УДК 517.955 Дата поступления 11 января 2009 г.

Кулаев Р. Ч. О параболической задаче на графе с краевыми условиями, содержащими производную по времени.—Владикавказ, 2009.—37 с.—(Препринт / ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А; № 1).

В работе рассматривается смешанная задача для уравнения параболического типа, заданного на геометрическом графе (пространственной сети). Специфика задачи заключается в том, что краевые условия содержат производные по времени.

Доказывается существование решения и его представимость в виде контурного интеграла по комплексному параметру. Также устанавливается корректность рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение на графе, спектральная задача, контурный интеграл, функция Грина, смешанная задача на графе.

Библиогр. 25.

Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН и РСО-А
Владикавказ, 362027, РОССИЯ
E-mail: kulaev@smath.ru

О ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ НА ГРАФЕ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ПРОИЗВОДНУЮ ПО ВРЕМЕНИ

Р. Ч. Кулаев

Введение

Дифференциальные уравнения на графах — относительно новый раздел теории дифференциальных уравнений. Серьезное внимание математиков к уравнениям на графах было привлечено чуть более двадцати лет назад и связано это, прежде всего, с тем, что подобные задачи возникают при изучении реальных физических явлений — эволюционных процессов в упругих сетках [4, 5, 8, 10, 19–21, 25], при моделировании гидросетей [6], электрических и нейронных сетей [23, 24]. Наиболее крупные циклы работ зарубежных авторов принадлежат G. Lumer (Бельгия), S. Nicaise и его научной группе (Франция), J. P. Roth (Франция), J. E. Lagnese (США), G. Leugering (Германия), E. J. P. G. Schmidt (Канада). В нашей стране основные исследования уравнений на сетях проводятся воронежскими математиками (Ю. В. Покорный, М. Г. Завгородний, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др.), которым удалось получить ряд результатов, ставших основой для дальнейших исследований [7, 17, 18]. Это, прежде всего, исследование вопроса однозначной разрешимости задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения на графе (пространственной сети), построение теории функции Грина для уравнений второго порядка и теория неосцилляции. Был получен также ряд результатов в спектральной теории. В частности, исследована асимптотика и структура спектра некоторых краевых задач на графах, установлена спектральная полнота корневых функций. Текущий период характеризуется изобилием новых постановок и направлений, связанных с задачами на графах [13–15].

В свете всего вышесказанного становится актуальным вопрос о разработке аналитических методов решения краевых задач на графах. Этот вопрос уже рассматривался рядом авторов. В частности, для одномерных задач в [7, 9] дано обоснование метода разделения переменных смешанной задачи для уравнений второго и четвертого порядков, в [11, 12] изложен метод конечного интегрального преобразования для уравнений второго порядка. В [16] дается метод Пуанкаре — Перрона решения многомерной задачи Дирихле для эллиптического уравнения на стратифицированных множествах, а в [21] устанавливается классическая разрешимость одной параболической задачи на сети.

В настоящей работе излагается метод решения смешанной задачи для параболического дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\, u = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x)\, \frac{\partial}{\partial x}\, u \right) + q(x)\, u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma \times [0,T] = \Gamma_T, \qquad (1)$$

в котором Γ — геометрический граф.

В каждой граничной вершине a графа Γ решение уравнения должно удовлетворять условию

$$\alpha(a)\,\frac{\partial}{\partial x}\,u(a,t)+\beta(a)\,\frac{\partial}{\partial t}\,u(a,t)+\delta(a)\,u(a,t)=F(a),\quad a\in\partial\Gamma,\ t>0. \tag{2}$$

А в каждой внутренней вершине $a\in\partial\Gamma\cup V$ на решение уравнения (1) накладываются условия непрерывности и одно условие согласования

$$\begin{gathered} u_k(a,t)-u_{k_0}(a,t)=0,\quad k,k_0\in I(a),\\ \sum_{k\in I(a)}\alpha_k(a)\frac{\partial u_k}{\partial x}(a,t)+\beta_k(a)\frac{\partial u_k}{\partial t}(a,t)+\delta_k(a)u_k(a,t)=F(a),\quad a\in V. \end{gathered} \tag{3}$$

В начальный момент времени $t=0$ ставится условие

$$u(x,0)=\Phi(x). \tag{4}$$

В формулах (1)–(4) полагаем $p\in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x\in\Gamma}p(x)>0$, $q\in C[\Gamma]$, $f\in C^{2,2}[\Gamma_T]$, $\Phi\in C^2[\Gamma]\cap C(\Gamma)$. В условиях (2), (3) $F(a)$ — числа, свои для каждой вершины графа, $\{\alpha_k(a)\}_{k\in I(a)}$, $\{\beta_k(a)\}_{i\in I(a)}$, $\{\delta_k(a)\}_{k\in I(a)}$ — наборы вещественных чисел. При этом считаем, что $\alpha_k(a)>0$, $\beta_k(a)\geqslant 0$, $k\in I(a)$, для любой вершины. В условиях согласования (3) считаем, что все производные посчитаны в направлении к вершине a.

Специфика задачи (1)–(4) заключается в том, что краевые условия содержат производные по времени от решения. Поэтому все предлагавшиеся ранее методы решения к данной задаче неприменимы.

Рассматриваемая задача имеет естественную физическую интерпретацию. Она моделирует процесс распространения тепла в системе стержней, копирующей граф Γ. В узловых точках системы стержни могут быть спаяны или соединены муфтами, каждая из которых имеет свою теплоемкость, что выражается условиями (2), (3).

§ 1. Асимптотическое представление решения спектральной краевой задачи на графе

1.1. Основные определения и обозначения. Начнем с описания основных терминов и обозначений, используемых ниже (более подробно см. [3]).

Под геометрическим графом в настоящей работе понимается одномерное стратифицированное многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^n$ и обозначаемое через Γ. Ребро графа — это одномерное гладкое регулярное многообразие (кривая). Вершина графа — точка, являющаяся концом одного или нескольких ребер. Ребра графа и вершины заданы независимо друг от друга, при этом ребра графа обозначаются через γ или γ_k, если они занумерованы, а вершины — через a, a_j, b_j (при этом предполагается, что нумерация вершин независима от нумерации ребер).

Считая ребра графа Γ занумерованными, обозначим через V множество вершин графа, которые являются концевыми точками двух и более ребер. Такие вершины мы называем внутренними. Вершины графа, не принадлежащие V, будем называть граничными и обозначать их через $\partial\Gamma$. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_i, то будем говорить, что ребро γ_i примыкает к вершине a. Множество индексов всех ребер, примыкающих к внутренней вершине a, обозначим $I(a)$. Всюду далее полагаем, что граф Γ является связным множеством в $\mathbb{R}^n$.

Под функцией $u(x)$ на графе понимается обычное отображение $u : \Gamma \to \mathbb{C}$. Через u_i будем обозначать сужение функции u на ребро γ_i, т. е. $u_i(x) = u(x)$ при $x \in \gamma_i$, $u_i(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma \backslash \gamma_i$. Везде ниже полагаем, что все рассматриваемые функции $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывны по переменной x на каждом ребре графа. Множество всех таких функций мы обозначим через $C[\Gamma]$. Далее, если a — произвольная вершина (граничная или внутренняя) графа Γ, то под $u_i(a)$ понимается $\lim_{x\to a} u_i(x)$, $x \in \gamma_i$.

Дифференцирование функций по переменной $x \in \Gamma$ внутри каждого ребра $\gamma \in \Gamma$ осуществляется по параметру, причем подразумевается, что для этого ребро параметризовано в одном из двух возможных направлений, т. е.

$$u'(x_0) = \frac{d}{d\lambda}\left(b + t\frac{a-b}{\|a-b\|}\right)\Bigg|_{t=t_0}, \quad x_0 \in \gamma = (a, b),\ t_0 = \|x_0 - a|,$$

при ориентации «от a к b».

Через $C^1[\Gamma]$ обозначим множество функций из $C[\Gamma]$, имеющих внутри каждого ребра равномерно непрерывные производные, а через $C^2[\Gamma]$ — множество функций из $C^1[\Gamma]$, имеющих на каждом ребре непрерывные производные второго порядка; через $C^k(\Gamma)$ обозначаем подпространство функций из $C^k[\Gamma]$, непрерывных на всем графе Γ.

Под дифференциальным выражением 2-го порядка на графе будем понимать выражение вида

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x)u.$$

Здесь A, B, C — функции одной переменной, определенные на графе Γ. Дифференциальное выражение определено на множестве $C^2[\Gamma]$. Это выражение можно трактовать в виде системы m обычных дифференциальных выражений

$$A_i(x)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + B_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial x} + C_i(x)u_i, \quad x \in \gamma_i,$$

рассматриваемых на каждом ребре $\gamma_i \in \Gamma$, $i = \overline{1, m}$.

Под интегралом функции $u \in C[\Gamma]$, взятым по графу Γ, понимаем сумму интегралов по всем ребрам графа, т. е.

$$\int\limits_{\Gamma} u(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\gamma_i} u_i(x)\,dx.$$

Каждый из интегралов, стоящих под знаком суммы, с учетом выбранной ориентации ребер графа определяется равенством

$$\int\limits_{\gamma_i} u_i(x)\,dx = \int\limits_0^{l_i} u_i\left(a_i + \frac{a_i - b_i}{l_i}\,t\right)dt,$$

где $\gamma_i = (a_i, b_i)$, $0 < t < l_i$, $l_i = \|a_i - b_i\|$.

1.2. Спектральная задача, соответствующая смешанной задаче (1)–(4). Рассмотрим спектральную задачу, заданную на графе Γ,

$$(pu')' + qu - \lambda u = \Phi(x). \tag{1.1}$$

В каждой граничной вершине графа задано условие

$$\alpha(a)u'(a) + [\beta(a)\lambda + \delta(a)]u(a) = F(a), \quad a \in \partial\Gamma, \tag{1.2}$$

а в каждой внутренней вершине задаются условия непрерывности и условие согласования

$$\begin{gathered} u_k(a) - u_{k_0}(a) = 0, \quad k, k_0 \in I(a), \\ \sum_{k\in I(a)} \{\alpha_k(a)u_k'(a) + (\beta_k(a)\lambda + \delta_k(a))u_k(a)\} = F(a), \quad a \in V. \end{gathered} \tag{1.3}$$

На коэффициенты задачи (1.1)–(1.3) накладываем те же ограничения, что и для задачи (1)–(4). В условиях согласования (1.3) считаем, что производные посчитаны в направлении к вершине a.

Задачу (1.1)–(1.3) назовем спектральной задачей, соответствующей основной задаче (1)–(4).

Пусть $\{\gamma_k\}_{k=1}^{m}$ — множество всех ребер графа Γ, занумерованных произвольным образом. Однородное дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (1.1), суженное на ребро γ_k, имеет два линейно-независимых решения $s_k(x,\rho)$, $c_k(x,\rho)$, $\rho = \sqrt{-\lambda}$. Продолжим их на весь граф Γ, положив на остальных ребрах тождественно равными нулю. Получим фундаментальную систему решений $\{\varphi_k(x,\rho)\}_{k=1}^{2m}$ однородного уравнения. Всюду в дальнейшем считаем, что функция φ_{2k-1} — продолжение функции s_k, а φ_{2k} — продолжение функции c_k при $k = \overline{1,m}$.

Пусть $\{l_j\}_{j=1}^{2m}$ — набор всех линейных функционалов, определяющих полную систему условий (1.2), (1.3). Тогда условия (1.2), (1.3) можно записать в виде $l_j(u) = c_j$, где $c_j = 0$, если функционал l_j описывает условие непрерывности, и $c_j = F(a)$, если l_i задает граничное условие в вершине $a \in \partial\Gamma$ или условие согласования в вершине $a \in V$.

Обозначим через $\Delta(\rho)$ характеристический определитель $\Delta(\rho) = \det \|l_j(\varphi_k(\cdot,\rho))\|$. Из общих теорем о решениях дифференциальных уравнений вытекает, что для любого фиксированного значения $x \in \Gamma$ функции $\varphi_k(x,\rho)$ будут целыми аналитическими функциями параметра ρ. А поскольку условия (1.2), (1.3) линейно зависят от ρ^2, то целой функцией параметра ρ будет и характеристический определитель $\Delta(\rho)$. Но целая функция, не равная тождественно нулю, имеет не более счетного числа нулей, которые при этом не имеют конечной предельной точки.

Лемма 1. *Спектр задачи* (1.1)–(1.3) *либо совпадает со всей комплексной плоскостью* $\mathbb{C}$, *либо состоит из последовательности собственных значений, не имеющей конечной предельной точки.*

Пусть $\rho \in \mathbb{C}$ не является нулем характеристического определителя $\Delta(\rho)$. Обозначим через $G(x,\xi,\rho)$ функцию Грина интегрального оператора, обращающего задачу (1.1)–(1.3) [3]. Тогда решение задачи (1.1)–(1.3) можно представить в виде

$$u(x) = \int_\Gamma G(x,\xi,\rho)\frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi + H(x,\rho),$$

$$G(x,\xi,\rho)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\Delta_k(x,\xi,\rho)}{\Delta(\rho)}, \tag{1.4}$$

$$\Delta_k(x,\xi,\rho)=$$

$$=\begin{vmatrix} K_k(x,\xi,\rho) & 0 & \dots & \varphi_{2k-1}(x,\rho) & \varphi_{2k}(x,\rho) & \dots & 0\\ l_1(K_k(\cdot,\xi,\rho)) & l_1(\varphi_1(\cdot,\rho)) & \dots & l_1(\varphi_{2k-1}(\cdot,\rho)) & l_1(\varphi_{2k}(\cdot,\rho)) & \dots & l_1(\varphi_{2m}(\cdot,\rho))\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ l_{2m}(K_k(\cdot,\xi,\rho)) & l_{2m}(\varphi_1(\cdot,\rho)) & \dots & l_{2m}(\varphi_{2k-1}(\cdot,\rho)) & l_{2m}(\varphi_{2k}(\cdot,\rho)) & \dots & l_{2m}(\varphi_{2m}(\cdot,\rho)) \end{vmatrix}, \tag{1.5}$$

$K_k(x,\xi,\rho)$ — функция Коши, определяемая равенством

$$K_k(x,\xi,\rho)=\begin{cases} 0, & \xi\in\gamma_n,\ x\in\gamma_j,\ n\neq j;\\ \frac{1}{2W_k(\xi,\rho)}\begin{vmatrix}\varphi_{2k-1}(\xi,\rho) & \varphi_{2k}(\xi,\rho)\\ \varphi_{2k-1}(x,\rho) & \varphi_{2k}(x,\rho)\end{vmatrix}, & \overline{\gamma_k}=[a_k,b_k],\ a_k\leqslant\xi\leqslant x\leqslant b_k;\\ \frac{-1}{2W_k(\xi,\rho)}\begin{vmatrix}\varphi_{2k-1}(\xi,\rho) & \varphi_{2k}(\xi,\rho)\\ \varphi_{2k-1}(x,\rho) & \varphi_{2k}(x,\rho)\end{vmatrix}, & \overline{\gamma_k}=[a_k,b_k],\ a_k\leqslant x\leqslant\xi\leqslant b_k, \end{cases} \tag{1.6}$$

$$W_k(\xi,\rho)=\begin{vmatrix} s_k(\xi,\rho) & c_k(\xi,\rho)\\ \frac{d}{d\xi}s_k(\xi,\rho) & \frac{d}{d\xi}c_k(\xi,\rho)\end{vmatrix},$$

$$H(x,\rho)=\frac{1}{\Delta(\rho)}\begin{vmatrix} 0 & \varphi_1(x,\rho) & \dots & \varphi_{2m}(x,\rho)\\ -c_1 & l_1(\varphi_1(\cdot,\rho)) & \dots & l_1(\varphi_{2m}(\cdot,\rho))\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -c_m & l_{2m}(\varphi_1(\cdot,\rho)) & \dots & l_{2m}(\varphi_{2m}(\cdot,\rho))\end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

В формуле (1.6) неравенства на ребре $\overline{\gamma}_k=[a_k,b_k]$ понимаются в смысле направления, определяемого заданной параметризацией ребра.

1.3. Асимптотические формулы для решений дифференциального уравнения. Запишем однородное уравнение, соответствующее уравнению (1.1), в виде системы дифференциальных уравнений, заданных на ребрах графа Г:

$$u_k''+\frac{p_k'(x)}{p_k(x)}u_k'+\frac{q_k(x)}{p_k(x)}u_k+\frac{\rho^2}{p_k(x)}u_k=0,\quad x\in\gamma_k=(a_k,b_k). \tag{1.8}$$

Полагая $u_k=\frac{1}{\sqrt{p_k(x)}}\widetilde{u}_k$, приведем рассматриваемое уравнение к виду

$$\widetilde{u}_k''+\widetilde{q}_k(x)\widetilde{u}_k+\frac{\rho^2}{p_k(x)}\widetilde{u}_k=0.$$

Для получения асимптотического представления решений уравнения (1.8) воспользуемся следующей теоремой [2, Гл. II, § 4].

Теорема. *В каждой полуплоскости $\operatorname{Im}\rho<0$, $\operatorname{Im}\rho\geqslant 0$ комплексной ρ-плоскости уравнение (1.8) имеет два линейно-независимых решения $\widetilde{u}_{k1}$ и $\widetilde{u}_{k2}$, которые можно асимптотически представить в виде*

$$\widetilde{u}_{k1}=\Big(1+O\big(\frac{1}{\rho}\big)\Big)\exp\Big(i\rho\int\limits_{a_k}^{x}\frac{dz}{\sqrt{p(z)}}\Big),$$

$$\widetilde{u}_{k2}=\Big(1+O\big(\frac{1}{\rho}\big)\Big)\exp\Big(-i\rho\int\limits_{a_k}^{x}\frac{dz}{\sqrt{p(z)}}\Big)\ \text{ при } \operatorname{Im}\rho\geqslant 0,$$

и

$$\widetilde{u}_{k1} = \Big(1 + O\big(\frac{1}{\rho}\big)\Big) \exp\Big(-i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}\Big),$$

$$\widetilde{u}_{k2} = \Big(1 + O\big(\frac{1}{\rho}\big)\Big) \exp\Big(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}\Big) \quad \textit{при } \operatorname{Im}\rho < 0.$$

Для однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.1), фундаментальная система частных решений допускает следующее асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} \varphi_{2k-1}(x,\rho) &= \big[\eta_{k1}^{(0)}(x)\big] \exp\Big(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \Theta^{(1)}(z)\,dz\Big), \\ \varphi_{2k}(x,\rho) &= \big[\eta_{k2}^{(0)}(x)\big] \exp\Big(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \Theta^{(2)}(z)\,dz\Big), \end{aligned} \tag{1.9}$$

где прямые скобки $[\eta]$ обозначают сумму $\eta + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$. В формулах (1.9) $\Theta^{(1)}(z) = \frac{1}{\sqrt{p(z)}}$, $\Theta^{(2)}(z) = -\frac{1}{\sqrt{p(z)}}$ при $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$ и, наоборот, $\Theta^{(1)}(z) = -\frac{1}{\sqrt{p(z)}}$, $\Theta^{(2)}(z) = \frac{1}{\sqrt{p(z)}}$ при $\operatorname{Im}\rho < 0$. Что касается функций $\eta_{ks}^{(0)}$, то полагаем $\eta_{ks}^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}$ при $x \in \gamma_k$ и $\eta_{ks}^{(0)}(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma \backslash \gamma_k$, $s = 1, 2$.

Используя формулы (1.9), можно получить асимптотические представления для производных по x от функций $\varphi_k(x,\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\varphi_{2k-1}(x,\rho) &= i\rho\big[\eta_{k1}^{(1)}(x)\big] \exp\Big(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \Theta^{(1)}(z)\,dz\Big), \\ \frac{\partial}{\partial x}\varphi_{2k}(x,\rho) &= i\rho\big[\eta_{k2}^{(1)}(x)\big] \exp\Big(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \Theta^{(2)}(z)\,dz\Big), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_{2k-1}(x,\rho) &= (i\rho)^2\big[\eta_{k1}^{(2)}(x)\big] \exp\Big(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \Theta^{(1)}(z)\,dz\Big), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_{2k}(x,\rho) &= (i\rho)^2\big[\eta_{k2}^{(2)}(x)\big] \exp\Big(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \Theta^{(2)}(z)\,dz\Big), \end{aligned} \tag{1.10}$$

где

$$\eta_{ks}^{(1)}(x) = \eta_{ks}^{(0)}(x)\Theta^{(s)}(x), \quad \eta_{ks}^{(2)}(x) = \eta_{ks}^{(0)}(x)\big(\Theta^{(s)}(x)\big)^2.$$

При этом следует сказать, что асимптотические формулы для первых производных получаются дифференцированием (1.9), а для вторых производных — из однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.1), путем подстановки в него асимптотических формул для φ_k и $\frac{\partial}{\partial x}\varphi_k$.

1.4. Асимптотика собственных значений. Сначала с помощью асимптотических формул (1.9), (1.10) выведем асимптотическую формулу для характеристического определителя $\Delta(\rho)$.

Пусть $\{a_j\}_{j=1}^N$ — некоторая нумерация вершин (внутренних и граничных) графа Г. Без ограничения общности можно считать, что функционалы l_j, определяющие условия (1.2), (1.3), занумерованы так, что первые $|I(a_1)|$ функционалов определяют условия в вершине a_1, следующие $|I(a_2)|$ функционалов определяют условия в вершине a_2 и т. д. Тогда характеристический определитель $\Delta(\rho)$ можно рассмотреть, как определитель блочной матрицы

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} \mathscr{B}(a_1) \\ \mathscr{B}(a_2) \\ \dots \\ \mathscr{B}(a_N) \end{vmatrix},$$

где $\mathscr{B}(a_j)$ — матрица размера $|I(a_j)| \times 2m$.

Для каждой вершины $a \in \partial\Gamma \cup V$ и каждого ребра γ_k, примыкающего к ней, определим величины

$$\big[S_k^{(s)}(a)\big] = -\beta_k(a)[1]\rho^2 + (-1)^\varepsilon \alpha_k(a)\big[\Theta_k^{(s)}(a)\big]i\rho + \delta_k(a)[1], \quad s = 1, 2,$$

в которых $\varepsilon = 0$, если ребро γ_k параметризовано «от вершины a», и $\varepsilon = 1$ в противном случае. Для упрощения записей обозначим $e_k^{(s)}(x) = \eta_{ks}^{(0)}(x)\times$ $\exp\Big(i\rho\int_{a_k}^x \Theta^{(s)}(z)\,dx\Big)$. Тогда в этих обозначениях блоки-матрицы $\mathscr{B}(a_j)$ можно записать в виде

$$\mathscr{B}(a) = \begin{pmatrix} \dots & 0 & \big[S_k^{(1)}(a)\big]e_k^{(1)}(a) & \big[S_k^{(2)}(a)\big]e_k^{(2)}(a) & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Такой вид будет у матрицы, соответствующей граничной вершине a, к которой примыкает ребро γ_k. Если же a — внутренняя вершина графа, к которой примыкают ребра $\gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_s}$, $s = |I(a)|$, то $\mathscr{B}(a)$ имеет вид

$$\mathscr{B}(a) = \left(\begin{matrix} \dots & 0 & [1]e_{k_1}^{(1)}(a) & [1]e_{k_1}^{(2)}(a) & \dots & -[1]e_{k_2}^{(1)}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & [1]e_{k_1}^{(1)}(a) & [1]e_{k_2}^{(2)}(a) & \dots & 0 \\ \dots & 0 & [S_{k_1}^{(1)}(a)]e_{k_1}^{(1)}(a) & [S_{k_1}^{(2)}(a)]e_{k_1}^{(2)}(a) & \dots & [S_{k_2}^{(1)}(a)]e_{k_2}^{(1)}(a) \end{matrix}\right. \tag{1.11}$$
$$\left.\begin{matrix} -[1]e_{k_2}^{(2)}(a) & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -[1]e_{k_s}^{(1)}(a) & -[1]e_{k_s}^{(2)}(a) & 0 & \dots \\ [S_{k_2}^{(2)}(a)]e_{k_2}^{(2)}(a) & \dots & [S_{k_s}^{(1)}(a)]e_{k_s}^{(1)}(a) & [S_{k_s}^{(2)}(a)]e_{k_s}^{(2)}(a) & 0 & \dots \end{matrix}\right).$$

Из построения функций φ_k, составляющих фундаментальную систему решений, следует, что на ребре γ_k не равны тождественно нулю только функции φ_{2k-1} и φ_{2k}. Поэтому в дальнейшем будем говорить, что в определителе $\Delta(\rho)$ и матрицах $\mathscr{B}(a_j)$ столбцы с номерами $2k-1$ и $2k$ соответствуют γ_k.

Пусть $\gamma_k = (a_k, b_k)$ — некоторое ребро графа Г. Тогда в блоках $\mathscr{B}(a_k)$ и $\mathscr{B}(b_k)$ столбцы, соответствующие ребру γ_k, ненулевые, а во всех остальных блоках столбцы, отвечающие ребру γ_k, состоят из нулей. Если ребро параметризовано «от a_k», то в блоке $\mathscr{B}(a_k)$ $e_k^{(s)}(a_k) = \eta_{ks}^{(0)}(a_k)$. Если же ребро параметризовано «к a_k», то $e_k^{(s)}(a_k) = \eta_{ks}^{(0)}(a_k)\exp\Big(i\rho\int_{\gamma_k}\Theta^{(s)}(z)\,dz\Big)$.

Обозначим через $\{M_\tau(a_j)\}$ множество всех миноров матрицы $\mathscr{B}(a_j)$ порядка $|I(a_j)|$, составленных из ненулевых столбцов. Тогда характеристический определитель $\Delta(\rho)$ можно представить в виде суммы

$$\Delta(\rho) = \sum_n \varepsilon_n M_{\tau_n}(a_1) M_{\sigma_n}(a_2) \ldots M_{\omega_n}(a_N) = \sum_n \varepsilon_n P_n(\rho), \tag{1.12}$$

где ε_n равно 1 либо -1, а различные миноры, входящие в одно произведение P_n, не имеют элементов одного и того же столбца определителя $\Delta(\rho)$.

Поскольку в минорах $M_\tau(a_j)$ все показательные функции могут быть вынесены за знаки определителей как общие множители элементов столбцов, то получаем

$$\Delta(\rho) = P_1(\rho)e^{i\rho m_1} + P_2(\rho)e^{i\rho m_2} + \ldots + P_\sigma(\rho)e^{i\rho m_\sigma}, \tag{1.13}$$

где числа $m_i \in \mathbb{R}$, $m_1 < m_2 < \ldots < m_\sigma$.

Для каждого блока $\mathscr{B}(a)$, $a \in \partial\Gamma \cup V$, составим минор $M(a)$ по следующему правилу.

Правило. Минор $M(a)$ содержит по одному столбцу от каждого ребра, примыкающего к вершине a. При этом, если ребро γ_k, $k \in I(a)$, параметризовано к вершине a, то в минор $M(a)$ входят элементы нечетного столбца матрицы $\mathscr{B}(a)$, соответствующего ребру γ_k. Если же ребро γ_k параметризовано от вершины a, то в $M(a)$ входит четный столбец матрицы $\mathscr{B}(a)$, отвечающий ребру γ_k.

Тогда для $a \in \partial\Gamma$ $M(a) = \big[S_k^{(s)}(a)\big]e_k^{(s)}(a)$, а для $a \in V$ $|I(a)| = \nu$.

$$\begin{aligned} M(a) = &\begin{vmatrix} [1] & -[1] & 0 & \ldots & 0 \\ [1] & 0 & -[1] & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [1] & 0 & 0 & \ldots & -[1] \\ [S_{k_1}^{(s)}(a)] & [S_{k_2}^{(s)}(a)] & [S_{k_3}^{(s)}(a)] & \ldots & [S_{k_\nu}^{(s)}(a)] \end{vmatrix} e_{k_1}^{(s)}(a) \ldots e_{k_\nu}^{(s)}(a) = \\ &= \big(- B(a)\rho^2 + A(a)i\rho + D(a)\big) \prod_{j=1}^{\nu} \big[\eta_{k_j 1}^{(0)}(a)\big] e^{i\rho\omega(a)}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Здесь $B(a) = \sum_{k\in I(a)} \beta_k(a)$, $A(a) = \sum_{k\in I(a)} \frac{\alpha_k(a)}{\sqrt{p_k(a)}}$, $D(a) = \sum_{k\in I(a)} \delta_k(a)$, $\omega(a) = \sum_j \int_{\gamma_j} \Theta^{(1)}(z)\,dz$, причем в последней сумме суммирование ведется по всем ребрам, параметризованным в направлении к вершине a; $s = 1$ для ребер, параметризованных к вершине, и $s = 2$ для ребер, параметризованных от вершины.

Пусть $\{M(a_j)\}_{j=1}^N$ — множество всех миноров, построенных для каждой вершины $a_j \in \partial\Gamma \cup V$ по правилу, описанному выше. Тогда справедливы следующие свойства.

Свойство 1. *Любые два минора $M(a_k)$ и $M(a_j)$, $k \neq j$, не имеют элементов, принадлежащих одному столбцу определителя $\Delta(\rho)$.*

$\lhd$ Действительно, если вершины a_k и a_j несмежные, то в блоке $\mathscr{B}(a_k)$ столбцы, соответствующие ребрам, примыкающим к вершине a_j, состоят из нулей и не могут входить в $M(a_k)$. Если же вершины a_k и a_j смежные, а ребро $\gamma = (a_k, a_j)$ параметризовано от a_k к a_j, то в $M(a_k)$ входит столбец матрицы $\mathscr{B}(a_k)$, соответствующий ребру $\gamma = (a_k, a_j)$, с четным индексом, а в $M(a_j)$ входит столбец, соответствующий ребру γ, с нечетным индексом. $\rhd$

Свойство 2. *В формуле* (1.13) *при* $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$ $m_\sigma = \int\limits_\Gamma \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} = \int\limits_\Gamma \Theta^{(1)}(z)\,dz$, $P_\sigma(\rho) = \prod_{k=1}^{N}(-B(a_k)\rho^2 + A(a_k)i\rho + D(a_k))\prod_{j\in I(a_k)}\left[\eta_{j1}^{(0)}(a_k)\right]$.

$\lhd$ Из правила построения миноров $M(a_j)$ и свойства 1 следует, что в разложении (1.12) одно из слагаемых $P_n(\rho)$ будет иметь вид

$$P(\rho) = M(a_1)M(a_2)\ldots M(a_3).$$

Доказываемое свойство сразу следует из (1.14) и неравенств $\beta_k(a_j) \geqslant 0$, $\alpha_k(a_j) > 0$, $\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} > \frac{1}{\sqrt{p_0}} > 0$, $x \in \Gamma$, гарантирующих $P_\sigma(\rho) \not\equiv 0$. $\rhd$

Если в правиле построения миноров $M(a_j)$ поменять «четные столбцы» на «нечетные» и наоборот, «нечетные столбцы» поменять на «четные», то с помощью аналогичных рассуждений можно получить

Свойство 3. *В формуле* (1.13) *при* $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$ $m_1 = -\int\limits_\Gamma \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} = \int\limits_\Gamma \Theta^{(2)}(z)\,dz$, $P_1(\rho) = \prod_{k=1}^{N}\big(-B(a_k)\rho^2 + A(a_k)i\rho + D(a_k)\big)\prod_{j\in I(a_k)}\left[\eta_{j2}^{(0)}(a_k)\right] = P_\sigma(\rho)$.

Что касается многочленов $P_n(\rho)$, $n = \overline{2, \sigma-1}$, из (1.13), то они представляют собой многочлены от ρ степени не выше степени d многочленов P_1 и P_σ. Далее, поскольку в полуплоскости $\operatorname{Im}\rho < 0$ $\Theta^{(1)}(x) = -\frac{1}{\sqrt{p(x)}}$ и $\Theta^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}$, то в нижней полуплоскости m_1 и m_σ остаются равными $-\int\limits_\Gamma \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$ и $\int\limits_\Gamma \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$ соответственно. То же можно сказать и про $P_1(\rho)$ и $P_\sigma(\rho)$. Поэтому для характеристического определителя $\Delta(\rho)$ получаем асимптотическую формулу

$$\Delta(\rho) = \rho^d P(\rho), \tag{1.15}$$

где $P(\rho)$ — квазиполином с асимптотически постоянными коэффициентами. Индикаторная диаграмма квазиполинома $P(\rho)$ есть отрезок мнимой оси $\Big[-i\int\limits_\Gamma \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}, i\int\limits_\Gamma \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}\Big]$. Используя теорему о распределении корней квазиполиномов [1, Гл. I, § 2], можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *Все собственные значения задачи* (1.1)–(1.3) *расположены в полосе ширины* $2\int\limits_\Gamma \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$ *с центром в начале координат комплексной плоскости, границы которой параллельны вещественной оси.*

Если все собственные значения задачи (1.1)–(1.3) *занумеровать в порядке возрастания их модулей, то для них имеет место асимптотическое представление*

$$\lambda_k = -\rho_k^2 = -\left(\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)\frac{\pi k}{\int\limits_\Gamma \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}}\right)^2.$$

Если из ρ-плоскости выбросить внутренности малых кругов радиуса r с центрами в нулях ρ_k функции $\Delta(\rho)$, то в оставшейся части ρ-плоскости выполняется неравенство

$$|P(\rho)| = |\rho^{-d}\Delta(\rho)| \geqslant C > 0,$$

где C зависит лишь от радиусов выбрасываемых кругов.

1.5. Асимптотическое представление функции $H(x,\rho)$. Теперь мы получим асимптотическое представление функции $H(x,\rho)$, определенной в формуле (1.7). Разложим детерминант по элементам первой строки и первого столбца:

$$H(x,\rho)=\frac{1}{\Delta(\rho)}\sum_{k=1}^{2m}\varphi_k(x,\rho)\sum_{j=1}^{2m}(-c_j)\Delta_{jk}(\rho)=-\frac{1}{\Delta(\rho)}\sum_{k=1}^{2m}\varphi_k(x,\rho)\sum_{n=1}^{N}F(a_n)\Delta_{j_n}k(\rho),$$

где Δ_{jk} — алгебраические дополнения характеристического определителя $\Delta(\rho)$. Последнее равенство получено с учетом того, что часть чисел c_j равны нулю. Очевидно, что для получения асимптотического представления $H(x,\rho)$ необходимо иметь его для $\Delta_{j_nk}(\rho)$. Для упрощения записи обозначим $\Delta_{j_nk}=\Delta_k^n$. Тогда, как и в случае с $\Delta(\rho)$, представим определитель $\Delta_k^n(\rho)$ в виде

$$\Delta_k^n(\rho)=\sum_j P_j^{(nk)}(\rho)e^{n\rho\omega_j^{(nk)}},$$

где $-\int\limits_\Gamma\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}\leqslant\omega_j^{(nk)}\leqslant\int\limits_\Gamma\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$, $P_j^{(nk)}(\rho)$ — многочлен от ρ степени не выше d.

Теперь заметим, что в силу $\inf_{x\in\Gamma}p(x)>0$, в верхней полуплоскости величина $i\rho\int\limits_{\gamma_k}\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$ имеет отрицательную вещественную часть, а в нижней полуплоскости — положительную. Поэтому в верхней полуплоскости при $\operatorname{Im}\rho\to+\infty$ будет $\left|\exp\left(i\rho\int\limits_{\gamma_k}\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}\right)\right|\to0$, $\left|\exp\left(-i\rho\int\limits_{\gamma_k}\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}\right)\right|\to+\infty$, а в нижней полуплоскости наоборот. В связи с этим, если учесть отсутствие в $\Delta_k^n(\rho)$ элементов, содержащих множителем $\exp\left(-i\rho\int\limits_{\gamma_k}\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}\right)$, в верхней полуплоскости получим оценки

$$\begin{aligned}|\Delta_{2k-1}^n(\rho)|&\leqslant C|\rho|^d\left|\exp\left(-i\rho\int\limits_\Gamma\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}\right)\right|,\\ |\Delta_{2k}^n(\rho)|&\leqslant C|\rho|^d\left|\exp\left(-i\rho\int\limits_{\Gamma\setminus\gamma_k}\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}\right)\right|,\end{aligned}\tag{1.16}$$

где C — постоянное число.

В нижней полуплоскости получаем оценки

$$\begin{aligned}|\Delta_{2k-1}^n(\rho)|&\leqslant C|\rho|^d\left|\exp\left(i\rho\int\limits_\Gamma\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}\right)\right|,\\ |\Delta_{2k}^n(\rho)|&\leqslant C|\rho|^d\left|\exp\left(i\rho\int\limits_{\Gamma\setminus\gamma_k}\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}\right)\right|.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Принимая во внимание (1.13) и (1.15), с помощью асимптотических представлений (1.9), (1.10) и неравенств (1.16) получаем в верхней полуплоскости:

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}H(x,\rho)\right|=\left|\frac{1}{\Delta(\rho)}\sum_{k=1}^{2m}\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\varphi_k(x,\rho)\sum_{n=1}^{N}F(a_n)\Delta_k^n(\rho)\right|=$$

$$
= \left| \frac{1}{\Delta(\rho)} \sum_{k=1}^{m} (i\rho)^{\nu} \left[\eta_{k1}^{(\nu)}(x)\right] \exp\left(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \Theta^{(1)}(z)\,dz \right) \sum_{n=1}^{N} F(a_n) \Delta_{2k-1}^{n}(\rho) + \right.
$$

$$
\left. + \frac{1}{\Delta(\rho)} \sum_{k=1}^{m} (i\rho)^{\nu} \left[\eta_{k2}^{(\nu)}(x)\right] \exp\left(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \Theta^{(2)}(z)\,dz \right) \sum_{n=1}^{N} F(a_n) \Delta_{2k}^{n}(\rho) \right| \leqslant
$$

$$
\leqslant NC \max|F(a_n)||\rho|^{\nu} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{\left|\rho^{d} \exp\left(-i\rho \int\limits_{\Gamma} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} \right)\right|}{|\Delta(\rho)|} \left|\left[\eta_{k1}^{(\nu)}(x)\right]\right| \times \right.
$$

$$
\times \left| \exp\left(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \Theta^{(1)}(z)\,dz \right) \right| + \sum_{k=1}^{m} \frac{\left|\rho^{\nu} \exp\left(-i\rho \int\limits_{\Gamma\setminus\gamma_k} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} \right)\right|}{|\Delta(\rho)|} \left|\left[\eta_{k2}^{(\nu)}(x)\right]\right| \times \tag{1.18}
$$

$$
\left. \times \left| \exp\left(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \Theta^{(2)}(z)\,dz \right) \right| \right\} \leqslant NC \max|F(a_n)||\rho|^{\nu} \times
$$

$$
\times \sum_{k=1}^{m} \left\{ \left| \frac{\exp\left(-i\rho \int\limits_{\Gamma} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} \right)}{P(\rho)} \right| C_{k1} \left| \exp\left(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \Theta^{(1)}(z)\,dz \right) \right| + \right.
$$

$$
\left. + \left| \frac{\exp\left(-i\rho \int\limits_{\Gamma} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} \right)}{P(\rho)} \right| C_{k2} \left| \exp\left(-i\rho \int\limits_{x}^{b_k} \Theta^{(2)}(z)\,dz \right) \right| \right\}.
$$

Точно также с помощью асимптотических представлений (1.9), (1.10) и неравенств (1.17) получим оценку

$$
\left| \frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu}} H(x,\rho) \right| = \left| \frac{1}{\Delta(\rho)} \sum_{k=1}^{2m} \frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \varphi_k(x,\rho) \sum_{n=1}^{N} F(a_n) \Delta_k^{n}(\rho) \right| \leqslant NC \max|F(a_n)||\rho|^{\nu} \times
$$

$$
\times \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{\left|\rho^{d} \exp\left(i\rho \int\limits_{\Gamma} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} \right)\right|}{|\Delta(\rho)|} \left|\left[\eta_{k1}^{(\nu)}(x)\right]\right| \left| \exp\left(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \Theta^{(1)}(z)\,dz \right) \right| + \right.
$$

$$
\left. + \sum_{k=1}^{m} \frac{\left|\rho^{d} \exp\left(i\rho \int\limits_{\Gamma\setminus\gamma_k} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} \right)\right|}{|\Delta(\rho)|} \left|\left[\eta_{k2}^{(\nu)}(x)\right]\right| \left| \exp\left(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \Theta^{(2)}(z)\,dz \right) \right| \right\} \leqslant \tag{1.19}
$$

$$
\leqslant NC \max|F(a_n)|\,|\rho|^{\nu} \sum_{k=1}^{m} \left\{ C_{k1} \left| \frac{\exp\left(i\rho \int\limits_{\Gamma} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} \right)}{P(\rho)} \right| \left| \exp\left(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \Theta^{(1)}(z)\,dz \right) \right| + \right.
$$

$$+ C_{k2}\left|\frac{\exp\Big(i\rho\int\limits_{\Gamma}\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}\Big)}{P(\rho)}\right|\left|\exp\Big(-i\rho\int\limits_{x}^{b_k}\Theta^{(2)}(z)\,dz\Big)\right|\Bigg\},$$

справедливую в нижней полуплоскости.

Если из ρ-плоскости выбросить внутренности малых кругов с центрами в нулях $\Delta(\rho)$ радиуса r, то согласно теореме 1 в оставшейся части полуплоскости $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\exp\Big(-i\rho\int\limits_{\Gamma}\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}\Big)}{P(\rho)}\right| \leqslant C_r^+,$$

где C_r^+ — число, зависящее только от r.

Аналогично, после выбрасывания из ρ-плоскости внутренностей кругов с центрами в нулях $\Delta(\rho)$ в оставшейся части полуплоскости $\operatorname{Im}\rho < 0$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{\exp\Big(i\rho\int\limits_{\Gamma}\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}\Big)}{P(\rho)}\right| \leqslant C_r^-.$$

Таким образом, из последних неравенств и оценок (1.18), (1.19) следует

Теорема 2. *Если из ρ-плоскости выбросить внутренности кругов с центрами в нулях $\Delta(\rho)$, то в оставшейся части ρ-плоскости будет выполняться неравенство*

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}H(x,\rho)\right| \leqslant |\rho|^\nu \max\big|F(a_n)\big|\sum_{k=1}^{m}\Bigg\{C_{k1}\left|\exp\Big(i\rho\int\limits_{a_k}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\Big)\right|+\\ +C_{k2}\left|\exp\Big(-i\rho\int\limits_{x}^{b_k}\Theta^{(2)}(z)\,dz\Big)\right|\Bigg\},\end{gathered} \tag{1.20}$$

где C_{k1}, C_{k2} — числа, зависящие только от радиуса выбрасываемых кругов.

1.6. Асимптотическое представление функции Грина. Теперь займемся установлением асимптотического представления функции $G(x,\xi,\rho)$, определенной в (1.4). Для этого, прежде всего, нужно получить представление для $K_k(x,\xi,\rho)$. В связи с этим рассмотрим функции

$$y_k^{(1)}(\xi,\rho) = -\frac{\varphi_{2k-1}(\xi,\rho)}{W_k(\xi,\rho)} \quad \text{и} \quad y_k^{(2)}(\xi,\rho) = \frac{\varphi_{2k}(\xi,\rho)}{W_k(\xi,\rho)}. \tag{1.21}$$

Подставим (1.10) и (1.11) в (1.21) и после простых вычислений получаем асимптотические представления

$$\begin{gathered}y_k^{(1)}(\xi,\rho) = \frac{1}{i\rho}\big[\zeta_k^{(1)}(\xi)\big]\exp\Big(-i\rho\int\limits_{a_k}^{\xi}\Theta^{(1)}(z)\,dz\Big),\\ y_k^{(2)}(\xi,\rho) = \frac{1}{i\rho}\big[\zeta_k^{(2)}(\xi)\big]\exp\Big(-i\rho\int\limits_{a_k}^{\xi}\Theta^{(2)}(z)\,dz\Big),\end{gathered} \tag{1.22}$$

справедливые как в полуплоскости $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, так и в полуплоскости $\operatorname{Im}\rho < 0$. При этом $\zeta_k^{(1)}(\xi) = \left(2\left[\eta_{k1}^{(1)}(\xi)\right]\right)^{-1}$, $\zeta_k^{(2)}(\xi) = \left(2\left[\eta_{k2}^{(1)}(\xi)\right]\right)^{-1}$.

В обозначениях (1.21) формулу (1.6) можно записать в виде

$$K_k(x,\xi,\rho) = \begin{cases} 0, & \xi\in\gamma_n,\ x\in\gamma_j,\ n\neq j; \\ \frac{1}{2}\left\{\varphi_{2k-1}(x,\rho)y_k^{(1)}(\xi,\rho) + \varphi_{2k}(x,\rho)y_k^{(2)}(\xi,\rho)\right\}, & \\ & \overline{\gamma}_k = [a_k,b_k],\ a_k\leqslant\xi\leqslant x\leqslant b_k; \\ -\frac{1}{2}\left\{\varphi_{2k-1}(x,\rho)y_k^{(1)}(\xi,\rho) + \varphi_{2k}(x,\rho)y_k^{(2)}(\xi,\rho)\right\}, & \\ & \overline{\gamma}_k = [a_k,b_k],\ a_k\leqslant x\leqslant\xi\leqslant b_k. \end{cases} \tag{1.23}$$

Асимптотические представления элементов первой строки определителя (1.5), полученные с помощью формул (1.10), (1.21) и (1.22) содержат показательные функции с неотрицательными вещественными частями показателей и следовательно, при $|\rho|\to+\infty$ они могут возрастать, что может мешать сходимости контурных интегралов, которые будут рассматриваться в дальнейшем. В связи с этим определитель (1.5) преобразуем так, чтобы первый столбец полученного в результате определителя не содержал показательных функций с неотрицательными вещественными частями показателей. Для этого в определителе (1.5) умножим $2k$-й столбец на $\frac{1}{2}y_k^{(1)}(\xi,\rho)$, а $(2k-1)$-й столбец умножим на $-\frac{1}{2}y_k^{(2)}(\xi,\rho)$ и сложим оба полученных столбца с первым. Полученный после этого определитель обозначим $\Delta_k^0(x,\xi,\rho)$. Согласно известным свойствам определителей $\Delta_k^0(x,\xi,\rho) = \Delta_k(x,\xi,\rho)$. Элементы первого столбца определителя $\Delta_k^0(x,\xi,\rho)$ обозначим через $K_k^0(x,\xi,\rho)$, $l_j(K_k^0(\cdot,\xi,\rho))$.

Из формулы (1.23) имеем

$$K_k^0(x,\xi,\rho) = K_k(x,\xi,\rho) + \frac{1}{2}\varphi_{2k-1}(x,\rho)y_k^{(1)}(\xi,\rho) - \frac{1}{2}\varphi_{2k}(x,\rho)y_k^{(2)}(\xi,\rho) =$$
$$= \begin{cases} 0, & \xi\in\gamma_n,\ x\in\gamma_j,\ n\neq j; \\ \varphi_{2k-1}(x,\rho)y_k^{(1)}(\xi,\rho), & \overline{\gamma}_k = [a_k,b_k],\ a_k\leqslant\xi\leqslant x\leqslant b_k; \\ -\varphi_{2k}(x,\rho)y_k^{(2)}(\xi,\rho), & \overline{\gamma}_k = [a_k,b_k],\ a_k\leqslant x\leqslant\xi\leqslant b_k. \end{cases} \tag{1.24}$$

Подставляя (1.10), (1.11) и (1.22) в (1.24), получим асимптотическое представление

$$\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}K_k^0(x,\xi,\rho) = \begin{cases} 0, & \xi\in\gamma_n,\ x\in\gamma_j,\ n\neq j; \\ (i\rho)^{\nu-1}\left[\mu_{k1}^{(\nu)}(x,\xi)\right]\exp\left(i\rho\int\limits_\xi^x\Theta^{(1)}(z)\,dz\right), & \\ & \overline{\gamma_k} = [a_k,b_k],\ a_k\leqslant\xi\leqslant x\leqslant b_k; \\ -(i\rho)^{\nu-1}\left[\mu_{k2}^{(\nu)}(x,\xi)\right]\exp\left(i\rho\int\limits_\xi^x\Theta^{(2)}(z)\,dz\right), & \\ & \overline{\gamma_k} = [a_k,b_k],\ a_k\leqslant x\leqslant\xi\leqslant b_k, \end{cases} \tag{1.25}$$

справедливое как в полуплоскости $\operatorname{Im}\rho\geqslant 0$, так и в полуплоскости $\operatorname{Im}\rho < 0$, где

$$\mu_{k1}^{(\nu)}(x,\xi) = \eta_{k1}^{(\nu)}(x)\zeta_k^{(1)}(\xi), \quad \mu_{k2}^{(\nu)}(x,\xi) = \eta_{k2}^{(\nu)}(x)\zeta_k^{(2)}(\xi).$$

Обозначим через $\Delta^0_{1,2k-1}(\xi,\rho)$ и $\Delta^0_{1,2k}(\xi,\rho)$ алгебраические дополнения определителя $\Delta^0_k(x,\xi,\rho)$. Тогда имеем

$$\Delta^0_{1,2k-1}(\xi,\rho)=\begin{vmatrix} l_1(\varphi_1(\cdot,\rho)) & \dots & l_1(K^0_k(\cdot,\xi,\rho)) & l_1(\varphi_{2k}(\cdot,\rho)) & \dots & l_1(\varphi_{2m}(\cdot,\rho)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{2m}(\varphi_1(\cdot,\rho)) & \dots & l_{2m}(K^0_k(\cdot,\xi,\rho)) & l_{2m}(\varphi_{2k}(\cdot,\rho)) & \dots & l_{2m}(\varphi_{2m}(\cdot,\rho)) \end{vmatrix},$$

$$\Delta^0_{1,2k}(\xi,\rho)=\begin{vmatrix} l_1(\varphi_1(\cdot,\rho)) & \dots & l_1(\varphi_{2k-1}(\cdot,\rho)) & l_1(K^0_k(\cdot,\xi,\rho)) & \dots & l_1(\varphi_{2m}(\cdot,\rho)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{2m}(\varphi_1(\cdot,\rho)) & \dots & l_{2m}(\varphi_{2k-1}(\cdot,\rho)) & l_{2m}(K^0_k(\cdot,\xi,\rho)) & \dots & l_{2m}(\varphi_{2m}(\cdot,\rho)) \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим ребро $\gamma_k=(a_k,b_k)$ графа Γ, параметризованное от a_k к b_k. Если теперь рассматривать определитель $\Delta^0_{1,2k-1}(\xi,\rho)$ как определитель блочной матрицы также, как это делалось при рассмотрении $\Delta(\rho)$, то все блоки $\mathscr{B}(a_j)$, за исключением $\mathscr{B}(a_k)$ и $\mathscr{B}(b_k)$, будут иметь тот же вид, что и для характеристического определителя $\Delta(\rho)$, так как у всех этих блоков столбцы, соответствующие ребру γ_k, состоят из нулей. А в блоках $\mathscr{B}(a_k)$ и $\mathscr{B}(b_k)$ изменяются столбцы с номером $(2k-1)$. Точнее, в матрице $\mathscr{B}(a_k)$ (формула (1.11)) вместо элементов вида $[1]e^{(1)}_k(a_k)$ будут стоять $-[1]e^{(2)}_k(a_k)y^{(2)}_k(\xi,\rho)$, а вместо элемента $[S^{(1)}_k(a_k)]e^{(1)}_k(a_k)$ будет стоять $-[S^{(2)}_k(a_k)]e^{(2)}_k(a_k)y^{(2)}_k(\xi,\rho)$. Что же касается матрицы $\mathscr{B}(b_k)$, то элементы $(2k-1)$-го столбца домножатся на $y^{(1)}_k(\xi,\rho)$.

Представим определитель $\Delta^0_{1,2k-1}(\xi,\rho)$ в виде суммы ненулевых слагаемых

$$\Delta^0_{1,2k-1}(\xi,\rho)=\sum_n \varepsilon_n M_{\tau_n}(a_1)\dots M_{\chi_n}(a_k,\xi)M_{\sigma_n}(b_k,\xi)\dots M_{\omega_n}(a_N). \tag{1.26}$$

При этом элементы $(2k-1)$-го столбца определителя $\Delta^0_{1,2k-1}(\xi,\rho)$ обязательно попадут либо в $M_{\chi_n}(a_k,\xi)$, либо в $M_{\sigma_n}(b_k,\xi)$. В противном случае элементы этого столбца должны попасть в какой-либо из оставшихся миноров, а значит, этот минор содержит нулевой столбец. Если элементы $(2k-1)$-го столбца входят в какой-нибудь из миноров $M_{\chi_n}(a_k,\xi)$, то в нем общим множителем является $y^{(2)}_k(\xi,\rho)$. А в минорах $M_{\sigma_n}(b_k,\xi)$, содержащих элементы $(2k-1)$-го столбца, общим множителем является $y^{(1)}_k(\xi,\rho)\exp\big(i\rho\int_{\gamma_k}\Theta^{(1)}(z)\,dz\big)$. Вынесем, где возможно, общие множители элементов $(2k-1)$-го столбца в каждом произведении из (1.26). Тогда с помощью формул (1.9), (1.10) и (1.22) сумма (1.26) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}\Delta^0_{1,2k-1}(\xi,\rho)=\exp\bigg(-i\rho\int\limits_{a_k}^{\xi}\Theta^{(2)}(z)\,dz\bigg)\frac{1}{i\rho}\big[\zeta^{(2)}_k(\xi)\big]\mathscr{E}^{(1)}_{k1}(\rho)+\\ +\exp\bigg(i\rho\int\limits_{\xi}^{b_k}\Theta^{(1)}(z)\,dz\bigg)\frac{1}{i\rho}\big[\zeta^{(1)}_k(\xi)\big]\mathscr{E}^{(1)}_{k2}(\rho).\end{aligned} \tag{1.27}$$

Первое слагаемое отвечает произведениям, у которых элементы $(2k-1)$-го столбца входят в $M_{\chi_n}(a_k,\xi)$, а второе — у которых элементы $(2k-1)$-го столбца входят в $M_{\sigma_n}(b_k,\xi)$.

Теперь получим асимптотическую формулу для $\Delta^0_{1,2k}(\xi,\rho)$. Если опять ребро

$\gamma_k = (a_k, b_k)$ параметризовано от a_k к b_k, то в матрице $\mathscr{B}(a_k)$ элементы столбца с номером $2k$ домножатся на $-y_k^{(2)}(\xi,\rho)$, а в матрице $\mathscr{B}(b_k)$ в $(2k)$-м столбце элементы вида $[1]e_k^{(2)}(b_k)$ меняются на $[1]e_k^{(1)}(b_k)y_k^{(1)}(\xi,\rho)$, а $\big[S_k^{(2)}(b_k)\big]e_k^{(2)}(b_k)$ меняются на $\big[S_k^{(1)}(b_k)\big]e_k^{(1)}(b_k)y_k^{(1)}(\xi,\rho)$. Поэтому для $\Delta^0_{1,2k}(\xi,\rho)$ можно получить представление

$$\begin{gathered}\Delta^0_{1,2k}(\xi,\rho) = \exp\Big(-i\rho\int\limits_{a_k}^{\xi}\Theta^{(2)}(z)\,dz\Big)\frac{1}{i\rho}\big[\zeta_k^{(2)}(\xi)\big]\mathscr{E}^{(2)}_{k1}(\rho)+\\ +\exp\Big(i\rho\int\limits_{\xi}^{b_k}\Theta^{(1)}(z)\,dz\Big)\frac{1}{i\rho}\big[\zeta_k^{(1)}(\xi)\big]\mathscr{E}^{(2)}_{k2}(\rho).\end{gathered} \tag{1.28}$$

В формулах (1.27) и (1.28) $\mathscr{E}^{(n)}_{ks}(\rho)$, $n,s=1,2$, — выражения вида

$$\mathscr{E}^{(n)}_{ks}(\rho) = \sum_j P^{(n)}_{sj}(\rho)e^{i\rho m^{(n)}_{sj}},$$

в которых $P^{(n)}_{sj}$ — многочлены степени не выше d, $\max|m^{(n)}_{sj}| \leqslant \int\limits_{\Gamma}\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$. Более того, поскольку в определителе $\Delta^0_{1,2k}(\xi,\rho)$ нет элементов с множителем $\exp\big(i\rho\int_{\gamma_k}\Theta^{(2)}(z)\,dz\big)$, растущим по абсолютной величине при $|\rho|\to+\infty$, то $\max|m^{(2)}_{sj}| \leqslant \int_{\Gamma\setminus\gamma_k}\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}$. Поэтому, если из ρ-плоскости выбросить внутренности кругов малого радиуса r с центром в нулях $\Delta(\rho)$, то в оставшейся части ρ-плоскости будут выполняться неравенства

$$\left|\frac{\mathscr{E}^{(1)}_{ks}(\rho)}{\Delta(\rho)}\right| \leqslant C_r, \quad \left|\frac{\mathscr{E}^{(2)}_{ks}\exp\Big(i\rho\int\limits_{\gamma_k}\Theta^{(2)}(z)\,dz\Big)}{\Delta(\rho)}\right| \leqslant C_r, \quad k=\overline{1,m},\ s=1,2. \tag{1.29}$$

Таким образом, из (1.27)–(1.29) следует

Теорема 3. *Если из ρ-плоскости выбросить внутренности малых кругов радиуса r с центрами в нулях характеристического определителя $\Delta(\rho)$, то в оставшейся части ρ-плоскости имеет место асимптотическое представление*

$$\begin{gathered}\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}G(x,\xi,\rho) = \sum_{k=1}^m\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}K_k(x,\xi,\rho) + (i\rho)^{\nu-1}\sum_{k=1}^m\big[\eta^{(\nu)}_{k1}(x)\big]\times\\ \times\exp\Big(i\rho\int\limits_{a_k}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\Big)\Bigg\{\exp\Big(-i\rho\int\limits_{a_k}^{\xi}\Theta^{(2)}(z)\,dz\Big)\big[\zeta_k^{(2)}(\xi)\big]\frac{\mathscr{E}^{(1)}_{k1}(\rho)}{\Delta(\rho)}+\\ +\exp\Big(i\rho\int\limits_{\xi}^{b_k}\Theta^{(1)}(z)\,dz\Big)\big[\zeta_k^{(1)}(\xi)\big]\frac{\mathscr{E}^{(1)}_{k2}(\rho)}{\Delta(\rho)}\Bigg\} + (i\rho)^{\nu-1}\sum_{k=1}^m\big[\eta^{(\nu)}_{k2}(x)\big]\times\\ \times\exp\Big(-i\rho\int\limits_{x}^{b_k}\Theta^{(2)}(z)\,dz\Big)\Bigg\{\exp\Big(-i\rho\int\limits_{a_k}^{\xi}\Theta^{(2)}(z)\,dz\Big)\big[\zeta_k^{(2)}(\xi)\big]+\end{gathered} \tag{1.30}$$

$$+\frac{\mathscr{E}_{k1}^{(2)}(\rho)\exp\left(i\rho\int\limits_{\gamma_k}\Theta^{(2)}(z)\,dz\right)}{\Delta(\rho)}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{b_k}\Theta^{(1)}(z)\,dz\right)\left[\zeta_k^{(1)}(\xi)\right]\times$$

$$\left.\times\frac{\mathscr{E}_{k2}^{(2)}(\rho)\exp\left(i\rho\int\limits_{\gamma_k}\Theta^{(2)}(z)\,dz\right)}{\Delta(\rho)}\right\},$$

где асимптотическое представление

$$\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}K_k(x,\xi,\rho),\quad \nu=0,1,2,$$

дается формулой (1.25), *а функции* $\frac{\mathscr{E}_{ks}^{(1)}(\rho)}{\Delta(\rho)}$ *и* $\frac{\mathscr{E}_{ks}^{(2)}(\rho)\exp\left(i\rho\int\limits_{\gamma_k}\Theta^{(2)}(z)\,dz\right)}{\Delta(\rho)}$ *ограничены некоторым числом в части* ρ*-плоскости, оставшейся после удаления внутренностей кругов с центрами в нулях* $\Delta(\rho)$.

§ 2. Теорема существования решения задачи (1)–(4)

2.1. Существование решения однородного уравнения с неоднородными краевыми условиями и нулевым начальным условием. Обозначим через Π полосу комплексной ρ-плоскости

$$\Pi=\left\{\rho\in\mathbb{C}\,\Big|\,-\int\limits_{\Gamma}\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}\leqslant\operatorname{Im}\rho\leqslant\int\limits_{\Gamma}\frac{dx}{\sqrt{p(x)}}\right\}.$$

Как следует из теоремы 1, нули характеристического определителя $\Delta(\rho)$ спектральной задачи (1.1)–(1.3) лежат в полосе Π.

Пусть $\psi\in(0,\frac{\pi}{4})$. Обозначим через L разомкнутый контур, лежащий в верхней полуплоскости комплексной ρ-плоскости, не имеющий общих точек с множеством Π и такой, что прямые $\arg\rho=\psi$ и $\arg\rho=\pi-\psi$ являются асимптотами.

Теорема 4. *При* $f(x,t)\equiv 0$, $\Phi(x)\equiv 0$ *решение задачи* (1)–(4) *существует и может быть представлено формулой*

$$u_1(x,t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L e^{-\rho^2 t}\frac{H(x,\rho)}{\rho}d\rho, \tag{2.1}$$

где функция $H(x,\rho)$ *определяется формулой* (1.7).

$\lhd$ Для $\nu=0,1,2$ и $s=0,1,2,\dots$ определим интегралы

$$\mathscr{J}_{\nu,s}(L)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L e^{-\rho^2 t}\frac{(-\rho^2)^s}{\rho}\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}H(x,\rho)\,d\rho, \tag{2.2}$$

которые получаются формальным дифференцированием под знаком интеграла в правой части (2.1) по переменной t s раз и ν раз по переменной x. Покажем, что интегралы (2.2) сходятся равномерно относительно $x\in\Gamma$ и $t\in(0,T]$.

Пусть Q_n — круги малого радиуса с центрами в нулях характеристического определителя $\Delta(\rho)$ спектральной задачи. Обозначим через O_n последовательность окружностей радиусов r_n с центром в начале координат ρ-плоскости, не пересекающих кругов Q_n, где $r_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Пусть, далее, L_n есть часть контура L, расположенная внутри окружности O_n. Предположим, что $L \backslash L_n$ совпадает с достаточно отдаленными частями прямых, определяемых уравнениями $\arg\rho = \psi$ и $\arg\rho = \pi - \psi$ (см. рис. 1). Через R_n обозначим точки пересечения контура L с окружностями O_n, лежащие в полуплоскости $\Re\rho > 0$, а через R'_n — симметричные точкам R_n относительно мнимой оси.

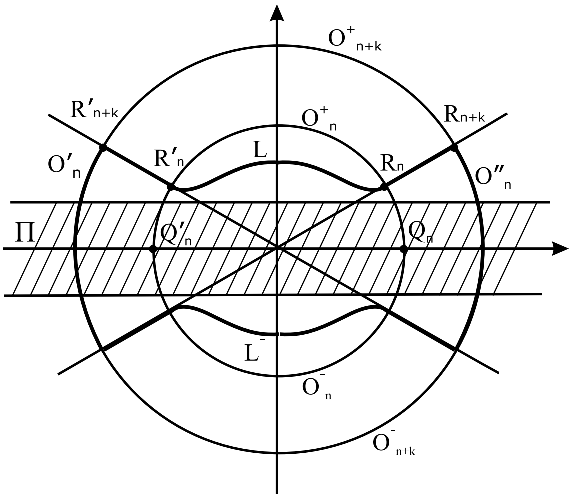

Рис. 1.

Очевидно, что для доказательства равномерной сходимости интегралов (2.2) достаточно показать, что части этих интегралов по отдаленным кускам $R_n R_{n+j}$ и $R'_n R'_{n+j}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$ для всех j равномерно относительно $t \in (0, T]$ и $x \in \Gamma$.

Рассмотрим функцию $H(x, \rho)$. В силу теоремы 2 имеет место оценка (1.20). Из определения величин $\Theta^{(1)}$ и $\Theta^{(2)}$ следует, что в правой части неравенства (1.20) показатели экспонент имеют отрицательные вещественные части. Поэтому можно записать неравенство

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} H(x, \rho)\right| \leqslant C_\nu \left|\rho\right|^\nu, \quad \nu = 0, 1, 2\,, \tag{2.3}$$

где C_ν — константы, зависящие только от радиусов выбрасываемых из П кругов Q_n.

Рассмотрим интеграл $\mathscr{J}_{\nu,s}(R_n R_{n+j})$. Учитывая (2.3), получим

$$\begin{aligned} \left|\mathscr{J}_{\nu,s}(R_n R_{n+j})\right| &= \left|\int\limits_{R_n R_{n+j}} e^{-\rho^2 t} \frac{(-\rho^2)^s}{\rho} \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} H(x, \rho)\, d\rho\right| \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{R_n R_{n+j}} \left|e^{-\rho^2 t}\right| \left|\rho\right|^{2s-1} \left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} H(x, \rho)\right| |d\rho| \leqslant \\ &\leqslant C_\nu \int\limits_{R_n R_{n+j}} \exp\big(-t|\rho|^2 \cos(2\arg\rho)\big) |\rho|^{2s-1+\nu}\, |d\rho|. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Поскольку при достаточно больших n отрезок $R_n R_{n+j}$ лежит на прямой $\arg\rho = \psi$ и $\psi \in (0, \frac{\pi}{4})$, то $\cos(2\arg\rho) > 0$. Поэтому при $n \to \infty$ подынтегральная функция убывает быстрее любой степени ρ^{-1}, а значит, $\mathscr{J}(P_n P_{n+j}) \to 0$ при $n \to +\infty$ равномерно относительно $t > 0$ и $x \in \Gamma$.

Аналогичное утверждение верно и для $\mathscr{J}_{\nu,s}(R'_nR'_{n+j})$. Действительно, на $R'_nR'_{n+j}$ выполняется неравенство, аналогичное (2.4). Поскольку $R'_nR'_{n+j}$ является отрезком прямой $\arg\rho = \pi - \psi$, то и в этом случае выполняется неравенство $\cos(2\pi - 2\arg\rho) > 0$, позволяющее делать заключение о сходимости к нулю интеграла $\mathscr{J}_{\nu,s}(R'_nR'_{n+j})$ при $n \to +\infty$, равномерной по $t > 0$ и $x \in \Gamma$.

Если $t = 0$, то при любом фиксированном $x \in \Gamma$ имеем, с учетом (1.20):

$$\Big|\mathscr{J}_{0,0}(R_nR_{n+j})\Big| = \Bigg|\int\limits_{R_nR_{n+j}} \frac{H(x,\rho)}{\rho}\,d\rho\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{R_nR_{n+j}} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{|\rho|}\Bigg\{C_{k1}\Bigg|\exp\Bigg(i\rho\int\limits_{a_k}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\Bigg)\Bigg| + C_{k2}\Bigg|\exp\Bigg(-i\rho\int\limits_{x}^{b_k}\Theta^{(2)}(z)\,dz\Bigg)\Bigg|\Bigg\}|d\rho|.$$

Вещественные части показателей степеней экспонент отрицательны, поэтому при достаточно больших значениях n интеграл $\mathscr{J}_{0,0}(R_nR_{n+j})$ стремится к нулю. Аналогичное заключение справедливо и для $\mathscr{J}_{0,0}(R'_nR'_{n+j})$.

Таким образом, интегралы $\mathscr{J}_{\nu,s}(L)$ сходятся равномерно по $x \in \Gamma$ и по $t \in (0,T]$, а интеграл (2.1) сходится равномерно по $t \in [0,T]$ при каждом $x \in \Gamma$. Следовательно, под знаком интеграла (2.1) можно дифференцировать по x два раза, а по t — любое число раз при $x \in \Gamma$ и $t > 0$. При этом функции, определяемые формулой (2.2), принадлежат $C[\Gamma]$ при любом $t \in (0,T]$.

Кроме того, под знаком интегралов (2.2) можно переходить к пределу при $x \to a$, $x \in \Gamma$, $a \in \partial\Gamma \cup V$. В интеграле же (2.1) можно переходить к пределу при $t \to 0$.

Покажем теперь, что функция $u_1(x,t)$, определенная в (2.1), удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2), (3). Подставим интеграл из (2.1) в уравнение (1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_L e^{-\rho^2 t}\frac{H(x,\rho)}{\rho}\,d\rho - \frac{\partial}{\partial x}\Bigg(p(x)\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_L e^{-\rho^2 t}\frac{H(x,\rho)}{\rho}\,d\rho\Bigg) - q(x)\int\limits_L e^{-\rho^2 t}\frac{H(x,\rho)}{\rho}\,d\rho =$$

$$= \int\limits_L \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\Bigg\{-\rho^2 H(x,\rho) - \frac{\partial}{\partial x}\Bigg(p(x)\frac{\partial}{\partial x}H(x,\rho)\Bigg) - q(x)H(x,\rho)\Bigg\}\,d\rho \equiv 0,$$

так как $H(x,\rho)$ есть решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.1).

Далее, ввиду того, что функция $H(\cdot,\rho)$ удовлетворяет всем краевым условиям (1.2), (1.3) при $t > 0$, имеем

$$l_j\Bigg(\frac{1}{\pi i}\int\limits_L e^{-\rho^2 t}\frac{H(\cdot,\rho)}{\rho}\,d\rho\Bigg) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} l_j\big(H(\cdot,\rho)\big)\,d\rho = \frac{c_j}{\pi i}\int\limits_L \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\,d\rho. \qquad (2.5)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_L \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\,d\rho. \qquad (2.6)$$

Обозначим через O_n^+ дугу окружности O_n между точками $R_nR'_n$, лежащую в верхней полуплоскости, а через O_n^- обозначим дугу окружности O_n, симметричную относительно вещественной оси дуге O_n^+. Аналогично, обозначим через

L_n^- контур, симметричный контуру L_n. Пусть O_n' и O_n'' есть части окружности $O_n \backslash (O_n^+ \cup O_n^-)$ (см. рис. 1). Наконец, обозначим через Ω_n замкнутый контур, являющийся объединением кривых $L_n \cup O_n' \cup L_n^- \cup O_n''$. Тогда, в силу свойств подынтегрального выражения в (2.6), как функции от ρ, имеем

$$\int\limits_{L_n} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\, d\rho = \int\limits_{L_n^-} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\, d\rho. \tag{2.7}$$

Кроме того, в силу определения дуг O_n' и O_n'', имеем

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int\limits_{O_n'} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\, d\rho \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \int\limits_{O_n''} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\, d\rho \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \int\limits_{-\psi}^{\psi} \exp\big(-tr_n^2\, e^{i2\varphi}\big) i\, d\varphi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\psi}^{\psi} e^{-r_n^2 \cos 2\varphi}\, d\varphi = 0.$$

Т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{O_n'} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\, d\rho = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{O_n'} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\, d\rho = 0. \tag{2.8}$$

Используя (2.7), (2.8) и интегральную формулу Коши, получим:

$$\int\limits_{L} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\, d\rho = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{L_n} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\, d\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(\int\limits_{L_n} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\, d\rho + \int\limits_{L_n^-} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\, d\rho \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_{L_n} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\, d\rho + \int\limits_{O_n'} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\, d\rho + \int\limits_{L_n^-} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\, d\rho + \int\limits_{O_n''} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\, d\rho \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_n} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho}\, d\rho = \pi i.$$

Подставляя полученное значение в правую часть (2.5), убеждаемся, что функция $u_1(x,t)$ из (2.1) удовлетворяет краевым условиям (2), (3).

Для завершения доказательства остается показать, что функция $u_1(x,t)$ удовлетворяет начальному условию. Используем равномерную по $t \in [0,T]$ сходимость интеграла (2.1) при каждом $x \in \Gamma$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{L} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} H(x,\rho)\, d\rho = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{L} \frac{H(x,\rho)}{\rho}\, d\rho = \frac{1}{\pi i} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{L_n} \frac{H(x,\rho)}{\rho}\, d\rho.$$

Так как контур L_n лежит вне полосы Π, то функция $\frac{H(x,\rho)}{\rho}$ аналитична по ρ в области, ограниченной кривыми L_n и O_n^+. Поэтому

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{1}{\pi i} \int\limits_{L} e^{-\rho^2 t} \frac{H(x,\rho)}{\rho}\, d\rho \right| = \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \left| \int\limits_{O_n^+} \frac{H(x,\rho)}{\rho}\, d\rho \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \int\limits_{O_n^+} \sum_{k=1}^{m} \left\{ C_{k1} \left| \exp\left(i\rho \int\limits_{a_k}^{x} \Theta^{(1)}(z)\, dz \right) \right| + C_{k2} \left| \exp\left(-i\rho \int\limits_{x}^{b_k} \Theta^{(2)}(z)\, dz \right) \right| \right\} \left| \frac{d\rho}{\rho} \right|.$$

Согласно определению $\Theta^{(1)}(x)$ и $\Theta^{(2)}(x)$ вещественные части степеней экспонент отрицательны при достаточно больших значениях n. Поэтому подынтегральные функции в правой части последнего неравенства при $\rho \in O_n^+$ убывают быстрее любой степени ρ^{-1}. Следовательно,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\pi i} \int\limits_L e^{-\rho^2 t} \, \frac{H(x,\rho)}{\rho} \, d\rho = 0. \ \triangleright$$

Замечание 1. Теорема остается справедливой, если в формуле (2.1) заменить контур L на контур L^-, симметричный относительно вещественной оси.

2.2. Существование решения однородного уравнения с однородными краевыми условиями и ненулевым начальным условием.

Теорема 5. *Решение задачи* (1)–(4) *при* $F(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma \cup V$ *и* $\Phi \in C^2[\Gamma]$ *существует. Это решение представляется в виде*

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_L \rho \int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\, e^{-\rho^2 t} \, \frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)} \, d\xi \, d\rho, \tag{2.9}$$

где $G(x,\xi,\rho)$ — *функция Грина, определяемая формулой* (1.4).

$\triangleleft$ Согласно теореме 3 и в силу выбора контура L, производные от решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (1) с однородными условиями (2), (3), ограничены на контуре L равномерно по $x \in \Gamma$. Следовательно, имеет место неравенство

$$\Bigg| \int\limits_{R_n R_{n+j}} e^{-\rho^2 t} \rho^{2s+1} \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho) \, \frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)} \, d\xi \, d\rho \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{r_n}^{r_{n+j}} \exp\Big(-t|\rho|^2 \cos(2\arg\rho)\Big) |\rho|^{2s+\nu} |d\rho| \leqslant$$

$$\leqslant C \exp\left(-\frac{1}{2}\, t\, r_n^2 \cos(2\arg\psi)\right) \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\, t|\rho|^2 \cos(2\arg\psi)\right) |\rho|^{2s+\nu} |d\rho| =$$

$$= \frac{2\,C \exp\Big(-\frac{1}{2}\, t\, r_n^2 \cos(2\arg\psi)\Big)}{\Big(\sqrt{t\cos(2\arg\psi)}\Big)^{2s+\nu+1}} \int\limits_0^\infty e^{-\tau^2} \tau^{2s+\nu} \, d\tau,$$

где C — постоянное число. Из этого неравенства следует равномерная сходимость интеграла

$$\int\limits_L \rho^{2s+1} e^{-\rho^2 t} \int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho) \, \frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)} \, d\xi \tag{2.10}$$

относительно $x \in \Gamma$ и $t \in (0,T]$, что обеспечивает возможность дифференцирования под знаком интеграла по контуру L. Следовательно, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial x}\,u_2(x,t)\right)+q(x)\,u_2(x,t)-\frac{\partial}{\partial t}\,u_2(x,t)=$$
$$=\frac{-1}{\pi i}\int\limits_L \rho\,e^{-\rho^2 t}\left(p(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\,p(x)+q(x)+\rho^2\right)\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\,\frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi\,d\rho=$$
$$=\frac{-1}{\pi i}\int\limits_L \rho\,e^{-\rho^2 t}\Phi(x)\,d\rho=\frac{\Phi(x)}{\pi i}\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega_n}\rho\,e^{-\rho^2 t}\,d\rho=0.$$

Таким образом, функция $u_2(x,t)$, определенная формулой (2.9), удовлетворяет однородному уравнению (1), причем функции, определяемые интегралами (2.10), принадлежат $C[\Gamma]$ при $t>0$.

Далее, так как функция

$$\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\,\frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi$$

является решением спектральной задачи (1.1)–(1.3) при однородных краевых условиях, то, подставляя $u_2(x,t)$ в краевые условия (2.2), (2.4) и учитывая $F(a)=0$, получим

$$\frac{-1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \rho\,e^{-\rho^2 t}l_j\left(\int\limits_\Gamma G(\cdot,\xi,\rho)\,\frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi\right)d\rho=0.$$

Остается показать, что функция $u_2(x,t)$ удовлетворяет начальному условию. Для этого рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} I(x,t)&=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \rho\,e^{-\rho^2 t}\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\,\frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi-\Phi(x)=\\ &=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \rho\,e^{-\rho^2 t}\left\{\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\,\frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi-\frac{1}{\rho^2}\,\Phi(x)\right\}d\rho. \end{aligned}\tag{2.11}$$

Покажем, что интеграл (2.11) сходится равномерно по $t\in[0,T]$ при каждом $x\in\Gamma$. После этого переходом к пределу при $t\to 0$ покажем, что $I(x,t)\to 0$.

Воспользуемся асимптотическим представлением (1.25). На ребре γ_k имеем:

$$\int\limits_{\gamma_k} K_k(x,\xi,\rho)\,\frac{\Phi_k(\xi)}{p_k(\xi)}\,d\xi-\frac{1}{\rho^2}\,\Phi_k(x)=$$
$$=\frac{1}{i\rho}\int\limits_{a_k}^{x}\left[\mu_{k1}^{(0)}(x,\xi)\right]\exp\left(i\rho\int\limits_\xi^x\Theta^{(1)}(z)\,dz\right)\frac{\Phi_k(\xi)}{p_k(\xi)}\,d\xi-$$
$$-\frac{1}{i\rho}\int\limits_x^{b_k}\left[\mu_{k2}^{(0)}(x,\xi)\right]\exp\left(-i\rho\int\limits_x^\xi\Theta^{(2)}(z)\,dz\right)\frac{\Phi_k(\xi)}{p_k(\xi)}\,d\xi-\frac{1}{\rho^2}\,\Phi_k(x).$$

Учитывая, что $p \in C^2[\Gamma]$, проинтегрируем по частям два раза:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\rho^2}\frac{\left[\mu_{k1}^{(0)}(x,x)\right]}{\Theta_k^{(1)}(x)}\,\frac{\Phi_k(x)}{p_k(x)}-\frac{\exp\Bigl(i\rho\int\limits_{a_k}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\Bigr)}{\rho^2\Theta_k^{(1)}(a_k)}\left[\mu_{k1}^{(0)}(x,a_k)\right]\frac{\Phi_k(a_k)}{p_k(a_k)}+ \\
+\frac{1}{\rho^2}\Biggl\{\frac{1}{\Theta_k^{(1)}(\xi)}\exp\Biggl(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\Biggr)\frac{\partial}{\partial\xi}\,\frac{\left[\mu_{k1}^{(0)}(x,\xi)\right]\Phi_k(\xi)}{\Theta_k^{(1)}(\xi)\,p_k(\xi)}\Biggr|_{a_k}^{x}+ \\
+\int\limits_{a_k}^{x}\exp\Biggl(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\Biggr)\frac{\partial}{\partial\xi}\Biggl(\frac{1}{\Theta_k^{(1)}(\xi)}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,\frac{\left[\mu_{k1}^{(0)}(x,\xi)\right]\Phi_k(\xi)}{\Theta_k^{(1)}(\xi)\,p_k(\xi)}\Biggr)\,d\xi\Biggr\}- \\
-\frac{\exp\Bigl(-i\rho\int\limits_{x}^{b_k}\Theta^{(2)}(z)\,dz\Bigr)}{\rho^2\Theta_k^{(2)}(b_k)}\,\frac{\Phi_k(b_k)}{p_k(b_k)}+\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\left[\mu_{k2}^{(0)}(x,x)\right]}{\Theta_k^{(2)}(x)}\,\frac{\Phi_k(x)}{p_k(x)}- \\
-\frac{1}{\rho^2}\Biggl\{\frac{1}{\Theta_k^{(2)}(\xi)}\exp\Biggl(-i\rho\int\limits_{x}^{\xi}\Theta^{(2)}(z)\,dz\Biggr)\frac{\partial}{\partial\xi}\,\frac{\left[\mu_{k2}^{(0)}(x,\xi)\right]\Phi_k(\xi)}{\Theta_k^{(2)}(\xi)\,p_k(\xi)}\Biggr|_{x}^{b_k}- \\
-\int\limits_{x}^{b_k}\exp\Biggl(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\Biggr)\frac{\partial}{\partial\xi}\Biggl(\frac{1}{\Theta_k^{(2)}(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\left[\mu_{k2}^{(0)}(x,\xi)\right]\Phi_k(\xi)}{\Theta_k^{(2)}(\xi)\,p_k(\xi)}\Biggr)d\xi\Biggr\}-\frac{1}{\rho^2}\Phi_k(x).
\end{gathered} \tag{2.12}$$

Из асимптотического представления (1.25) следует, что при $\left|\operatorname{Im}\rho\right| \to +\infty$

$$\frac{1}{\rho^2}\Biggl\{\frac{\left[\mu_{k1}^{(0)}(x,x)\right]}{\Theta_k^{(1)}(x)}+\frac{\left[\mu_{k2}^{(0)}(x,x)\right]}{\Theta_k^{(2)}(x)}\Biggr\}\frac{\Phi_k(x)}{p_k(x)}-\frac{1}{\rho^2}\,\Phi_k(x)=0.$$

Учитывая (1.30), заключаем, что на контуре L подынтегральная функция (2.11) убывает быстрее, чем ρ^{-2}, что влечет равномерную относительно $t \in [0,T]$ сходимость интеграла (2.11).

Переходя к пределу при $t \to 0$ в (2.11), получаем:

$$\begin{gathered}
\lim_{t\to 0} I(x,t)=\int\limits_{L}\rho\Biggl\{\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)\,\frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi-\frac{1}{\rho^2}\,\Phi(x)\Biggr\}\,d\rho= \\
=\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{L_n}\rho\Biggl\{\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)\,\frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi-\frac{1}{\rho^2}\,\Phi(x)\Biggr\}\,d\rho= \\
=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{O_n^+}\rho\Biggl\{\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)\,\frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi-\frac{1}{\rho^2}\,\Phi(x)\Biggr\}\,d\rho,
\end{gathered}$$

где последнее равенство следует из аналитичности подынтегральной функции в области между контуром L_n и O_n^+.

Так как подынтегральная функция убывает быстрее, чем ρ^{-2}, то получаем

$$\lim_{t\to 0} I(x,t)=0. \ \triangleright$$

Замечание 2. Теорема 5 остается справедливой, если в формуле (2.9) заменить контур L на контур L^-, симметричный относительно вещественной оси.

2.3. Существование решения неоднородного уравнения с однородными краевыми и начальным условиями.

Теорема 6. *Для задачи* (1)–(4) *при* $f \in C^{2,2}[\Gamma_T]$, $F(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma \cup V$ *и* $\Phi(x) \equiv 0$ *существует решение. Это решение представляется в виде*

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \rho \int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho, \tag{2.13}$$

где L *— тот же контур, что и в теоремах* 4, 5.

$\lhd$ Как и в теоремах 4 и 5, достаточно показать возможность дифференцирования под знаком интеграла (2.13).

Проинтегрируем по частям интеграл

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t \exp\Big(-\rho^2(t-\tau)\Big) f(\xi,\tau)\,d\tau = \frac{1}{\rho^2} f(\xi,t) - \frac{1}{\rho^2}\,e^{-\rho^2 t} f(\xi,0)-\\ -\frac{1}{\rho^4}\,\frac{\partial}{\partial t}\,f(\xi,t) + \frac{1}{\rho^4}\,\frac{\partial}{\partial t}\,f(\xi,t)\Big|_{t=0} e^{-\rho^2 t} + \frac{1}{\rho^4}\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\,f(\xi,\tau)\,d\tau.\end{gathered} \tag{2.14}$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{gathered}\int\limits_L \rho\,\frac{\partial^{s+\nu}}{\partial t^s\,\partial x^\nu}\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}\,f(\xi,\tau)\,d\tau\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho =\\ = \int\limits_L \rho\,\frac{\partial^{s+\nu}}{\partial t^s\,\partial x^\nu}\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\left\{\frac{1}{\rho^2}\,f(\xi,t) - \frac{1}{\rho^2}\,e^{-\rho^2 t} f(\xi,0)-\right.\\ -\frac{1}{\rho^4}\,\frac{\partial}{\partial t}\,f(\xi,t) + \frac{1}{\rho^4}\,\frac{\partial}{\partial t}\,f(\xi,t)\Big|_{t=0} e^{-\rho^2 t}+\\ \left.+\frac{1}{\rho^4}\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} f(\xi,\tau)\,d\tau\right\}\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho,\quad s+\nu \leqslant 2.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Как видно из асимптотических представлений (1.25) и (1.30) и формулы (2.14) при $\big|\operatorname{Im}\rho\big| \to +\infty$, главной частью подынтегральной функции (2.15) является

$$\begin{gathered}\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^{s+\nu}}{\partial t^s\,\partial x^\nu}\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\,f(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p(\xi)} =\\ = \frac{1}{\rho^2}\sum_{k=1}^m \frac{\partial^{s+\nu}}{\partial t^s\,\partial x^\nu}\left\{\int\limits_{a_k}^x \exp\left(i\rho\int\limits_\xi^x \Theta^{(1)}(z)\,dz\right)\mu_{k1}^{(0)}(x,\xi)\,f_k(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p_k(\xi)}-\right.\\ \left.-\int\limits_x^{b_k}\exp\left(-i\rho\int\limits_x^\xi \Theta^{(2)}(z)\,dz\right)\mu_{k2}^{(0)}(x,\xi)\,f_k(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p_k(\xi)}\right\} =\end{gathered} \tag{2.16}$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\Bigg\{\int\limits_{a_k}^{x}\exp\Bigg(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\Bigg)\mu_{k1}^{(0)}(x,\xi)\,\frac{\partial^s}{\partial t^s}\,f_k(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p_k(\xi)} -$$
$$-\int\limits_{x}^{b_k}\exp\Bigg(-i\rho\int\limits_{x}^{\xi}\Theta^{(2)}(z)\,dz\Bigg)\mu_{k2}^{(0)}(x,\xi)\,\frac{\partial^s}{\partial t^s}\,f_k(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p_k(\xi)}\Bigg\}.$$

По аналогии с формулой (2.12) интегрированием по частям можно убедиться в том, что (2.16) при $\nu\leqslant 1$ на контуре L убывает как ρ^{-2}, равномерно относительно $t\geqslant 0$ и $x\in\Gamma$. Следовательно, интеграл (2.15) при $\nu\leqslant 1$, $s\leqslant 2$ сходится равномерно относительно $t\geqslant 0$ и $x\in\Gamma$. Это дает нам право дифференцировать под знаком интеграла (2.13) один раз по x и два раза по t и переходить к пределу при $t\to 0$, $x\to a$, $a\in\partial\Gamma\cup V$. Поэтому

$$\lim_{t\to 0} u_3(x,t)=0.$$

Далее, принимая во внимание (2.15) и возможность дифференцирования под знаком интеграла один раз по x и один раз по t, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{s+\nu}}{\partial t^s\,\partial x^\nu}\,u_3(x,t) &= \int\limits_L \rho\,\frac{\partial^{s+\nu}}{\partial t^s\,\partial x^\nu}\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho = \\
&= \int\limits_L \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\,\frac{\partial^s}{\partial t^s}\,f(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho- \\
&-\int\limits_L \frac{1}{\rho}\,(-\rho^2)^s\,e^{-\rho^2 t}\,\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\,f(x,0)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho- \\
&-\int\limits_L \frac{1}{\rho^3}\,\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\,\frac{\partial^{s+1}}{\partial t^{s+1}}\,f(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho+ \\
&+\int\limits_L \frac{1}{\rho^3}\,(-\rho^2)^s\,e^{-\rho^2 t}\,\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\,\frac{\partial}{\partial t}\,f(\xi,t)\Big|_{t=0}\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho+ \\
&+\int\limits_L \frac{1}{\rho^3}\,\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,f(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho- \\
&-\int\limits_L \frac{1}{\rho^3}\,(-\rho^2)^s\,\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}\int\limits_\Gamma G(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,f(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

В силу (2.15) у первого интеграла по контуру L в правой части (2.17) подынтегральная функция убывает как ρ^{-2}, следовательно, представляя его в виде предела интеграла по контуру O_n^+, убеждаемся, что он равен нулю. Точно также убеждаемся, что равны нулю третий и пятый интегралы в правой части (2.17).

Подставим функцию $u_3(x,t)$ из (2.13) в краевые условия (2), (3). Пользуясь линейностью функционалов, определяющих условия (2), (3), разобьем выражение, получающееся после подстановки функции $u_3(x,t)$ в краевые условия, на шесть частей, соответствующих каждому слагаемому в (2.17). Все нечетные слагаемые равны нулю. Равенство нулю четных слагаемых следует из того, что функция Грина $G(\cdot,\xi,\rho)$ удовлетворяет однородным краевым условиям (1.2), (1.3).

Таким образом, функция, определяемая формулой (2.13), удовлетворяет всем условиям (2), (3). Поэтому для доказательства теоремы нужно показать, что (2.13) удовлетворяет уравнению (1).

Поскольку мы не имеем права дифференцировать два раза под знаком интеграла (2.13), выделим в нем главную часть. Для этой цели введем обозначения

$$G^{(1)}(x,\xi,\rho)=\begin{cases}0, & x\in\gamma_n,\quad \xi\in\gamma_j,\quad n\neq j;\\ (i\rho)^{-1}\mu_{k1}^{(0)}(x,\xi)\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\right), & \\ & x,\xi\in\overline{\gamma}_k=[a_k,b_k],\ a_k\leqslant\xi\leqslant x\leqslant b_k;\\ -(i\rho)^{-1}\mu_{k2}^{(0)}(x,\xi)\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(2)}(z)\,dz\right), & \\ & x,\xi\in\overline{\gamma}_k=[a_k,b_k],\ a_k\leqslant x\leqslant\xi\leqslant b_k,\end{cases} \tag{2.18}$$

$$G^{(2)}(x,\xi,\rho)=G(x,\xi,\rho)-G^{(1)}(x,\xi,\rho). \tag{2.19}$$

Обозначим через D_x дифференциальный оператор

$$D_x=p(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\,p(x)\,\frac{\partial}{\partial x}+q(x).$$

Тогда

$$\begin{gathered}-\pi i\,D_x\,u_3(x,t)+\pi i\,\frac{\partial}{\partial t}\,u_3(x,t)=\\ =\left(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)\int\limits_L\rho\int\limits_\Gamma G^{(1)}(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho+\\ +\left(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)\int\limits_L\rho\int\limits_\Gamma G^{(2)}(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho.\end{gathered} \tag{2.20}$$

Согласно теореме 3 подынтегральная функция второго слагаемого в (2.20) убывает как ρ^{-2} на контуре L. Следовательно, этот интеграл допускает дифференцирование два раза по x и один раз по t. Тогда очевидно

$$\begin{gathered}-\pi i\left(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)u_3(x,t)\equiv\\ \equiv\left(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)\int\limits_L\rho\int\limits_\Gamma G^{(1)}(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}+\\ +\int\limits_L\rho\big(D_x+\rho^2\big)\int\limits_\Gamma G^{(2)}(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho-\\ -\int\limits_L\rho\int\limits_\Gamma G^{(2)}(x,\xi,\rho)\,f(\xi,t)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho.\end{gathered} \tag{2.21}$$

Подынтегральная функция третьего слагаемого на контуре L убывает как ρ^{-2}, поэтому этот интеграл равен нулю. Тогда, принимая во внимание свойства функции Грина и (2.19), из (2.21) получаем:

$$\begin{gathered} -\pi i\left(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)u_3(x,t)= \\ =\left(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)\int\limits_L \rho\int\limits_\Gamma G^{(1)}(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho- \\ -\int\limits_L \rho\Big(D_x+\rho^2\Big)\int\limits_\Gamma G^{(1)}(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho+ \\ +\int\limits_L \rho\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,d\rho. \end{gathered} \tag{2.22}$$

Ввиду того, что на контуре L функция

$$\int\limits_\Gamma G^{(1)}(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}$$

убывает как ρ^{-3}, во втором слагаемом из (2.22) дифференциальный оператор можно вынести за знак интеграла по L.

$$\begin{gathered} -\pi i\left(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)u_3(x,t)= \\ =\left(p(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}+q(x)\right)\int\limits_L \rho\int\limits_\Gamma G^{(1)}(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho- \\ -\int\limits_L \rho\Bigg\{\left(p(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\rho^2\right)\int\limits_\Gamma G^{(1)}(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho- \\ -\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\Bigg\}\,d\rho. \end{gathered} \tag{2.23}$$

Теперь вычислим выражение в фигурных скобках из (2.23). Для сокращения записи введем обозначение

$$\Psi_k^{(s)}(x,\xi,\tau)=\mu_{ks}^{(0)}(x,\xi)\,\frac{f_k(\xi,\tau)}{p_k(\xi)},\quad x\in\gamma_k. \tag{2.24}$$

Как видно из определения $\mu_{ks}^{(0)}$ (формула (1.25)),

$$\Psi_k^{(s)}(x,\xi,\tau)=-\Psi_k^{(s)}(x,\xi,\tau).$$

Принимая во внимание (2.18), (2.19), непосредственным вычислением находим

$$\left(p(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\rho^2\right)\int\limits_{\gamma_k} G^{(1)}(x,\xi,\rho)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f_k(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p_k(\xi)}=$$

$$=\left(p(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\rho^2\right)\left\{\frac{1}{i\rho}\int\limits_{a_k}^{x}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\right)\mu_{k1}^{(0)}(x,\xi)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f_k(\xi,\tau)\,d\tau\frac{d\xi}{p_k(\xi)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{i\rho}\int\limits_{x}^{b_k}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(2)}(z)\,dz\right)\mu_{k2}^{(0)}(x,\xi)\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f_k(\xi,\tau)\,d\tau\,\frac{d\xi}{p_k(\xi)}\right\}=$$

$$=\int\limits_0^t\frac{e^{-\rho^2(t-\tau)}}{i\rho}\left(p(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\rho^2\right)\left\{\int\limits_{a_k}^{x}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\right)\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\,d\xi+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x}^{b_k}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(2)}(z)\,dz\right)\Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau)\,d\xi\right\}d\tau=$$

$$\begin{aligned}
&=\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}\left\{p_k(x)\left(\Theta_k^{(1)}(x)\,\Psi_k^{(1)}(x,x,\tau)+\Theta_k^{(2)}(x)\,\Psi_k^{(2)}(x,x,\tau)\right)+\right.\\
&+p_k(x)\left(\frac{d}{dx}\,\Theta_k^{(1)}(x)\int\limits_{a_k}^{x}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta_k^{(1)}(z)\,dz\right)\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\,d\xi+\right.\\
&\left.+\frac{d}{dx}\,\Theta_k^{(2)}(x)\int\limits_{b_k}^{x}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta_k^{(2)}(z)\,dz\right)\Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau)\,d\xi\right)+\\
&+2p_k(x)\left(\Theta_k^{(1)}(x)\int\limits_{a_k}^{x}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\right)\frac{\partial}{\partial x}\,\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\,d\xi+\right.\\
&\left.+\Theta_k^{(2)}(x)\int\limits_{b_k}^{x}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta_k^{(2)}(z)\,dz\right)\frac{\partial}{\partial x}\,\Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau)\,d\xi\right)+\\
&+\frac{p_k(x)}{i\rho}\left(\int\limits_{a_k}^{x}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\,d\xi+\right.\\
&\left.\left.+\int\limits_{b_k}^{x}\exp\left(i\rho\int\limits_{\xi}^{x}\Theta^{(2)}(z)\,dz\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau)\,d\xi\right)\right\}d\tau.
\end{aligned}\tag{2.25}$$

Из определения $\mu_{ks}^{(0)}$ и (2.24) следует, что

$$p_k(x)\left(\Theta_k^{(1)}(x)\,\Psi_k^{(1)}(x,x,\tau)+\Theta_k^{(2)}(x)\,\Psi_k^{(2)}(x,x,\tau)\right)=f_k(x,\tau).$$

Подставляя (2.25) в (2.22) и принимая во внимание (2.18), получим при $x \in \gamma_k$:

$$
\begin{aligned}
&-\pi i \left(D_x - \frac{\partial}{\partial t}\right) u_3(x,t) = \left(p_k(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)\times \\
&\times \int_0^t \Bigg\{ \int_{a_k}^x \Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau) \int_L \exp\Big(-\rho^2(t-\tau) + i\rho \int_\xi^x \Theta^{(1)}(z)\,dz\Big)\,d\rho\,d\xi + \\
&+ \int_{b_k}^x \Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau) \int_L \exp\Big(-\rho^2(t-\tau) + i\rho \int_\xi^x \Theta^{(2)}(z)\,dz\Big)\,d\rho\,d\xi \Bigg\}\,d\tau - \\
&-\int_0^t \Bigg\{ p_k(x) \Bigg(\frac{d}{dx}\Theta_k^{(1)}(x) \int_{a_k}^x \Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau) \int_L i\rho \exp\Big(-\rho^2(t-\tau) + i\rho \int_\xi^x \Theta_k^{(1)}(z)\,dz\Big)\,d\rho\,d\xi + \\
&+ \frac{d}{dx}\Theta_k^{(2)}(x) \int_{b_k}^x \Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau) \int_L i\rho \exp\Big(-\rho^2(t-\tau) + i\rho \int_\xi^x \Theta^{(2)}(z)\,dz\Big)\,d\rho\,d\xi + \\
&+ 2p_k(x) \Bigg(\Theta_k^{(1)}(x) \int_{a_k}^x \frac{\partial}{\partial x}\,\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau) \int_L i\rho \exp\Big(-\rho^2(t-\tau) + i\rho \int_\xi^x \Theta^{(1)}(z)\,dz\Big)\,d\rho\,d\xi + \\
&+ \Theta_k^{(2)}(x) \int_{b_k}^x \frac{\partial}{\partial x}\,\Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau) \int_L i\rho \exp\Big(-\rho^2(t-\tau) + i\rho \int_\xi^x \Theta^{(2)}(z)\,dz\Big)\,d\rho\,d\xi \Bigg) + \\
&+ p_k(x) \Bigg(\int_{a_k}^x \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau) \int_L \exp\Big(-\rho^2(t-\tau) + i\rho \int_\xi^x \Theta^{(1)}(z)\,dz\Big)\,d\rho\,d\xi + \\
&+ \int_{b_k}^x \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\Psi_k^{(2)}(x,\xi,\tau) \int_L \exp\big(-\rho^2(t-\tau) + i\rho \int_\xi^x \Theta^{(2)}(z)\,dz\big)\,d\rho\,d\xi \Bigg) \Bigg\}\,d\rho.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Заметим, что во всех интегралах, встречавшихся в (2.26), вещественные части степеней показательных функций отрицательны при $\rho \in L$, что дает хорошую сходимость этих интегралов, которые в общем виде можно записать следующим образом:

$$
I_k = \int_L (i\rho)^k \exp\big(-\rho^2 a + i\rho b\big)\,d\rho = e^{-\frac{b^2}{4a}} \int_L (i\rho)^k \exp\left(i\rho a + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 d\rho,
$$

где $a > 0$, $b \geqslant 0$, $k = 0, 1$.

Представляя интеграл I_k в виде предела интегралов по контурам L_n и вводя новую переменную $z = i\rho a + \frac{b^2}{4a}$, можно показать, что

$$
I_0 = \frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}}; \quad I_1 = -\frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}}\,\frac{b}{2\sqrt{a}}\,. \tag{2.27}
$$

Тогда, вычисляя по формуле (2.27) интегралы, входящие в (2.26), получим при

$$-\pi i\left(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)u_3(x,t)=\sqrt{\pi}i\left(p_k(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{\gamma_k}\exp\left(-\frac{1}{4(t-\tau)}\left(\int\limits_\xi^x\frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right)\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}i}{2}\int\limits_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\left\{\int\limits_{\gamma_k}p_k(x)\left(\frac{d}{dx}\,\Theta_k^{(1)}(z)\,\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\int\limits_\xi^x\Theta^{(1)}(z)\,dz+\right.\right.$$

$$\left.+2\Theta^{(1)}(x)\left(\int\limits_\xi^x\Theta^{(1)}(z)\,dz\right)\frac{\partial}{\partial x}\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\right)\exp\left(-\frac{1}{4(t-\tau)}\left(\int\limits_\xi^x\Theta_k^{(1)}(z)\,dz\right)^2\right)d\xi-$$

$$\left.-2(t-\tau)\int\limits_{\gamma_k}p_k(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)\exp\left(-\frac{1}{4(t-\tau)}\left(\int\limits_\xi^x\Theta_k^{(1)}(z)\,dz\right)^2\right)d\xi\right\}d\tau.$$

Вычисляя оператор $\left(p_k(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)$ от первого интеграла, получим:

$$-\pi i\left(D_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)u_3(x,t)=$$

$$=-\sqrt{\pi}i\lim_{\tau\to t}\int\limits_{\gamma_k}\frac{\Psi_k^{(1)}(x,\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{1}{4(t-\tau)}\left(\int\limits_\xi^x\frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right)d\xi=$$

$$=-\sqrt{\pi}i\lim_{t_1\to 0}\int\limits_{\gamma_k}\frac{\Psi_k^{(1)}(x,\xi,t-t_1)}{\sqrt{t_1}}\exp\left(-\frac{1}{4t_1}\left(\int\limits_\xi^x\frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right)d\xi=$$

$$=-\sqrt{\pi}i\lim_{t_1\to 0}\int\limits_{\gamma_k}\frac{\Psi_k^{(1)}(x,\xi,t-t_1)-\Psi_k^{(1)}(x,\xi,t)+\Psi_k^{(1)}(x,\xi,t)}{\sqrt{t_1}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{4t_1}\left(\int\limits_\xi^x\frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right)d\xi=$$

$$=-\sqrt{\pi}i\lim_{t_1\to 0}\int\limits_{\gamma_k}\frac{\Psi_k^{(1)}(x,\xi,t)}{\sqrt{t_1}}\exp\left(-\frac{1}{4t_1}\left(\int\limits_\xi^x\frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right)d\xi.$$

Здесь мы воспользовались определением функции $\Psi_k^{(1)}$ и условием $f\in C^{2,2}[\Gamma_T]$. Покажем, что предел в правой части последнего равенства равен $-\sqrt{\pi}f(x,t)$. Для этого разобьем интеграл по γ_k на три части

$$\int\limits_{\gamma_k}=\int\limits_{a_k}^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{b_k},\quad 0<\varepsilon\ll 1.$$

В силу того, что показатели экспонент при $\xi \in (a_k, x-\varepsilon)\cup(x+\varepsilon, b_k)$ отрицательны, а функция $\Psi_k^{(1)}(x,\xi,t)$ имеет непрерывные производные по x и ξ на $[a_k, b_k]$, то первый и третий интегралы при $t_1 \to 0$ стремятся к нулю.

Рассмотрим второй интеграл:

$$\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\Psi_k^{(1)}(x,\xi,t)}{\sqrt{t_1}} \exp\left(-\frac{1}{4t_1}\left(\int\limits_{\xi}^{x} \frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right) d\xi =$$

$$= \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\mu_{k1}^{(0)}(x,\varepsilon)\, f_k(\xi,t)}{\sqrt{p_k(\xi)}} \frac{1}{\sqrt{p_k(\xi)t_1}} \exp\left(-\frac{1}{4t_1}\left(\int\limits_{\xi}^{x} \frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right) d\xi =$$

$$= \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \left(\frac{\mu_{k1}^{(0)}(x,\xi) f_k(\xi,t)}{\sqrt{p_k(\xi)t_1}} - \frac{\mu_{k1}^{(0)}(x,x) f_k(x,t)}{\sqrt{p_k(x)t_1}}\right) \exp\left(-\frac{1}{4t_1}\left(\int\limits_{\xi}^{x} \frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right) \frac{d\xi}{\sqrt{p_k(\xi)}} +$$

$$+2\, \frac{\mu_{k1}^{(0)}(x,x)\, f_k(x,t)}{\sqrt{p_k(x)}} \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1}{2\sqrt{t_1}} \exp\left(-\frac{1}{4t_1}\left(\int\limits_{\xi}^{x} \frac{dz}{\sqrt{p_k(z)}}\right)^2\right) \frac{d\xi}{\sqrt{p_k(\xi)}}\,.$$

Из определения функции $\mu_{k1}^{(0)}$ и условия $f_k \in C^2[\gamma_k]$ следует, что при $\varepsilon \to 0$ и $t_1 \to 0$ первый интеграл стремится к нулю. А второй интеграл путем замены переменной сводится к интегралу Эйлера — Пуассона и стремится к $-\sqrt{\pi}$ при $t_1 \to 0$.

Таким образом, получаем при $x \in \gamma_k$

$$\left(D_x - \frac{\partial}{\partial t}\right) u_3(x,t) = -2\, \frac{\mu_{k1}^{(0)}(x,x)\, f_k(x,t)}{\sqrt{p_k(x)}} = -f_k(x,t). \ \triangleright$$

§ 3. Корректность смешанной задачи (1)–(4)

В предыдущем параграфе нами была доказана теорема существования решения рассматриваемой задачи, которая попутно устанавливала формулу представления решения в виде контурного интеграла. В настоящем параграфе будет доказана единственность решения задачи (1)–(4) и его непрерывная зависимость от данных задачи. Для этого нам понадобится один вспомогательный результат, который, несомненно, представляет и самостоятельный интерес. Это теорема существования решения уравнения (1) с однородными краевыми условиями (2), (3) и ненулевым начальным условием (4). В отличие от решения этой же задачи, полученного в предыдущем параграфе, здесь решение представляется в виде полного интегрального вычета.

Теорема 8. *Существует решение $v(x,t) \in C(\Gamma) \cap C^{2,1}\big[\Gamma \times (0,T]\big]$ задачи (1)–(4) при нулевых значениях $F(a)$, $a \in \partial\Gamma \cup V$. Это решение представимо в виде*

$$\begin{aligned} v(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_n \int\limits_{C_n} \rho \Bigg\{ \int\limits_{\Gamma} G(x,\xi,\rho) \times \\ \times \left(\Phi(\xi) e^{-\rho^2 t} + \int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\tau\right) \frac{d\xi}{p(\xi)} \Bigg\}\, d\rho. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Доказательству теоремы 8 предпошлем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть C_n, $n \in \mathbb{N}$, — простой замкнутый контур, содержащий внутри только один полюс ρ_n функции Грина $G(x,\xi,\rho)$. Тогда, если $\Phi \in C^2[\Gamma]$, то*

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_n \int\limits_{C_n} \rho \int\limits_{\Gamma} G(x,\xi,\rho)\,\Phi(\xi)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho = \Phi(x). \tag{3.2}$$

$\triangleleft$ Рассмотрим в комплексной ρ-плоскости последовательность окружностей O_n с общим центром в начале координат, обладающих следующими свойствами:

1. Радиусы окружностей O_n неограниченно возрастают при $n \to \infty$;

2. Существует положительное число r такое, что полюсы ρ_k функции $G(x,\xi,\rho)$ находятся при достаточно больших n на расстоянии большем, чем r от каждой из окружностей O_n.

В силу доказанных в § 1 асимптотических свойств собственных значений $\lambda_n = -\rho_n^2$ спектральной задачи (1.1)–(1.3), такие окружности существуют.

Рассмотрим интеграл

$$I_n(\Phi) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{O_n} \rho \int\limits_{\Gamma} G(x,\xi,\rho)\,\Phi(\xi)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho.$$

Интеграл I_n можно представить в виде суммы двух интегралов, распространенных на части O_n^- и O_n^+, расположенных в полуплоскости $\operatorname{Im}\rho \leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$. Далее, если к подынтегральной функции добавить и отнять

$$-\frac{1}{\rho^2}\,\Phi(x) = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\mu_1^{(0)}(x,x)}{\Theta^{(1)}(x)} + \frac{\mu_2^{(0)}(x,x)}{\Theta^{(2)}(x)}\right)\frac{\Phi(x)}{p(x)},$$

где $\mu_s^{(0)}(x,x) = \mu_{ks}^{(0)}(x,x)$ при $x \in \gamma_k$, то получим:

$$\begin{gathered} I_n(\Phi) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{O_n^-} \rho\Bigg\{\int\limits_{\Gamma} G(x,\xi,\rho)\Phi(\xi)\frac{d\xi}{p(\xi)} + \\ +\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\mu_1^{(0)}(x,x)}{\Theta^{(1)}(x)} + \frac{\mu_2^{(0)}(x,x)}{\Theta^{(2)}(x)}\right)\frac{\Phi(x)}{p(x)}\Bigg\}d\rho - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{O_n^+} \rho\Bigg\{\int\limits_{\Gamma} G(x,\xi,\rho)\Phi(\xi)\frac{d\xi}{p(\xi)} + \\ +\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\mu_1^{(0)}(x,x)}{\Theta^{(1)}(x)} + \frac{\mu_2^{(0)}(x,x)}{\Theta^{(2)}(x)}\right)\frac{\Phi(x)}{p(x)}\Bigg\}\,d\rho + \frac{\Phi(x)}{2\pi i}\int\limits_{O_n}\frac{d\rho}{\rho}\,. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Согласно теореме 3 и формулам (1.25), (1.30) неглавная часть подынтегральной функции первых двух слагаемых правой части (3.3) на контурах O_n^- и O_n^+ убывает быстрее ρ^{-2}. Что же касается главной части этой функции, то с помощью асимптотического представления (1.30) и интегрирования по частям, как это делалось в § 2 (формулы (2.12), (2.16)), легко убедиться в том, что она представляется в виде

$$\sum_{k=1}^{m} \exp\left(i\rho\int\limits_{a_k}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\right)\frac{E_{k1}(x,\rho)}{\rho} + \exp\left(-\,i\rho\int\limits_{x}^{b_k}\Theta^{(2)}(z)\,dz\right)\frac{E_{k2}(x,\rho)}{\rho},$$

где E_{ks} равномерно ограничены на контурах O_n^- и O_n^+.

Поскольку вещественная часть степеней экспонент в последней формуле не положительна, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{O_n^{\pm}}\rho\sum_{k=1}^{m}\Bigg\{\exp\Bigg(i\rho\int\limits_{a_k}^{x}\Theta^{(1)}(z)\,dz\Bigg)\frac{E_{k1}(x,\rho)}{\rho}+$$

$$+\exp\Bigg(-i\rho\int\limits_{x}^{b_k}\Theta^{(2)}(z)\,dz\Bigg)\frac{E_{k2}(x,\rho)}{\rho}\Bigg\}\,d\rho=0.$$

Причем сходимость равномерная на $\Gamma\setminus\bigcup_{j=1}^{N}B(a_j,\varepsilon)$, $a_j\in\partial\Gamma\cup V$, $B(a,\varepsilon)=\big\{x\in\mathbb{R}^n\big|\,\|x-a\|<\varepsilon\big\}$, $0<\varepsilon\ll 1$. Следовательно, пределы интегралов по контурам O_n^- и O_n^+ в (3.3) при $n\to\infty$ равны нулю. Поэтому, переходя к пределу в (3.3), получим (3.2). $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 8. Так как $G(x,\xi,\rho)$ — функция Грина однородной краевой задачи (1.1)–(1.3), то всякое решение уравнения (1.1), удовлетворяющее однородным условиям (1.2), (1.3), можно записать в виде

$$y(x,\rho)=\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)\,\Phi(\xi)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}=\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)\,\big(D_x+\rho^2\big)\,y(x,\rho)\,d\xi, \tag{3.4}$$

где D_x — дифференциальный оператор, определенный в § 2.

Пусть теперь $-\rho_n^2$ — полюс функции Грина порядка χ_n. Для всех $j=\overline{0,\chi_n}$ введем интеграл

$$R_{jn}(F)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\rho(i\rho)^{2j}\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)\,\Psi(\xi)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho=\Psi_{jn}, \tag{3.5}$$

определенный для любой функции $\Psi\in C[\Gamma]$.

Обозначим через $\mathscr{U}(x,t)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее однородным краевым условиям (2), (3) и неоднородному начальному условию (4). Согласно теоремам 5 и 6 такое решение существует и принадлежит $C^{2,1}\big[\Gamma_T\big]\cap C(\Gamma)$. Подставим функцию $\mathscr{U}$ в уравнение (1) и применим к обеим частям полученного тождества оператор R_{jn}, $j=\overline{0,\chi_n}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда, пользуясь возможностью вынести дифференцирование по t за знак интеграла и привлекая формулу (3.4), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Bigg\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\rho(i\rho)^{2j}\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)\,\mathscr{U}(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho\Bigg\}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\rho(i\rho)^{2j}\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)\Bigg(D_x+\rho^2\Bigg)\mathscr{U}(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\rho(i\rho)^{2j+2}\times$$

$$\times\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)\,\mathscr{U}(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\rho(i\rho)^{2j}\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)\,f(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\rho(i\rho)^{2j+2}\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)\mathscr{U}(\xi,t)\frac{d\xi}{p(\xi)}d\rho-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\rho(i\rho)^{2j}\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)f(\xi,t)\frac{d\xi}{p(\xi)}d\rho.$$

Последнее равенство в обозначениях (3.5) можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{U}_{jn}(x,t)=\mathscr{U}_{j+1,n}(x,t)+f_{jn}(x,t),\quad (x,t)\in\Gamma_T,\ j=\overline{0,\chi_n-1}. \tag{3.6}$$

Применяя оператор R_{jn} к обеим частям начального условия, получим

$$\mathscr{U}_{jn}(x,0)=\Phi_{jn}(x). \tag{3.7}$$

В силу того, что $-\rho_n^2$ есть полюс функции Грина порядка χ_n, имеет место тождество

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\rho\big(\rho_n^2+\rho^2\big)^{\chi_n}\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)\,\mathscr{U}(\xi,t)\,\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho\equiv\sum_{j=0}^{\chi_n}C_j^{\chi_n}(-\rho_n^2)^{\chi_n-j}\mathscr{U}_{jn}(x,t)\equiv 0.$$

Выражая $\mathscr{U}_{\chi_n,n}$ через $\mathscr{U}_{jn}$, $j=\overline{0,\chi_n-1}$, и подставляя в последнее из уравнений (3.6), получим задачу Коши для системы уравнений (3.6) с начальным условием (3.7). Так как $f\in C^{2,1}\big[\Gamma_T\big]$, то задача Коши (3.6), (3.7) имеет единственное решение на $[0,T]$. Непосредственными вычислениями можно установить, что решением системы являются функции

$$\begin{gathered}\mathscr{U}_{jn}^{(0)}(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\rho(i\rho)^{2j}\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)\left\{e^{-\rho^2t}\,\Phi(\xi)+\right.\\ \left.+\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\right\}\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Заменим в формуле (3.2) функцию $\Phi(x)$ на $\mathscr{U}(x,t)$. Тогда, учитывая обозначения (3.5) и (3.9), получим:

$$\begin{gathered}\mathscr{U}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_{0n}(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{C_n}\rho\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)\left\{e^{-\rho^2t}\Phi(\xi)+\right.\\ \left.+\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\right\}\frac{d\xi}{p(\xi)}\,d\rho.\ \triangleright\end{gathered}$$

Теперь мы можем доказать основную теорему настоящего параграфа.

Теорема 9. *Если $f\in C^{2,2}[\Gamma_T]$, $\Phi\in C^2[\Gamma]\cap C(\Gamma)$, то задача (1)–(4) корректна по Адамару и ее решение может быть представлено в виде полного интегрального вычета*

$$\begin{gathered}u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\int\limits_{Q_n}\left\{-\frac{H(x,\rho)}{\rho}\,e^{-\rho^2t}+\right.\\ \left.+\rho\int\limits_{\Gamma}G(x,\xi,\rho)\left(e^{-\rho^2t}\Phi(\xi)+\int\limits_0^t e^{-\rho^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\tau\right)\frac{d\xi}{p(\xi)}\right\}d\rho,\end{gathered} \tag{3.9}$$

где Q_n — последовательность расширяющихся замкнутых контуров ρ-плоскости, расположенных вне r-окрестности спектра задачи (1)–(3), а функция H определяется формулой (1.7).

$\lhd$ Существование решения задачи доказано в теореме 7. Единственность решения следует из того, что разность двух решений является решением задачи (1)–(4) для соответствующего однородного уравнения и однородных краевых и начальном условиях. Это решение согласно теореме 8 представляется в виде (3.1) при $\Phi \equiv 0$, $f \equiv 0$. Следовательно, оно равно нулю тождественно. Таким образом, функции, определенные формулой (2.5), в которой интеграл берется по контурам L и L^-, совпадают. Теперь, принимая во внимание равенства (2.8) и складывая интегралы (2.1), взятые по контурам L и L^-, получим:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{O_n} e^{-\rho^2 t} \frac{H(x,\rho)}{\rho}\, d\rho.$$

Рассуждая таким же образом, из (2.9) и замечания 2 получим:

$$u_2(x,t)+u_3(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{O_n} \rho \int\limits_{\Gamma} G(x,\xi,\rho) \left(e^{-\rho^2 t}\Phi(\xi) + \int\limits_0^t e^{-\rho^2 (t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\tau \right) \frac{d\xi}{p(\xi)}\, d\rho.$$

Остается показать, что решение непрерывно зависит от правых частей уравнения (1), краевых условий (2), (3) и начального условия (4).

Пусть Q_n — замкнутые контуры, составленные из дуг O_n' и O_n'' и отрезков, параллельных вещественной оси, лежащих вне полосы Π, определенной в § 2. При таком выборе контуров Q_n для функции $u_1(x,t)$ в Γ_T согласно теореме 2 имеет место оценка:

$$\bigl|u_1(x,t)\bigr| \leqslant M \max_{1\leqslant j\leqslant N} \bigl|F(a_j)\bigr|, \tag{3.10}$$

где M — постоянное число.

Рассмотрим теперь решение $u_2(x,t) + u_3(x,t)$:

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_L \rho\, e^{-\rho^2 t} \int\limits_{\Gamma} G(x,\xi,\rho)\, \Phi(\xi)\, \frac{d\xi}{p(\xi)}\, d\rho -$$

$$-\frac{1}{\pi i} \int\limits_L \rho\, e^{-\rho^2 t} \int\limits_{\Gamma} G(x,\xi,\rho) \int\limits_0^t e^{-\rho^2 (t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\tau\, \frac{d\xi}{p(\xi)}\, d\rho$$

для любой функции $\Phi(x) \in C^2[\Gamma] \cap C(\Gamma)$, равной нулю в каждой вершине $a \in \partial\Gamma \cup V$ графа. В силу формул (2.12), (2.14),(1.30) подынтегральные функции в правой части последнего равенства убывают быстрее ρ^{-2}. Следовательно, имеет место неравенство

$$\bigl|u_2(x,t)\bigr| \leqslant M_1 \bigl\|\Phi\bigr\|_{C^2[\Gamma]} + M_2 \left(\max_{\Gamma_T} |f(x,t)| + \max_{\Gamma_T} \left| \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \right| \right). \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) следует непрерывная зависимость решения от начальных данных. $\rhd$

Литература

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.—М.: Наука, 1969.—528 с.
3. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.—272 с.
4. *Боровских А. В., Мустафакулов Р., Лазарев К. П., Покорный Ю. В.* Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети // Докл. РАН.—1995.—Т. 345, № 6.—С. 730–732.
5. *Вольперт А. И.* Дифференциальные уравнения на графах // Мат. сб.—1972.—Т. 88, № 4.—С. 578–588.
6. *Гудзовский А. В.* К расчету гидровлических сетей // Докл. РАН.—1998.—Т. 358, № 6.—С. 765–767.
7. *Завгородний М. Г.* Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе // Докл. АН РФ.—1994.—Т. 335, № 3.—С. 281–282.
8. *Завгородний М. Г.* Об эфолюционных задачах на графах // Успехи мат. наук.—1991.—Т. 46, № 6.—С. 199–200.
9. *Завгородний М. Г., Майорова С. П.* Об одном уравнении математической физики четвертого порядка на графе. // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию.—Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008.—С. 88–102.
10. *Завгородний М. Г., Покорный Ю. В.* О спектре краевых задач второго порядка на пространственных сетях // Успехи мат. наук.—1989.—Т. 44, № 4.—С. 220–221.
11. *Кулаев Р. Ч.* Интегральное преобразование на графе для дифференциального оператора второго порядка // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 2.—С. 78–85.
12. *Кулаев Р. Ч.* Применение конечного интегрального преобразования на графе к решению задач математической физики // Владикавк. мат. журн.—2007.—Т. 9, вып. 4.—С. 32–45.
13. *Мерков А. Б.* Эллиптические уравнения второго порядка на графах // Мат. сб.—1985.—Т. 127, № 4.—С. 502–518.
14. *Пенкин О. М.* О принципе максимума для эллиптического уравнения на двумерном клеточном комплексе // Доклады РАН.—1997.—Т. 352, № 4.—С. 462–465.
15. *Пенкин О. М.* О принципе максимума для эллиптического уравнения на стратифицированных множествах // Дифференц. уравнения.—1998.—Т. 34, № 10.—С. 1433–1444.
16. *Пенкин О. М., Богатов Е. М.* О слабой разрешимости задачи Дирихле на стратифицированных множествах // Мат. заметки.—2000.—№ 6.—С. 874–876.
17. *Пенкин О. М., Покорный Ю. В., Провоторова Е. Н.* Об одной векторной краевой задаче // Краевые задачи.—Пермь, 1983.—С. 64–70.
18. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М.* Теоремы Штурма для уравнений на графах // Докл. АН СССР.—1989.—Т. 309, № 6.—С. 1306–1308.
19. *Ali-Mehmeti F.* Regular solutions of transmission and interaction problems for ware equation // Math. Methods Appl. Sci.—1989.—Vol. 11.—P. 665–685.
20. *von Below J. A.* A characteristic equation assosiated to an eigenvalue problem on e^{∞}-network // Linear Algebra and Appl.—1985.—Vol. 71.—P. 309–325.
21. *von Below J. A.* Classical solvability of linear parabolic equations on networks // J. Dif. Eq.—1998.—Vol. 75.—P. 316–337.
22. *Lagnese J. E., Leugering G., Schmidt E. J. P. G.* Control of planar networks of Timoshenko beams // SIAM J. Control Optim.—1993.—Vol. 31.—P. 780–811.
23. *Nicaise S.* Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impuls transmission // Lect. Notes Math.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—№ 1771.—P. 532–541.
24. *Roth J.-P.* Spectre du laplacien sur un graphe // Lect. Notes Math.—Berlin: Springer-Verlag, 1984.—№ 1096.—P. 521–539.
25. *Schmidt E. J. P. G.* On the modelling and exact controlability of networks of vibrating strigs // SIAM J. Control Optim.—1992.—Vol. 30.—P. 229–245.

Кулаев Руслан Черменович

О ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ НА ГРАФЕ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ,
СОДЕРЖАЩИМИ ПРОИЗВОДНУЮ ПО ВРЕМЕНИ

Ответственный за выпуск
Бичкаева М. Д.

Подписано в печать 18.01.2009.
Формат $60 \times 84\,{}^1/_8$. Усл. п. л. 4,30. Тираж 50 экз.