

Радионон А. А. Динамическое равновесие столба сжимаемой бароклиной жидкости, находящегося в поле силы тяжести.—Владикавказ, 2015.—38 с.—(Препринт / ЮМИ ВНИЦ РАН; № 1).

Рассмотрены нелинейные уравнения математической физики описывающие динамическое равновесие столба сжимаемой бароклиной жидкости находящегося в поле силы тяжести. Найдены упрощающие предположения позволяющие записать аналитические решения этих уравнений. Показано, что наряду с известным стационарным решением для баротропной жидкости вида «гидростатического соотношения» допустимы также и более сложное нелинейное нестационарное решение. Зависимость решения от времени является периодической функцией, что может объяснить некоторые периодические явления, протекающие в атмосфере. Уравнение для температуры наряду с постоянным решением допускает также и более сложное нелинейное решение с монотонно изменяющейся по высоте столба жидкости температурой. Поведение этого решения в зависимости от высоты точно описывает распределение температуры в нижней части мезосферы, существование тропопаузы, а также зависимость положения тропопаузы от граничных условий.

Ключевые слова: динамика сжимаемой жидкости, равновесие столба атмосферы, тропопауза, стратосфера, распределение температуры в атмосфере.

Библиогр. 17.

Received May 15, 2015

Radionoff A. A. The Column of Compressible Baroclinic Fluid Located in the Gravity Field Equilibrium.—Vladikavkaz, 2015.—38 p.—(Preprint / SMI VSC RAS; № 1).

Nonlinear equations of mathematical physics describing the dynamic equilibrium of compressible baroclinic fluid column located in the gravity field were considered. Simplifying assumptions, which allow to write analytical solutions of these equations, were found. It is shown that more complex non-linear time-dependent solution are permissible in addition to the known stationary solution for barotropic fluid in the form of “hydrostatic ratio”. The dependence of the solutions on time is a periodic function, which may explain some of the periodic phenomena occurring in the atmosphere. The equation for the temperature allows complex nonlinear solution with monotonically changing temperature on the height of the fluid column. This solution behavior accurately describes the temperature distribution in the lower part of the mesosphere, existence of the tropopause and dependence of its location from the boundary conditions.

Keywords: compressible fluids dynamics, equilibrium of atmospheric column, tropopause, stratosphere, temperature distribution in the atmosphere.

Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН
РСО-Алания, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

© Южный математический институт
ВНИЦ РАН, 2015

© А. А. Радионон, 2015

**ДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ СТОЛБА
СЖИМАЕМОЙ БАРОКЛИННОЙ ЖИДКОСТИ,
НАХОДЯЩЕГОСЯ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ**

А. А. Радионов

1. Анализ текущего состояния вопроса	3
2. Вывод управляющих уравнений	6
3. Анализ уравнения для давления (19)	9
4. Стационарное решение уравнения (17)	15
5. Стационарное решение уравнения (17) без предположения о постоянстве скорости звука	20
6. Нестационарное решение уравнения (17) в случае постоянства скорости звука	22
7. Линеаризованное решение	33
Заключение	37
Литература	38

1. АНАЛИЗ ТЕКУЩЕГО СОСТОЯНИЯ ВОПРОСА

Процессы, протекающие в жидкости, подчиняются уравнениям Навье — Стокса [7]. Введем обозначения. Примем неподвижную относительно поверхности Земли систему прямоугольных координат (x, y, z) . Применительно к атмосферным процессам ось x обычно направляют на восток, ось y — на север, ось z — вертикально вверх. Начало отсчета совместимо с поверхностью Земли. Время обозначим как t . Жидкость опишем скоростью \vec{v} с компонентами (u, v, w) , плотностью ρ , давлением p , температурой T . Будем использовать обычные обозначения: R — универсальная газовая постоянная; γ — показатель адиабаты идеального газа; μ_1, μ_2 — первая и вторая динамическая вязкость жидкости, принимаемые постоянными; $\nu = \mu/\rho$ — соответствующая кинематическая вязкость; g — ускорение свободного падения. Параметр Кориолиса обозначим f . Нижними индексами x, y, z, t будем обозначать взятие частных производных по координатам x, y, z и времени t , нижним индексом τ будем обозначать действие оператора Стокса: $f_\tau = f_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f$. Запишем уравнения Навье — Стокса.

Уравнение неразрывности (сохранения массы):

$$\rho_\tau + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (1)$$

Уравнение сохранения импульса для горизонтальной компоненты скорости $u = u(x, y, z, t)$, направленной вдоль оси Ox :

$$u_\tau = -\frac{p_x}{\rho} + fv + \frac{\mu_1}{\rho} \nabla^2 u + \frac{\mu_2}{\rho} \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}). \quad (2)$$

Уравнение сохранения импульса для горизонтальной компоненты скорости $v = v(x, y, z, t)$, направленной вдоль оси Oy :

$$v_\tau = -\frac{p_y}{\rho} - fu + \frac{\mu_1}{\rho} \nabla^2 v + \frac{\mu_2}{\rho} \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}). \quad (3)$$

Для вертикальной компоненты скорости $w = w(x, y, z, t)$:

$$w_\tau = -g - \frac{p_z}{\rho} + \frac{\mu_1}{\rho} \nabla^2 w + \frac{\mu_2}{\rho} \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}). \quad (4)$$

К уравнениям (1)–(4) следует присоединить уравнение состояния [7]. Эта система уравнений описывает все многообразие процессов, протекающих в ньютоновской жидкости.

В случае атмосферного воздуха применимо уравнение состояния идеального газа $p = \rho RT$, которое в случае адиабатических процессов может быть принято

в виде

$$p = A\rho^\gamma, \quad (5)$$

где A — некоторая константа.

Система уравнений (1)–(5) для статического равновесия столба жидкости, находящегося в поле силы тяжести, приобретает вид [13]:

$$\rho g = -p_z. \quad (6)$$

При этом предполагается, что скорость движения жидкости не только равна нулю в данный момент времени, но и не возникает в последующие моменты времени.

Из уравнения (6) видно, что полученные решения для такого столба будут стационарны. При условии баротропности жидкости, иными словами, при условии постоянства температуры по столбу жидкости $T(z, t) = T_0 = \text{const}$, в случае идеального газа из последнего уравнения получается

$$p_z = -\frac{p}{RT_0} g.$$

Интегрируя это выражение с граничным условием $p(z = 0) = p_0$, получаем «гидростатическое соотношение»

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{g}{RT_0} z\right),$$

которое используют [9, 14] в виде $p(z) = p_0 \exp(-z/H)$, где $H = RT_0/g$ — некоторая высота средней атмосферы, числовое значение которой равняется около 8,4 км.

Конечно вывод о стационарности равновесия столба атмосферного воздуха и предположение о постоянстве температуры по высоте не соответствует наблюдаемым фактам. Статическое равновесие замкнутой термодинамической системы оказывается возможным только при условии постоянства температуры в этой системе [8]. В случае с атмосферой Земли не может идти и речи о замкнутости столба жидкости, поскольку его температура активно возмущается как в приземном слое, так и на высотах стратосферы. На высотах соответствующих ионосфере также можно предполагать существование значительных возмущений вызываемых солнечной радиацией.

При попытке учета бароклинности газа, т. е. в случае уравнения состояния в виде (5) из второго начала термодинамики для температуры следует решение [16]:

$$T(z) = T_0 - \gamma_a z. \quad (7)$$

Граничными условиями при получении этого решения вблизи поверхности являются температура $T(z = 0) = T_0$ и приповерхностный градиент температуры $T_z(z = 0) = -\gamma_a$. Это решение вблизи поверхности адекватно описывает наблюдательные факты, но недостаток этого решения очевиден. На высоте около 30 км абсолютная температура газа впервые станет равной нулю, а выше этой высоты она должна оказаться отрицательной. Анализируя эту ситуацию, Эккарт [16] и Гилл [2] указывают на необходимость рассмотрения радиационного равновесия между Землей и космическим пространством и на то, что причину отмеченного недостатка следует искать в значительной стратификации атмосферы на высотах порядка 30 км.

Складывается впечатление, что на этих высотах должно выделяться значительное количество тепла, обусловленное, например поглощением коротковолнового солнечного излучения озоном. Такая точка зрения подробно представлена в [9]. В наблюдениях [9, 14] температура уменьшается до значений около 220 К с высотой только до начала тропопаузы, которая располагается на высотах в среднем около 11–15 км. Выше тропопаузы начинается рост температуры с высотой, и на высотах 30 км наблюдается уже стратосферный максимум температуры. Логика подсказывает, что источник тепла начинает действовать на высотах в 11–15 км, соответствующих началу нарушения соотношения (7). Максимум содержания озона отмечается значительно выше [15]. На высотах начала тропопаузы не просматривается явно выраженный источник тепла, теплообмен же с вышележащими слоями не может вызвать наблюдаемый рост температуры.

Изложенные соображения связаны с интересом к так называемому нулевому равновесному состоянию геофизической жидкости, которое суть то термодинамическое состояние рассматриваемой жидкости, на «фоне» которого развиваются линейные бесконечно малые волновые процессы первого порядка, часто представляющие самостоятельный интерес. Вывод уравнений первого порядка приведен во множестве источников [3], он сводится к вычитанию из полных уравнений (1)–(5) уравнений для нулевого порядка и линеаризации полученных выражений. Уравнения первого порядка соответствуют многочисленным возмущениям, возникающим в среде. Нулевое же состояние предполагает описание жидкости в каком-то усредненном по времени и пространству состоянии, в котором отсутствуют возмущения. Реально наблюдающиеся состояния жидкости, особенно всегда возмущенной атмосферы, всегда будут отличаться от нулевого порядка. Усредненное состояние может быть получено усреднением за длительное время и множество наблюдательных сезонов. Теоретическое же описание той или иной геофизической жидкости опирается на систему уравнений (1)–(5), решения которых и представляют это самое нулевое усредненное состояние в отсутствие возмущений. Поскольку возмущение всегда приводит к появлению скоростей движения жидкости, то в этих уравнениях следует принять равенство нулю скорости жидкости для основного (нулевого) состояния.

Конечно теоретические представления о равновесии столба несжимаемой баротропной жидкости, находящегося в поле силы тяжести далеки от наблюдаемых в атмосфере распределений по высоте средних ее характеристик. Это замечание относится в основном к вертикальному распределению температуры, вертикальное же распределение давления в среднем описывается гидростатическим соотношением с достаточной для практики точностью. В этой связи представляется необходимым дальнейшее развитие теоретических взглядов на равновесное состояние геофизической жидкости. В данной работе предпринимается попытка развить имеющиеся представления о равновесном состоянии на случай сжимаемой бароклининой жидкости. Основное приложение развиваемых представлений — это равновесное состояние атмосферы. Результаты наблюдений, полученные с использованием различных измерительных методик, приведены в весьма обширной литературе. Не претендуя на полноту списка приведем только наиболее значимые монографии [2, 3, 9, 12–15]. Далее в тексте, при обсуждении тех или иных решений дифференциальных уравнений, будут приводиться соответствующие данные наблюдений в ситуациях, которые описываются решениями этих уравнений с ссылками на литературу.

2. ВЫВОД УПРАВЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение неразрывности (1) показывает, что изменение во времени плотности элементарного объема произвольной жидкости определяется дивергенцией ее скорости. Преобразуем уравнения (1)–(4) с целью получения уравнения для дивергенции. Уравнение (2) частно продифференцируем по координате x , (3) — по координате y , (4) — по координате z , после этого полученные уравнения сложим. В векторных терминах это эквивалентно скалярному произведению оператора Гамильтона на уравнение скорости. Введем обозначение для дивергенции скорости: $d = d(x, y, z, t) = u_x + v_y + w_z$. Опуская довольно громоздкие выкладки, запишем результат:

$$d_\tau + d^2 - 2 \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} - 2 \frac{\partial(u, w)}{\partial(x, z)} - 2 \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} = + \frac{\nabla \rho \nabla p}{\rho^2} - \frac{\nabla^2 p}{\rho} - f\xi - \frac{\mu_1}{\rho^2} (\rho_x \nabla^2 u + \rho_y \nabla^2 v + \rho_z \nabla^2 w) + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\rho} \nabla^2 d - \frac{\mu_2}{\rho^2} \nabla \rho \cdot \nabla d \quad (8)$$

или без учета вязких слагаемых

$$d_\tau + d^2 - 2 \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} - 2 \frac{\partial(u, w)}{\partial(x, z)} - 2 \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} = + \frac{\nabla \rho \nabla p}{\rho^2} - \frac{\nabla^2 p}{\rho} - f\xi. \quad (9)$$

Это уравнение, в виде (9) без вязких слагаемых, используется в некоторых алгоритмах вычислительной гидродинамики [11]. Здесь слагаемое d^2 можно отождествить с скалярной нелинейностью [10], якобианы, определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= u_x v_y - v_x u_y, & \frac{\partial(u, w)}{\partial(x, z)} &= u_x w_z - w_x u_z, \\ \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} &= v_y w_z - w_y v_z, \end{aligned}$$

выделяются под названием векторной нелинейности. В уравнение (8) вошла вертикальная компонента вектора вихря $\xi = u_y - v_x$. Уравнение, которому подчиняется эта компонента, получается частным дифференцированием уравнения (2) по переменной y и вычитанием из полученного выражения частной производной уравнения (3) по x :

$$\begin{aligned} &\xi_\tau + \xi(u_x + v_y) + w_y u_z - w_x v_z \\ &= \frac{\rho_x p_y - \rho_y p_x}{\rho^2} + f(v_y + u_x) + \frac{\mu_1}{\rho} \nabla^2 \xi + \frac{\mu_2}{\rho} \frac{1}{3} \nabla [(\nabla \cdot \vec{u})_y - (\nabla \cdot \vec{u})_x]. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение неразрывности принимает вид

$$\rho_\tau = -\rho d. \quad (11)$$

Уравнения (8)–(11) описывают динамику сжимаемой жидкости. К ним следует присоединить уравнения (2)–(4) для скорости, а также уравнение состояния и при необходимости уравнение сохранения энергии. Полученная система уравнений (8)–(11) не проще исходной и является нелинейной системой уравнений в частных производных, какие-либо решения которой получить не удастся.

Однако оказывается, что принятие упрощающих предположений, причем значительно более слабых, чем при получении (6) или (7), позволяет получить аналитические решения системы (8)–(11). Далее в этой работе будут рассмотрены некоторые упрощающие предположения, позволяющие при рассмотрении различных частных случаев движения сжимаемой жидкости записать эти уравнения в виде, допускающем аналитические решения.

Рассмотрим статическое состояние сжимаемой жидкости, такое, при котором при любых изменениях граничных условий скорость жидкости в любой точке остается равной нулю, либо столь мало значимы, что ими можно пренебречь. Динамику состояния жидкости в этом случае определяет сжимаемость, связанная с зависимостью плотности жидкости от температуры. В этом случае система уравнений (2)–(4), (8)–(11) упрощается. Действие оператора Стокса сводится к частному дифференцированию по времени, якобианы в (8) равняются нулю, вертикальная компонента вихря также равняется нулю и система уравнений (8)–(11), (4) принимает вид

$$\rho g = -p_z, \quad (12)$$

$$d_t + d^2 = + \frac{\nabla \rho \nabla p}{\rho^2} - \frac{\nabla^2 p}{\rho} - f\xi + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\rho} \nabla^2 d - \frac{\mu_2}{\rho^2} \nabla \rho \cdot \nabla d, \quad (13)$$

$$\rho_t = -\rho d. \quad (14)$$

Отметим важный момент: скорость движения жидкости равняется нулю тождественно, при этом дивергенция этой скорости отлична от нуля и определяет рассматриваемые явления. Это означает, что следствием делаемых упрощающих предположений является пренебрежение скоростью движения жидкости, что возможно в случаях, когда не возникает заметных вертикальных скоростей. Далее полагаем, что искомые величины зависят только от вертикальной координаты и времени, т. е. рассматриваем вертикальный столб жидкости. Два последних уравнения (13)–(14) могут быть переписаны в виде одного:

$$-\rho_{tt} + 2 \frac{\rho_t^2}{\rho} = + \frac{\rho_z p_z}{\rho} - p_{zz} - (\mu_1 + \mu_2) \left(\frac{\rho_t}{\rho} \right)_{zz} + \frac{\mu_2}{\rho} \rho_z \left(\frac{\rho_t}{\rho} \right)_z.$$

Выражение для второй производной давления по вертикальной координате остается неизвестным, а первая производная давления по вертикальной координате определяется только силой тяжести, согласно уравнению (12) с учетом принятых предположений. Окончательно получим уравнение

$$-\rho_{tt} + 2 \frac{\rho_t^2}{\rho} = -\rho_z g - p_{zz} - (\mu_1 + \mu_2) \left(\frac{\rho_t}{\rho} \right)_{zz} + \frac{\mu_2}{\rho} \rho_z \left(\frac{\rho_t}{\rho} \right)_z. \quad (15)$$

Уравнение (15) описывает динамику плотности вертикального столба произвольной ньютоновской сжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Используя уравнения состояния, можно переписать (15) так, чтобы в него входила одна единственная характеристика жидкости, например, плотность или температура. Для случая атмосферного воздуха в широких пределах справедливо уравнение состояния идеального газа. Ограничивая дальнейшее рассмотрение вопроса только адиабатическими процессами, протекающими в идеальном газе [7]: $p = A\rho^\gamma$, $\rho = BT^{1/(\gamma-1)}$, где константы $A = p_0/\rho_0^\gamma$, $B = \rho_0 T_0^{-1/(\gamma-1)}$ определяются

по приповерхностным значениям соответствующих величин, можно переписать уравнение (15) для температуры (не воспроизводя громоздких выкладок):

$$-T_{tt} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{T_t^2}{T} = -gT_z - \gamma RT \left(T_{zz} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{T_z^2}{T} \right) - \frac{(\mu_1 + \mu_2)}{\rho} \left(T_{tzz} - 2 \frac{T_{tz}T_z}{T} - \frac{T_t T_{zz}}{T} + 2 \frac{T_t T_z^2}{T^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\mu_2}{\gamma-1} \frac{(T_{tz}T_zT - T_t T_z^2)}{T^2}. \quad (16)$$

Здесь γ — показатель адиабаты, для краткости обозначено $\rho = BT^{1/(\gamma-1)}$. При выводе (16) величины первой и второй вязкости считались постоянными. Явления, связанные с турбулентностью, имеющие важное значение для нижней части тропосферы, не учитывались. Заметим, что все вязкие слагаемые содержат скорость изменения температуры во времени. Аналогичное замечание можно сделать для уравнения (15), описывающего плотность жидкости, где вязкие слагаемые также содержат производные плотности по времени. Это означает, что при малых скоростях изменения температуры во времени вязкие слагаемые уравнения (16) малы. С ростом скоростей изменения температуры во времени эти слагаемые будут становиться все более заметными. Для атмосферного воздуха ламинарная вязкость [12] имеет порядок $\approx 10^{-5}$. Для высот порядка высоты тропосферы вязкими слагаемыми в этом уравнении можно пренебречь [16], поскольку плотность можно считать на таких высотах приблизительно постоянной. И в стратосфере вязкими слагаемыми будем пренебрегать, хотя падение плотности на высотах в 50 км уже заметно. Выше стратосферы пренебрежение вязкими слагаемыми по всей видимости неприемлемо, поскольку стоящая в знаменателе плотность является очень малой, по этой же причине возникают сомнения в справедливости уравнений Навье — Стокса. Вязкие процессы проявляются лишь при заметных скоростях изменения температуры во времени, как это видно из (16). При медленных во времени изменениях какой-либо характеристики рассматриваемого столба вязкие процессы для нее очевидно пренебрежимо малы.

Пренебрегая вязкими слагаемыми перепишем уравнение (16):

$$T_{tt} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{T_t^2}{T} = c^2 \left[T_{zz} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{T_z^2}{T} \right] + gT_z. \quad (17)$$

Здесь введено обозначение $c^2 = \gamma RT$, определяющее скорость звука. Это же уравнение может быть переписано для плотности:

$$\rho_{tt} - 2 \frac{\rho_t^2}{\rho} = +g\rho_z + c^2 \left[(\gamma-1) \frac{\rho_z^2}{\rho} + \rho_{zz} \right], \quad (18)$$

или для давления:

$$p_{tt} - \frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{p_t^2}{p} = gp_z + c^2 p_{zz}. \quad (19)$$

Данные наблюдений доступны для давления и температуры, плотность при этом определяется уравнением состояния.

Аналогичные уравнения можно выписать для любой из парциальных составляющих атмосферы, например для озона или водяного пара, в последнем случае нужно учитывать фазовые переходы. В случае озона необходимо учитывать возникновение озона под действием солнечного излучения. Решения уравнения для плотности (18) представляют интерес в тех случаях, когда необходимо

учитывать химические превращения (как в случае рассмотрения образования озона) и фазовые превращения (для молекулярной воды на высотах образования облаков). К недостаткам полученных уравнений следует отнести следующие допущения, принимаемые при их выводе. Адиабатичность процессов на высотах стратосферы и выше вероятно нарушается вследствие сферичности поверхности планеты. Действительно, мысленно поднимая вверх некоторый прямоугольный объем воздуха, телесный угол, из которого он получает радиацию (это телесный угол, под которым видна поверхность планеты), с ростом высоты уменьшается, а телесный угол, в который он излучает радиацию (тот, под которым видно звездное небо) увеличивается. Возможно, переписав уравнения в сферических координатах для телесного угла жидкости, этот недостаток можно учесть. Адиабатичность процессов на всех высотах атмосферы нарушается также вследствие поглощения солнечного излучения озоном и водяным паром или какими-либо примесями. Также на адиабатичность процессов влияют фазовые переходы, происходящие при химических реакциях и процессах конденсации/испарения капелек воды. Перечисленные факторы не учитываются в уравнениях. Возможно на промежутках времени в сутки и более эти факторы компенсируемы радиационным выхолаживанием и обратными фазовыми переходами. В среднем на динамике столба атмосферного воздуха они сказываются незначительно. При рассмотрении процессов за сколько-нибудь длительные промежутки времени следует учитывать турбулентные процессы, имеющие важное значение для нижней части тропосферы, что также не отражено в полученных уравнениях. Учет вязких явлений в этих уравнениях является важной самостоятельной задачей, в настоящей работе не затрагиваемой. Отметим также, что изменения температуры зачастую приводят к появлению течения жидкости, вызванного действием сил плавучести. Так нагрев поверхности вызывает дневной подъем воздушных масс, ночное выхолаживание приводит к движению воздуха вниз. Кроме того ввиду неоднородности нагрева возникают значительные горизонтальные движения воздуха [14]. Все перечисленные недостатки уравнения (17) могут быть учтены в рамках системы уравнений (2)–(4), (8)–(11), свободной от принятых упрощающих допущений.

Далее будут представлены решения уравнений (19) для давления и уравнения (17) для температуры.

3. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДАВЛЕНИЯ (19)

Очевидно, что одним из решений уравнений для температуры (16), (17) является произвольная постоянная величина. Это оправдывает использование баротропных жидкостей для получения «гидростатического соотношения». Некоторая постоянная величина также обращает уравнение для давления (19) в тождество.

Решить уравнение (19) вместе с вязкими слагаемыми не удастся. Однако можно показать, что в случае учета вязких слагаемых возможно использовать метод разделения переменных в случае, если предположить постоянство скорости звука или же предположить зависимость скорости звука только от высоты. Проанализируем некоторые точные решения этого уравнения, а также точные решения уравнения с дополнительным упрощающим предположением, которые отыскать удастся.

Давление описывается нелинейным уравнением в частных производных (19), в котором $c^2 = \gamma p / \rho = \gamma RT$. На высотах мезосферы представляется вполне приемлемым предположение о постоянстве ускорения свободного падения: $g = \text{const}$.

Рассмотрим сначала стационарные решения уравнения (19).

Наиболее простой вид имеет решение, если принять постоянство скорости звука $c^2 = c_0^2 = \text{const}$ по высоте и во времени. Постоянство скорости звука в довольно глубоких слоях атмосферы используется в [3].

Пренебрежение временными слагаемыми и предположение о постоянстве скорости звука в этом уравнении приводит к выражению

$$p_{zz} = -\frac{g}{c_0^2} p_z, \quad (20)$$

из которого при интегрировании получается

$$p_z = -\frac{g}{c_0^2} p + C_1,$$

отсюда следующее интегрирование дает решение:

$$p(z) = \frac{C_1 c_0^2}{g} + C_2 \exp\left(-\frac{gz}{c_0^2}\right). \quad (21)$$

Граничным условием для (20) является значение давления на поверхности $p(z=0) = p_0$, откуда определяется константа C_2 . В случае равенства $C_1 = 0$ получается «гидростатическое отношение» [13, 14]. Следовательно, упрощенное уравнение (20) в стационарном случае с предположением о постоянстве скорости звука содержит в качестве частного случая хорошо изученное и экспериментально проверенное гидростатическое соотношение и его обобщает. Несколько меняется лишь величина средней высоты атмосферы, которая в этом решении есть $H = \gamma RT_0 / g$ и в γ раз больше, чем обычно используется в «гидростатическом соотношении». Это отличие исчезает, если использовать в гидростатическом соотношении не температуру поверхности, а некую среднюю по атмосфере величину, в γ раз меньшую поверхностной.

В случаях когда $C_1 \neq 0$, существует некоторая минимальная величина давления, ниже которой давление не опускается.

Рассмотрим нестационарный случай. Уравнение (19) в случае предположения о постоянстве скорости звука имеет вид

$$p_{tt} - \frac{\gamma + 1}{\gamma} \frac{p_t^2}{p} = gp_z + c_0^2 p_{zz}. \quad (22)$$

Уравнение (22) допускает разделение переменных, что дает возможность получить частное аналитическое решение. Примем $p(t, z) = F(t)G(z)$. Зависимость от времени определяется обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F_{tt} - \frac{\gamma + 1}{\gamma} \frac{F_t^2}{F} = \pm \lambda F, \quad (23)$$

где λ — некоторый постоянный параметр. Этому уравнению удовлетворяют решения [17]: в случае положительных λ

$$F(t) = \left(\frac{\left(C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} t\right) - C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} t\right) \right)^2}{\gamma \lambda} \right)^{-\frac{\gamma}{2}}, \quad (24)$$

и в случае отрицательных λ

$$F(t) = 2^\gamma \exp(\sqrt{\gamma\lambda}t) \left(\frac{(C_1 \exp(2t\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}) - C_2)^2}{\gamma\lambda} \right)^{-\frac{\gamma}{2}}. \quad (25)$$

Здесь C_1, C_2 — постоянные интегрирования, λ — некоторое число, являющееся параметром полученного решения.

Из двух необходимых начальных условий неизвестно ни одно. Поэтому сначала проанализируем зависимость решений уравнения (22) от параметра λ , рассмотрим зависимость решения от вертикальной координаты, а затем вернемся к обсуждению возможных начальных условий.

При положительных λ давление имеет периодические во времени решения (24), при которых оно в определенные моменты достигает бесконечных значений в виде острых пиков как показано на рис. 1.

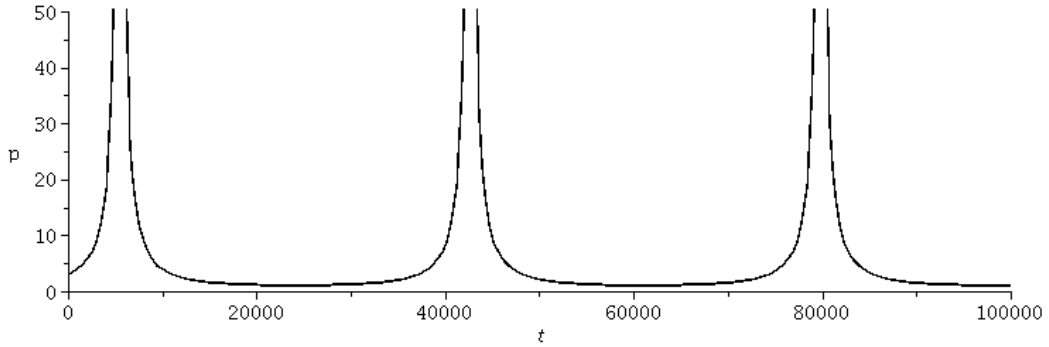


Рис. 1. График зависимости давления от времени (23) при значениях $\lambda = 10^{-8}$. Значения произвольно масштабированы и обрезаны в точках сингулярности.

При отрицательных значениях λ уравнение для давления допускает только затухающие во времени решения (25). При определенных постоянных интегрирования возможны случаи, при которых сначала наблюдается рост давления во времени, а затем его величина монотонно стремится к нулю. Такие решения не физичны, что является одной из причин отказа от отрицательных значений параметра λ .

Пространственная часть решения удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$gG_z + c_0^2 G_{zz} = \pm \lambda G. \quad (26)$$

Это линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, общее решение которого можно записать в виде: при $\lambda > 0$:

$$G(z) = C_1 \exp\left(\frac{(-g + \sqrt{g^2 + 4\lambda c_0^2})z}{2c_0^2}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{(g + \sqrt{g^2 + 4\lambda c_0^2})z}{2c_0^2}\right), \quad (27)$$

при $\lambda < 0$:

$$G(z) = C_1 \exp\left(\frac{(-g + \sqrt{g^2 - 4\lambda c_0^2})z}{2c_0^2}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{(g + \sqrt{g^2 - 4\lambda c_0^2})z}{2c_0^2}\right). \quad (28)$$

Для определения постоянных интегрирования необходимо привлечь граничные условия, одно из которых, заданное на поверхности Земли, есть $G(z = 0) = p_0$, где величина p_0 может быть принята слабо-периодической функцией времени в связи с суточными и годовыми вариациями приземного давления. Вторым граничным условием можно принять вполне естественное условие равенства нулю давления на бесконечной высоте $G(z = \infty) = 0$. Атмосфера заканчивается на конечной высоте, поэтому это условие можно переписать в виде $G(z = h_{\max}) = 0$, где h_{\max} — некоторая высота, выше которой атмосфера перестает описываться системой уравнений (9)–(11). В обоих случаях это условие необходимо для отказа от бесконечно растущих с высотой решений в (27), (28). Еще одной возможностью постановки граничного условия является выражение для производной давления по высоте на нижней границе $G_z(z = 0) = p_{z0}$.

При $\lambda = 0$ решения (27), (28) переходят в «гидростатическое соотношение», в случае если одна из констант равна нулю ($C_1 = 0$), а уравнение (26) переходит в уже рассмотренное уравнение (20), описывающее стационарный случай.

Тот факт, что уравнение (26) совпадает с (20) при $\lambda = 0$ говорит о том, что параметр λ отвечает за отклонение нестационарного решения от стационарного. Другими словами, точное выполнение гидростатического соотношения описывает стационарное решение, но если есть отклонения от гидростатического соотношения даже на очень малую величину, то в решении возникает нестационарный множитель (24) или (25), что соответствует не нулевым значениям параметра λ .

Запишем полученное решение для положительных значений параметра λ , где для краткости введем фазовую постоянную C_2 и перенумеруем константы:

$$p(t, z) = C_1 \left(\frac{\gamma \lambda}{\left(\sin \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} t + C_2 \right) \right)^2} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \times \left(C_3 \exp \left(\left(-g + \sqrt{g^2 + 4\lambda c_0^2} \right) \frac{z}{2c_0^2} \right) + \exp \left(- \left(g + \sqrt{g^2 + 4\lambda c_0^2} \right) \frac{z}{2c_0^2} \right) \right). \quad (29)$$

Ввиду неопределенности начальных условий в соответствии с рис. 1, можно принять в качестве начальной любую из точек, где давление минимально, а производная по времени равна нулю. Выбор такого момента времени в качестве начального диктует выбор фазовой постоянной $C_2 = \pi/2$, после чего решение принимает вид

$$p(t, z) = C_1 \left(\frac{\gamma \lambda}{\left(\cos \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} t \right) \right)^2} \right)^{\frac{\gamma}{2}} \times \left(C_3 \exp \left(\left(-g + \sqrt{g^2 + 4\lambda c_0^2} \right) \frac{z}{2c_0^2} \right) + \exp \left(- \left(g + \sqrt{g^2 + 4\lambda c_0^2} \right) \frac{z}{2c_0^2} \right) \right). \quad (30)$$

Возвращаясь к пространственной части решения, заметим, что при малых положительных значениях параметра λ одним из допустимых решений является постоянное значение давления по всей высоте атмосферы. В этом решении в показателе первой экспоненты выражения (30) стоит незначительно отличающаяся от нуля величина. Основываясь на втором граничном условии (равенство

давления нулю на бесконечности или на какой-то высоте h_{\max}), следует принять эту постоянную равной нулю: $C_3 = 0$. Это утверждение носит приближенный характер, связанный с отсутствием надежного значения второго граничного условия.

После сделанных замечаний получаемое решение имеет единственную амплитудную постоянную интегрирования, которую довольно естественно можно определить из граничного условия для величины давления на поверхности Земли в начальный момент времени. Решение имеет вид

$$p(t, z) = p_0 \left(\frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} t\right)} \right)^\gamma \exp\left(-\left(g + \sqrt{g^2 + 4\lambda c_0^2}\right) \frac{z}{2c_0^2}\right). \quad (31)$$

В полученное выражение (31) вошел неопределенный параметр λ . Это конечно недостаток решения. Решения уравнения (19) без предположения о постоянстве скорости звука могут оказаться значительно сложнее выражения (31), особенно вблизи моментов времени, соответствующих пикам давления.

При решении линейных уравнений можно построить общее решение, просуммировав все частные решения, соответствующие всем различным допустимым граничными условиями значениям параметра λ . Такая возможность формулируется в виде принципа суперпозиции решений линейных уравнений. Однако уравнение (22) является нелинейным, и в этом случае формулируется принцип нелинейной суперпозиции [1]. Но воспользоваться им для уравнения (22) не удастся.

Значение параметра λ оценим, основываясь на данных наблюдений. Заметим, что при положительных значениях этого параметра корень его величины является частотой возникающих осцилляций. Поскольку периодические изменения климатических условий вблизи поверхности Земли, согласно [6, 5], в прошлом неоднократно случались, параметр λ является положительным.

Для оценки величины параметра λ учтем, что периодические осцилляции случаются не часто. По крайней мере за время инструментальных наблюдений таковых не наблюдалось. Это означает малость этого параметра. Кроме того гидростатическое соотношение выполняется довольно точно, что также свидетельствует о его малости.

Прежде чем оценить величину параметра λ по исторической реконструкции частоты возникновения периодических изменений климатических условий вблизи поверхности планеты, отметим некоторую сложность интерпретации данных. Уравнение (22) и соответствующее решение (31) справедливы как для атмосферы в целом как смеси газов, так и для каждой парциальной ее компоненты в отдельности (например, это верно только для азота в отдельности или только для кислорода). Соответствующие величины (молярная масса), определяющие отдельную компоненту или смесь в целом входят в определение скорости звука. Нет никакой уверенности, что каждой из парциальных компонент и смеси в целом отвечает одно и то же значение параметра λ . Если для разных компонент атмосферы этот параметр различен, то во времени может наблюдаться довольно сложная последовательность осцилляций давления.

Далее предположим, что данные наблюдений соответствуют атмосфере в целом как смеси своих парциальных компонент, поскольку скорость адиабатических возмущений соответствует именно смеси. Принимая период возникновения изменений климатических условий в $\tau = 10000$ лет или в секундах

$\tau \approx 3 \cdot 10^{11}$, получим частоту возникновения явления $\omega = 2\pi T^{-1} \approx 2 \cdot 10^{-11}$. Отсюда, учитывая что $\omega = \sqrt{\lambda/\gamma}$, получим $\lambda \approx 10^{-22}$. Это очень маленькая положительная величина. Для промежутка времени в 350 лет, который просматривается на графиках реконструкций приземной температуры в работе [5], получим $\lambda \approx 10^{-19}$. Измерить столь малые величины, основываясь на отклонении вертикального распределения давления от гидростатического, представляется трудно выполнимой задачей.

Оценивая величину малого параметра λ , нельзя исключать возможную функциональную зависимость его от высоты и времени. Приближенно эту зависимость $\lambda(t, z)$ можно отыскать, если подставить решение (31), полученное при предположении о постоянстве скорости звука, в уравнение (19), свободное от этого предположения, и попытаться решить полученное уравнение для $\lambda(t, z)$. Найденная функциональная зависимость может существенно изменять решение, особенно в моменты времени, соответствующие пикам давления. Однако в настоящей работе такая оценка не рассматривается.

Решение (31) показывает, что периодически во времени давление достигает бесконечных значений по всей высоте атмосферы. При быстром увеличении давления вблизи пиков значительно увеличивается роль вязких слагаемых, которыми пренебрегалось при получении (31). Для исследования влияния вязкости на поведения давления в момент пульсации нужны дальнейшие исследования.

Рассмотрим как изменяется решение в стационарном случае в отсутствие предположения о постоянстве скорости звука. Учитывая выражение $c^2 = \gamma p^{1-1/\gamma} A^{-1/\gamma}$ перепишем (19) для стационарных решений в виде

$$\gamma \frac{p^{1-1/\gamma}}{A^{1/\gamma}} p_{zz} + gp_z = 0. \quad (32)$$

Решение выражается квадратурой [17]:

$$\int_{p(z)} \frac{dx}{-x^{\frac{1}{\gamma}} A^{\frac{1}{\gamma}} \gamma + C_1} = z + C_2,$$

или для атмосферы при $\gamma = 1, 4$:

$$\int_{p(z)} \frac{dx}{C_1 - x^{\frac{5}{7}}} = A^{\frac{5}{7}} \gamma z + C_2. \quad (33)$$

Это сложный интеграл. Не удастся выписать аналитический вид его решения. Численное решение уравнения (32) не показывает экспоненциального падения с высотой, демонстрируя стремление к некоторой положительной величине.

Сравним полученные решения с данными для летней субтропической справочной атмосферы [12]. Точками на рис. 2 отмечены экспериментальные данные, пунктиром отмечено гидростатическое соотношение, коротким пунктиром — решение уравнения (20), которое отличается от гидростатического множителем γ в показателе экспоненты, сплошной кривой отмечено численное решение уравнения (32). Численное решение уравнения (32) получено при граничных условиях для величины давления на поверхности и градиента давления на поверхности, взятому из гидростатического соотношения. Решение (21) лег-

ко может быть сведено к гидростатическому соотношению, если принять среднюю температуру, которой характеризуется весь столб атмосферы, меньшую граничной в γ раз.

Очевидно, что численное решение уравнения (32) можно признать удовлетворительным только ниже высот в 9 км, выше которых кривая значительно отклоняется от экспериментальных значений. Вероятно на высотах более 9 км начинает сказываться изменение температуры, что недостаточно учитывается уравнением (32). Аналитическое решение (21) вполне приемлемо. Аналогично выглядят графики, построенные для других справочных атмосфер [12].

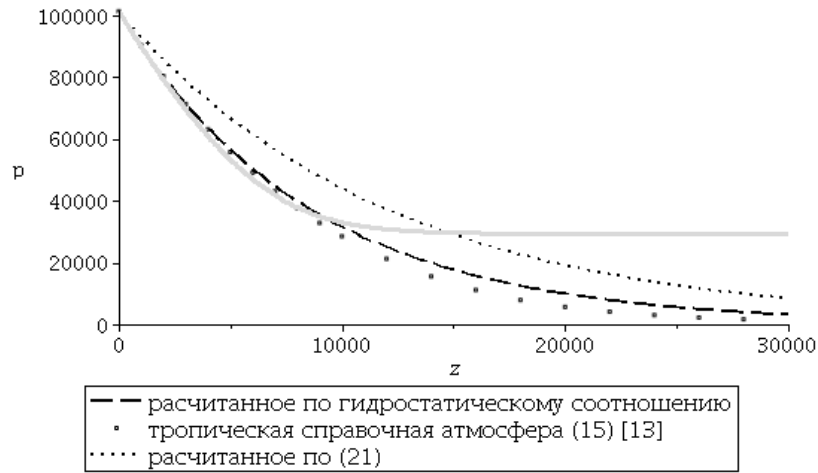


Рис. 2. Распределение давления по высоте столба атмосферы.

4. СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (17)

Общего решения уравнения (17) отыскать не удастся. Очевидно, что одним из решений уравнений (16), (17) является произвольная постоянная величина.

Рассмотрим не зависящие от времени стационарные решения $T = T(z)$ уравнения (17). По аналогии с уравнением для давления примем дополнительное упрощающее предположение о постоянстве скорости звука по всей высоте столба жидкости $c^2 = c_0^2 = \text{const}$. Получим уравнение

$$T_{zz} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{T_z^2}{T} + \frac{g}{c_0^2} T_z = 0. \quad (34)$$

Это нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение. Запишем его решение при $\gamma = 1, 4$:

$$T(z) = \left(\frac{7}{2g} \right)^{\frac{2}{7}} \left(gC_2 - C_1 c_0^2 \exp \left(- \frac{gz}{c_0^2} \right) \right)^{\frac{2}{7}}. \quad (35)$$

Вычислим производную от температуры (35) по высоте:

$$T_z(z) = C_1 \left(\frac{2g}{7} \right)^{\frac{5}{7}} \exp \left(-\frac{gz}{c_0^2} \right) \left(C_2 g - C_1 c_0^2 \exp \left(-\frac{gz}{c_0^2} \right) \right)^{-\frac{5}{7}}. \quad (36)$$

Поставим граничные условия на поверхности Земли: на градиент температуры $T_z(z=0) = -\gamma_b$ и ее значение на поверхности $T(z=0) = T_b$, и обозначим $c_0^2 = \gamma R T_b$. Выбор таких граничных условий обусловлен тем, что принятые значения можно оценить по результатам измерений. Другими возможными граничными условиями могут быть значения температуры на высоте принятой за верхнюю границу атмосферы. Однако количественная оценка высоты атмосферы является в большой степени произвольной и значения температуры на больших высотах определяются в наблюдениях с большой ошибкой и могут варьировать в широких пределах.

Из граничных условий получим систему алгебраических уравнений для определения значений констант интегрирования:

$$T_b = \left(\frac{7}{2g} \right)^{\frac{2}{7}} (gC_2 - C_1 c_0^2)^{\frac{2}{7}}, \quad -\gamma_b = C_1 \left(\frac{2g}{7} \right)^{\frac{5}{7}} (C_2 g - C_1 c_0^2)^{-\frac{5}{7}}.$$

Разрешая эту систему, получим

$$C_1 = -T_b^{\frac{5}{2}} \gamma_b, \quad C_2 = (-7c_0^2 \gamma_b + 2T_b g) \frac{T_b^{\frac{5}{2}}}{7g}, \quad (37)$$

$$C_1 = +T_b^{\frac{5}{2}} \gamma_b, \quad C_2 = -(-7c_0^2 \gamma_b + 2T_b g) \frac{T_b^{\frac{5}{2}}}{7g}. \quad (38)$$

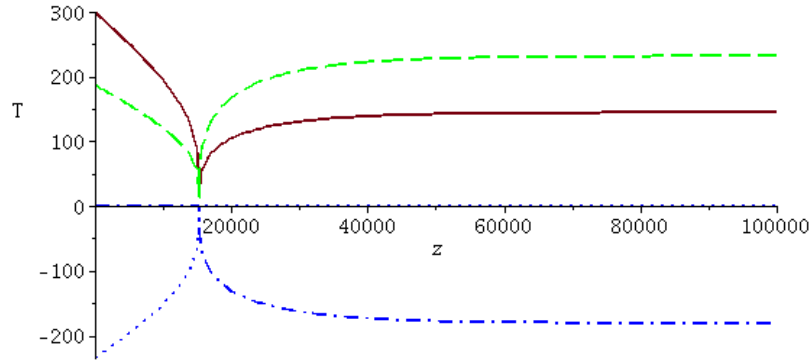
Отметим, что имеется два набора констант, при которых реализуется изучаемое решение.

Решение (35), (37), (38) уравнения (34) представим графически на рис. 3 в виде зависимостей температуры от высоты при различных значениях граничных условий (эти значения указываются под рисунком). Все вычисления выполнялись для атмосферного воздуха. На рис. 3 показано влияние изменения градиента температуры на поверхности Земли при постоянной температуре поверхности. На каждом графике представлены вещественные и мнимые части двух решений (35) соответствующие константам (37) и (38).

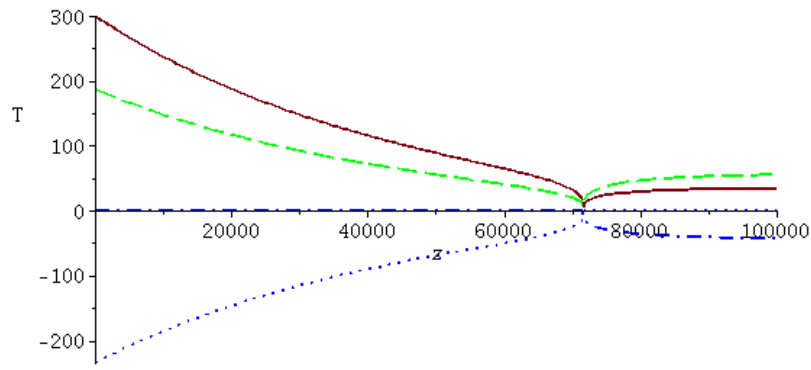
На графиках рис. 3 а)–б) на различных высотах имеется особая точка. Она одна и та же для обоих наборов констант. Положение особой точки на оси абсцисс зависит от граничных условий.

Из представленных графиков видно, что мнимая часть обоих решений отлична от нуля не на всех высотах. На высотах меньших высоты особой точки одно из решений является вещественным, другое имеет мнимую часть. Выше особенности ситуация меняется: то решение, которое вещественно ниже особенности, приобретает мнимую часть, другое решение теряет свою мнимую часть и становится вещественным. Ниже особенности решение вещественно как раз то, которое удовлетворяет нижнему граничному условию. Выше же особенности вещественно то решение, которое не удовлетворяет граничному условию.

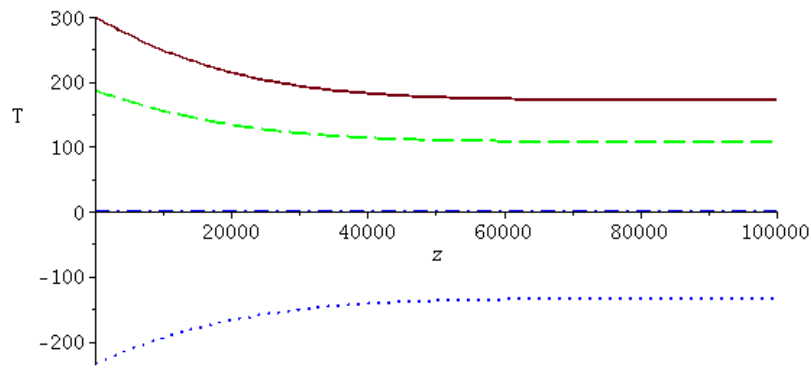
Несмотря на то, что одно из решений не удовлетворяет граничному условию, это является поводом отказаться от него только в случае представленном на рис. 3 в), когда решение монотонно по высоте. В случаях же соответствующих рис. 3 а)–б) отказаться от решения не соответствующего граничному условию можно только на высотах меньших высоты особенности. Выше особой точки про оба решения можно сказать лишь, что они удовлетворяют уравнению и имеют право на существование. Вероятнее будет наблюдаться то из них, которое не имеет мнимой части.



а) $\gamma_b = -0,0098 \text{ K/м}$



б) $\gamma_b = -0,0070 \text{ K/м}$



в) $\gamma_b = -0,006 \text{ K/м}$

Рис. 3. Графики распределения температуры по высоте построенные по выражению (35) при различных значениях граничных условий. Сплошная кривая — вещественная часть (35), (37), пунктирная — вещественная часть (35), (38), штрихпунктирная — мнимая часть (35), (37), точечная — мнимая часть (35), (38). По оси абсцисс отложена высота в метрах. Температура поверхности $T_b = 300 \text{ K}$.

Выше особой точки кроме требования вещественности получаемого решения не видно дополнительных оснований для обсуждения возможности выбора одного из решений. Вероятна реализация такой ситуации, когда ниже высоты особенности реализуется одно решение, а выше высоты особенности реализуется другое. Иначе говоря, вещественно такое решение уравнения (34), для которого ниже высоты особенности реализуются постоянные интегрирования (37), а выше особенности реализуются постоянные интегрирования (38). Кроме того, что такая кривая вещественна, именно она является решением нестационарного уравнения, которое будет рассмотрено далее в § 6.

Высота возникающей особенности в решении (35) значительно зависит от приповерхностного градиента температуры, более слабое влияние имеет величина поверхностной температуры. С ростом этой температуры при неизменном приповерхностном градиенте высота, на которой возникает особая точка решения (35) увеличивается. Например, при сухоадиабатическом градиенте рост поверхностной температуры на 27 градусов (с 273 до 300 градусов Кельвина) приводит к увеличению высоты, занимаемой особенностью, приблизительно на 1400 метров: с 13,8 км до 15,2 км. При значении градиента близком к влажноадиабатическому $\gamma_b = -0,007$ К/м аналогичное изменение температуры поверхности приводит к изменению высоты особой точки на 6 км с 65,1 км до 71,4 км.

Попробуем представить себе, что означают полученные решения применительно к физике атмосферы.

Нет уверенности, что в атмосфере будет наблюдаться особенность температуры в ее математическом определении, скорее там будет наблюдаться минимум температуры, пусть даже глубокий.

Минимум температуры, появляющийся на графиках представленных на рис. 3 а)–б) в виде особенности решений, можно связать с такими наблюдающимися в атмосфере Земли явлениями как тропопауза и стратопауза. Тропопаузой называется зачастую наблюдающаяся в атмосфере область минимальных температур порядка 250 градусов Кельвина на высотах порядка 11–18 км, выше которой начинается стратосферный рост температуры с высотой. Экспериментальные данные представлены во множестве исследований [2, 4, 9, 14]. Высота особой точки решения (35), (37) количественно близко с наблюдающимся зачастую началом высоты тропопаузы, несмотря на приближения принимаемые при выводе. Далее, решения (35) демонстрируют почти постоянный градиент вблизи поверхности, что и наблюдается [2, 4, 14]. Высота начала стратосферного роста температуры совпадает с ростом температуры при увеличении высоты выше особенности для решения (35). Дальнейшее постоянство или слабый рост температуры по высоте не совпадает с наблюдаемыми вертикальными профилями температуры на высотах более 50 км.

Однако наблюдаемое поведение температуры выше стратосферы также может быть объяснено в рамках решения (35), поскольку особая точка соответствующая влажноадиабатическому приповерхностному градиенту находится на высотах соответствующих стратопаузе, рис. 3 б). Одновременная реализация различных решений (35), вычисленные с различными граничными условиями возможна в случае существования какого-либо принципа нелинейной суперпозиции решений, если за период усреднения уравнений (2)–(4) наблюдались различные граничные условия. Все же здесь есть затруднение связанное с тем, что значительное уменьшение плотности на высотах более 30 км вызывает сомнение в справедливости системы управляющих уравнений (2)–(4). На высотах

порядка 50–70 км могут оказаться существенными не учитываемые в уравнениях (2)–(4) факторы. Поэтому приводимые далее результаты ограничиваются высотами в 30 км.

Для атмосферного газа, состоящего только из молекулярного азота, в котором адиабатические возмущения распространялись бы со скоростью $(\gamma R M_{N_2}^{-1} T_b)^{1/2}$, высота точки особенности составила бы 14,7 км при $T_b = 300$ К и $\gamma_b = -0,0098$ К/м. Соответствующая высота для атмосферного газа, состоящего только из кислорода, для которого скорость адиабатических возмущений есть $(\gamma R M_{O_2}^{-1} T_b)^{1/2}$, составила бы 21,2 км. Близость представленных интервалов высот к диапазону высот занимаемых тропопаузой в наблюдениях [9] представляется случайной. Для более легких газов точка особенности решения (35) располагается ниже по высоте, для более тяжелых газов — выше.

При изучении экспериментальных данных тропопауза предстает крайне динамическим явлением [9]. Значительное влияние на нее оказывает планетарная циркуляция атмосферы, значительны широтные и сезонные вариации, велика зависимость от подстилающей поверхности (на одних широтах над океанами и континентами наблюдаются различные явления). Для высоты тропопаузы и ее минимальной температуры (зачастую даже количества тропопауз) значимы также возмущения, вносимые грозами, фронтами, циклонами. Не ставя себе целью описать все богатство явлений, наблюдающихся в различных метеоусловиях, представим себе некоторый незначительно возмущенный столб сжимаемого атмосферного воздуха, и попытаемся выяснить явления, из числа тех что наблюдаются в атмосфере, для которых столь простая математическая идеализация может оказаться достаточной.

На разных широтах высота вертикального положения тропопаузы различна. В [9, 12–14] приводится изменение высоты тропопаузы в зависимости от времени года и географической широты. Качественно эти изменения соответствуют выводам, полученным из решений (35), и могут быть объяснены изменением приповерхностной температуры, связанной с изменением времени года и географической широты, в случае если приповерхностный градиент температуры остается приблизительно постоянным в течении всего года на той или иной географической широте. Экспериментальные данные из [4] приведены на рис. 7 и рис. 8, где они сравниваются с вещественными решениями (55) нестационарного уравнения, описанного в § 6.

С увеличением приповерхностного градиента температуры высота особенности возникающей в решении (35) уменьшается. С ростом поверхностной температуры при неизменном приповерхностном градиенте — увеличивается. В наблюдениях высота тропопаузы выше летом, чем зимой, и выше на низких широтах, чем на высоких. Такое поведение высоты тропопаузы качественно описывается изменением приповерхностной температуры.

Вероятно наблюдается и изменение приповерхностного градиента температуры в зависимости от сезона. Наибольшее влияние на него оказывает увеличение влажности до состояния насыщенного водяного пара. Над влажными тропическими областями динамика тропопаузы должна зависеть и от этого граничного условия. При уменьшении градиента температуры вблизи поверхности высота, на которой располагается особая точка решения, увеличивается.

Объясняется и исчезновение тропопаузы, что свойственно сжимаемой бароклинной идеальной жидкости при малых приповерхностных градиентах тем-

пературы, пример представлен на рис. 3 в). При тех же условиях исчезает и стратосферный рост температуры. Возможно именно это явление проявляется в атмосфере над географическими полюсами планеты. Низкие температуры поверхности и малые приповерхностные градиенты температуры в этих районах планеты в течении зимнего периода являются причиной исчезновения тропопавузы и стратосферного роста температуры. Исчезновение тропопавузы действительно наблюдается в основном над Антарктидой [15], в атмосфере над Арктикой могут проявляться аналогичные явления. Это явление получило название «озоновые дыры». Очень вероятно, что у площади ими занимаемой есть сезонные вариации.

Заканчивая обсуждение стационарного случая, можно заключить, что наличие мнимой части в решении делает сомнительной приемлемость стационарного решения уравнения (34) для описания динамики столба сжимаемой идеальной бароклинной жидкости в поле силы тяжести. Хотя полученные решения объясняют некоторые особенности распределения температуры в атмосфере, но вещественным может быть только решение, построенное по константам интегрирования (37) ниже высоты точки особенности и по константам интегрирования (38) выше высоты особенности, такое составное решение удовлетворяет нестационарному уравнению, рассматриваемому в § 6.

5. СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (17) БЕЗ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О ПОСТОЯНСТВЕ СКОРОСТИ ЗВУКА

Рассмотрим как изменяется получаемое решение в стационарном случае при отсутствии предположения о постоянстве скорости звука. Примем, что $T(t, z) = T(z)$, частное дифференцирование по времени дает нулевой результат, уравнение (17) примет вид

$$T_{zz} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{T_z^2}{T} + \frac{g}{\gamma R} \frac{T_z}{T} = 0. \quad (39)$$

Решением этого уравнения являются квадратуры [17] при $\gamma = 1, 4$:

$$\int \frac{7RdT}{2g \pm C_1 T^{-\frac{5}{2}}} = -z + C_2. \quad (40)$$

Квадратуры (40) выражают зависимость высоты от температуры и могут быть записаны и в аналитическом виде. Однако обратить эти аналитические выражения и найти из них зависимости температуры от высоты не удастся, поэтому для краткости они не приведены. По этой причине не удастся определить константы интегрирования C_1, C_2 , фигурирующие в (40). Однако остается надежда оценить эти константы.

Из интегралов (40) видно, что при $C_1 = 0$, мы получаем решение $T(z) = T_0 - \gamma_a z$ (γ_a — приповерхностный градиент температуры) [16], справедливое для несжимаемого случая, откуда определяется вторая константа C_2 , которая по смыслу есть величина, пропорциональная некоторой граничной температуре (например, ее граничному значению при $z = 0$). Также видно, что первая константа C_1 описывает отличие сжимаемой среды от несжимаемой и не входит

в несжимаемое решение. Перепишем первый интеграл (39):

$$T_z = -\frac{(2g \pm C_1 T^{-\frac{5}{2}})}{7R},$$

для двух полученных решений, отличающихся знаком перед константой C_1 . Оценим отсюда константу C_1 , предположив, что на поверхности заданы в качестве граничных условий градиент температуры $T_z(z=0) = -\gamma_b$ и значение температуры на поверхности $T(z=0) = T_b$:

$$-\gamma_b = -\frac{2g}{7R} \mp C_1 \frac{T_b^{-\frac{5}{2}}}{7R}.$$

Для атмосферного воздуха величина $2g/(7R)$ приближенно равняется 0,00977, что при $C_1 = 0$ достаточно близко к наблюдающемуся вблизи поверхности сухоадиабатическому градиенту. Определяя из последнего выражения постоянную интегрирования C_1 , получим выражения $C_1 = \pm T_b^{5/2}(7R\gamma_b - 2g)$. Знак константы C_1 определяется разницей граничного условия γ_b (градиент температуры у поверхности) и величины $2g/(7R)$. Следовательно, при $\gamma_b = 2g/(7R)$ постоянная интегрирования равняется нулю и жидкость ведет себя как несжимаемая. Это не очень понятно. Наблюдательные данные показывают, что при $\gamma_b \approx 2g/(7R)$ наблюдается сложное распределение температуры по высоте, а не распределение $T(z) = T_0 - \gamma_a z$, справедливое при $C_1 = 0$. Чтобы получить верное значение этой константы необходимо проинтегрировать (40), в результате подставить выбранные граничные условия, после чего, разрешая полученные выражения относительно констант интегрирования, получить их значения. Прodelать это не удастся. Поэтому будем пользоваться полученной оценкой как некоторым приближением.

Зная оценку констант интегрирования, нарисуем (см. рис. 4) график зависимости вещественной части высоты от температуры для одного из выражений (40) при значениях граничных условий $\gamma_b = -0,008$, $T_b = 300$. По оси ординат отложена высота, по оси абсцисс — температура. На этом же рисунке приведен график зависимости высоты от температуры, полученный из решения (35), (37), (38):

$$z(T) = -\frac{c_0^2}{g} \ln \left(\frac{7C_2 - 2T^{\frac{7}{2}}}{7C_1} \right), \quad (41)$$

взятые при тех же граничных условиях.

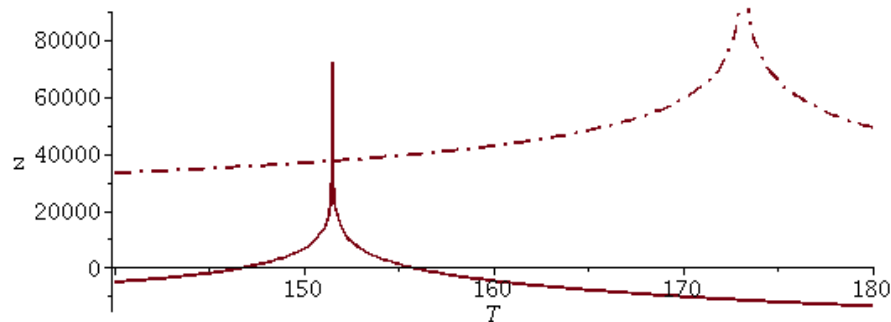


Рис. 4. Графики зависимости высоты от температуры. Сплошная кривая построена по одному из выражений (40) с оценочными значениями констант интегрирования. Штрихпунктирная кривая построена по (41) и одному из значений (35), (37).

Оба представленных на рис. 4 графика качественно похожи друг на друга. Очевидно, что полученная оценка констант не удовлетворительна, поскольку решение (21) на рис. 4 значительно сдвинуто как по оси ординат, так и по оси абсцисс. При желании операцией сдвига можно совместить эти решения. Однако совершенно очевидно, что оба решения имеют особенность первого рода. Важность этого замечания в том, что принимаемое упрощение о постоянстве скорости звука в уравнении (17) не лишает это уравнение возникающей в его решении особенности при определенных граничных условиях. Конечно принимаемое упрощение влияет на решение возможно изменяя высоту на которой возникает особенность, но не на сам факт возникновения особенности.

6. НЕСТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (17) В СЛУЧАЕ ПОСТОЯНСТВА СКОРОСТИ ЗВУКА

Прежде чем приступить к анализу решения уравнения (17), необходимо пояснить смысл, вкладываемый в понятие нестационарности применительно к этому уравнению. Уравнение получено в предположении отсутствия вертикальных скоростей, которые неизменно возникают вследствие адвективных течений вблизи поверхности Земли, температура которой изменяется. Можно надеяться, что усреднение за значительный интервал времени или многочисленные акты наблюдений исключит влияние этих течений. Несущественными течения воздуха могут являться только на значительных интервалах времени, существенно превышающих суточный интервал, а вероятно превышающих и годовой интервал времени. Поэтому при обсуждении решения нестационарного уравнения (17) речь может идти только о крайне «медленном» времени. Уравнение (17) справедливо лишь для значительных промежутков времени. Вместе с тем адиабатические возмущения даже самой малой амплитуды распространяются в вертикальном направлении со скоростью звука, что на значительных временных интервалах является очень быстрым процессом. Уравнение (17) включает два механизма значительно отличающихся своим временным масштабом.

В наблюдательных данных поверхностные температуры и их приповерхностные градиенты тоже усредняются и их средние значения отличаются от мгновенных. Некоторое противоречие видится в том, что эти величины входят в граничные условия для решения в стационарном случае (35), (37), (38) и на поведение решения влияют именно их мгновенные значения.

Проанализируем упрощенное уравнение

$$T_{tt} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{T_t^2}{T} = c_0^2 \left[T_{zz} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{T_z^2}{T} \right] + gT_z, \quad (42)$$

где $c_0^2 = \gamma RT_0$ — постоянное значение скорости звука. Это уравнение получается, если предположить постоянство значения скорости звука в уравнении (17).

Принимаемое постоянство скорости звука в уравнении (42) является упрощающим предположением, выражающим то, что изменение самой температуры в уравнении (17) не является определяющим для рассматриваемых явлений. Определяющее значение имеет учет первых и высших производных температуры в уравнении (17).

Будем использовать метод разделения переменных, т. е. примем, что $T(t, z) = F(t)G(z)$, где $F(t)$ — функция только времени, $G(z)$ — функция только вертикальной координаты. Подставляя решение в таком виде в (42), получаем

$$\frac{1}{F} F_{tt} - \frac{1}{F} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{F_t^2}{F} = \frac{1}{G} c_0^2 \left[G_{zz} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{G_z^2}{G} \right] + \frac{1}{G} g G_z,$$

откуда следуют два уравнения:

$$F_{tt} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{F_t^2}{F} = \pm \lambda F, \quad (43)$$

$$c_0^2 \left[G_{zz} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{G_z^2}{G} \right] + g G_z = \pm \lambda G. \quad (44)$$

Отметим существование параметра $\pm \lambda$ в полученном решении, помимо констант интегрирования. При решении линейных уравнений методом разделения переменных, например, линейного волнового уравнения или уравнения теплопроводности, такой параметр также возникает. Решение справедливо для всевозможных значений этого параметра. Используя принцип линейной суперпозиции, для получения общего решения по этому параметру проводится интегрирование или суммирование в случае, если реализация некоторого множества значений параметра невозможна в силу граничных условий. В нелинейном случае существует принцип нелинейной суперпозиции решений, согласно которому из двух решений, каждое из которых соответствует своему значению λ можно сформировать такую функцию, которая также будет решением исходного уравнения [1]. Однако в каждом конкретном случае задача поиска функции, реализующей нелинейную суперпозицию сложна и найти ее зачастую не удается. В случае уравнения (42) составить общее решение не удастся, и далее мы будем рассматривать некоторые частные решения, полученные при каких-то конкретных значениях параметра λ . Необходимо принять какое-либо определенное значение этого числа при помощи дополнительных условий, например диктуемых экспериментальными или наблюдательными данными.

Отдельно рассмотрим случаи отрицательных и положительных значений параметра λ .

При отрицательных значениях параметра λ уравнению (43) удовлетворяет выражение

$$F(t) = \exp(\sqrt{\gamma - 1} \sqrt{\lambda} t) \left(\frac{4\lambda(\gamma - 1)}{\left(\exp\left(\frac{2\sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\gamma - 1}}\right) C_1 - C_2 \right)^2} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2}}. \quad (45)$$

При значениях $\gamma > 1$ решение (45) для температуры не может иметь колебательный характер во времени. Функция (45) может оказаться достаточно сложной. Выясним ее поведение. Для этого запишем решение при $\gamma = 1, 4$ не учитывая масштабный множитель и переопределяя константу C_2 :

$$F(t) \sim \exp(0,6324\sqrt{\lambda} t) \left(\frac{\lambda}{\left(\exp(3,1623\sqrt{\lambda} t) - C_2 \right)^2} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

При вещественных значениях констант решение также вещественно. Здесь можно выделить три случая поведения решения в зависимости от значения константы C_2 . При малых $\lambda \approx -10^{-6}$ и при $C_2 < -1$ это сначала возрастающая и далее во времени убывающая функция, при $C_2 > 1$ эта функция имеет во времени особенность первого рода (взрывающееся решение), при $-1 < C_2 < 1$ решение является монотонно убывающей функцией времени. Однако с течением времени, на действительно больших временах сравнимых с временем существования планеты все эти случаи приводят к монотонному убыванию решения после особенности или некоторого роста в первых двух случаях. Чем больше модуль λ , тем быстрее стремится к нулю эта функция. Большие отрицательные значения параметра не приемлемы, поскольку существование нулевых температур в атмосфере противоречит наблюдательным фактам.

Решение пространственного уравнения (44) довольно сложное при отрицательных λ :

$$G(z) = \exp\left(-\frac{\sqrt{(\gamma-1)((g^2-4\lambda c_0^2)\gamma-g^2)}+g(\gamma-1)}{2c_0^2\gamma}z\right) \times \left(\gamma^2 c_0^4 \frac{\left(C_3 \exp\left(\frac{z\sqrt{(\gamma-1)((g^2-4\lambda c_0^2)\gamma-g^2)}}{c_0^2(\gamma-1)}\right) - C_4\right)^2}{(\gamma-1)((g^2-4\lambda c_0^2)\gamma-g^2)}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}. \quad (46)$$

Для краткости обозначим $\delta = g^2(\gamma-1) - 4\lambda\gamma c_0^2$, вынесем из под знака степени константу C_1 , полагая ее вещественной, переопределим константу $C_4 = C_4/C_3$ и перепишем

$$G(z) = C_3 \exp\left(-\frac{\sqrt{(\gamma-1)\delta}+g(\gamma-1)}{2c_0^2\gamma}z\right) \times \left(\gamma^2 c_0^4 \frac{\left(\exp\left(\frac{z\sqrt{\delta}}{c_0^2\sqrt{\gamma-1}}\right) - C_4\right)^2}{(\gamma-1)\delta}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}. \quad (47)$$

Отрицательные значения δ возможны при условии $g^2(\gamma-1) < 4\lambda\gamma c_0^2$, в этом случае пространственная часть решения является сложной колебательной функцией. В числе прочих сложных режимов возможны ступенчатые вертикальные распределения описываемые вещественной функцией.

Запишем частное решение уравнения (42), перенумеровав константы:

$$T(z, t) = C_1 \exp\left(\sqrt{\gamma-1}\sqrt{\lambda t} - \frac{\sqrt{(\gamma-1)\delta}+g(\gamma-1)}{2c_0^2\gamma}z\right) \times \left(\frac{4\lambda(\gamma-1)}{(\exp(2\sqrt{\lambda t}\sqrt{\gamma-1}) - C_2)^2}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \left(\gamma^2 c_0^4 \frac{\left(\exp\left(\frac{z\sqrt{\delta}}{c_0^2\sqrt{\gamma-1}}\right) - C_3\right)^2}{(\gamma-1)\delta}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, \quad (48)$$

где $\delta = g^2(\gamma-1) - 4\lambda\gamma c_0^2$. При вещественных значениях констант интегрирования решение также вещественно. Подчеркнем очевидный факт: выражение (48)

определяет значение абсолютной температуры, а не отклонение температуры от какого-либо среднего значения.

Поставим граничные условия: это два граничных условия на поверхности земли $T(z = 0, t) = T_b$, $T_z(z = 0, t) = -\gamma_b$.

Обсудим другие возможности. Граничное условие на верхней границе атмосферы либо температура на бесконечности заведомо не определены. Да и трудно условиться относительно высоты самой атмосферы. Отметим, что оба принимаемых граничных условия зависят от времени, например при учете суточных вариаций температуры поверхности можно записать $T_b = T_b(t) \approx T_b + T_{\text{day}} \sin(\omega_{\text{day}} t)$. Если быть еще точнее, на поверхности следует задать уравнение для приповерхностных значений температуры атмосферного воздуха. Для более достоверных результатов необходимо рассчитывать температуру слоев грунта вплоть до глубин проникновения поверхностных колебаний температуры. Температуры же поверхности и приповерхностного слоя воздуха могут отличаться значительно, особенно в сложных орографических условиях. Считая эти замечания не существенными, примем указанные граничные условия в каком-то «среднем» смысле, как будто действие всех этих и других неназванных механизмов приводит к появлению именно таких граничных значений температуры поверхностного слоя воздуха и ее градиента. По крайней мере так можно считать в каком-то самом первом приближении.

Постановка граничных условий приводит к тому, что искомые константы становятся функциями параметра λ : $C_i = C_i(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$. Следовательно, чтобы определить константы нужно задаться конкретным значением параметра λ .

Нас интересуют решения не зависящие от начальных данных. За время существования атмосферы, скорее всего, зависимость температуры от начальных данных была забыта. Временная часть решения должна затухать достаточно медленно, что с учетом значительных возмущений регулярно возникающих в атмосфере, может позволить атмосфере сохранять в каких-то пределах в среднем неизменную температуру. Например, в тропосфере такими возмущениями могут оказаться циклон-антициклоническая активность, а в стратосфере — внезапные стратосферные потепления. Поскольку в наблюдательных данных температура с течением времени не стремится быстро к нулю, это означает, что величина λ очень мала. При малых λ пространственная часть решения (48) не значительно отличается от вещественной части стационарного решения (35), (37), (38), что в общем удовлетворительно. Некоторые распределения температуры при значениях параметра $\lambda \approx g^2(\gamma - 1)/(4\gamma c_0^2)$ также показывают удовлетворительное согласие с экспериментально наблюдаемыми профилями вертикального распределения температуры, однако при таких значениях λ на больших высотах (около 150–200 км) должны наблюдаться отрицательные абсолютные температуры и на всех высотах температура должна довольно быстро стремиться к нулю, чего не наблюдается, следовательно параметр λ может быть принят меньшим, чем $g^2/(14c_0^2) \approx 10^{-4}$. Какое-то время, тоже пропорциональное λ , возможен нелинейный рост температуры, связанный с каким-либо возмущением. Возникающие возмущения конечно не оправдывают возможность принятия отрицательных значений параметра λ .

Наряду с граничными следует поставить начальные условия. Можно принять их соответствующими стационарному решению (35), (37), (38), т. е. решению при $\lambda = 0$. Мы не можем принять, например постоянное по высоте значение температуры, поскольку это другое допустимое решение уравнения (17).

Третьим вариантом можно принять некоторое экспериментально наблюдаемое распределение температуры по высоте, это тоже сомнительно, поскольку экспериментально можно наблюдать довольно сложное распределение температуры по высоте атмосферы, реализующееся под влиянием множества факторов, нарушающих предположения принимаемые при выводе (17).

Удовлетворительного начального условия не просматривается и к тому же нас интересуют решения не зависящие от начальных данных. Примем в качестве начального условия выражение (48). У него нет мнимой части, оно качественно совпадает с стационарным решением (35), (37), (38). Второго решения уравнения (42) найти не удастся и при малых по величине значениях λ не зависит от знака этого параметра.

Запишем производную по координате решения (48) в виде отношения к самому решению:

$$\frac{T_z(z, t)}{T(z, t)} = \frac{(g(\gamma-1) - \sqrt{(\gamma-1)\delta}) \exp\left(\frac{z\sqrt{(\gamma-1)\delta}}{c_0^2(\gamma-1)}\right) - C_3(g(\gamma-1) + \sqrt{(\gamma-1)\delta})}{2\gamma c_0^2 \left(-\exp\left(\frac{z\sqrt{(\gamma-1)\delta}}{c_0^2(\gamma-1)}\right) + C_3\right)}. \quad (49)$$

Поставим два граничных условия на поверхности земли: $T(z=0, t) = T_b$, $T_z(z=0, t) = -\gamma_b$.

$$T_b = F(t)C_1 \left(\frac{c_0^4 \gamma^2 (C_3 - 1)^2}{(\gamma - 1)(-4\lambda\gamma c_0^2 + g^2\gamma - g^2)} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \gamma_b = -F(t)C_1 \left(\frac{c_0^4 \gamma^2 (C_3 - 1)^2}{(\gamma - 1)(-4\lambda\gamma c_0^2 + g^2\gamma - g^2)} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \\ \times \frac{C_3 g(\gamma - 1) - g(\gamma - 1) + (C_3 + 1)\sqrt{(\gamma - 1)(-4\lambda\gamma c_0^2 + g^2\gamma - g^2)}}{2(-1 + C_3)\gamma c_0^2}. \end{aligned} \quad (51)$$

Начальное условие согласовано с граничными только в начальный момент времени. В любой последующий момент времени монотонно убывающая во времени температура в граничной точке будет меньше, чем поставляемое граничное условие. Чем дальше во времени, тем разница больше.

Определим из (50), (51) постоянные интегрирования. Выражения для них есть

$$\begin{aligned} C_1 = T_b (2T_b^2 c_0^4 \gamma^2)^{-\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left(T_b (g(\gamma-1)T_b - 2\gamma_b \gamma c_0^2) \sqrt{((-4\lambda c_0^2 + g^2)\gamma - g^2)(\gamma-1)} \right. \\ \left. + ((-2\lambda c_0^2 + g^2)\gamma - g^2)(\gamma-1)T_b^2 - 2\gamma_b g c_0^2 \gamma (\gamma-1)T_b + 2\gamma_b^2 c_0^4 \gamma^2 \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$C_3 = -\frac{2\gamma_b \gamma c_0^2 - T_b g \gamma + T_b g + T_b \sqrt{-4\lambda \gamma^2 c_0^2 + g^2 \gamma^2 + 4\lambda \gamma c_0^2 - 2g^2 \gamma + g^2}}{-2\gamma_b \gamma c_0^2 + T_b g \gamma - T_b g + T_b \sqrt{-4\lambda \gamma^2 c_0^2 + g^2 \gamma^2 + 4\lambda \gamma c_0^2 - 2g^2 \gamma + g^2}}. \quad (53)$$

Значения констант вещественны при малых значениях параметра λ и второй пары констант отыскать не удастся. График характерного распределения температуры, полученные из (48), (52), (53) представлен на рис. 5. Этот график совпадает с вещественной кривой описываемой двумя решениями стационарного случая (35), (37), (38), если принять одно из решений ниже высоты особенности, а выше — второе решение.

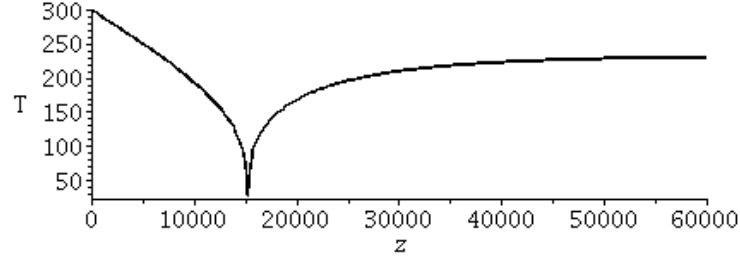


Рис. 5. Распределение температуры атмосферы по высоте, полученное из (48), (52), (53), значения констант интегрирования (52), (53) вычислены при $T_b = 300$, $\gamma_b = -0.0098$, $\lambda = 0$.

Решение (48) с константами (52), (53) одно и вещественно. Влияние градиента приповерхностной температуры, величины самой температуры, значения газовой постоянной аналогично описанному для (35), (37), (38).

Запишем решение при положительных λ . Зависимость от времени решения имеет вид

$$F(t) = \left(\frac{\left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\gamma-1}}t\right) - C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\gamma-1}}t\right) \right)^2}{\lambda(\gamma-1)} \right)^{\frac{1-\gamma}{2}}.$$

В этом выражении можно переопределить постоянные интегрирования, одна из которых будет являться амплитудной, другая — фазовой. Фазовую константу сохраним, хотя ей можно пренебречь, поскольку мы не знаем когда процесс начался (начало процесса можно принять при $C_2 = 0$). Амплитудную постоянную вынесем за знак степени:

$$F(t) = C_1 \left(\frac{\left(\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\gamma-1}}t + C_2\right) \right)^2}{\lambda(\gamma-1)} \right)^{\frac{1-\gamma}{2}}.$$

В пространственной части решения уравнения (44) также вынесем одну константу и запишем его в виде

$$G(z) = C_3 \exp\left(-z \frac{g(\gamma-1) + \sqrt{(\gamma-1)((4\lambda c_0^2 + g^2)\gamma - g^2)}}{2c_0^2\gamma}\right) \times \left[\gamma^2 c_0^4 \frac{\left(\exp\left(z \frac{\sqrt{(\gamma-1)((4\lambda c_0^2 + g^2)\gamma - g^2)}}{c_0^2(\gamma-1)}\right) - C_4 \right)^2}{(\gamma-1)((4\lambda c_0^2 + g^2)\gamma - g^2)} \right]^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}. \quad (54)$$

Умножим две части решения и перенумеруем константы:

$$\begin{aligned}
T(t, z) = & C_1 \left(\frac{\left(\sin \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\gamma-1}} t + C_2 \right) \right)^2}{\lambda(\gamma-1)} \right)^{\frac{1-\gamma}{2}} \\
& \times \exp \left(-z \frac{g(\gamma-1) + \sqrt{(\gamma-1)((4\lambda c_0^2 + g^2)\gamma - g^2)}}{2c_0^2\gamma} \right) \\
& \times \left[\frac{\gamma^2 c_0^4 \left(\exp \left(z \frac{\sqrt{(\gamma-1)((4\lambda c_0^2 + g^2)\gamma - g^2)}}{c_0^2(\gamma-1)} \right) - C_4 \right)^2}{(\gamma-1)((4\lambda c_0^2 + g^2)\gamma - g^2)} \right]^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}.
\end{aligned} \tag{55}$$

Оценим параметр λ , чтобы можно было поставить граничные условия.

Временная часть решения показывает существование периодических сингулярностей, поскольку синус, стоящий в знаменателе (55), периодически достигает нуля при ненулевых λ при $\gamma = 1, 4$. Вид зависимости представлен на рис. 1.

За время инструментальных наблюдений сколько-нибудь значительных повышений температуры во времени не фиксировалось. Следовательно, параметр мал. В атмосфере наблюдается квазидвухлетняя пульсация температуры в атмосфере [9] над значительными площадями поверхности планеты (в основном над экваториальными и тропическими широтами), но поведение пульсации во времени вовсе не похоже на представленную на рис. 1 зависимость. Отличие решения (55) от не найденного решения уравнения (17) вероятно будет особенно значительным в точках сингулярности, но некоторое качественное изменение температуры во времени (55) возможно описывает, по крайней мере на каких-то начальных этапах приближения к точкам сингулярности. Вполне вероятно, что не найденное решение уравнения (17) ближе к синусоидальному нежели пульсирующему, как это следует из наблюдений, например, квазидвухлетних пульсаций [9]. Если оценивать параметр λ по этим явлениям, то он оказывается малым. По геологическим и геохронологическим данным [5, 6] в истории планеты случались периоды значительных похолоданий и последующих потеплений атмосферы. Если оценивать λ по хронологии этих событий, то интервалы времени в десятки тысяч лет соответствуют очень и очень малым значениям этого параметра.

При малых значениях λ пространственная часть решения мало отличается от стационарного решения (35), (37), (38), полученного при нулевом значении λ , и удовлетворительно описывает некоторые особенности атмосферы. Значит и в случае положительных значений λ можно принять малые значения этого параметра.

Производная по координате решения (55) совпадает с выражением (49), с заменой знака перед λ .

Поставим граничные и начальные условия: два граничных условия на поверхности земли $T(z=0, t) = T_b$, $T_z(z=0, t) = -\gamma b$. Начальное условие обсуждалось ранее. Получаемые выражения соответствуют (52), (53) с заменой знака перед λ .

В этом случае также имеется несогласованность начальных и граничных условий. Только в этом случае она менее существенна. При малых величинах λ

временная часть решения остается практически постоянной, за исключением тех моментов времени, когда температура стремится к бесконечности, в которые и проявляется несогласованность начального и граничных условий. Можно выбрать начальным момент, находящийся где-нибудь между двумя точками сингулярности. В этом случае при малых значениях параметра λ мы довольно долго имеем приблизительно неизменное во времени решение.

Пространственная часть решения слабо зависит от λ при малых величинах последнего. Эта часть описана выражением (55). При малых значениях λ графики решения (55) в деталях повторяют закономерности, представленные на рис. 3, 4. Решение одно и вещественно.

Стационарные решение (35) не являются вещественными либо выше точки особенности, либо ниже нее, что позволяет предполагать что реализуется в наблюдениях нестационарное решение (55), т. е. что столб атмосферы не может иметь стационарного равновесного состояния. Таким образом, параметр λ решения (55) отличен от нуля пусть даже и очень мал по величине.

Найденные нестационарные решения зависят от параметра λ . Знак и величина этого параметра имеют определяющее влияние на зависимость решения для температуры от высоты и от времени. При малых значениях по модулю параметра λ не найдено оснований для выбора только положительных его значений либо только отрицательных. При выборе отрицательных значений этого параметра зависимость температуры от времени является медленно затухающей функцией от времени, при выборе положительных значений — пульсирующей функцией, достигающей в момент пульсации бесконечных значений. В случае отрицательных значений λ оказываются невозможными колебательные решения для температуры во времени. Пространственная часть решения не зависит от знака достаточно малого параметра λ .

На рис. 6 приведено распределение температуры по высоте для летней субтропической справочной атмосферы в виде точек [12]. На том же рисунке представлено решение (55) при соответствующей температуре на поверхности и сухоадиабатическом градиенте температуры вблизи поверхности земли.

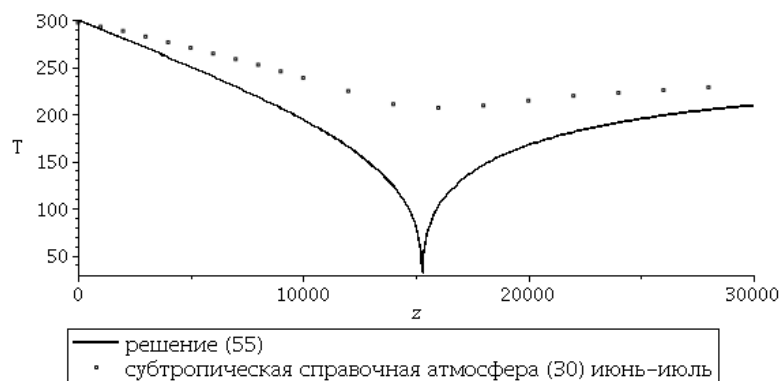


Рис. 6. Сравнение решения (55) с летней субтропической справочной атмосферой [12]. Константы в (55) вычислены при $T_b = 300$, $\gamma_b = -0,0098$, $\lambda = 0$.

Данные для летней субтропической справочной атмосферы [12] включают в себя также и справочное значение градиента температуры вблизи поверхности, оно равняется $\gamma_b = -0,006$. Это усредненное значение меньше величины сухоадиабатического градиента использованного для построения графика на рис. 6. Высота, на которой расположена особенность решения (55), наиболее

сильно зависит от величины приповерхностного градиента температуры. При значении приповерхностного градиента, равного $\gamma_b = -0,006$ в решении (55) вообще не наблюдается особой точки. При использовании сухоадиабатического градиента, который часто наблюдается вблизи поверхности [2, 16], высоты минимума температуры, фиксируемых в наблюдениях, совпадают с высотой точки особенности как показано на рис. 6. Качественно решение (55) отслеживает экспериментальные данные. Еще раз отметим, что решение (55) есть мгновенное распределение температуры по высоте, соответствующее заданному значению температуры и ее градиенту вблизи поверхности при нулевой вертикальной скорости, экспериментальные же данные отражают множество различных процессов происходящих в атмосфере усредненных за множество наблюдений.

В субтропических широтах часто наблюдается две тропопаузы [12], расположенные на разных высотах. Каждая из них может быть описана решением вида (55) с отличающимися значениями, например, температуры поверхности или ее градиента. Изменение параметра λ также приводит к изменению высоты точки особенности. Зависимость решения от параметра демонстрирует рис. 7. На этом же графике представлено численное решение уравнения (39), в котором удается отыскать только нижнюю часть кривой, расположенной ниже особой точки. Существование и положение этой особой точки видно на графике. В численном решении параметр λ равнялся нулю. Положение особой точки в численном решении приблизительно соответствует положению особой точки в решении (55) при $\lambda \approx -9 \cdot 10^{-10}$. Возможно численное решение уравнения (39) отличается от решения (55) приближенного уравнения (42) величиной параметра λ . Также видно, что численное решение сохраняет линейный характер уменьшения температуры с высотой почти вплоть до высоты особой точки, решение же (55) демонстрирует более быстрое падение температуры с высотой при приближении к особой точке. При выводе обоих уравнений налагаются ограничения на скорость звука, необходимые для использования метода разделения переменных, что делает получаемые решения приближенными. В обоих случаях параметр λ очень мал, но значительно влияет на высоту особой точки, возникающей в решениях.

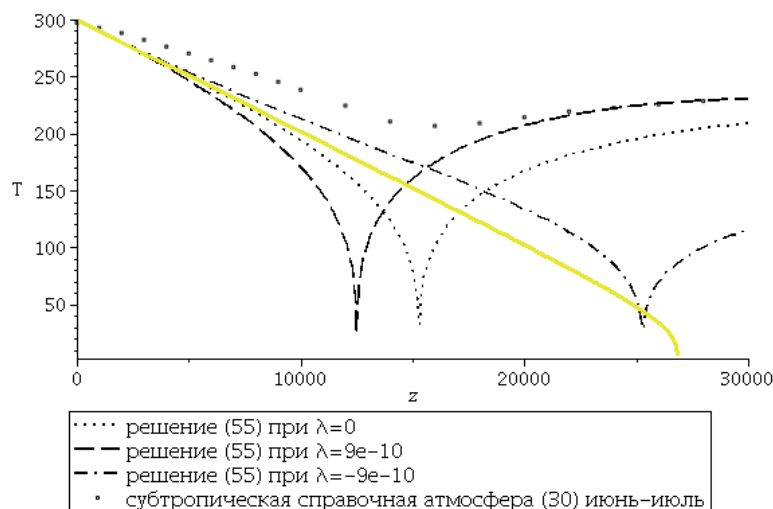


Рис. 7. Сравнение решения (55) с летней субтропической справочной атмосферой [12]. Константы в (55) вычислены при $T_b = 300$, $\gamma_b = -0,0098$, различных λ . Сплошной кривой показана кривая численного решения уравнения (39) ниже особой точки с теми же граничными условиями.

Положительные значения малого параметра λ увеличивают высоту точки особенности решения (55) относительно нулевого значения, отрицательные уменьшают эту высоту. Аналогично влияние малого параметра λ на численное решение уравнения (39).

Согласно решению (55) можно предположить что каждая из наблюдающихся одновременно тропопауз соответствует своему значению параметра λ . Если одно из значений этого параметра положительно, то можно сделать вывод, что поведение атмосферного столба во времени является нестационарным. Отметим, что в тропических и субтропических широтах, именно там, где наблюдается две тропопаузы, фиксируется также явление под названием квазидвухлетняя осциляция атмосферы [9]. Поведение температуры во времени в течении нескольких циклов квазидвухлетней осциляции ближе к синусоидальному, нежели к представленному на рис. 1 распределению. Это поведение намекает на правильную зависимость решения уравнения (17) от времени. При наличии двух тропопауз, одна из них возможно показывает зависимость от времени с периодом приблизительно в два года, вторая вероятно также нестационарна, но с значительно большим периодом.

В таблице 1 приведем данные справочной атмосферы из [4] по широтному распределению температуры поверхности земли для летних и зимних условий.

Таблица 1

Данные средней поверхностной температуры по широтам для трех месяцев лета (июнь, июль, август) и для трех месяцев зимы (декабрь, январь, февраль) [4]. Отрицательные широты соответствуют южным широтам, положительные — северным.

Широта	Летняя температура	Зимняя температура
-80	246,0	267,8
-70	256,4	271,0
-60	264,0	273,3
-50	277,2	283,5
-40	281,3	290,4
-30	285,8	295,2
-20	293,6	299,8
-10	297,9	300,2
0	298,9	299,0
10	300,1	298,8
20	300,5	294,8
30	299,1	286,4
40	293,9	277,6
50	289,6	269,5
60	284,9	260,4
70	279,6	251,7
80	274,2	243,2

На рис. 8 а) сплошной кривой отмечена широтная зависимость вычисленной по (55) высоты точки особенности на основе данных о широтном распределении температуры поверхности летом при сухоадиабатическом приповерхностном градиенте температуры, а на рис. 8 б) приведены аналогичные данные, соответствующие зимнему распределению.

На рис. 8 отрицательные широты соответствуют южным, положительные — северным. Отмеченные точками экспериментальные высоты тропопаузы выбирались из данных [4] по высоте соответствующей минимальной температуры в ее вертикальном распределении на соответствующей широте. Сплошной кривой показана высота точки особенности решения (55), в котором в качестве граничных условий выбирался сухоадиабатический градиент температуры $\gamma_b = -0,0098$ и значение поверхностной температуры из таблицы 1 для соответствующей широты. Штрихпунктирной кривой показано высота точки особенности возникающей в численном решении уравнения (39) при аналогичных граничных условиях. Все кривые построены при $\lambda = 0$, т. е. описывают стационарное решение.

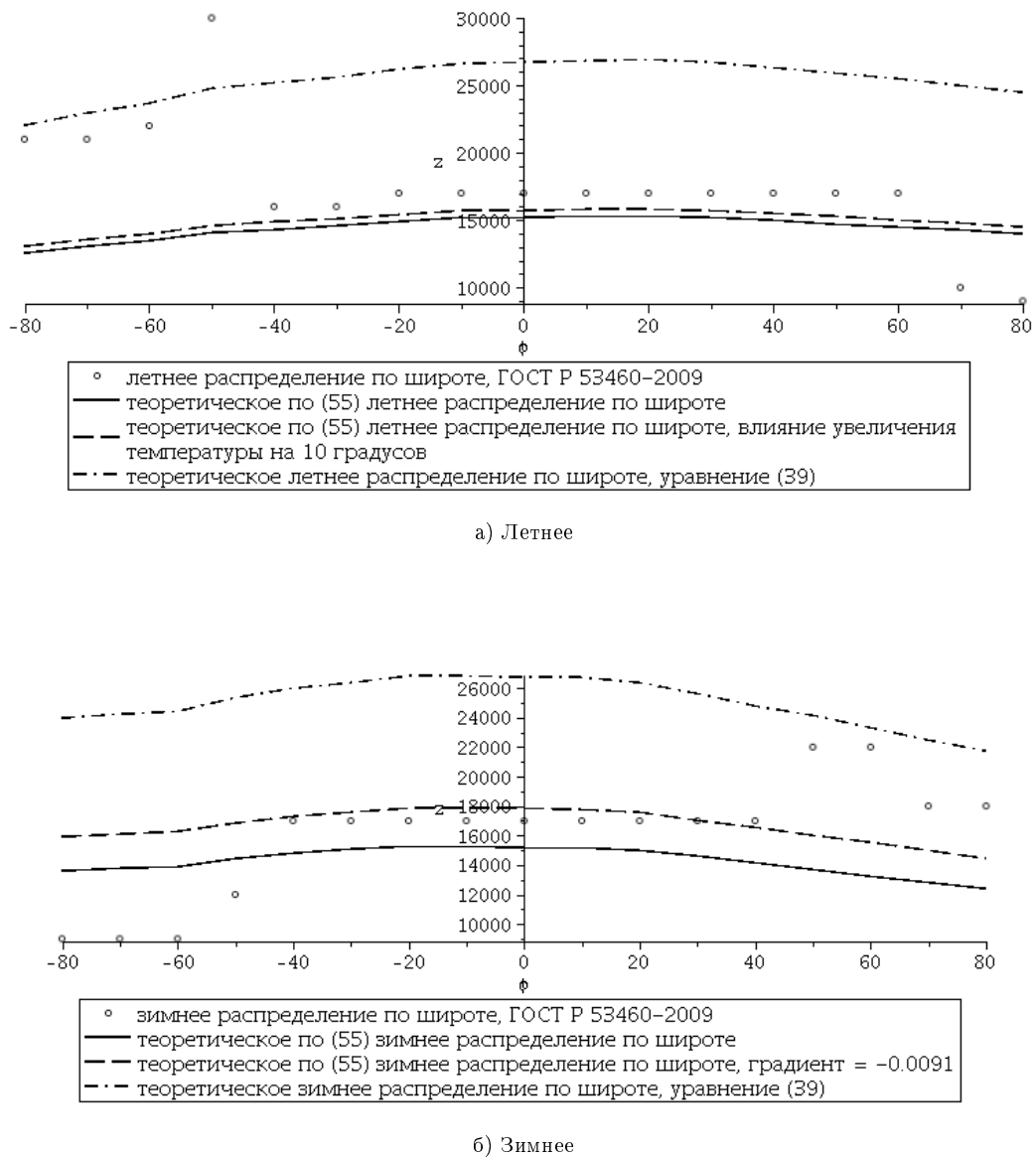


Рис. 8. Широтное распределение высоты тропопаузы в различные сезоны.

Из рис. 8 видно, что сплошная кривая расположена в средних широтах ниже, чем наблюдающаяся высота тропопаузы, а штрихпунктирная — выше. Летом в южных высоких широтах и зимой в северных высоких широтах штрихпунктирная кривая ближе к наблюдаемым высотам изопаузы. У полюсов высота тропопаузы сильно меняется при изменении сезона (точки на рис. 8), демонстрируя полугодовую нестационарность, в среднем за год высота тропопаузы близка к высотам особой точки решения (55) и на высоких широтах. Вблизи экватора и на средних широтах сплошная кривая располагается ближе к экспериментально фиксируемому минимальным температурам тропопаузы.

Для стационарного решения (35) и нестационарного (55) при $\lambda = 0$ высота возникновения точки особенности и зависимость этой высоты от граничных условий одинаковы. Влияние изменения граничных условий описывалось ранее, на рис. 8 пунктирные кривые демонстрируют это влияние. Пунктирная кривая на рис. 8 а) показывает влияние увеличения поверхностной температуры на 10 градусов на высоту возникающей особенности в решении (55) при прочих неизменных условиях. Пунктирная кривая на рис. 8 б) показывает влияние уменьшения приповерхностного градиента температуры до $\gamma_b = -0,0091$ на высоту возникающей особенности в решении (55).

7. ЛИНЕАРИЗОВАННОЕ РЕШЕНИЕ

Предположим, что отклонение распределения температуры по высоте в атмосфере от стационарного состояния, определяемого формулой (55) всегда не велики. Это предположение позволяет линеаризовать исходное уравнение (17) и описать малые отклонения температуры от стационарного состояния. Приблизительно решение (55) можно считать стационарным на промежутках времени удаленных от моментов пикового роста температуры. Анализ этого случая полезен для понимания качественного поведения возмущений температуры и тех факторов от которых они зависят.

Перепишем уравнение (17), умножив его на абсолютную температуру:

$$TT_{tt} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} T_t^2 = \gamma RT \left[TT_{zz} + \frac{1}{\gamma - 1} T_z^2 \right] + gTT_z.$$

Обозначим: $\tilde{T} = \tilde{T}(z)$ — решение (55), малую разность — $\theta(z, t) = T(z, t) - \tilde{T}(z)$, и опуская громоздкие выкладки запишем уравнение для θ :

$$\begin{aligned} \tilde{T}\theta_{tt} + \theta\theta_{tt} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \theta_t^2 = \gamma R\tilde{T} \left(\theta\tilde{T}_{zz} + \tilde{T}\theta_{zz} + \frac{1}{\gamma - 1} 2\tilde{T}_z\theta_z + \theta\theta_{zz} + \frac{1}{\gamma - 1} \theta_z^2 \right) \\ + \gamma R\theta \left(\theta\tilde{T}_{zz} + \tilde{T}\theta_{zz} + \frac{1}{\gamma - 1} 2\tilde{T}_z\theta_z + \theta\theta_{zz} + \frac{1}{\gamma - 1} \theta_z^2 \right) + g\tilde{T}\theta_z + g\theta\theta_z. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что линейные слагаемые удовлетворяют уравнению

$$\theta_{tt} = \gamma R\tilde{T}\theta_{zz} + \left(\frac{2\gamma R}{\gamma - 1} \tilde{T}_z + g \right) \theta_z + \gamma R\tilde{T}_{zz}\theta. \quad (56)$$

Это линейное уравнение в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. Для тех промежутков времени, когда величину \tilde{T} можно принять не зависящей от времени $\tilde{T} \approx \tilde{T}(z)$, для решения (56) может

быть использован метод разделения переменных. Положим $\theta(t, z) = F(t)G(z)$, получим

$$\frac{F_{tt}}{F} = G^{-1} \left(+\gamma R \tilde{T} G_{zz} + \left(\frac{2\gamma R}{\gamma - 1} \tilde{T}_z + g \right) G_z + \gamma R \tilde{T}_{zz} G \right) = \pm \kappa^2,$$

откуда следуют два независимых уравнения с одним параметром, который обозначим $\pm \kappa^2$:

$$F_{tt} = \pm \kappa^2 F, \quad \gamma R \tilde{T} G_{zz} + \left(\frac{2\gamma R}{\gamma - 1} \tilde{T}_z + g \right) G_z + \gamma R \tilde{T}_{zz} G = \pm \kappa^2 G.$$

Решение первого очевидно и оно подсказывает необходимость принять отрицательным параметр решения κ^2 , в противном случае поправка θ показывает неограниченный рост во времени. Второе уравнение перепишем:

$$G_{zz} + \left(\frac{2}{\gamma - 1} \frac{\tilde{T}_z}{\tilde{T}} + \frac{g}{\gamma R \tilde{T}} \right) G_z + \frac{(\kappa^2 + \gamma R \tilde{T}_{zz})}{\gamma R \tilde{T}} G = 0. \quad (57)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Величина $(\kappa^2 + \gamma R \tilde{T}_{zz})(\gamma R \tilde{T})^{-1} = \kappa^2 \tilde{c}_S^{-2} + \tilde{T}_{zz} \tilde{T}^{-1} = c_S^{-2}$ имеет смысл квадрата обратной скорости распространения возмущения. Величина $2(\gamma - 1)^{-1} \tilde{T}_z \tilde{T}^{-1} + g(\gamma R \tilde{T})^{-1} = \beta(z)$ имеет смысл коэффициента затухания (либо усиления) температурного возмущения.

Запишем для решения (55) два выражения при $\lambda = 0$. В случае $\lambda \neq 0$ эти выражения выглядят несколько сложнее, но для качественных выводов это значения не имеет.

$$\frac{\tilde{T}_z(z)}{\tilde{T}(z)} = -\frac{2}{7} \frac{g}{c_0^2} \frac{\exp\left(-\frac{gz}{c_0^2}\right)}{\exp\left(-\frac{gz}{c_0^2}\right) - C_3}, \quad (58)$$

$$\frac{\tilde{T}_{zz}(z)}{\tilde{T}(z)} = \frac{4}{49} \frac{g^2}{c_0^4} \exp\left(-\frac{gz}{c_0^2}\right) \frac{\exp\left(-\frac{gz}{c_0^2}\right) - \frac{7}{2} C_3}{\left(\exp\left(-\frac{gz}{c_0^2}\right) - C_3\right)^2}. \quad (59)$$

Числовое значение выражения (58) вблизи поверхности отрицательно и приближенно $-3 \cdot 10^{-5}$, оно убывает, начиная с нулевой высоты, вплоть до той точки профиля температуры, в которой наблюдается особенность, где достигает минус бесконечности. Выше особенности выражение (58) монотонно убывает с ростом высоты от плюс бесконечности до нуля.

Числовое значение (59) равно нулю почти везде, за исключением некоторой окрестности высоты той точки профиля температуры, в которой наблюдается особенность, где оно отрицательно и стремится к минус бесконечности.

Отыскать решение уравнения (56) с основным решением (55) крайне трудоемкая задача. Заметим, что коэффициенты c_S и β уравнения (57) явным образом от высоты не зависят, имеется зависимость от температуры, которая в атмосфере с высотой может меняться по целому ряду причин, часто не согласуясь с принимаемым решением $\tilde{T}(z)$. Поэтому примем величины c_S и β постоянными, имеющими параметрическую зависимость от высоты посредством температуры, в этом случае можно сделать некоторые качественные выводы.

Примем пространственную зависимость возмущения температуры в виде $G(z) \sim \exp(sz)$ и подставим в уравнение (57). Для величины s получится квадратное уравнение $s^2 + \beta s + c_S^{-2} = 0$, корнями которого являются два выражения $s_{1,2} = -\beta/2 \pm \sqrt{\beta^2 - 4c_S^{-2}}/2$.

Возмущение температуры описывается выражениями

$$\theta(t, z) \sim \cos(\kappa t) \exp\left(\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4c_S^{-2}}\right)\frac{z}{2}\right), \quad (60)$$

$$\theta(t, z) \sim \cos(\kappa t) \exp\left(\left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4c_S^{-2}}\right)\frac{z}{2}\right), \quad (61)$$

умноженные на какую-либо амплитудную постоянную. Уравнению (57) удовлетворяет любая линейная суперпозиция этих решений. Рассмотрим их по отдельности. Ограничимся рассмотрением низкочастотных возмущений и примем $\kappa = 0$.

Условием, при котором возмущение температуры с высотой будет являться неустойчивым, является положительность коэффициента под экспонентой пространственной зависимости в (60), (61).

Используем в качестве $\tilde{T}(z)$ решение (55) при нулевых значениях λ . Оценим величину β , стоящую коэффициентом перед первой производной в (57) для высот соответствующих нижней части тропосферы: $g/(\gamma R\tilde{T}) \approx 8,13 \cdot 10^{-5}$, $2\tilde{T}_z/((\gamma - 1)\tilde{T}) \approx -17 \cdot 10^{-5}$, где для производной температуры по вертикальной координате принималось значение сухоадиабатического градиента. В тропосфере на высотах ниже особенности коэффициенты $\beta < 0$, $c_S^{-2} = 0$, следовательно в решении (60) показатель экспоненты положителен и оно неустойчиво, в решении (61) показатель экспоненты равен нулю и возмущение в этом случае от высоты не зависит.

Выше точки особенности решения $\tilde{T}(z)$ знак коэффициента β меняется на положительный, следовательно решение (60) не зависит от высоты, а решение (61) становится устойчивым с высотой.

При $c_S^{-2} > 0$ возможно появление гармонических множителей в (60), (61). Вблизи точки особенности $c_S^{-2} < 0$, что несколько осложняет поведение возмущения с высотой и при заметных значениях может привести к увеличению неустойчивости решения (60). Исключением является тонкий интервал высот вблизи особенности, где согласно решению (55) $c_S^{-2} \rightarrow \infty$ и β меняет знак, переходя от $-\infty$ к $+\infty$, и поведение возмущения может оказаться достаточно сложным. Подробнее останавливаться на этой ситуации не имеет смысла, поскольку особенность решения (55) в ее математическом смысле является нефизичной и не имеет отношения к наблюдаемым явлениям.

В случае основного состояния $\tilde{T}(z)$, описываемого решением (55) при $\lambda = 0$, возмущения температуры в тропосфере (ниже высоты на которой наблюдается особенность) являются неустойчивыми и экспоненциально увеличиваются с ростом высоты. Показатель экспоненты приближенно равен $9 \cdot 10^{-5}$, высота на которой возмущение увеличивается в e раз составляет порядка 11 км, например изменение приземной температуры в 10 градусов на высоте 11 км может составить 30 градусов.

Используем в качестве $\tilde{T}(z)$ одну из справочных атмосфер из [12], например, субтропическую летнюю. Для нее приземный градиент температуры составляет -4,5 градусов на километр при значении температуры в 297,15 градусов Кельвина. Значение приземного градиента для справочных атмосфер других широт близко к приведенному значению. Оценим параметр β в этом случае: $g/(\gamma R\tilde{T}) \approx 8,22 \cdot 10^{-5}$, $2\tilde{T}_z/((\gamma - 1)\tilde{T}) \approx -7,57 \cdot 10^{-5}$, следовательно параметр β в тропосфере положителен. Коэффициент $c_S^{-2} = 0$, поскольку линейный про-

филь изменения температуры в нижних слоях справочной атмосферы соблюдается. В тропосфере решение (60) описывает возмущения не зависящие от высоты, а решение (61) описывает устойчивые возмущения, убывающие с высотой. На высотах тропопаузы, где можно принять неизменность температуры с высотой, коэффициент β положителен и равен $\beta = g/(\gamma R \tilde{T}) \approx 12 \cdot 10^{-5}$, вторая производная температуры на этой высоте вероятно имеет малое отрицательное значение. Следовательно, пренебрегая колебательными процессами, здесь решение (60) остается не зависящим от высоты, а решение (61) описывает устойчивые возмущения. В стратосфере величина β положительна, $c_S^{-2} > 0$, следовательно оба решения (60) и (61) устойчивы.

Неустойчивое поведение возмущений температуры с высотой в пределах тропосферы, когда $c_S^{-2} = 0$, возможно при локальных отрицательных значениях градиента температуры, если выполняется условие

$$\tilde{T}_z < -\frac{g}{R} \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \approx -0,00488. \quad (62)$$

На тех интервалах высот, где выполняется условие (62) будет наблюдаться экспоненциальный рост температуры возмущения с высотой. Примем $\beta \approx 0$, что реализуется при $\tilde{T}_z \approx -gR^{-1}(\gamma - 1t)(2\gamma)^{-1}$, тогда основным фактором влияющим на устойчивость является условие $c_S^{-2} < 0$. Величина $c_S^{-1} \approx -\sqrt{\tilde{T}^{-1}\tilde{T}_{zz}}$ своим числовым значением может превышать числовое значение коэффициента β и являться основным фактором, согласно выражению (60), обуславливающим рост возмущения с высотой.

В тропосфере зачастую имеются возмущения температуры, такие как тропосферные циклоны и антициклоны, эти явления также влияют на высоту тропопаузы, что вероятно связано с изменением приповерхностного градиента температуры и температуры поверхности.

Отметим, что на высотах начала стратосферы наблюдается феномен известный как «внезапные стратосферные потепления» [9, 14], выражающийся в значительном росте температуры стратосферы за короткий промежуток времени. При наступлении стратосферного потепления наблюдаются рост температуры во времени, и в течении недели температура в стратосфере может подняться на сотню градусов и более. Такое повышение температуры охватывает огромные площади и приводит к развороту обычно западного переноса на высотах стратосферы на восточный над умеренными широтами всей планеты. Строго периодичным во времени явление назвать никак нельзя, но довольно регулярно оно возникает. И сам факт появления, и амплитуда перепада температур зависят от синоптической ситуации, возможно от градиента приповерхностной температуры, либо градиента температуры на высоте возникновения явления. Возможно указанное явление возникает вследствие появления таких возмущений температуры, когда в верхних слоях тропосферы выполняется условие (62) или условия $c_S^{-2} < 0$. Появлению этих возмущений может также способствовать изменение основного состояния атмосферы (описываемого решением (55)), связанное с изменением приповерхностного градиента температуры, вследствие чего может существенно измениться высота точки особенности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается динамика столба сжимаемой бароклиной идеальной жидкости в поле силы тяжести. Получены управляющие нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Найденные решения уравнения для давления качественно и количественно верно описывают наблюдающееся в атмосфере распределение давления по высоте, обобщая гидростатическое соотношение. Найденное нестационарное решение для зависимости давления во времени показывает возможность периодических изменений по всей высоте атмосферы.

Найдено точное стационарное решение уравнения для температуры. Это решение показывает возникновение тропопаузы, наблюдающейся в атмосфере, качественно верно описывает динамику этого явления в зависимости от граничных условий. Показан частный случай решения, который может реализоваться вблизи географических полюсов планеты, при котором исчезает стратосферный рост температуры с высотой.

Найдено точное нестационарное решение уравнения для температуры. Нестационарные решения показывают возможность периодических во времени пульсаций температуры по всей высоте атмосферы.

Основным результатом работы видится принимаемое упрощающее предположение, использование которого позволяет продвинуться в изучении поставленных задач. Смысл его в том, что изменением искомой величины в уравнении (19) можно пренебречь, поскольку изменение самой величины, в данном случае давления, не определяет рассматриваемое явление. Нуждаются в учете лишь производные искомой величины и старшие производные. Сама же величина может быть принята постоянной, либо на нее могут быть наложены более мягкие ограничения. Именно такой смысл имеет упрощающее предположение о постоянстве скорости звука в уравнении (19), дающее в результате довольно простые аналитические выражения.

Возможно полученные уравнения и найденные их частные решения позволят продвинуться в изучении важнейших задач физики атмосферы.

Литература

1. Беркович Л. М. Некоторые аналитические методы нелинейной динамики // Вестн. СамГУ. Естеств. сер.—2005.—№ 2 (36).—С. 32–64.
2. Гилл А. Динамика атмосферы и океана: в 2-х т.—М.: Мир, 1986.—396 с., 415 с.
3. Госсард Э. Э., Хук У. Х. Волны в атмосфере. Инфразвук и гравитационные волны в атмосфере — их возникновение и распространение.—М.: Мир, 1978.—532 с.
4. Государственный стандарт Ростехрегулирования от 30 июня 2010 года № ГОСТ Р 53460-2009. Глобальная справочная атмосфера для высот от 0 до 120 км для аэрокосмической практики. Параметры.
5. Клименко В. В. Климат: непрочитанная глава истории.—М.: Изд. дом МЭИ, 2009.—408 с.
6. Костицин В. А. Эволюция атмосферы, биосферы и климата.—М.: Наука, 1984.—96 с.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учебное пособие. Т. VI. Гидродинамика.—М.: Наука, 1988.—736 с.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учебное пособие. Т. V. Статистическая физика. Ч. 1.—М.: Наука, 1995.—608 с.
9. Моханкумар К. Взаимодействие стратосферы и тропосферы.—М.: Физматлит, 2011.—452 с.
10. Незлин М. В. Солитоны Россби (экспериментальные исследования и лабораторная модель природных вихрей типа Большого красного пятна Юпитера) // Успехи физ. наук.—Т. 150, вып. 1.—С. 3–60.
11. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.—М.: Мир, 1980.—616 с.
12. Седунов Ю. С. (ред.). Атмосфера. Справочник (справочные данные, модели).—Л.: Гидрометеиздат, 1991.—510 с.
13. Скорер Р. Аэрогидродинамика окружающей среды.—М.: Мир, 1980.—551 с.
14. Хргиан А. Х. Физика атмосферы.—Л.: Гидрометеиздат, 1969.—645 с.
15. Хргиан А. Х. Физика атмосферного озона.—Л.: Гидрометеиздат, 1973.—291 с.
16. Эккарт К. Гидродинамика океана и атмосферы.—Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.—238 с.
17. URL: <http://www.maplesoft.com/contact>.

Радионов Анатолий Анатольевич
Южный математический институт ВЦ РАН
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: aar200772@mail.ru

Радионов Анатолий Анатольевич

**ДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ СТОЛБА
СЖИМАЕМОЙ БАРОКЛИННОЙ ЖИДКОСТИ,
НАХОДЯЩЕГОСЯ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ**

Ответственный за выпуск
Вазагаева М. У.

Подписано в печать 15.06.2015.
Формат 60 × 84^{1/8}. Усл. п. л. 4,42. Тираж 75 экз.