое объяснение кажется удовлетворительным.

В [4] представлены специально и тщательно проведенные измерения этого явления, подробно описаны вычислительные процедуры, позволяющие с помощью моделей турбулентности различной сложности численно описать возникновение НСТ с верификацией с помощью экспериментальных данных. Следует отметить удовлетворительное совпадение расчетных и наблюдательных данных, даже в случаях простых моделей турбулентности.

В работах [2, 3] показаны некоторые дополнительные явления, протекающие при образовании НСТ. Удивляет здесь то, что в струе НСТ наблюдается практически любое направление ветра. А ведь развиваясь из возмущения, связанного с дневным профилем ветра, ночное направление скорости ветра в струе не может быть полностью произвольным. Тем более, что при обработке экспериментальных данных используется осреднение за довольно большой интервал времени (не менее 15 мин).

Некоторые данные наблюдений показывают, что поворот ветра НСТ в горизонтальной плоскости может происходить на разных этапах развития струи

довольно произвольно, только в общем подчиняясь действию силы Кориолиса [7]. Более того, в некоторых случаях на начальном этапе возникновения НСТ наблюдается вращение в противоположную сторону.

В работе [3] показано, что явление НСТ наблюдается также и в зимних условиях, когда в течение длительного промежутка времени наблюдается инверсия температуры. Зимой наблюдаются НСТ, существующие длительный промежуток времени, часто несколько суток, в которых не отмечается вращения с инерциальной частотой. Не очень понятно, как возникают возмущения профиля скорости ветра, необходимые для объяснения явления НСТ согласно [1]. Эти данные наблюдений увеличивают сомнения в том, что причиной возникновения НСТ является возмущение скорости ветра, связанные с суточным изменением профиля скорости ветра под действием на него силы Кориолиса.

Описанные факты подсказывают, что увеличение скорости ветра вблизи высоты температурной инверсии может быть связано не только с действием силы Кориолиса, но и, возможно, с действием какой-то другой силы. И силу эту следует искать в зависимости НСТ от инверсии температуры, о чем имеются предположения в литературе [3], как о причине НСТ. Далее в работе это предположение подробно рассматривается.

Продолжая развитие математических моделей, положенных в основу предыдущих работ [1, 4], причину существования предполагаемой силы будем искать в сжимаемости атмосферного воздуха. Будем предполагать зависимость плотности воздуха в основном от температуры, согласно уравнению состояния для идеального газа.

Безусловно, в наблюдаемых фактах отражаются сложнейшие процессы, возникающие при различных синоптических ситуациях, в которых возникают НСТ, в том числе связанные с влиянием орографических особенностей, мезомасштабных распределений давления и множества других факторов. Не претендуя на описание всего богатства явлений, возникающих в пограничном слое атмосферы в ночное время в разных точках планеты и в разных синоптических ситуациях, далее будем рассматривать ровную плоскую поверхность, над которой дует неизменный в течение нескольких суток ветер с неизменным барическим градиентом.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Любое возмущение плотности жидкости можно рассматривать на фоне некоторого основного течения [8]. Возмущения плотности в атмосфере многочисленны и возникают в результате действия различных причин. Например, ночное увеличение скорости ветра в низкоуровневых ночных струйных течениях (НСТ) связывают [1, 2] с тем фактом, что дневной профиль скорости ветра является возмущением для ночного, впрочем как и наоборот. В этом случае возмущение плотности обусловлено перепадом температур при ночном выхолаживании равнинных участков поверхности Земли в горизонтальной плоскости очень большим, настолько, что размер соответствующего возмущения можно не учитывать и считать такие возмущения бесконечно большими в горизонтальных направлениях. Подобного рода возмущения плотности будут далее рассмотрены в настоящей работе.

Разделим рассматриваемое течение на некоторое основное течение и возмущение. *Основным* назовем течение, определяемое мезомасштабными движениями воздушных масс. Отклонение от него будем называть *возмущением*, не предполагая его малости. Основное состояние атмосферы будем считать известным и меняющимся значительно более медленно, чем развивается динамика возмущений. Конечно, в атмосферных задачах нельзя предполагать, что такое разделение может быть справедливо на сколько-нибудь значительных по высоте слоях воздуха. Например, НСТ рассматривается только в рамках пограничного слоя атмосферы [1]. Разделение течения на основное и на возмущенное уже предполагает фактически рассмотрение некоторого слоя. В случае НСТ наиболее интересен приземный слой атмосферы, в котором реализуется инверсия температуры.

Характеристики возмущения будем обозначать малыми символами, характеристики основного течения теми же символами с индексом 0. Введем неподвижную декартову прямоугольную систему координат (x, y, z) , начало оси Oz совместим с поверхностью земли и направим вверх, горизонтальную ось Ox направим на восток, Oy — на север. Время обозначим через t . Введем следующие обозначения: нижними индексами x, y, z, t будем обозначать частное дифференцирование по соответствующей координате и времени, (u, v, w) — компоненты вектора скорости возмущения, (u_0, v_0, w_0) — компоненты вектора скорости основного течения, $p = p(x, y, z, t)$, $\rho = \rho(x, y, z, t)$, $T = T(x, y, z, t)$ — давление, плотность и температура возмущения соответственно, p_0, ρ_0, T_0 — давление, плотность и температура основного течения соответственно, дивергенцию скорости возмущения обозначим через $d = d(x, y, z, t) = u_x + v_y + w_z$, вертикальную компоненту завихренности возмущения — через $\xi = u_y - v_x$, f — параметр Кориолиса, под вектором с горизонтальными компонентами (u_g, v_g) будем понимать геострофический перепад давления, μ_1, μ_2 — динамическая вязкость воздуха и вторая вязкость воздуха соответственно.

Пренебрежение вязкостью воздуха вполне оправдано для слоев вертикальной протяженностью не больше нескольких километров и не слишком больших сдвигов скоростей ветра. Для задачи описания НСТ вертикальной протяженностью в несколько сотен метров и скоростями движения порядка десяти метров в секунду пренебрежение вязкостью оправдано в полной мере. Пренебрежем также дополнительным трением, возникающим вследствие турбулентного перемешивания, которое значительно, особенно в часы дневного нагрева, но к причинам возникновения НСТ отношения не имеет, что будет показано далее. Кроме того, учет турбулентного перемешивания значительно осложняет аналитическое рассмотрение НСТ.

Уравнения, которым подчиняется динамика рассматриваемого слоя жидкости есть уравнения Навье — Стокса [9]. Этим уравнениям подчиняется как основное состояние само по себе, так и в сумме с возмущением. Указанные уравнения общеизвестны, поэтому для краткости выписывать их не будем. Вычитая уравнения, описывающие основное состояние, из уравнений для суммы основного состояния и возмущения, получим уравнения Навье — Стокса для возмущений. Это действие вполне аналогично применяемому в [8] при выводе уравнений для волновых движений в атмосфере, правда без предположений о бесконечной малости величины возмущений. Для скорости, дивергенции скорости, плотности и завихренности возмущения в результате получается следующая система уравнений, которым подчиняется динамика возмущения в

декартовых координатах без учета вязкого и турбулентного трения:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + wu_z + u_0u_x + v_0u_y + w_0u_z + uu_{0x} \\ + vv_{0y} + ww_{0z} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho}p_x + \frac{\rho}{\rho_0(\rho_0 + \rho)}p_{0x} + fv; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} v_t + uv_x + vv_y + wv_z + u_0v_x + v_0v_y + w_0v_z + uv_{0x} \\ + vv_{0y} + wv_{0z} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho}p_y + \frac{\rho}{\rho_0(\rho_0 + \rho)}p_{0y} - fu; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} w_t + uw_x + vw_y + ww_z + u_0w_x + v_0w_y + w_0w_z + uw_{0x} \\ + vw_{0y} + ww_{0z} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho}p_z + \frac{\rho}{\rho_0(\rho_0 + \rho)}p_{0z}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} d_t + ud_x + vd_y + wd_z + d^2 - 2\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} - 2\frac{\partial(u, w)}{\partial(x, z)} - 2\frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} \\ + u_0\nabla(\vec{v}_x) + v_0\nabla(\vec{v}_y) + w_0\nabla(\vec{v}_z) + 2\nabla u_0 \cdot \nabla\vec{v} + 2\nabla v_0 \cdot \nabla\vec{v} \\ + 2\nabla w_0 \cdot \nabla\vec{v} + \nabla(u_{0x}) \cdot \vec{v} + \nabla(v_{0y}) \cdot \vec{v} + \nabla(w_{0z}) \cdot \vec{v} = \\ + \frac{\nabla\rho \cdot \nabla p}{(\rho_0 + \rho)^2} + \frac{\rho_{0z}p_z}{(\rho_0 + \rho)^2} - \frac{\nabla^2 p}{(\rho_0 + \rho)} + \frac{\nabla\rho \cdot \nabla p_0}{\rho_0(\rho_0 + \rho)} - \rho \frac{\nabla\rho \cdot \nabla p_0}{\rho_0(\rho_0 + \rho)^2} \\ - \rho \frac{\rho_{0z}p_{0z}}{\rho_0^2(\rho_0 + \rho)} - \rho \frac{\rho_z p_{0z}}{\rho_0(\rho_0 + \rho)^2} + \frac{\rho\nabla^2 p_0}{\rho_0(\rho_0 + \rho)} + f(v_x - u_y) + f_x v - f_y u; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\rho_t = -(\rho_0 + \rho)d - u\rho_x - v\rho_y - w\rho_z; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \xi_t + u\xi_x + v\xi_y + w\xi_z + (\xi - f)(u_x + v_y) + w_y u_z - w_x v_z \\ = +\rho_0 f \frac{\rho_y v_g + \rho_x u_g}{(\rho_0 + \rho)^2} + f_x u + f_y v. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x$, $\frac{\partial(u, w)}{\partial(x, z)} = u_x w_z - u_z w_x$, $\frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} = v_y w_z - v_z w_y$ — якобианы скоростей возмущения, называемые векторной нелинейностью. Дифференцирование параметра Кориолиса осуществляется в приближении β -плоскости. Конечно, в случае НСТ не имеет смысла рассматривать такие пространственные площади, на которых существенно изменение параметра Кориолиса с изменением широты, однако пока сохраним слагаемые, содержащие пространственные производные параметра Кориолиса, поскольку они связаны с выделением в уравнениях «силы Россби», под действием которой предположительно формируются волны, в ложбинах которых развиваются циклоны, а на гребнях — антициклоны [8].

Записанные уравнения не учитывают суточное изменения турбулентной вязкости в пограничном слое, что, конечно, является их недостатком. Учет вязких слагаемых этих уравнений выполняется численно и широко представлен в литературе [4], где успешно описываются явления НСТ. Однако, суточные изменения турбулентной вязкости не являются необходимым условием возникновения НСТ, что будет показано в ходе дальнейшего изложения.

Аналитически решить систему уравнений (1)–(6) не удастся. Однако, если ограничить дальнейшее рассмотрение некоторыми упрощающими предположениями так, чтобы оно включало в себя только важнейшие слагаемые и при этом

не были потеряны основные физические механизмы рассматриваемых процессов, то можно записать частные аналитические решения. Для этого ограничимся далее рассмотрением только задачи о возникновении НСТ.

Это позволяет предположить независимость возмущений от горизонтальных пространственных координат в пределах некоторого вертикального слоя небольшой протяженности. Рассмотрим возмущения, не ограниченные в горизонтальных направлениях. В этом случае горизонтальные компоненты скорости возмущения могут быть приняты отличными от нуля, но их производные по горизонтальным координатам равняются нулю. Величину вертикальной компоненты скорости возмущения примем равной нулю, в таком случае дивергенция возмущения определяется только величиной $w_z = d$. Вертикальная компонента скорости возмущения считается не влияющей на изучаемое явление и в данном случае принимается равной нулю. Иными словами, отличие вертикальных скоростей возмущения от нуля не определяет важнейшие характеристики рассматриваемых явлений.

При таких упрощающих предположениях якобианы скоростей возмущений равняются нулю. Уравнение неразрывности упрощается и имеет следующий вид:

$$\rho_t = -(\rho_0 + \rho)d.$$

Скорость ветра основного состояния примем горизонтальной и представляющей собой геострофический ветер: ($u_g = (f\rho_0)^{-1}p_{0y}$, $v_g = -(f\rho_0)^{-1}p_{0x}$). Основное состояние можно принять адиабатическим. При его рассмотрении будем считать, что установление ночной инверсии температуры не приводит к появлению сколько-нибудь заметных вертикальных потоков.

Также предполагаем, что температура и давление основного состояния зависят только от вертикальной координаты. В пределах рассматриваемых слоев, а это несколько сотен метров над поверхностью, с достаточной точностью справедливо уравнение гидростатики, давление зависит от высоты согласно $p_{0z} = -\rho_0 g$. Аналогичные предположения о свойствах основного состояния используются при выводе уравнений для возмущений в [8]. В пределах рассматриваемого слоя возмущенной жидкости вместо оператора Гамильтона можно пользоваться частной производной по высоте.

С учетом принятых предположений перепишем (4), (5) в виде

$$\begin{aligned} -\rho_{tt} + \frac{2\rho_t^2}{\rho_0 + \rho} = -p_{zz} + \frac{\rho_z p_z}{\rho_0 + \rho} + \frac{\rho_{0z} p_z}{\rho_0 + \rho} - \frac{2\rho\rho_z p_{0z}}{\rho_0(\rho_0 + \rho)} + \frac{\rho_z p_{0z}}{\rho_0} \\ - \frac{\rho\rho_{0z} p_{0z}}{\rho_0^2} + \frac{\rho p_{0zz}}{\rho_0} + (\rho_0 + \rho)f(v_x - u_y) + (\rho_0 + \rho)(f_x v - f_y u). \end{aligned} \quad (7)$$

В правой части этого уравнения имеются слагаемые, пропорциональные плотности возмущения, каждое из которых представляет из себя некоторую силу, действующую на плоский элемент жидкости. Приведем их к более удобному виду с учетом принимаемых предположений.

Поскольку временные масштабы возмущения значительно меньше, чем время существования основного состояния, примем для возмущенного течения его адиабатичность, т. е. будем считать, что возмущения не успевают обмениваться теплом с основным течением. Представление об адиабатичности основного состояния используется при построении линейной волновой теории [8]. Это пред-

положение позволяет перейти от (7) к уравнению для одной зависимой переменной, для чего выразим давление возмущения через его плотность, пользуясь следующими соображениями. Для возмущенного состояния можно записать $p_0 + p = A(\rho_0 + \rho)^\gamma$, где A — некоторая постоянная, тогда $p = A(\rho_0 + \rho)^\gamma - A\rho_0^\gamma$, считая, что адиабатическими являются как основное состояние само, так и в сумме с возмущением. Разлагая в ряд Тейлора первое слагаемое вблизи $\rho = 0$ и выписывая три члена разложения получим

$$(\rho_0 + \rho)^\gamma \approx \rho_0^\gamma + \rho_0^{\gamma-1}\gamma\rho + 2^{-1}\rho_0^{\gamma-2}\gamma(\gamma-1)\rho^2 + \dots$$

Обозначая скорость звука основного течения через $c_0^2 = A\gamma\rho_0^{\gamma-1} = \gamma RT_0$, имеем

$$p = c_0^2\rho + 2^{-1}c_0^2\rho_0^{-1}(\gamma-1)\rho^2 + \dots$$

Запишем давление возмущения в виде $p = c_0^2\rho$ и примем $c_0 = \text{const}$.

После подстановки в (7) получается уравнение:

$$\begin{aligned} -\rho_{tt} + \frac{2\rho_t^2}{\rho_0 + \rho} = & -c_0^2\rho_{zz} + \frac{c_0^2\rho_z^2}{\rho_0 + \rho} + \frac{c_0^2\rho_0z\rho_z}{\rho_0 + \rho} - \frac{2\rho\rho_z p_{0z}}{\rho_0(\rho_0 + \rho)} + \frac{\rho_z p_{0z}}{\rho_0} \\ & - \frac{\rho\rho_0z p_{0z}}{\rho_0^2} + \frac{\rho p_{0zz}}{\rho_0} + (\rho_0 + \rho)f(v_x - u_y) + (\rho_0 + \rho)(f_x v - f_y u). \end{aligned} \quad (8)$$

Получено нелинейное уравнение в частных производных второго порядка (8) для плотности плоского возмущения. В уравнении (8) последнее слагаемое выражает силу Россби, которая возникает вследствие зависимости коэффициента f от горизонтальных координат. Далее опустим это слагаемое как несущественное на рассматриваемых горизонтальных размерах. Отметим, что входящие в правую часть слагаемые, пропорциональные плотности возмущения, аналогично силе Россби также являются некоторыми силами.

Учтем уравнение гидростатики для основного состояния $p_{0z} = -\rho_0 g$ и получим уравнение

$$\begin{aligned} -\rho_{tt} + \frac{2\rho_t^2}{\rho_0 + \rho} = & -c_0^2\rho_{zz} + \frac{c_0^2\rho_z^2}{\rho_0 + \rho} + \frac{c_0^2\rho_0z\rho_z}{\rho_0 + \rho} \\ & + \frac{2\rho\rho_z g}{\rho_0 + \rho} - \rho_z g + \frac{\rho\rho_0z g}{\rho_0} + \frac{\rho p_{0zz}}{\rho_0} - (\rho_0 + \rho)f\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

Производные давления основного состояния связаны с производными плотности этого же состояния соотношениями

$$p_{0z} = c_0^2\rho_{0z}, \quad p_{0zz} = c_0^2\rho_{0zz} + c_0^2(\gamma-1)\rho_{0z}^2(\rho_0)^{-1}.$$

Из (9) получим

$$\begin{aligned} -\rho_{tt} + \frac{2\rho_t^2}{\rho_0 + \rho} = & -c_0^2\rho_{zz} + \frac{c_0^2\rho_z^2}{\rho_0 + \rho} + \frac{\rho_0z c_0^2\rho_z}{\rho_0 + \rho} + \frac{2\rho\rho_z g}{\rho_0 + \rho} - \rho_z g + \frac{\rho\rho_0z g}{\rho_0} \\ & + \rho \left(c_0^2 \frac{\rho_{0zz}}{\rho_0} + c_0^2(\gamma-1) \frac{\rho_{0z}^2}{\rho_0^2} \right) - (\rho_0 + \rho)f\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

При таком представлении об основном состоянии величины ρ_{0z} и ρ_{0zz} характеризуют стратификацию рассматриваемого вертикального слоя атмосферы и являются заданными функциями при решении уравнения (10).

Уравнение (10) все еще слишком сложно для решения, особенно в тех случаях, когда величины, характеризующие стратификацию основного течения, имеют сложную функциональную зависимость от высоты.

Для дальнейшего упрощения полученного уравнения примем малость величины возмущения плотности ρ вместе с ее производными и положим $\rho_0 + \rho \approx \rho_0$. Действительно, самые значительные возмущения плотности в атмосфере редко превышают 10% от плотности основного состояния. Амплитуда возмущений, связанных с НСТ, значительно меньше и вряд ли превышает 2% плотности основного состояния. Такая величина представляется достаточно малой, а приближение — приемлемым. После пренебрежения слагаемыми, содержащими возмущение плотности в виде произведений, получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned} -\rho_{tt} = & -c_0^2 \rho_{zz} + c_0^2 \frac{\rho_{0z} \rho_z}{\rho_0} - \rho_z g + \frac{\rho \rho_{0z} g}{\rho_0} \\ & + \rho \left(c_0^2 \frac{\rho_{0zz}}{\rho_0} + c_0^2 (\gamma - 1) \frac{\rho_{0z}^2}{\rho_0^2} \right) - (\rho_0 + \rho) f \xi. \end{aligned} \quad (11)$$

Это уравнение является уже линейным дифференциальным уравнением в частных производных с переменными коэффициентами.

В рамках сделанных предположений из (6) имеем

$$\xi_t = 0.$$

Учитывая это и считая, что завихренность не появляется в процессе развития явления и первоначально отсутствовала, перепишем (11) в виде

$$-\rho_{tt} = -c_0^2 \rho_{zz} - \left[g - \frac{c_0^2 \rho_{0z}}{\rho_0} \right] \rho_z + \left[\frac{\rho_{0z} g}{\rho_0} + c_0^2 \frac{\rho_{0zz}}{\rho_0} + c_0^2 (\gamma - 1) \frac{\rho_{0z}^2}{\rho_0^2} \right] \rho. \quad (12)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= \frac{\rho_{0z} g}{\rho_0} + c_0^2 \frac{\rho_{0zz}}{\rho_0} + c_0^2 (\gamma - 1) \frac{\rho_{0z}^2}{\rho_0^2}, \\ \beta(z) &= g - \frac{c_0^2 \rho_{0z}}{\rho_0}, \end{aligned} \quad (13)$$

в которых уравнение (12) примет вид

$$\rho_{tt} = c_0^2 \rho_{zz} + \beta(z) \rho_z - \alpha(z) \rho. \quad (14)$$

Выясним, как меняются выражения (13) в инверсионных слоях. Для использования коэффициентов $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ их удобнее выразить через потенциальную температуру, которая часто используется при рассмотрении стратифицированных слоев атмосферы [8]. Рассмотрим некоторое инверсионное адиабатическое основное состояние, характеризуемое заданным распределением потенциальной температуры $\theta_0(z)$. Коэффициенты (13) уравнения (14) выражается через эту величину в виде

$$\alpha(z) = -c_0^2 \frac{\theta_{0zz}}{\theta_0} + c_0^2 (\gamma - 1) \frac{\theta_{0z}^2}{\theta_0^2} - g(2\gamma + 1) \frac{\theta_{0z}}{\theta_0} + (\gamma - 1) \frac{g^2}{c_0^2}, \quad (15)$$

$$\beta(z) = c_0^2 \frac{\theta_{0z}}{\theta_0}. \quad (16)$$

Для плоского слоя сжимаемой атмосферы получается более сложное выражение для частоты колебаний плотности в стратифицированном слое в виде (15), чем выражение, совпадающее с определением частоты Вьяйсяля — Брента в виде [8]

$$N^2 = -g \frac{\theta_{0z}}{\theta_0}.$$

Помимо двух последних слагаемых в (15), которые фигурируют и в определении частоты Вьяйсяля — Брента и отличаются от N^2 постоянным множителем, имеются еще два слагаемых, которые значительно больше по модулю.

В том вертикальном слое, где $\alpha(z) < 0$, согласно (14) $\alpha(z)$ будет пропорциональна квадрату частоты возникающих колебаний по вертикальной координате. При положительной величине $\alpha(z)$ в этом слое колебаний наблюдаться не будет и возмущения будут возрастать либо затухать с высотой.

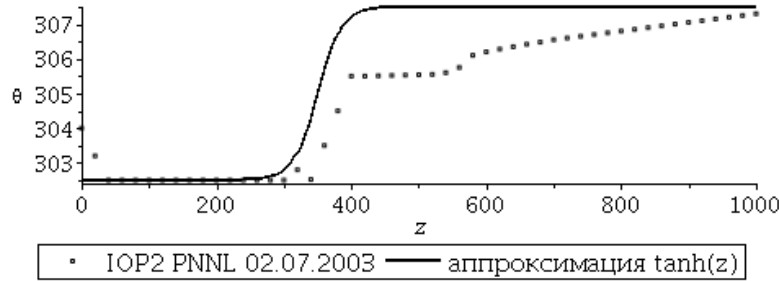


Рис. 1. Гиперболический тангенс как аппроксимация экспериментальных данных по распределению температуры в инверсионном слое [6]. Принят перепад потенциальной температуры в 5°C на 180 м высоты при значении температуры вблизи поверхности в $302,5^\circ\text{C}$.

В случае устойчивой стратификации для приземного атмосферного слоя, в котором наблюдается НСТ, характерный вид распределения температуры по высоте может быть аппроксимирован гиперболическим тангенсом. На рис. 1 представлено модельное распределение температуры по высоте для эксперимента «IOP2 PNNL 02.07.2003» работы [6] вместе с данными наблюдений.

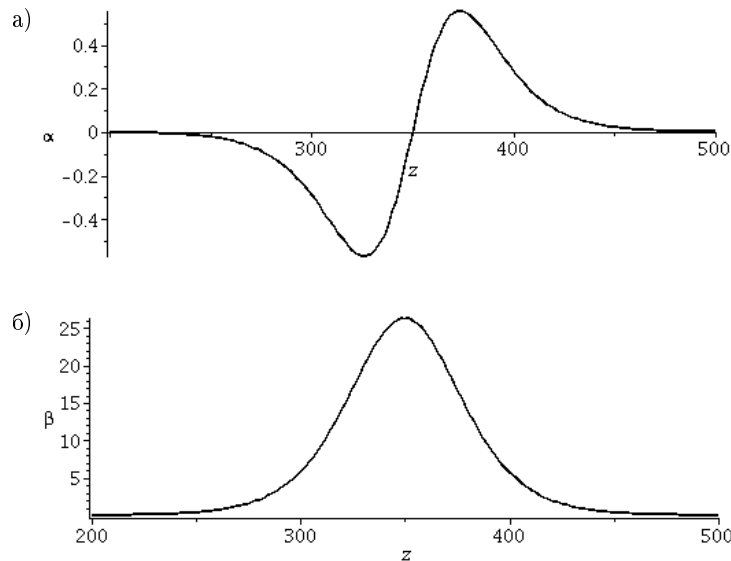


Рис. 2. а) — график выражения (15), б) — график выражения (16), построенные по распределению, приведенному на рис. 1.

На рис. 2а) представлен график выражения (15) для распределения потенциальной температуры основного состояния, изображенного на рис. 1, на рис. 2б) — соответствующий график выражения (16).

Оценим числовые значения слагаемых в выражении для $\alpha(z)$. Для распределения температуры, представленного на рис. 1, первое слагаемое имеет минимальное и максимальное значения $(-0,5; +0,5)$, второе — $(0; +0,0025)$, сумма третьего и четвертого — $(-0,008; 0,001)$. Второе слагаемое в (15) больше суммы двух последних, а первое слагаемое на два порядка больше, чем сумма последних трех для случая, приведенного на рис. 1. Три последних слагаемых в выражении (15), два из которых соответствуют частоте Вейселя — Брента, могут быть опущены как малые. Определяющим является первое слагаемое.

К уравнению (14) следует присоединить уравнение для скорости возмущения, записанное с соответствующими упрощениями. Применяя упрощающие предположения к уравнению для горизонтальной компоненты скорости ветра (1), получим

$$u_t = \frac{\rho}{\rho_0^2} p_{0x} + fv, \quad (17)$$

аналогично для уравнения (2) второй горизонтальной компоненты:

$$v_t = \frac{\rho}{\rho_0^2} p_{0y} - fu. \quad (18)$$

Эти уравнения показывают, что изменение горизонтальных компонент скорости ветра в зависимости от времени прямо пропорционально возмущению плотности и геострофическому перепаду давления, а также показывают поворот возникающего потока под действием силы Кориолиса. Интегрирование во времени этих уравнений сохранит для горизонтальных компонент скорости зависимость от вертикальной координаты, пропорциональную зависимости возмущения плотности от вертикальной координаты.

Для решения уравнения (14) используем метод разделения переменных [10]. В этом методе решение ищется в виде произведения двух функций:

$$\rho(z, t) = F(t)G(z), \quad (19)$$

каждая из которых зависит только от своего аргумента.

После подстановки решения (19) в (14) получится равенство

$$\frac{1}{G} (c_0^2 G_{zz} + \beta(z)G_z - \alpha(z)G) = \frac{F_{tt}}{F} = \lambda.$$

Такое равенство возможно только в случае, когда обе части равенства эквивалентны некоторому произвольному числу λ [10]. Полученное решение оказывается частным и зависящим от произвольного числа λ . Не записывая общего решения, ограничимся частным, с некоторым значением параметра λ , которое можно оценить из дополнительных соображений.

При выборе отрицательных значений параметра λ зависимость от времени интегрируется и имеет простой вид:

$$F(t) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}t) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}t).$$

Выражение для временной части решения можно упростить, переопределяя постоянные интегрирования:

$$F(t) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}t + C_2). \quad (20)$$

Пространственная часть решения удовлетворяет уравнению

$$c_0^2 G_{zz} + \beta G_z + (\lambda - \alpha) G = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами. С коэффициентами в виде (15), (16), предполагающих распределение потенциальной температуры, аппроксимированного гиперболическим тангенсом, аналитически решить (21) не удастся. Проанализируем решения уравнения (21) численно. Примем в качестве граничных условий следующие $\rho(z=0) = \rho_1$, $\rho_z(z=0) = 0$, для которых результаты расчетов при $\lambda = 0$ и значениях $\alpha(z)$, $\beta(z)$ соответствующих рис. 2 приведены на рис. 3 (1–2). В случае, если при численном решении уравнения (21) в качестве граничных условий принять $\rho(z=380) = \rho_1$, $\rho_z(z=380) = 0$, моделирующие возникновение возмущения на некоторой высоте (принято в 380 м), получаются еще более сложные распределения плотности возмущения. На основании представленных графиков рис. 3 численного решения уравнения (21) можно ожидать усиления с высотой малых возмущений на интервале высот выше 350 м и ослабления возмущений на высотах ниже 350 м.

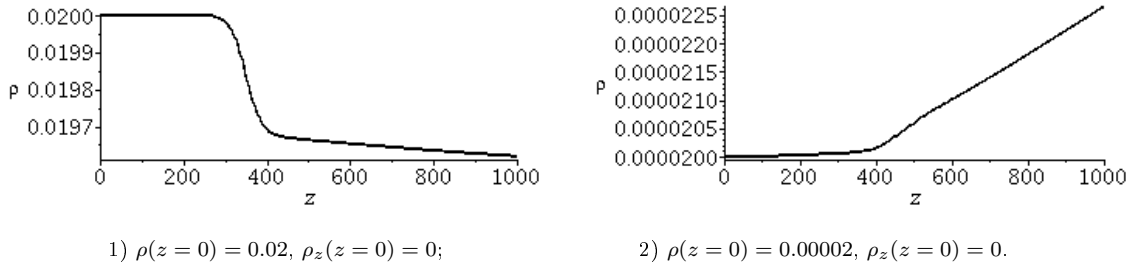


Рис. 3. Численное решение уравнения (21) при различных граничных условиях на поверхности.

Выделим вертикальный слой, в котором величины $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ можно принять приближенно постоянными: $\alpha(z) = \alpha$ и $\beta(z) = \beta$. Таковым может быть принят интервал высот с 350 м до 450 м на модельном распределении рис. 2. Для этого слоя уравнение (21) может рассматриваться как уравнение с постоянными коэффициентами, для которого не составляет труда найти аналитическое решение.

Будем искать решение уравнения (21) в виде $G(z) \sim \rho_1 \exp(sz)$, где s — величина, определяющая рост или затухание с высотой возмущения амплитудой ρ_1 . Подставляя в уравнение (21) предполагаемый вид решения, получим квадратное уравнение для s :

$$s^2 + \beta c_0^{-2} s + (\lambda + \alpha) c_0^{-2} = 0,$$

которое имеет два корня

$$s_{1,2} = (2c_0^2)^{-2} \left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha c_0^2 - 4c_0^2 \lambda} \right).$$

Запишем два частных решения уравнения (14) в виде

$$\rho(z, t) = \rho_1 \cos(\sqrt{\lambda} t) \exp \left(\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4c_0^2 \lambda + 4c_0^2 \alpha} \right) \frac{z}{2c_0^2} \right), \quad (22)$$

$$\rho(z, t) = \rho_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) \exp\left(\left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4c_0^2\lambda + 4c_0^2\alpha}\right) \frac{z}{2c_0^2}\right). \quad (23)$$

Общим решением уравнения (21) для выбранного слоя будет любая линейная комбинация выражений (22) и (23).

Поведение полученных решений зависит от значения подкоренного выражения, стоящего под знаком экспоненты. Оценим это поведение в случае отсутствия зависимости от времени при условии $\lambda = 0$.

Экспонента в (23) при $\beta > 0$ является затухающей с высотой, при $\beta^2 + 4c_0^2\alpha < 0$ наряду с затухающим с высотой возникает гармонический множитель.

Экспонента в (22) является экспоненциально затухающей при $4c_0^2\alpha < \beta^2$, при $4c_0^2\alpha > \beta^2$ — экспоненциально растущей с высотой, при $\beta^2 + 4c_0^2\alpha < 0$ появляется гармонический множитель. При $\alpha = 0$ значение этой функции равняется единице, при $\beta = 0$ — это растущая с высотой функция при $\alpha > 0$ и гармоническая при $\alpha < 0$.

Таким образом, на тех интервалах высот, где выполняется условия $4c_0^2\alpha > \beta^2$ и $\beta > 0$, решение (22) уравнения (14) демонстрирует рост с высотой.

Оценим величину ρ_1 по наблюдаемым перепадам температуры, наблюдающихся при смене дня и ночи [2, 6]. Разность дневных и вечерних температур приповерхностного слоя воздуха может достигать $5^\circ\text{--}10^\circ\text{C}$. Будем считать вес вышележащих слоев воздуха неизменным. Тогда из уравнения состояния идеального газа следует

$$\rho_1 \approx p(R_a(T_0 - 5))^{-1} - p(R_a T_0)^{-1} \approx 0,02\rho_0,$$

т. е. около 2% плотности основного состояния. Такой величины возмущение достигает за 3–4 часа ночного выхолаживания, за меньший промежуток времени величина возмущения будет очевидно меньше. Поэтому полученную оценку можно считать максимальной.

Очевидно, что параметр λ в линейном приближении играет роль квадрата частоты колебаний возмущения во времени. Кроме этого параметра и амплитуды возмущения в правой части (22), (23) имеются только характеристики основного состояния, принимаемые при решении известными.

Согласно экспериментальным данным [2] ветер в НСТ хоть и подвержен значительным пульсациям, вероятно имеющим турбулентную природу, но в среднем сохраняет свою величину и поворачивается в горизонтальной плоскости с инерциальной частотой. Это означает, что величина параметра λ не велика и меньше, чем частота, соответствующая периоду длительности существования ночной инверсии. Об еще меньших значениях этого параметра свидетельствует наблюдение зимних инверсий [3]. Примем значение параметра λ равным нулю.

Операция взятия производной по времени от (22), (23) не меняет зависимость от вертикальной координаты. Значение получаемого выражения близко к нулю вследствие малости параметра λ , который войдет множителем в получаемое выражение для производной по времени. Следовательно, возмущения, характеризуемые близким к нулю значением параметра λ , имеют близкую к нулю дивергенцию. Это и есть основание принять параметр λ равным нулю. Отсюда следует, что производная по высоте вертикальной скорости возмущения близка к нулю. Интегрируя выражение $w_z = 0$ с граничным условием на поверхности Земли $w(z = 0) = 0$, получим принимаемое ранее предположение $w(z) = 0$. При значениях параметра $\lambda > 0$, соответствующих, например, периодам меньшим,

чем время существования инверсии, дивергенция возмущения может оказаться заметной величиной, вычисленная из нее вертикальная скорость не равняется нулю и принимаемые при выводе (14) упрощающие предположения нарушаются.

Для вертикального профиля возмущения плотности выше 350 м наблюдается экспоненциальный рост возмущения с высотой, который затухает выше 380 м, где не выполняется условие $4c_0^2\alpha > \beta^2$.

Второе решение (23) допускает только гармонические с высотой решения и не допускает решений, растущих с высотой.

Каждое из решений (22) и (23) на нулевой высоте и на бесконечности не обращаются в нуль при значениях коэффициентов α и β , приведенных на рис. 2 (а–б). Отличие от нуля возмущения плотности на бесконечности (пусть даже ограниченной какой-то значительной высотой, например в 1–2 км) является недопустимым. Если потребовать равенство нулю возмущения плотности на бесконечности для линейной комбинации решений (22) и (23), для решения уравнения (14) получим выражение

$$\rho(z) = \rho_1 \left[\exp \left(\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4c_0^2\alpha} \right) \frac{z}{2c_0^2} \right) - \exp \left(\left(-\beta - \sqrt{\beta^2 + 4c_0^2\alpha} \right) \frac{z}{2c_0^2} \right) \right]. \quad (24)$$

График этого выражения представлен на рис. 4. Здесь ниже высоты в 350 м отсутствует отрицательные возмущения плотности, поскольку поведение на этих высотах одинаково для обоих решений (22) и (23), разница решений проявляется только выше высоты в 350 м и выражается в росте величины возмущения плотности с высотой. На высоте 380 м рост возмущения плотности с высотой останавливается и выше сменяется монотонным падением. Очевидно, что решение (24) на больших высотах стремится к нулю, что более реалистично для НСТ, чем решение (22), однако вблизи поверхности это решение также близко к нулю, чего в случае НСТ не наблюдается.

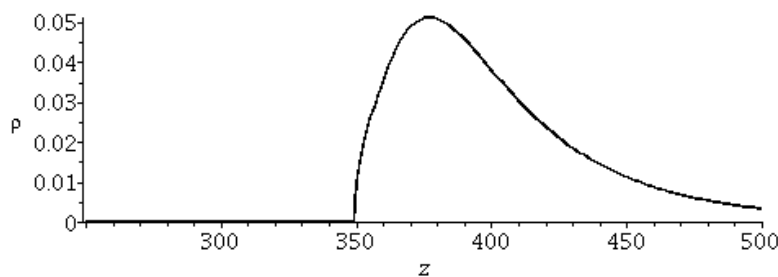


Рис. 4. Вертикальный профиль возмущения плотности, вычисленного согласно (24). Значение возмущения плотности $\rho_1 = 0,02$, $\lambda = 0$; распределение температуры по высоте основного состояния представлено на рис. 1.

Зависимость от высоты решения уравнений для компонент горизонтальной скорости возмущения аналогична (22), поскольку интегрирование во времени ее не меняет. Аналитические решения (17), (18) запишем для случая отсутствия

силы Кориолиса, что возможно вблизи экватора:

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \frac{p_{0x}}{\rho_0^2} \rho(z) t, \\ v(z, t) &= \frac{p_{0y}}{\rho_0^2} \rho(z) t, \end{aligned} \quad (25)$$

Выражения (25) показывают прямую пропорциональность горизонтальных компонент скоростей ветра возмущения и плотности возмущения. Из (25) легко заметить, что в отсутствие геострофического ветра поток НСТ не развивается даже при существенных возмущениях плотности. При больших значениях геострофического ветра должны наблюдаться большие значения скоростей НСТ при неизменной инверсии температуры. Скорости рассматриваемых возмущений (25) показывают линейный во времени рост. Вероятно, рост во времени скорости возмущения (25) ограничивает не только разрушение инверсии, но и неучтенные вязкие слагаемые, а также явления связанные с генерацией турбулентного движения. В умеренных широтах, при заметном влиянии силы Кориолиса, выражение (25) описывает профиль возмущения скорости ветра, вращающийся в горизонтальной плоскости.

На основе данных измерений [6] вертикального профиля потенциальной температуры аппроксимированной кривой представленной на рис. 1 вычислим значения выражений (15), (16), после чего согласно (22), (25) вычислим вертикальный профиль горизонтальных компонент скорости возмущения подбирая амплитудный множитель к ρ_1 (как произведение малого возмущения амплитуды на интервал времени приблизительно в 2–3 часа). Результат приведен на рис. 5, вместе с значениями экспериментально наблюдающегося профиля ветра. Амплитудный множитель в выражении (22) можно оценить как $\rho_1 = 0,00003$ за интервал времени в 10000 секунд, соответствующий приблизительно трем часам, в течении которых формируется НСТ.

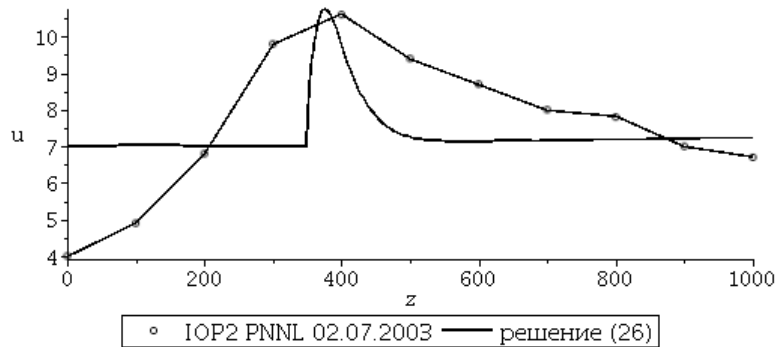


Рис. 5. Сравнение вертикального профиля скорости ветра НСТ наблюдаемого [6] (линия с точками), вычисленного возмущения скорости ветра согласно (24), (25) (сплошная линия) в сумме с геострофическим ветром. Значение геострофического ветра для теоретических кривых принято 7 м/с, возмущения плотности $\rho_1 = 0.3$ (за время приблизительно в 3 часа), $\lambda = 0$, распределение температуры по высоте основного состояния представлено на рис. 1.

Использование линейного анализа, упрощающих допущений и приближенных оценок при выводе выражений (22), (25) позволяет говорить лишь о качественном описании рассматриваемого явления. На величину возмущения плотности основное влияние оказывает значение α , которое в эксперименте локально может оказаться значительно большим, нежели использованное при построении графика на рис. 5.

Из рис. 5 видно, что максимум вертикального профиля вычисленного значения скоростей ветра по (25) совпадает с высотой максимума измеренных значений скорости ветра. Вычисленный вертикальный профиль скорости ветра отличается от наблюдаемого. Отличие скорее всего обуславливается влиянием турбулентного перемешивания. Также возможно влияние более сложного наблюдаемого вертикального распределения потенциальной температуры, чем изображенное на рис. 1 — выше высоты приблизительно 400 м также могут наблюдаться интервалы высот, внутри которых выполняется условие $4c_0^2\alpha > \beta^2$, обуславливающее рост возмущений на этих высотах.

На основании приведенного анализа можно предположить, что причиной возникновения НСТ является не сила Кориолиса, как предполагалось ранее [1]. Сила Кориолиса лишь вращает с инерциальной частотой возмущения, растущие вследствие развития инверсионного слоя. Причиной возникновения НСТ является рост возмущения плотности по вертикальной координате в слоях атмосферы с положительным значением выражения (15), определяемого второй производной потенциальной температуры основного состояния по высоте. В отсутствие силы Кориолиса, например при выхолаживании близ экваториальных равнинных территорий, в атмосфере над ними возникнет приподнятая инверсия, а следовательно, согласно (24), (25), появится НСТ. Конечно, направление ветра в НСТ будет вблизи экватора поворачиваться в горизонтальной плоскости значительно медленнее, чем в умеренных широтах.

Свойства полученных решений находятся в удовлетворительном качественном согласии с экспериментальными данными о НСТ [1, 2, 4, 6]. В частности, экспериментально отмечается пропорциональная связь скорости ветра в струе НСТ с величиной геострофического ветра; отмечается взаимосвязь высот расположения НСТ и инверсии температуры; увеличение скорости ветра в НСТ с увеличением мощности инверсии; установлено вращение струи НСТ с инерциальной частотой; в зимнее время инверсии температуры могут существовать длительный промежуток времени в несколько суток [3], что объясняет длительность существования зимних НСТ, вращение возмущения в зимнем НСТ под действием силы Кориолиса вероятно слабее вследствие установления геострофического баланса на высоте НСТ за время существования инверсии температуры (вероятно 2–3 суток для этого достаточно).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выведены и приближенно решены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие динамику плотности плоского возмущения в стратифицированных слоях сжимаемой жидкости. Теоретическое исследование образования НСТ в стратифицированной сжимаемой жидкости показывает, что основным условием образования НСТ может являться рост возмущений в слоях с отрицательным значением второй производной потенциальной температуры по высоте в инверсионном слое. Показан возможный механизм роста скорости ветра в НСТ и качественное совпадение свойств решения с данными наблюдений.

Литература

1. *Blackadar A. K.* Boundary layer wind maxima and their significance for the growth of nocturnal inversions // *Bulletin of the American Meteorological Society.*—1957.—Vol. 38.—P. 283–290.
2. *Kallistratova M. A., Kouznetsov R. D., Kuznetsov D. D., Kuznetsova I. N., Nakhaev M., Chirokova G.* Summertime low-level jet characteristics measured by sodars over rural and urban areas // *Meteorologische Zeitschrift.*—2009.—Vol. 18, № 3.—P. 289–295.
3. *Kallistratova M. A., Kouznetsov R. D.* Low-level jets in the Moscow region in summer and winter observed with a sodar network // *Boundary-Layer Meteorology.*—2012.—Vol. 143.—P. 159–175.
4. *Yamada T., Mellor G.* A simulation of the Wangara atmospheric boundary layer data // *J. of Atmospheric Sci.*—1975.—Vol. 32.—P. 2309–2329.
5. *Conangla L., Cuxart J.* On the turbulence in the upper part on the low-level jet: an experimental and numerical study // *Boundary-Layer Meteorology*, 2006.
6. *Wang Y. et al.* Nocturnal low-level-jet-dominated atmospheric boundary layer observed by a Doppler lidar over Oklahoma city during JU2003 // *J. of Appl. Meteorology and Climatology.*—2007.—Vol. 46.—P. 2098–2109.
7. *Beyrich F., Klose B.* Some aspects of modelling low-level jets // *Boundary-Layer Meteorology.*—1988.—Vol. 43.—P. 1–14.
8. *Госсард Э. Э., Хук У. Х.* Волны в атмосфере. Инфразвук и гравитационные волны в атмосфере — их возникновение и распространение.—М.: Мир, 1978.—532 с.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: учеб. пособие. Т. VI. Гидродинамика.—М.: Наука, 1988.—736 с.
10. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1966.—724 с.

Радионов Анатолий Анатольевич
Южный математический институт ВЦ РАН и РСО-А
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: aar200772@mail.ru

Радионов Анатолий Анатольевич

**О МЕХАНИЗМЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ
НОЧНЫХ НИЗКОУРОВНЕВЫХ
СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ**

Ответственный за выпуск
Гаприндашвили И. С.

Подписано в печать 3.08.2015.
Формат 60 × 84^{1/8}. Усл. п. л. 1,98. Тираж 75 экз.