УДК 517.98 Дата поступления 21 октября 2013 г.

Тасоев Б. Б. Обобщенное функциональное исчисление и пространства Кальдерона — Лозановского.—Владикавказ, 2013.—24 с.—(Препринт / ЮМИ ВНЦ РАН; № 1).

В работе построено обобщенное функциональное исчисление в векторных решетках. Показано, что конструктивным образом можно определить положительно однородную функцию от элементов равномерно полной векторной решетки, если эта функция со значениями в произвольной f-подалгебре идеального центра определена на коническом множестве конечномерного пространства и непрерывна на некотором его подмножестве. Рассмотрена взаимосвязь обобщенного функционального исчисления с двойственностью Минковского. На этой основе развит метод огибающих и единообразный подход к доказательству неравенств выпуклости. С помощью обобщенного функционального исчисления и метода огибающих распространена конструкция Кальдерона — Лозановского на абстрактные банаховы решетки и доказана теорема об интерполяции положительного билинейного оператора в этих пространствах.

Ключевые слова: векторная решетка, обобщенное функциональное исчисление, двойственность Минковского, метод огибающих, неравенства выпуклости, суперлинейные и сублинейный операторы, неравенства выпуклости, пространства Кальдерона — Лозановского, интерполяция.

Библиогр. 28.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 12-01-00623-а.

Received October 21, 2013

Tasoev B. B. Generalized functional calculus and Calderon–Lozanovskiĭ spaces.—Vladikavkaz, 2013.—24 p.—(Preprint / SMI VSC RAS; № 1).

Generalized functional calculus on vector lattices is constructed. It is shown that the function of elements of a relatively uniform complete vector lattice can naturally be defined, if the positively homogeneous function with values in an arbitrary f-subalgebra of the ideal center is defined and continuous on some conic subset of a finite dimensional space. Interplay between Minkowski duality and generalized functional calculus is considered. Using this machinery uniform approach to convex inequalities based on envelope representation is developed. Calderon–Lozanovskiĭ space in the framework of Banach lattices theory is defined and an interpolation theorem for positive bilinear operator in such spaces is proved.

Mathematics Subject Classification (2000): 46A40, 47B60, 12F20, 03C90, 03C98.

Keywords: vector lattices, generalized functional calculus, Minkowski duality, envelope representation, convexity inequalities, Calderon–Lozanovskiĭ spaces, interpolation.

Supported by a grant from the Russian Foundation for Basic Research, project № 12-01-00623-a.

Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН и РСО-А
РСО-Алания, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

ОБОБЩЕННОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ПРОСТРАНСТВА КАЛЬДЕРОНА — ЛОЗАНОВСКОГО

Б. Б. Тасоев

1. Введение

Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $x_1, \ldots, x_N \in E$. Изучение непрерывных положительно однородных функций $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, для которых естественно можно определить $\varphi(x_1, \ldots, x_N) \in E$ называют *функциональным исчислением.* Существуют различные подходы к определению функции от элементов векторной решетки, но наиболее общее определение, без привлечения реализационых теорем, было предложено в статье [13]. Различные аспекты приложений функционального исчисления рассматривались в работах [6, 7, 12, 14, 23, 28]. Эти функции предполагались всюду определенными в $\mathbb{R}^N$. В то же время в ряде работ [2, 7, 8] возникла необходимость определения функций от элементов векторной решетки, определенные на конических подмножествах конечномерного пространства. В связи с этим в статье [18] было показано, что естественным образом определяется положительно однородная функция от элементов равномерно полной векторной решетки, если эта функция определена на коническом множестве конечномерного пространства и непрерывна на некотором коническом подмножестве последнего. Изучение таких функций называют *расширенным функциональным исчислением.* В работе [19] было показано, что расширенное функциональное исчисление позволяет перенести двойственность Минковского на векторные решетки. На этой основе был развит метод огибающих для доказательства неравенств выпуклости. В частности, в работе [20] на основе расширенного функционального исчисления, метода огибающих и тензорного произведения векторных решеток было установлена теорема об интерполяции билинейного оператора, действующего в векторных решетках. В монографии [16] было введено понятие *обобщенного функционального исчисления.* Но это определение фактически функциональным исчислением не является, так как оно определено не на пространстве функций, а на тензорном произведении идеального центра и пространства непрерывных положительно однородных функций на единичной сфере конечномерного пространства. К тому же рассматриваемое там тензорное произведение изоморфно пространству всюду определенных на конечномерном пространстве функций со значениями в идеальном центре, что не охватывает описанный в [18] случай. Цель данной работы — определить функциональное исчисление, обобщающее аналогичные конструкции из [13, 16, 18], развить метод огибающих для доказательств неравенств выпуклости и на этой основе исследовать интерполяцию билинейного оператора в обобщенных пространствах Кальдерона — Лозановского.

Во втором и третьем параграфах приводятся вспомогательные леммы, определение обобщенного функционального исчисления и теорема о его существовании и единственности. Доказано, что конструктивным образом можно определить положительно однородную функцию от элементов равномерно полной векторной решетки, если эта функция со значениями в произвольной f-подалгебре идеального центра определена на коническом множестве конечномерного пространства и непрерывна на на некотором его подмножестве. В четвертом параграфе на основе двойственности Минковского развить метод огибающих. В пятом параграфе, используя этот метод, устанавливаются неравенства выпуклости, в частности, важное неравенство Йенсена для линейного оператора. Аналогичный результат для билинейных операторов приведен в шестом параграфе. Пользуясь этим неравенством и инструментом тензорного произведения векторных решеток, в заключительном седьмом параграфе доказывается теорема об интерполяции положительного билинейного оператора в обобщенных пространствах Кальдерона — Лозановского.

2. Вспомогательные леммы и определение

В этом параграфе дадим определение обобщенного функционального исчисления. Все рассматриваемые векторные решетки предполагаются архимедовыми.

Всюду далее E — равномерно полная векторная решетка, L — векторная подрешетка в E и Λ — f-подалгебра в идеальном центре $\mathscr{Z}(E)$ с равномерной топологией. Норма в $\mathscr{Z}(E)$ задается формулой

$$\|\pi\| := \inf\left\{\lambda > 0 : |\pi| \leqslant \lambda I\right\} \quad (\pi \in \Lambda),$$

где I — тождественный оператор на E. Будем предполагать, что L является Λ-модулем. Это означает, что $\pi x \in L$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. Обозначим через $\mathrm{Hom}(L)$ и $\mathrm{H_m}(\Lambda)$ соответственно множество всех $\mathbb{R}$-значных решеточных гомоморфизмов на L и множество всех $\mathbb{R}$-значных мультипликативных решеточных гомоморфизмов на Λ.

Следующая лемма играет важную роль при построении обобщенного функционального исчисления.

Лемма 2.1. *Для любого $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$ существует единственный $\widetilde{\omega} \in \mathrm{H_m}(\Lambda)$ такой, что $\|\widetilde{\omega}\| \leqslant 1$, $\omega(\pi x) = \widetilde{\omega}(\pi)\omega(x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. При этом $\widetilde{\lambda\omega} = \widetilde{\omega}$ для всех $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ и $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$.*

$\lhd$ Если $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$ равен нулю, то полагая $\widetilde{\omega}(\pi) = 0$ для всех $\pi \in \Lambda$, получим требуемое. Пусть $0 \neq \omega \in \mathrm{Hom}(L)$. Билинейное отображение $b : \Lambda \times L \to \mathbb{R}$, действующее по формуле $b(\pi, x) := \omega(\pi x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$, является решеточным биморфизмом. Согласно [4, теорема 3.2] существуют решеточные гомоморфизмы $S : \Lambda \to \mathbb{R}$ и $T : L \to \mathbb{R}$ такие, что

$$\omega(\pi x) = S(\pi)T(x) \tag{1}$$

для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. Взяв в качестве π тождественный оператор I на E, получим $\omega(x) = S(I)T(x)$. Отсюда в виду $0 \neq \omega$ следует $S(I) > 0$ и $T(x) = \alpha\omega(x)$, где $\alpha = S(I)^{-1}$. Положим по определению $\widetilde{\omega}(\pi) := \alpha S(\pi)$ для всех $\pi \in \Lambda$. Тогда из равенства $T(x) = \alpha\omega(x)$ и формулы (1) следует $\omega(\pi x) = S(\pi)\alpha\omega(x) = \widetilde{\omega}(\pi)\omega(x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. Покажем мультипликативность гомоморфизма $\widetilde{\omega}$. Пусть $\pi, \rho \in \Lambda$. Тогда $\omega((\pi\rho)x) = \widetilde{\omega}(\pi\rho)\omega(x)$ для всех $x \in L$. С другой стороны, $\omega((\pi\rho)x) = \omega(\pi(\rho x)) = \widetilde{\omega}(\pi)\omega(\rho x) = \widetilde{\omega}(\pi)\widetilde{\omega}(\rho)\omega(x)$ для всех $x \in L$. Поскольку $0 \neq \omega$, выполняется равенство $\widetilde{\omega}(\pi\rho) = \widetilde{\omega}(\pi)\widetilde{\omega}(\rho)$. Единственность $\widetilde{\omega}$ также следуют из равенства $\omega(\pi x) = \widetilde{\omega}(\pi)\omega(x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$.

Покажем, что $\widetilde{\lambda\omega} = \widetilde{\omega}$ для всех $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ и $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$. Предположим, что решеточный гомоморфизм $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$ отличен от нуля, так как в противном случае доказывать нечего. Тогда $\lambda\omega \in \mathrm{Hom}(L)$ и в силу определения $\widetilde{\lambda\omega}$ выполняются равенства $\lambda\omega(\pi x) = \widetilde{\lambda\omega}(\pi)\lambda\omega(x) = \widetilde{\lambda\omega}(\pi)\omega(\lambda x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$.

С другой стороны, $\lambda\omega(\pi x) = \lambda(\omega(\pi x)) = \lambda\widetilde{\omega}(\pi)\omega(x) = \widetilde{\omega}(\pi)\omega(\lambda x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. Из условий $\omega \neq 0$ и $\lambda > 0$ выводим $\widetilde{\lambda\omega} = \widetilde{\omega}$. Соотношение $\|\widetilde{\omega}\| \leqslant 1$ следует из того, что $\widetilde{\omega}(I) = 1$ и единичный шар в Λ совпадает с порядковым интервалом $[-I, I]$. $\rhd$

Пусть $x_1, \dots, x_N \in E$ не равны нулю одновременно. Обозначим символом $\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle$ Λ-модульную подрешетку в E, порожденную набором $\mathfrak{x} := (x_1, \dots, x_N)$. Положим по определению

$$\Lambda[\mathfrak{x}] := \Lambda[x_1, \dots, x_N] := \big\{(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)) : \ 0 \neq \omega \in \mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle)\big\}.$$

Лемма 2.2. *Пусть* $\mathscr{S} := \{t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |t_1| + \ldots + |t_N| = 1\}$, $u := |x_1| + \ldots + |x_N|$, $\Omega := \{\omega \in \mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle), \ \omega(u) = 1\}$ *и* $\Omega(x_1, \dots, x_N) := \{(\omega(x_1), \dots \omega(x_N)) : \omega \in \Omega\}$. *Тогда* $\Omega(x_1, \dots, x_N)$ *— компактное множество в* $\mathbb{R}^N$, $\mathscr{S} \cap \Lambda[x_1, \dots, x_N] = \Omega(x_1, \dots, x_N)$ *и* $\Lambda[x_1, \dots, x_N] = \bigcup\{\lambda\Omega(x_1, \dots, x_N) : 0 < \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$\lhd$ В силу того, что для каждого гомоморфизма $\omega \in \mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle)$ выполняется равенство $|\omega(x_1)| + \ldots + |\omega(x_N)| = \omega(u)$, следует справедливость формулы $\mathscr{S} \cap \Lambda[x_1, \dots, x_N] = \Omega(x_1, \dots, x_N)$. Проверим компактность $\Omega(x_1, \dots, x_N)$ в $\mathbb{R}^N$. Обозначим через $L := \Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle$ и снабдим Ω топологией, индуцируемой из $\mathbb{R}^L$. Тогда Ω является компактным множеством в $\mathbb{R}^L$. В самом деле, замкнутость Ω в $\mathbb{R}^L$ очевидна. Так как u сильная порядковая единица в L, то для каждого $x \in L$ найдется такое число $\mu_x \geqslant 0$, что $|x| \leqslant \mu_x u$. Поэтому $\Omega \subset \prod_{x\in L}[-\mu_x, \mu_x]$. По теореме Тихонова $\prod_{x\in L}[-\mu_x, \mu_x]$ является компактным множеством в $\mathbb{R}^L$. Следовательно, Ω является замкнутым подмножеством компактного множества. Заметим, что $\Omega(x_1 \dots, x_N)$ служит образом Ω при непрерывном отображении $\omega \mapsto (\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))$ из $\mathbb{R}^L$ в $\mathbb{R}^N$. Поэтому $\Omega(x_1, \dots, x_N)$ — компактное множество в $\mathbb{R}^N$.

Справедливость формулы $\Lambda[x_1, \dots, x_N] = \bigcup\{\lambda\Omega(x_1 \dots, x_N) : 0 < \lambda \in \mathbb{R}\}$ следует из равенства $\mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle) \setminus \{0\} = \bigcup\{\lambda\Omega : 0 < \lambda \in \mathbb{R}\}$. $\rhd$

Множество $C \subset \mathbb{R}^N$ называется *коническим*, если $\lambda C \subset C$ для всех $\lambda \geqslant 0$. Функция $\varphi : C \to \Lambda$, заданная на коническом множестве C, называется *положительно однородной*, если $\varphi(\lambda t) = \lambda\varphi(t)$ для всех $\lambda \geqslant 0$ и $t \in C$.

Пусть коническое множество $C \subset \mathbb{R}^N$ содержит K. Символом $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ будем обозначать векторную решетку, состоящую из всех положительно однородных функций $\varphi : C \to \Lambda$, непрерывных на K.

Определение 2.1. Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $x_1, \dots, x_N, y \in E$, Λ — f-подалгебра в $\mathscr{Z}(E)$. Предположим, что K содержит $\Lambda[x_1 \dots, x_N]$ и $\varphi \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$. Будем писать $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, если выполняется равенство $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in \mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y\rangle)$.

Всюду далее $x_1, \dots, x_N, y \in E$ и $\varphi \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$.

Лемма 2.3. *Пусть* $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ *и* L *— некоторая* Λ*-модульная подрешетка в* E, *содержащая* $y, x_1, \dots, x_N$. *Тогда* $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ *для всех* $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$.

$\lhd$ Пусть $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$. Обозначим через ω' сужение ω на $\Lambda\langle x_1 \dots, x_N, y\rangle$. Предположим сначала, что $\omega(x_i) = 0$ для всех $i = 1, \dots, N$. Тогда $\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)) = 0$ и справедливы равенства $\omega(y) = \omega'(y) = \widetilde{\omega'}(\varphi(\omega'(x_1), \dots, \omega'(x_N))) = \widetilde{\omega'}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))) = 0 = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$. Пусть теперь $\omega(x_j) \neq 0$ для некоторого $j \in \{1, \dots, N\}$.

Тогда в силу леммы 2.2 выполняются равенства $\widetilde{\omega}(\pi)\omega(x_j) = \omega(\pi x_j) = \omega'(\pi x_j) = \widetilde{\omega'}(\pi)\omega'(x_j) = \widetilde{\omega'}(\pi)\omega(x_j)$ для всех $\pi \in \Lambda$, поэтому $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega'}$. Следовательно, $\omega(y) = \omega'(y) = \widetilde{\omega'}(\varphi(\omega'(x_1), \dots, \omega'(x_N))) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$. $\rhd$

Лемма 2.4. *Существует единственный элемент $y \in E$ такой, что $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$.*

$\lhd$ Предположим, что для некоторых $y, y_1 \in E$ выполняются $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ и $y_1 = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$. Обозначим через $L := \Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y, y_1\rangle$. В силу леммы 2.3 справедливы равенства $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))) = \omega(y_1)$ для всех $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$. Поскольку в L имеется сильная порядковая единица, то по теореме Крейнов — Какутани $L \subset C(Q)$, где Q — подходящий компакт. Следовательно, $\mathrm{Hom}(L)$ различает точки из L, что влечет справедливость леммы. $\rhd$

Лемма 2.5. *Пусть подмножество $G \subset \mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y\rangle)$ различает точки из $\Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y\rangle$. Если для всех $\omega \in G$ выполняется равенство $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$, то $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$.*

$\lhd$ Введем обозначения $u := |x_1| + \ldots + |x_N| + |y|$, $L := \Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y\rangle$, $\Omega := \{\omega \in \mathrm{Hom}(L) : \omega(u) = 1\}$ и $\Omega' := \Omega \cap G$. Так как $\mathrm{Hom}(L) \setminus \{0\} = \bigcup\{\lambda\Omega : 0 < \lambda \in \mathbb{R}\}$, то в силу леммы 2.1 и положительной однородности φ достаточно установить $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in \Omega$. По условию леммы Ω' различает точки из L и для всех $\omega \in \Omega'$ справедливо равенство

$$\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))). \tag{2}$$

Снабдим Ω топологией поточечной сходимости, индуцируемой из $\mathbb{R}^L$. Тогда Ω замкнуто в $\mathbb{R}^L$ и L является векторной подрешеткой в $C(\Omega)$. Так как u сильная порядковая единица в L, то для каждого $x \in L$ найдется такое число $\mu_x \geqslant 0$, что $|x| \leqslant \mu_x u$. Поэтому $\Omega \subset \prod_{x\in L}[-\mu_x, \mu_x]$. По теореме Тихонова $\prod_{x\in L}[-\mu_x, \mu_x]$ является компактным множеством в $\mathbb{R}^L$. Следовательно, Ω — компактное множество. По теореме Вейерштрасса L плотна по норме в $C(\Omega)$. Поэтому в силу [15, лемма 1.2] L порядково плотна в $C(\Omega)$. Отсюда вытекает плотность множества Ω' в Ω. Действительно, если это не так, то по лемме Урысона существует ненулевая функция $x : \Omega \to [0, 1]$, обращающаяся в ноль на Ω'. В силу порядковой плотности L в $C(\Omega)$ подберем $x_0 \in L_+$ так, чтобы $0 \neq x_0 \leqslant |x|$. Тогда $\omega(x_0) = 0$ для всех $\omega \in \Omega'$, что противоречит условию Ω' различает точки из L.

Покажем, что для произвольного $\omega \in \Omega$ выполняется равенство (2). Возьмем сеть $(\omega_\alpha) \subset \Omega'$, сходящуюся к ω. Тогда $\omega_\alpha(\pi x) \to \omega(\pi x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. Полагая в этом соотношении $x = u$, в виду леммы 2.1 получим $\widetilde{\omega}_\alpha(\pi) \to \widetilde{\omega}(\pi)$ для всех $\pi \in \Lambda$. Полагая $\pi = I$, из последнего соотношения вытекает

$$\|\widetilde{\omega}_\alpha - \widetilde{\omega}\| \to 0. \tag{3}$$

Если $\omega(|x_1|+\ldots+|x_N|) \neq 0$, то в виду формулы (3), непрерывности φ и леммы 2.1 следует справедливость соотношений

$$\begin{aligned}
&\big|\widetilde{\omega}_\alpha(\varphi(\omega_\alpha(x_1), \dots, \omega_\alpha(x_N))) - \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))\big| \\
&\leqslant \big|\widetilde{\omega}_\alpha(\varphi(\omega_\alpha(x_1), \dots, \omega_\alpha(x_N))) - \widetilde{\omega}_\alpha(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))\big| \\
&\quad + \big|\widetilde{\omega}_\alpha(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))) - \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))\big| \\
&\leqslant \big\|\varphi(\omega_\alpha(x_1), \dots, \omega_\alpha(x_N)) - \varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))\big\| \\
&\quad + \big\|\widetilde{\omega}_\alpha - \widetilde{\omega}\big\|\big\|\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))\big\| \to 0.
\end{aligned}$$

Мы получили, что $\omega_\alpha(y) \to \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \ldots, \omega(x_N)))$. С другой стороны, по определению топологии на Ω верно $\omega_\alpha(y) \to \omega(y)$, поэтому $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \ldots, \omega(x_N)))$.

Покажем, что $\omega(|x_1| + \ldots + |x_N|)$ не может равняться нулю. В самом деле, если $\omega(|x_1|+\ldots+|x_N|) = 0$, то $\omega(|y|) = \omega(u) = 1$. Поэтому для любого $0 < \varepsilon < 1$ найдется индекс α_0 такой, что $\omega_\alpha(y) > 1-\varepsilon$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Отсюда в виду формулы (2) $\widetilde{\omega}_\alpha(\varphi(\omega_\alpha(x_1), \ldots, \omega_\alpha(x_N))) > 1 - \varepsilon$, что влечет $\omega_\alpha(|x_1| + \ldots + |x_N|) \neq 0$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Обозначим через $x_0 := |x_1| + \ldots + |x_N|$. Тогда в силу положительной однородности φ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < \omega_\alpha(y) &= \widetilde{\omega}_\alpha\big(\varphi(\omega_\alpha(x_1), \ldots, \omega_\alpha(x_N))\big) \\ &= \omega_\alpha(x_0)\widetilde{\omega}_\alpha\left(\varphi\left(\frac{\omega_\alpha(x_1)}{\omega_\alpha(x_0)}, \ldots, \frac{\omega_\alpha(x_N)}{\omega_\alpha(x_0)}\right)\right) \end{aligned} \tag{4}$$

для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Так как φ — непрерывная функция и $\left(\frac{\omega_\alpha(x_1)}{\omega_\alpha(x_0)}, \ldots, \frac{\omega_\alpha(x_N)}{\omega_\alpha(x_0)}\right) \in \mathscr{S} := \{t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |t_1| + \ldots + |t_N| = 1\}$ $(\alpha \geqslant \alpha_0)$, то из компактности $\mathscr{S}$ и формулы (4) следует существование числа $M > 0$, удовлетворяющего неравенству

$$1 - \varepsilon < \omega_\alpha(y) \leqslant M \cdot \omega_\alpha(x_0)$$

для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Переход к пределу в последнем неравенстве влечет $1 - \varepsilon \leqslant M\omega(x_0) = 0$ — противоречие. Следовательно, формула (2) справедлива для всех $\omega \in \Omega$. $\rhd$

Лемма 2.6. *Пусть L_1 — Λ-модульная подрешетка в E, $x_1, \ldots, x_N, y \in L_1$ и $\mathrm{Hom}(L_1)$ различает точки из L_1. Если для всех $\omega \in L_1$ выполняется равенство $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \ldots, \omega(x_N)))$, то $y = \varphi(\cdot, x_1, \ldots, x_N)$.*

$\lhd$ Пусть $L := \Lambda\langle x_1, \ldots, x_N, y\rangle$. Обозначим через $G := \{\omega|_L : \omega \in \mathrm{Hom}(L_1)\}$. Тогда G разделяет точки из L и справедливо равенство $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \ldots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in G$. По лемме 2.5 $y = \varphi(\cdot, x_1, \ldots, x_N)$. $\rhd$

3. Основной результат

Далее мы сформулируем результат, в котором устанавливается Λ-модульный гомоморфизм из класса $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ в E. Образ этого гомоморфизма равномерно замкнут и конечно порожден, если f-подалгебра Λ замкнута по норме.

Обозначим символом $\mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ множество всех функций $\varphi \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$, для которых существует $\varphi(\cdot, x_1, \ldots, x_N) \in E$. В силу леммы 2.4 существует отображение $\widehat{\mathfrak{x}} : \varphi \mapsto \varphi(\cdot, x_1, \ldots, x_N)$ из $\mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ в E. В векторной решетке $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ введем структуру модуля над кольцом Λ следующим образом:

$$(\pi\varphi)(t) := \pi \circ \varphi(t), \tag{5}$$

где $\pi \in \Lambda$, $\varphi \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$, $t = (t_1, \ldots, t_N) \in C$. Введем функции $dt_i \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ по формуле $dt_i(t) = t_i I$, где $t = (t_1, \ldots, t_N) \in \mathbb{R}^N$. Обозначим через $e := |dt_1| + \ldots + |dt_N| \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$. Тогда $e(t) = \|t\| I$ для всех $t \in \mathbb{R}^N$.

Определение 3.1. Пусть E, F — векторные решетки, Λ, Λ' — f-подалгебры соответственно в $\mathscr{Z}(E)$ и $\mathscr{Z}(F)$, $\iota : \Lambda \to \Lambda'$ — мультипликативный порядковый изоморфизм. Будем говорить, что решеточный гомоморфизм $h : E \to F$ *Λ-модульный*, если выполняется равенство $h(\pi x) = \iota\pi(hx)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in E$. При отождествлении Λ с Λ' будем писать $h(\pi x) = \pi(hx)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in E$.

Лемма 3.1. *Множество $\mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ является Λ-модульной решеткой, и отображение $\widehat{\mathfrak{x}} : \varphi \mapsto \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ является Λ-модульным решеточным гомоморфизмом из $\mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ в E таким, что $\widehat{\mathfrak{x}}(dt_i) = x_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, N$.*

$\lhd$ Возьмем $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ и пусть $y_1 = \varphi_1(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ и $y_2 = \varphi_2(\cdot, x_1, \dots, x_N)$. Обозначим через $L := \Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y_1, y_2\rangle$. В силу леммы 2.3 для всех $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$ справедливы равенства $\omega(y_1) = \widetilde{\omega}(\varphi_1(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ и $\omega(y_2) = \widetilde{\omega}(\varphi_2(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$. Складывая эти равенства, получим $\omega(y_1 + y_2) = \widetilde{\omega}[(\varphi_1 + \varphi_2)(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))]$ для всех $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$. Отсюда в силу леммы 2.6 $y_1 + y_2 = (\varphi_1 + \varphi_2)(\cdot, x_1, \dots, x_N)$. Аналогично можно показать $\widehat{\mathfrak{x}}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \widehat{\mathfrak{x}}(\varphi_1) \vee \widehat{\mathfrak{x}}(\varphi_2)$ и $\widehat{\mathfrak{x}}(\lambda\varphi_1) = \lambda\widehat{\mathfrak{x}}(\varphi_1)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Докажем, что $\widehat{\mathfrak{x}}$ Λ-модульный гомоморфизм. Возьмем $\pi \in \Lambda$, $\varphi \in \mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ и пусть $y = \widehat{\mathfrak{x}}(\varphi)$. В силу мультипликативности $\widetilde{\omega}$ имеем $\omega(\pi y) = \widetilde{\omega}(\pi) \cdot \omega(y) = \widetilde{\omega}(\pi) \cdot \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))) = \widetilde{\omega}[(\pi\varphi)(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))]$ для всех $\omega \in \mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N, y\rangle)$. Следовательно, применив лемму 2.6, получим $\pi y = (\pi\varphi)(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, что означает $\pi(\widehat{\mathfrak{x}}(\varphi)) = \widehat{\mathfrak{x}}(\pi\varphi)$. $\rhd$

Лемма 3.2. *Λ-модульная решетка $\mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ e-равномерно замкнута в $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$, где $e = |dt_1| + \ldots + |dt_N|$.*

$\lhd$ Пусть последовательность $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из $\mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ сходится к $\varphi \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ с регулятором e. Тогда $y_n := \widehat{\mathfrak{x}}(\varphi_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ будет r-фундаментальной последовательностью в E с регулятором $u := \widehat{\mathfrak{x}}(e) = |x_1| + \ldots + |x_N|$. В силу полноты E существует $y \in E$ такой, что $y_n \to y$ с регулятором u. Пусть L обозначает идеал в E, порожденный элементом $|y| + u$. Тогда последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ содержится в L и $\mathrm{Hom}(L)$ различает точки из L. Для каждого $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$ выполняется $\omega(y_n) \to \omega(y)$. В свою очередь, в силу леммы 2.3 $\omega(y_n) = \widetilde{\omega}(\varphi_n(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и так как $\varphi_n \to \varphi$ в каждой точке конического множества C, то $\widetilde{\omega}(\varphi_n(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))) \to \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$. Таким образом, $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in \mathrm{Hom}(L)$. В силу леммы 2.6 $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, т. е. $\varphi \in \mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$. $\rhd$

Теорема 3.1. *Пусть E — равномерно полная векторная решетка, Λ — f-подалгебра в $\mathscr{Z}(E)$, $x_1, \dots, x_N \in E$. Предположим, что $K \subset \mathbb{R}^N$ содержит $\Lambda[x_1, \dots, x_N]$. Тогда отображение $\widehat{\mathfrak{x}} : \varphi \mapsto \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ — единственный Λ-модульный решеточный гомоморфизм из $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ в E такой, что $\widehat{\mathfrak{x}}(dt_i) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$. Более того, $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathscr{H}(C, K, \Lambda))$ содержится в u-равномерном замыкании Λ-модульной подрешетки, порожденной $x_1, \dots, x_N$, т. е. $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathscr{H}(C, K, \Lambda)) \subset \overline{\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle}$, где замыкание вычисляется в E равномерно относительно $u = |x_1| + \ldots + |x_N|$. Если Λ замкнута по норме в $\mathscr{Z}(E)$, то $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathscr{H}(C, K, \Lambda)) = \overline{\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle}$.*

$\lhd$ Предположим сначала, что $K = \Lambda[\mathfrak{x}]$ и $C = \Lambda[\mathfrak{x}] \cup \{0\}$. Пусть F_N является Λ-модульной подрешеткой в $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$, порожденной функциями $dt_1, \dots, dt_N$, т. е. $F_N := \Lambda\langle dt_1, \dots, dt_N\rangle$. Покажем, что гомоморфизм $\widehat{\mathfrak{x}} : \mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x}) \to E$ из леммы 3.1 распространяется на $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$. Для этого в силу леммы 3.2 и соотношения $F_N \subset \mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x})$ достаточно доказать e-равномерную плотность F_N в $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$, где $e = |dt_1| + \ldots + |dt_N|$.

По лемме 2.2 множество $P := \Lambda[x_1, \dots, x_N] \cap \mathscr{S}$, где $\mathscr{S} := \{t \in \mathbb{R}^N : \|t\| = 1\}$, компактно в $\mathbb{R}^N$. В виду положительной однородности каждая функция из $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ однозначно определяется своими значениями на P. Поэтому $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ отождествляется с $C(P, \Lambda)$. В силу [15, предложение 2.1] существует компакт Q и решеточный изоморфизм σ из Λ на плотную по норме векторную подрешетку в $C(Q)$, при котором мультипликативная единица $I \in \Lambda$ переходит в тождественную единицу $\mathbf{1}_Q$. Отсюда в силу [11, теорема 2.58] выполняется равенство

$$\sigma(\pi_1 \circ \pi_2) = \sigma(\pi_1) \cdot \sigma(\pi_2) \tag{6}$$

для всех $\pi_1, \pi_2 \in \Lambda$. Построим отображение $\nu : C(P, \Lambda) \to C(P \times Q)$ по формуле $\nu(\varphi)(p, q) := \sigma(\varphi(p))(q)$ для всех $(p, q) \in P \times Q$. Тогда ν является инъективным решеточным гомоморфизмом, и в виду формулы (6) выполняется равенство

$$\nu(\pi\varphi)(p, q) = \sigma(\pi)(q) \cdot \nu(\varphi)(p, q) \tag{7}$$

для всех $\pi \in \Lambda$, $\varphi \in C(P, \Lambda)$ и $(p, q) \in P \times Q$. Так как $\nu(e)$ есть тождественная единица на $P \times Q$, то e-равномерная плотность F_N в $C(P, \Lambda)$ следует из плотности по норме $\nu(F_N)$ в $C(P \times Q)$. Покажем, что $\nu(F_N)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Стоуна — Вейерштрасса (см., например, [26, теорема 2.1.1]). Так как $e \in F_N$ и $\nu(e) = \mathbf{1}_{P \times Q}$, следует $\nu(F_N)$ содержит константы. Пусть (p, q_1), $(t, q_2) \in P \times Q$. Если $p \neq t$, то $p_j \neq t_j$ для некоторого $j \in \{1, \dots, N\}$. Тогда в виду $\sigma(I) = \mathbf{1}_Q$ выполняются равенства $\nu(dt_j)(t, q_1) = \sigma(t_j I)(q_1) = t_j \neq p_j = \nu(dt_j)(p, q_2)$. Если $q_1 \neq q_2$, то в виду плотности $\sigma(\Lambda)$ в $C(Q)$ найдется элемент $\pi \in \Lambda$ такой, что $\sigma(\pi)(q_1) \neq \sigma(\pi)(q_2)$. Тогда в силу (7) будут справедливы соотношения $\nu(\pi e)(t, q_1) = \sigma(\pi)(q_1) \cdot 1 \neq \sigma(\pi)(q_2) = \nu(\pi e)(t, q_2)$. Мы получили, что $\nu(F_N)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Стоуна — Вейерштрасса, поэтому $\nu(F_N)$ плотна по норме в $C(P \times Q)$, что влечет e-равномерную плотность F_N в $C(P, \Lambda)$. Таким образом, $\mathscr{F}(\cdot, \mathfrak{x}) = \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$. Равномерная плотность F_N в $C(P, \Lambda)$ также влечет $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathscr{H}(C, K, \Lambda)) \subset \overline{\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle}$.

Покажем единственность гомоморфизма $\widehat{\mathfrak{x}}$. Пусть $T : \mathscr{H}(C, K, \Lambda) \to E$ — Λ-модульный решеточный гомоморфизм и $T(dt_i) = x_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, N$. Тогда множество $G := \{\varphi \in F_N : \widehat{\mathfrak{x}}(\varphi) = T(\varphi)\}$ является Λ-модульной подрешеткой в F_N, содержащей dt_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$. Следовательно, $F_N = G$, и в силу плотности F_N в $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ получим $T = \widehat{\mathfrak{x}}$.

Покажем справедливость равенства $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathscr{H}(C, K, \Lambda)) = \overline{\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle}$ при условии, что Λ замкнута по норме в $\mathscr{L}(E)$. Включение $\subset$ установлено выше. Так как образ $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathscr{H}(C, K, \Lambda))$ содержит $x_1 \dots, x_N$, является модулем над Λ и равномерно полон (см. [24, теорема 59.3]), то $\widehat{\mathfrak{x}}(\mathscr{H}(C, K, \Lambda)) \supset \overline{\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle}$. Таким образом, мы доказали теорему для $C = \Lambda[\mathfrak{x}] \cup \{0\}$.

Возьмем теперь произвольное коническое множество $C \subset \mathbb{R}^N$, содержащее K. Обозначим через $C_1 := \Lambda[\mathfrak{x}] \cup \{0\}$. Оператор сужения $\rho : \varphi \mapsto \varphi|_{C_1}$ осуществляет Λ-модульный решеточный гомоморфизм из $\mathscr{H}(C, K, \Lambda)$ в $\mathscr{H}(C_1, \Lambda[\mathfrak{x}], \Lambda)$. Поэтому $\widehat{\mathfrak{x}} \circ \rho$ — требуемый Λ-модульный гомоморфизм. $\rhd$

Предложение 3.1. *Пусть E, F — равномерно полные векторные решетки, $\iota : \Lambda \to \Lambda'$ — изоморфизм f-алгебр $\Lambda \subset \mathscr{Z}(E)$ и $\Lambda' \subset \mathscr{Z}(F)$, $h : E \to F$ — Λ-модульный решеточный гомоморфизм. Предположим, что $x_1, \dots, x_N \in E$, $\Lambda[x_1, \dots, x_N] \subset K$ и $\varphi \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$. Тогда $\Lambda'[h(x_1), \dots, h(x_N)] \subset \Lambda[x_1, \dots, x_N]$ и справедливо равенство*

$$h(\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)) = \iota \circ \varphi(\cdot, h(x_1), \dots, h(x_N)). \tag{8}$$

$\lhd$ Положим $y_i := h(x_i)$ $(i = 1, \dots, N)$, $u := |x_1| + \ldots + |x_N|$. Возьмем $0 \neq \omega \in \mathrm{Hom}(\Lambda'\langle y_1, \dots, y_N\rangle)$. Тогда $\bar{\omega} := \omega \circ h \in \mathrm{Hom}(\Lambda\langle x_1, \dots, x_N\rangle)$, и поэтому $\Lambda'[h(x_1), \dots, h(x_N)] \subset \Lambda[x_1, \dots, x_N]$. Отсюда видно, что $\iota \circ \varphi \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda')$.

Предположим, что $h(u) = 0$. Тогда в силу теоремы 3.1 $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ принадлежит главному идеалу E_u в E, порожденному элементом u. Следовательно, $h(\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)) = 0$. С другой стороны, $hx_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, N$, поэтому $\iota \circ \varphi(\cdot, h(x_1), \dots, h(x_N)) = 0$.

Пусть $h(u) \neq 0$. Из леммы 2.1 известно, что $\widetilde{\omega} \in \mathrm{H_m}(\Lambda')$ и $\widetilde{\bar{\omega}} = \widetilde{\omega \circ h} \in \mathrm{H_m}(\Lambda)$. Покажем, что $\widetilde{\omega}(\iota\pi) = \widetilde{\bar{\omega}}(\pi)$ для всех $\pi \in \Lambda$. Действительно, пусть $\pi \in \Lambda$. Тогда по лемме 2.1 $\omega(\iota\pi(hu)) = \widetilde{\omega}(\iota\pi)\omega(hu) = \widetilde{\omega}(\iota\pi)\bar{\omega}(u)$. С другой стороны, в силу Λ-модульности h следует $\omega(\iota\pi(hu)) = \omega(h(\pi u)) = \bar{\omega}(\pi u) = \widetilde{\bar{\omega}}(\pi)\bar{\omega}(u)$. Отсюда, так как $\bar{\omega}(u) \neq 0$, выводим

$$\widetilde{\omega}(\iota\pi) = \widetilde{\bar{\omega}}(\pi) \quad (\pi \in \Lambda). \tag{9}$$

Положим $x := \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, $y := \iota \circ \varphi(\cdot, y_1, \dots, y_N)$ и пусть $\omega \in \mathrm{Hom}(\Lambda'\langle y, y_1, \dots, y_N\rangle)$. Тогда $\bar{\omega} := \omega \circ h \in \mathrm{Hom}(\Lambda\langle x, x_1, \dots, x_N\rangle)$ и в виду (9) выполняются равенства $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\iota \circ \varphi(\omega(y_1), \dots, \omega(y_N))) = \widetilde{\bar{\omega}}(\varphi(\bar{\omega}(x_1), \dots, \bar{\omega}(x_N))) = \bar{\omega}(x) = \omega(hx)$. Следовательно, так как $\mathrm{Hom}(\Lambda'\langle y, y_1, \dots, y_N\rangle)$ различает точки, $y = h(x)$. $\rhd$

Замечание 3.1. В условиях предложения 3.1 при отождествлении Λ с Λ' формула (8) примет вид $h(\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)) = \varphi(\cdot, h(x_1), \dots, h(x_N))$.

4. Метод огибающих

В этом параграфе покажем, что обобщенное функциональное исчисление позволяет перенести двойственность Минковского на Λ-модульные решетки.

Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $x_1, \dots, x_N \in E$, Λ — f-подалгебра в $\mathscr{Z}(E)$, K — замкнутый конус в $\mathbb{R}^N$, содержащий $\Lambda[x_1, \dots, x_N]$. Обозначим через $\mathscr{H}_\vee(K, \Lambda)$ ($\mathscr{H}_\wedge(K, \Lambda)$) множество всех сублинейных (суперлинейных) непрерывных операторов из K в Λ, $L(\mathbb{R}^N, \Lambda)$ — пространство линейных операторов из $\mathbb{R}^N$ в Λ. Оператор $\varphi : K \to \Lambda$ называют *сублинейным*, если $\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u) + \varphi(v)$ и $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$ для всех $u, v \in K$ и $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$; $\psi : K \to \Lambda$ *суперлинеен*, если $-\psi$ сублинеен. Пусть $\langle \pi, \cdot\rangle$ обозначает линейный оператор $t \mapsto \langle \pi, t\rangle = \sum_{i=1}^N t_i\pi_i$ из $\mathbb{R}^N$ в Λ, где $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$, $\pi = (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \Lambda^N$. Ясно, что отображение $\pi \mapsto \langle \pi, \cdot\rangle$ осуществляет решеточный изоморфизм из Λ^N на $L(\mathbb{R}^N, \Lambda)$.

Для сублинейного оператора $\varphi : K \to \Lambda$ (суперлинейного оператора $\psi : K \to \Lambda$) положим по определению

$$\begin{aligned} \underline{\partial}\varphi &:= \big\{\pi \in \Lambda^N : \langle \pi, t\rangle \leqslant \varphi(t) \ (t \in K)\big\}, \\ \overline{\partial}\psi &:= \big\{\pi \in \Lambda^N : \langle \pi, t\rangle \geqslant \varphi(t) \ (t \in K)\big\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Следующая лемма используется в доказательстве основного результата параграфа. Заметим, что если Q — компакт и $\Lambda \subset \mathscr{Z}(C(Q))$, то в силу [11, теорема 2.62] $\Lambda \subset C(Q)$.

Лемма 4.1. *Пусть Q — произвольный компакт, $x_1, \dots, x_N \in C(Q)$, $\Lambda \subset C(Q)$, $\Lambda[x_1, \dots, x_N] \subset K$ и $\varphi \in \mathscr{H}(C, K, \Lambda)$. Тогда $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in C(Q)$ и справедливо равенство $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)(q) = \varphi(x_1(q), \dots, x_N(q))(q)$ для всех $q \in Q$.*

$\lhd$ Пусть E_u обозначает порядковый идеал в $C(Q)$, порожденный элементом $u := |x_1| + \ldots + |x_N|$. Тогда E_u равномерно замкнут в $C(Q)$ относительно u и является модулем над Λ (см. [11, теорема 2.62]). Поэтому из теоремы 3.1 получим $\varphi(\cdot, x_1, \ldots, x_N) \in E_u$.

Всякий элемент $q \in Q$ отождествляется с решеточным гомоморфизмом $\omega_q \in \mathrm{Hom}(E_u)$ по формуле $\omega_q(x) := x(q)$ $(x \in E_u)$. Пусть $q \in Q$ и $u(q) \neq 0$. Тогда из леммы 2.1 выводим $\pi(q)u(q) = \omega_q(\pi u) = \widetilde{\omega}_q(\pi)u(q)$ для всех $\pi \in \Lambda$. Сократив на $u(q)$, получим $\pi(q) = \widetilde{\omega}_q(\pi)$ $(\pi \in \Lambda)$. Отсюда из определения $\varphi(\cdot, x_1, \ldots, x_N)$ следует $\varphi(\cdot, x_1, \ldots, x_N)(q) = \omega_q(\varphi(\cdot, x_1, \ldots, x_N)) = \widetilde{\omega}_q(\varphi(\omega_q(x_1), \ldots, \omega_q(x_N))) = \varphi(x_1(q), \ldots, x_N(q))(q)$.

Пусть теперь $u(q) = 0$. Тогда $x(q) = 0$ для всех $x \in E_u$. В частности, $\varphi(\cdot, x_1, \ldots, x_N)(q) = 0$. С другой стороны, в виду положительной однородности φ следует $0 = \varphi(x_1(q), \ldots, x_N(q))(q)$. Таким образом, $\varphi(\cdot, x_1, \ldots, x_N)(q) = \varphi(x_1(q), \ldots, x_N(q))(q)$ для всех $q \in Q$. $\rhd$

Теорема 4.1. *Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $x_1, \ldots, x_N \in E$, $\varphi \in \mathscr{H}_\vee(K, \Lambda)$ и $\psi \in \mathscr{H}_\wedge(K, \Lambda)$. Тогда справедливы равенства*

$$\varphi(\cdot, x_1, \ldots, x_N) = \sup\left\{\sum_{i=1}^N \pi_i x_i : (\pi_1 \ldots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi\right\},$$
$$\psi(\cdot, x_1, \ldots, x_N) = \inf\left\{\sum_{i=1}^N \pi_i x_i : (\pi_1 \ldots, \pi_N) \in \overline{\partial}\psi\right\}.$$

Более того, $\varphi(\cdot, x_1, \ldots, x_N)$ $(\psi(\cdot, x_1, \ldots, x_N))$ есть равномерный предел возрастающей (убывающей) сети, каждый член которой есть супремум (инфимум) конечного набора элементов вида $\sum_{i=1}^N \pi_i x_i$, где $(\pi_1 \ldots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi$ $((\pi_1 \ldots, \pi_N) \in \overline{\partial}\psi)$.

$\lhd$ Напомним, что оператор $dt_i \in L(\mathbb{R}^N, \Lambda) \subset \mathscr{H}(K, \Lambda)$ действует по формуле $dt_i(t) := t_i I$, где $t = (t_1, \ldots, t_N) \in \mathbb{R}^N$, I — тождественный оператор на E, $i = 1, \ldots, N$. Распространим оператор φ на все пространство $\mathbb{R}^N$, полагая $\varphi(t) := +\infty$ для всех $t \in \mathbb{R}^N \setminus K$. Обозначим через $y = \varphi(\cdot, x_1, \ldots, x_N)$, и пусть $v \in E$ такой, что $v \geqslant \sum_{i=1}^N \pi_i x_i$ для всех $(\pi_1 \ldots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi$. По теореме Крейнов — Какутани существует компакт Q и решеточный изоморфизм $x \mapsto \widetilde{x}$ из главного идеала E_u, порожденного элементом $u = |x_1| + \ldots + |x_N| + |v|$ на $C(Q)$. При этом u переходит в тождественную единицу. Таким образом, можно считать, что $E_u = C(Q)$, Λ — f-подалгебра в $C(Q)$ в силу [11, теорема 2.62] и $\varphi : \mathbb{R}^N \to C(Q) \cup \{+\infty\}$. По лемме 4.1 для всех $q \in Q$ выполняются равенства

$$\widetilde{y}(q) = \varphi(\widetilde{x}_1(q), \ldots, \widetilde{x_N}(q))(q), \quad \widetilde{v}(q) \geqslant \sum_{i=1}^N \widetilde{\pi}_i(q)\, \widetilde{x}_i(q). \tag{11}$$

Так как конус K замнут, то в силу [5, гл. 1, п. 8] справедлива формула

$$(\varphi(t))(q) = \sup\big\{(At)(q) : A \in \partial\varphi\big\}, \tag{12}$$

где $t \in \mathbb{R}^N$, $q \in Q$, $\partial\varphi$ — множество линейных операторов из $\mathbb{R}^N$ в $C(Q)$, опорных к оператору φ. Так как всякий линейный оператор $A \in \partial\varphi$ однозначно определяется набором $\pi_1, \ldots, \pi_N \in C(Q)$ по формуле $At = \sum_{i=1}^N t_i \pi_i$, где $t = (t_1 \ldots, t_N) \in \mathbb{R}^N$, то в виду формул (11) и (12) для всех $q \in Q$ справедливы соотношения

$$\widetilde{y}(q) = \varphi(\widetilde{x_1}(q), \dots, \widetilde{x_N}(q))(q) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{N} \widetilde{x}_i(q)\widetilde{\pi}_i(q) : (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi \right\} \leqslant \widetilde{v}(q).$$

Таким образом, $y \leqslant v$. С другой стороны, так как для каждого набора $(\pi_1, \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi$ выполняются соотношения $\big(\sum_{i=1}^{N} \pi_i dt_i\big)(t) = \sum_{i=1}^{N} t_i\pi_i \leqslant \varphi(t)$ $(t \in K)$, то в силу теоремы 3.1 $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \geqslant \sup\big\{ \sum_{i=1}^{N} \pi_i x_i : (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi\big\}$. Следовательно, $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) = \sup\big\{ \sum_{i=1}^{N} \pi_i x_i : (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi\big\}$.

Пусть $U := \big\{ \sum_{i=1}^{N} \pi_i x_i : (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi\big\}$. Символом $U^{\vee}$ обозначим множество в E, состоящее из супремумов конечных подмножеств множества U. Тогда $U^{\vee} \subset E_u$, сеть $\widetilde{U^{\vee}} := \{\widetilde{v} : v \in U^{\vee}\}$ направлена вверх в $C(Q)$ и ее поточечный супремум равен $\widetilde{y}$. По теореме Дини $\widetilde{U^{\vee}}$ сходится равномерно к $\widetilde{y}$. Следовательно, $U^{\vee}$ также сходится равномерно к y в E.

Заметим, что если $\psi \in \mathscr{H}_{\wedge}(K, \Lambda)$, то $-\psi \in \mathscr{H}_{\vee}(K, \Lambda)$ и $\overline{\partial}\psi = \underline{\partial}(-\psi)$. Отсюда вытекает справедливость формулы для ψ. ▷

5. Неравенства выпуклости

Согласно теореме 4.1 непрерывные сублинейные и суперлинейные операторы из $K \subset \mathbb{R}^N$ в Λ являются соответственно верхними и нижними огибающими линейных операторов. Мы будем пользоваться этим фактом в доказательстве неравенств типа Йенсена, Гёльдера и Минковского в равномерно полных векторных решетка.

В этом параграфе E — равномерно полная векторная решетка, Λ — f-подалгебра в идеальном центре $\mathscr{Z}(E)$, C, K — конусы в $\mathbb{R}^N$ и K замкнут. Предположим, что $\mathbb{R}^N$ упорядочено конусом C, т. е. $s \geqslant t$ означает $s - t \in C$. Оператор $\phi : K \to \Lambda \cup \{\pm\infty\}$ называется *возрастающим*, если из неравенства $s \geqslant t$ следует $\phi(s) \geqslant \phi(t)$ для всех $s, t \in K$. Обозначим через C^* множество всех линейных положительных операторов из $\mathbb{R}^N$ в Λ, т. е. $T \in C^*$, если $T \in L(\mathbb{R}^N \Lambda)$ и $T(s) \geqslant 0$ для всех $s \in C$.

Лемма 5.1. *Если сублинейный (суперлинейный) оператор $\phi : \mathbb{R}^N \to \Lambda \cup \{+\infty\}$ возрастает, то $\underline{\partial}\phi \subset C^*$ $(\overline{\partial}\phi \subset C^*)$.*

◁ Пусть сублинейный оператор ϕ возрастает, $\pi \in \underline{\partial}\phi$ и $t \in C$. Тогда $\langle \pi, -t\rangle \leqslant \phi(-t) \leqslant \phi(0) = 0$, т. е. $\pi \in C^*$. Пусть теперь суперлинейный оператор $\phi : \mathbb{R}^N \to \Lambda \cup \{-\infty\}$ возрастает, $\pi \in \underline{\partial}\phi$ и $t \in C$. Тогда $\langle \pi, t\rangle \geqslant \phi(t) \geqslant \phi(0) = 0$. Следовательно, $\pi \in C^*$. ▷

Лемма 5.2. *Пусть $\varphi \in \mathscr{H}_{\vee}(K, \Lambda)$, $\psi \in \mathscr{H}_{\wedge}(K, \Lambda)$ и выполнено условие $K - C = C - K$. Тогда справедливы утверждения*

(1) *φ возрастает тогда и только тогда, когда $\varphi(s) = \sup\{\langle \pi, s\rangle : \pi \in \underline{\partial}\varphi \cap C^*\}$ $(s \in K)$;*

(2) *ψ возрастает тогда и только тогда, когда $\psi(s) = \inf\{\langle \pi, s\rangle : \pi \in \overline{\partial}\psi \cap C^*\}$ $(s \in K)$.*

◁ Достаточность в обоих утверждениях очевидна. Покажем необходимость утверждения (1). Пусть $\iota : \Lambda \to \widehat{\Lambda}$ обозначает вложение векторной решетки Λ в свое порядковое пополнение $\widehat{\Lambda}$. Так как Λ является мажорирующей порядково плотной подрешеткой в $\widehat{\Lambda}$, то ιI сильная порядковая единица в $\widehat{\Lambda}$. Поэтому можно считать, что $\widehat{\Lambda} = C(Q)$, где Q — экстремальный компакт. Обозначим через $\widehat{\varphi} := \iota \circ \varphi$. Тогда $\widehat{\varphi}$ — непрерывный сублинейный возрастающий оператор из K в порядково полную решетку $C(Q)$. Пусть P обозначает проектор на подпространство $K - C$. Тогда P — положительный оператор, так как $P(s) = s$ для любого $s \in C$. Положим по определению $\widehat{\varphi}^*(s) := \inf\{\widehat{\varphi}(t) : t \in K,\ t \geqslant P(s)\}$ $(s \in \mathbb{R}^N)$. Тогда $\widehat{\varphi}^*$ — сублинейный возрастающий оператор из $\mathbb{R}^N$ в $C(Q)$ и выполняются равенства

$$\widehat{\varphi}^*(s) = \widehat{\varphi}(s) = \varphi(s) \quad (s \in K). \tag{13}$$

Отсюда в виду леммы 5.1 вытекает справедливость соотношения $\underline{\partial}\widehat{\varphi}^* = \underline{\partial}\widehat{\varphi} \cap \iota(C^*)$, где $\iota(C^*)$ — множество положительных линейных операторов из $\mathbb{R}^N$ в $C(Q)$. Следовательно, в силу [5, гл. 1, п. 8] и формулы (13) получим

$$\varphi(s) = \sup\left\{\langle \widehat{\pi}, s\rangle : \widehat{\pi} \in \underline{\partial}\widehat{\varphi} \cap \iota(C^*)\right\} \quad (s \in K), \tag{14}$$

где $\widehat{\pi} = (\widehat{\pi}_1, \dots, \widehat{\pi}_N)$, $0 \leqslant \widehat{\pi}_1, \dots, \widehat{\pi}_N \in C(Q)$, $s = (s_1, \dots, s_N)$, $\langle \widehat{\pi}, s\rangle = \sum_{i=1}^N s_i \widehat{\pi}_i$. Пусть $s = (s_1, \dots, s_N) \in K$ и $\widehat{\pi} \in \underline{\partial}\widehat{\varphi} \cap \iota(C^*)$. Существует сеть $(\pi_\alpha) = (\pi_{\alpha,1}, \dots, \pi_{\alpha,N})$ из Λ^N такая, что $\pi_\alpha \uparrow \widehat{\pi}$ и выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\pi}, s\rangle &= \sum_{i=1}^N s_i \widehat{\pi}_i = \sum_{i=1}^N s_i \sup_\alpha \pi_{\alpha,i} = \sum_{i=1}^N s_i \lim_\alpha \pi_{\alpha,i}\\ &= \lim_\alpha \sum_{i=1}^N s_i \pi_{\alpha,i} \leqslant \sup\left\{\langle \pi, s\rangle : \pi \in \underline{\partial}\varphi \cap C^*\right\}.\end{aligned}$$

Отсюда в виду формул (13) и (14) следует $\varphi(s) \leqslant \sup\{\langle \pi, s\rangle : \pi \in \underline{\partial}\varphi \cap C^*\}$. Противоположное неравенство очевидно. Таким образом, $\varphi(s) = \sup\{\langle \pi, s\rangle : \pi \in \underline{\partial}\varphi \cap C^*\}$. Утверждение (2) доказывается аналогично. $\rhd$

Следствие 5.1. *Пусть $\varphi \in \mathscr{H}_\vee(K, \Lambda)$ и $\psi \in \mathscr{H}_\wedge(K, \Lambda)$ возрастают, $K - C = C - K$. Тогда справедливы соотношения*

$$\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) = \sup\left\{\sum_{i=1}^N \pi_i x_i : (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}\varphi \cap C^*\right\},$$

$$\psi(\cdot, x_1, \dots, x_N) = \inf\left\{\sum_{i=1}^N \pi_i x_i : (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \overline{\partial}\psi \cap C^*\right\}.$$

$\lhd$ Следует из леммы 5.2 и доказательства теоремы 4.1. $\rhd$

Обозначим через $\mathscr{H}_\curlyvee(K, \Lambda)$ $(\mathscr{H}_\curlywedge(K, \Lambda))$ множество всех непрерывных возрастающих относительно $\mathbb{R}^N_+$ сублинейных (суперлинейных) операторов из K в Λ, и пусть $K - \mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^N_+ - K$. Как обычно, положительные операторы будем обозначать символом $L(\mathbb{R}^N, \Lambda)_+$.

Пусть E, F — равномерно полные векторные решетки и $\mathscr{Z}(E)$, $\mathscr{Z}(F)$ — идеальные центры E и F соответственно, Λ, Λ' — изоморфные f-подалгебры в $\mathscr{Z}(E)$ и $\mathscr{Z}(F)$ соответственно. Оператор $f : E \to F \cup \{\pm\infty\}$ называется *возрастающим*, если $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ для всех $x_1, x_2 \in E$, $x_2 \geqslant x_1$. Скажем, что сублинейный (суперлинейный) оператор $f : E \to F \cup \{\pm\infty\}$ Λ-*сублинейный* (Λ-*суперлинейный*), если $f(\pi x) = \pi(fx)$ для всех $0 \leqslant \pi \in \Lambda$ и $x \in E$.

Теорема 5.1 (Неравенство Йенсена)**.** *Пусть E, F — равномерно полные векторные решетки, $f : E \to F \cup \{+\infty\}$ — возрастающий Λ-сублинейный оператор, $g : E \to F \cup \{-\infty\}$ — возрастающий Λ-суперлинейный оператор. Предположим, что $\varphi \in \mathscr{H}_\curlyvee(K, \Lambda)$, $\psi \in \mathscr{H}_\curlywedge(K, \Lambda)$, $\Lambda[x_1 \dots, x_N] \subset K$, $\Lambda[f(x_1) \dots, f(x_N)] \subset K$ и $\Lambda[g(x_1) \dots, g(x_N)] \subset K$. Если $x_1, \dots x_N \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$, то $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in \mathrm{dom}(g)$, $\psi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in \mathrm{dom}(f)$ и выполняются неравенства*

$$f(\psi(\cdot, x_1, \dots, x_N)) \leqslant \psi(\cdot, f(x_1), \dots, f(x_N)),$$
$$g(\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)) \geqslant \varphi(\cdot, g(x_1), \dots, g(x_N)).$$

$\lhd$ Возьмем произвольный $\pi \in \overline{\partial}\psi \cap L(\mathbb{R}^N, \Lambda)_+$. В виду следствия 5.1 выполняется неравенство $\psi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \leqslant \sum_{i=1}^N \pi_i x_i$. Так как f Λ-сублинейный возрастающий оператор, то $\psi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in \mathrm{dom}(f)$ и справедливы соотношения

$$f(\psi(\cdot, x_1, \dots, x_N)) \leqslant \inf\left\{ f\left(\sum_{i=1}^N \pi_i x_i \right) : (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \overline{\partial}\varphi \cap L(\mathbb{R}^N, \Lambda)_+ \right\}$$
$$\leqslant \inf\left\{ \sum_{i=1}^N \pi_i f(x_i) : (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \overline{\partial}\varphi \cap L(\mathbb{R}^N, \Lambda)_+ \right\} = \psi(\cdot, f(x_1), \dots, f(x_N)).$$

Утверждение для оператора g доказывается аналогично. $\rhd$

Возьмем $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N_+$ и конечный набор положительных элементов $\pi_1 \dots, \pi_N \in \Lambda$. Отождествим Λ с пространством непрерывных функций $C(Q)$ на некотором компакте Q и определим функцию $\prod_{i=1}^N t_i^{\pi_i} \in C(Q)$ по формуле

$$\left(\prod_{i=1}^N t_i^{\pi_i} \right)(q) := \prod_{i=1}^N t_i^{\pi_i(q)} \quad (q \in Q).$$

Функцию $\prod_{i=1}^N t_i^{\pi_i}$ мы будем отождествлять с соответствующим положительным элементом из Λ_+. Тогда для каждого фиксированного набора $(\pi_1 \dots, \pi_N) \in \Lambda^N_+$ мы можем определить оператор $\psi : \mathbb{R}^N_+ \to \Lambda_+$ по формуле $\psi(t) := \prod_{i=1}^N t_i^{\pi_i}$ $(t \in \mathbb{R}^N_+)$.

Теорема 5.2 (Неравенство Гёльдера)**.** *Пусть E, F — равномерно полные векторные решетки, $f : E \to F \cup \{+\infty\}$ — возрастающий Λ-сублинейный оператор и $\mathrm{dom}(f) = E_+$. Тогда для любых $x_1, \dots, x_N \in E$ и $0 \leqslant \pi_1, \dots, \pi_N \in \Lambda$, $\pi_1 + \ldots + \pi_N = I$ выполняется неравенство*

$$f\left(\prod_{i=1}^N |x_i|^{\pi_i} \right) \leqslant \prod_{i=1}^N f(|x_i|)^{\pi_i}.$$

$\lhd$ Если $0 \leqslant \pi_1, \dots, \pi_N \in \Lambda$, $\pi_1 + \ldots + \pi_N = I$, то $\psi(t) := \prod_{i=1}^N t_i^{\pi_i}$ — непрерывный положительный суперлинейный оператор из $\mathbb{R}^N_+$ в Λ_+, следовательно, он возрастает на $\mathbb{R}^N_+$. Таким образом, $\psi \in \mathscr{H}_\curlywedge(\mathbb{R}^N_+, \Lambda)$, и остается применить теорему 5.1. $\rhd$

Возьмем $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N_+$ и элемент $\pi \in \Lambda$. Предположим, что существует такое число $\delta > 0$, что $\delta I \leqslant \pi$. Отождествим Λ с подпространством в $C(Q)$

и определим функцию $\left(\sum_{i=1}^N |t_i|^\pi\right)^{1/\pi} \in C(Q)$ по формуле

$$\left(\sum_{i=1}^N |t_i|^\pi\right)^{1/\pi}(q) := \left(\sum_{i=1}^N |t_i|^{\pi(q)}\right)^{1/\pi(q)} \quad (q \in Q).$$

Функцию $\left(\sum_{i=1}^N |t_i|^\pi\right)^{1/\pi}$ мы будем отождествлять с соответствующим положительным элементом из Λ_+. Тогда мы можем определить оператор $\psi : \mathbb{R}_+^N \to \Lambda_+$ по формуле $\psi(t) := \left(\sum_{i=1}^N |t_i|^\pi\right)^{1/\pi}$ $(t \in \mathbb{R}_+^N)$.

Теорема 5.3 (Неравенство Минковского)**.** *Пусть E, F — равномерно полные векторные решетки, $f : E \to F \cup \{+\infty\}$ — возрастающий Λ-сублинейный оператор и $\mathrm{dom}(f) = E_+$. Предположим, что существуют число $0 < \delta \leqslant 1$ и $\pi \in \Lambda$ такие, что $\delta I \leqslant \pi \leqslant I$. Тогда для любых $x_1, \ldots, x_N \in E$ выполняется неравенство*

$$f\left(\left(\sum_{i=1}^N |x_i|^\pi\right)^{1/\pi}\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^N f(|x_i|)^\pi\right)^{1/\pi}.$$

Обратное неравенство имеет место, если $f : E \to F \cup \{-\infty\}$ — Λ- суперлинейный оператор, $\mathrm{dom}(f) = E_+$ и $\pi \geqslant I$.

$\lhd$ Оператор $\psi(t) := (t_1^\pi + \ldots + t_N^\pi)^{1/\pi}$ из $\mathbb{R}_+^N$ в Λ суперaлинеен, если $\delta I \leqslant \pi \leqslant I$, и сублинеен при $\pi \geqslant I$. Таким образом, из теоремы 5.1 следуют требуемые неравенства. $\rhd$

6. Неравенства выпуклости для билинейных операторов

Пусть E, F — векторные решетки, Λ_1, Λ_2 — f-подалгебры в $\mathscr{Z}(E)$ и в $\mathscr{Z}(F)$ соответственно. Символом $\Lambda_1 \bar{\otimes} \Lambda_2$ будем обозначать фремлиновское тензорное произведение векторных решеток Λ_1 и Λ_2. Если E — нормированная решетка, то символом E'_+ обозначим множество положительных непрерывных функционалов на E.

Лемма 6.1. *Пусть E векторная решетка (f-алгебра) с сильной порядковой (порядковой мультипликативной) единицей e. Тогда существует компакт Q такой, что E решеточно изоморфно плотной по норме векторной подрешетке (f-подалгебре) в $C(Q)$. При этом изоморфизме e переходит в тождественную единицу.*

$\lhd$ Введем норму в E по формуле $\|x\| := \inf\{\mu > 0 : |x| \leqslant \mu e\}$ и обозначим ее пополнение по этой норме через $\widehat{E}$. По теореме Крейнов — Какутани существует компакт Q такой, что $\widehat{E}$ решеточно изометрически изоморфно $C(Q)$. Отсюда следует плотность по норме E в $C(Q)$. При этом изоморфизме e переходит в тождественную единицу.

Если E — f-алгебра, то ее пополнение $\widehat{E}$ также является f-алгеброй. Так как e мультипликативная единица как в $\widehat{E}$ так и в $C(Q)$, то из [11, теорема 2.58] следует, что векторная решетка E является f-подалгеброй в $C(Q)$. $\rhd$

Лемма 6.2. *Пусть E, F — нормированные векторные решетки и $(E \otimes F)_+$ обозначает пересечение конуса положительных элементов векторной решетки $E \bar{\otimes} F$ с алгебраическим тензорным произведением $E \otimes F$. Тогда справедливо равенство*

$$(E \otimes F)_+ = \left\{u \in E \otimes F : (f \otimes g)(u) \geqslant 0,\ f \in E'_+,\ g \in F'_+\right\}.$$

$\lhd$ Пусть $u \in (E \otimes F)_+$ и $f \in E'_+$, $g \in F'_+$. Обозначим через P конус в $E \otimes F$, порожденный множеством $\{x \otimes y : e \in E_+,\, y \in F_+\}$. Тогда в силу [15, предложение 6.6] существует последовательность $(u_n) \subset P$ такая, что $\lim (f \otimes g)(u_n) = (f \otimes g)(u)$. Так как каждый элемент $u_n \in P$ имеет вид $u_n = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, где $x_1, \dots x_n \in E_+$ и $y_1, \dots y_n \in F_+$, то $(f \otimes g)(u_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i) f(y_i) \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $(f \otimes g)(u) \geqslant 0$, следовательно, справедливо включение $\subset$.

Предположим теперь, что $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in E \otimes F$ и $(f \otimes g)(u) = \sum_{i=1}^n f(x_i) g(y_i) \geqslant 0$ для всех $f \in E'_+$, $g \in F'_+$. Обозначим через E_0 и F_0 нормированные подрешетки в E и F, порожденные множествами $\{x_1 \dots, x_n\}$ и $\{y_1, \dots, y_n\}$ соответственно, а через E'_0 и F'_0 — положительные функционалы на E_0 и F_0. Так как E_0 и F_0 содержат сильные порядковые единицы, то существуют компакты Q и Ω такие, что E_0 и F_0 решеточно изоморфны векторным подрешеткам в $C(Q)$ и в $C(\Omega)$ соответственно. Поэтому будем считать, что $E_0 \mathbin{\bar\otimes} F_0$ является подрешеткой в $C(Q \times \Omega)$. По предположению имеем $\sum_{i=1}^n f(x_i) g(y_i) = f(\sum_{i=1}^n g(y_i) x_i) \geqslant 0$ для всех $f \in E'_+$, $g \in F'_+$. Следовательно, $0 \leqslant \sum_{i=1}^n g(y_i) x_i \in E_0$ для всех $g \in F'_+$. Тогда для всех $g \in F'_+$ и $f_0 \in E'_0$ выполняется $0 \leqslant f_0\big(\sum_{i=1}^n g(y_i) x_i\big) = g\big(\sum_{i=1}^n f_0(x_i) y_i\big)$. Поэтому $0 \leqslant \sum_{i=1}^n f_0(x_i) y_i \in F_0$ для всех $f_0 \in E'_0$. Отсюда вытекает $\sum_{i=1}^n f_0(x_i) g_0(y_i) \geqslant 0$ для всех $f_0 \in E'_0$ и $g_0 \in F'_0$. Из последнего соотношения следует $\sum_{i=1}^n x_i(t) y_i(p) \geqslant 0$ для всех $t \in Q$ и $p \in \Omega$, т. е. $0 \leqslant u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in E_0 \otimes F_0$, и в виду [15, предложение 4.5] мы получили $u \in (E \otimes F)_+$. $\rhd$

Определение 6.1. Пусть E^δ обозначает порядковое пополнение векторной решетки E. *Равномерным пополнением* E^{ru} векторной решетки E называют замыкание E в E^δ относительно ru-топологии, (см. [21, определение 2.12 и теорема 2.13]). Определение ru-топологии см. в [24, гл. 9, § 63].

Обозначим символом $\mathrm{ru}(E)$ множество всех элементов из E^δ_+, представимых как r-пределы последовательностей в E. Точнее, элемент $e \in E^\delta_+$ входит в $\mathrm{ru}(E)$ в том и только в том случае, если существуют последовательности $(x_n) \subset L$ и $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}_+$ и элемент $u \in E_+$ такие, что $\lim_n \lambda_n = 0$ и $|x_n - e| \leqslant \lambda_n u$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда $E_1 = \mathrm{ru}(E) - \mathrm{ru}(E)$ — векторная подрешетка в E^δ, причем $\mathrm{ru}(E)$ — порождающий конус в ней. Для любого ординала α определим E_α рекурсией по α: $E_1 := \mathrm{ru}(E) - \mathrm{ru}(E)$, $E_{\alpha+1} := \mathrm{ru}(E_\alpha) - \mathrm{ru}(E_\alpha)$, $E_\beta := \bigcup_{1 \leqslant \alpha < \beta} E_\alpha$ для предельного ординала $\beta < \omega_1$.

Лемма 6.3. *Имеет место представление $E^{\mathrm{ru}} = \bigcup_{1 \leqslant \alpha < \omega_1} E_\alpha$, где ω_1 — первый несчетный ординал.*

$\lhd$ Подробности см. в [21]. $\rhd$

Лемма 6.4. *Пусть E, F — векторные решетки, F — равномерно полна. Тогда каждый положительный оператор (решеточный гомоморфизм, мономорфизм) $T : E \to F$ допускает единственное положительное (гомоморфное, мономорфное) продолжение $\overline{T} : E^{\mathrm{ru}} \to F$.*

$\lhd$ Пусть $x \in E_{1+} := \mathrm{ru}(E)$. Тогда существует последовательность $(x_n) \subset E$, сходящаяся равномерно к x. Так как $|Tx_n - Tx_m| \leqslant |\lambda_n - \lambda_m| Tu$, то в виду равномерной плотности F можно определить аддитивный положительно однородный оператор $T_1 : E_{1+} \to F_+$ формулой $T_1 x := \lim_n Tx_n$ и затем продолжить его на $E_1 := E_{1+} - E_{1+}$ разностью.

Если T решеточный гомоморфизм, то T_1 также будет решеточным гомоморфизмом. Пусть оператор T инъективен. Для $0 < x \in E_1$ в силу плотности E в E_1 найдется $0 < y \in E$ такой, что $0 < y \leqslant x$. Следовательно,

$T_1x \geqslant T_1(y) = T(y) > 0$, что означает инъективность оператора T_1. В виду леммы 6.3 доказательство завершается индукцией по α. $\triangleright$

Лемма 6.5. *Пусть E, F — векторные решетки, Λ_1, Λ_2 — f-подалгебры в $\mathscr{Z}(E)$ и в $\mathscr{Z}(F)$ соответственно. Тогда $\Lambda_1 \bar{\otimes} \Lambda_2$ является f-алгеброй и существует мультипликативный решеточный изоморфизм T из $\Lambda_1 \bar{\otimes} \Lambda_2$ в $\mathscr{Z}(E\tilde{\otimes}F)$ такой, что справедлива формула*

$$(T(\alpha \otimes \beta))(x \otimes y) = \alpha x \otimes \beta y$$

для всех $\alpha \in \Lambda_1$, $\beta \in \Lambda_2$, $x \in E$ и $y \in F$.

$\triangleleft$ В силу теоремы 2.58 из [11] и леммы 6.1 существуют компакты Q и Ω такие, что Λ_1 и Λ_2 изоморфны f-подалгебрам в $C(Q)$ и в $C(\Omega)$ соответственно. Так как алгебраическое тензорное произведение $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ является f-подалгеброй в $C(Q \times \Omega)$, то в силу теоремы 4.2 (iii) из [15] умножение в $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ распространяется по непрерывности на $\Lambda_1 \bar{\otimes} \Lambda_2$. Поэтому $\Lambda_1 \bar{\otimes} \Lambda_2$ является f-алгеброй в $C(Q \times \Omega)$.

Мы теперь построим биморфизм $\Phi : \Lambda_1 \times \Lambda_2 \to \mathscr{Z}(E\tilde{\otimes}F)$ и покажем, что соответствующий ему гомоморфизм $T : \Lambda_1 \bar{\otimes} \Lambda_2 \to \mathscr{Z}(E\tilde{\otimes}F)$ является инъективным. Возьмем произвольные $0 \leqslant \alpha \in \Lambda_1$, $0 \leqslant \beta \in \Lambda_2$ и определим оператор $\Phi_0(\alpha, \beta) : E \otimes F \to E\tilde{\otimes}F$ по формуле

$$\Phi_0(\alpha, \beta)\Bigg(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\Bigg) := \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i \otimes \beta y_i, \tag{15}$$

где $x_i \in E$, $y_i \in F$ $(i = 1, \dots, n)$. Покажем корректность данного определения. Предположим, что $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = \sum_{j=1}^k x_j \otimes y_j \in E \otimes F$. Тогда в силу [22, предложение 1.2] для каждого линейного функционала f из алгебраически сопряженного пространства $E^{\#}$ выполняется $\sum_{i=1}^n f(x_i)y_i = \sum_{j=1}^k f(x_j)y_j$. Поэтому в виду того, что $f \circ \alpha \in E^{\#}$, справедливы равенства $\sum_{i=1}^n f(\alpha x_i)\beta(y_i) = \sum_{i=1}^n (f \circ \alpha)(x_i) \cdot \beta(y_i) = \sum_{j=1}^k (f \circ \alpha)(x_j) \cdot \beta(y_j) = \sum_{j=1}^k f(\alpha x_j)\beta(y_j)$ для всех $f \in E^{\#}$. Отсюда в силу [22, предложение 1.2] получим $\sum_{i=1}^n \alpha x_i \otimes \beta y_i = \sum_{j=1}^k \alpha x_j \otimes \beta y_j \in E \otimes F$.

Ясно, что $\Phi(\alpha, \beta)$ — линейный оператор. Покажем его положительность. Пусть $0 \leqslant \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in E \otimes F$. Тогда в силу леммы 6.2 выполняются соотношения $(f \otimes g)\big(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\big) = \sum_{i=1}^n f(x_i)g(y_i) \geqslant 0$ для всех $f \in E'_+$ и $g \in F'_+$. Так как $f \circ \alpha \in E'_+$ и $g \circ \beta \in F'_+$, то $(f \otimes g)\big(\sum_{i=1}^n \alpha x_i \otimes \beta y_i\big) = \sum_{i=1}^n (f \circ \alpha)(x_i) \cdot (g \circ \beta)(y_i) \geqslant 0$. Вновь привлекая лемму 6.2, получим $\sum_{i=1}^n \alpha x_i \otimes \beta y_i \geqslant 0$. Таким образом, $\Phi_0(\alpha, \beta)$ — линейный положительный оператор из $E \otimes F$ в $E\tilde{\otimes}F$, следовательно, в виду равномерной плотности $E \otimes F$ в $E \bar{\otimes} F$ [15, теорема 4.2 (iii)] и леммы 6.4 он имеет единственное положительное продолжение на $E\tilde{\otimes}F$, которое также будем обозначать через $\Phi_0(\alpha, \beta)$. Из определения (15) следует, что $\Phi(\alpha, \beta) \in \mathscr{Z}(E\tilde{\otimes}F)$ для всех положительных $\alpha \in \Lambda_1$, $\beta \in \Lambda_2$. Таким образом, мы имеем оператор $\Phi_0 : \Lambda_1^+ \times \Lambda_2^+ \to \mathscr{Z}(E\tilde{\otimes}F)$. Распространим его на $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ по формуле $\Phi(\alpha, \beta) := \Phi_0(\alpha_+, \beta_+) - \Phi_0(\alpha_-, \beta_+) - \Phi_0(\alpha_+, \beta_-) + \Phi_0(\alpha_-, \beta_-)$ $(\alpha \in \Lambda_1, \beta \in \Lambda_2)$. Так как решеточные операции в идеальном центре вычисляются поточечно, Φ является решеточным биморфизмом из $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ в $\mathscr{Z}(E\tilde{\otimes}F)$. В виду теоремы 4.2 (ii) из [15] существует единственный гомоморфизм $T : \Lambda_1 \bar{\otimes} \Lambda_2 \to \mathscr{Z}(E\tilde{\otimes}F)$ такой, что $T(\alpha \otimes \beta) = \Phi(\alpha, \beta)$ для всех $\alpha \in \Lambda_1$ и $\beta \in \Lambda_2$.

Покажем, что T инъективный. Пусть $0 \neq w \in \Lambda_1 \bar{\otimes} \Lambda_2$. По теореме 4.2 (iv) из [15] найдутся $\alpha \in \Lambda_1^+$ и $\beta \in \Lambda_2^+$ такие, что $0 < \alpha \otimes \beta \leqslant |w|$. Следовательно, $|Tw| = T|w| \geqslant T(\alpha \otimes \beta)$. Надо установить, что $T(\alpha \otimes \beta) > 0$. Так как $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, найдутся $0 < x \in E$ и $0 < y \in F$ такие, что $\alpha x > 0$ и $\beta y > 0$. В силу [22, предложение 1.2] $0 < \alpha x \otimes \beta y = T(\alpha \otimes \beta)(x \otimes y)$. Таким образом, $T(w) \neq 0$. $\rhd$

Пусть E, F — векторные решетки, $\sigma \in \mathrm{Hom}(E)$ и $\tau \in \mathrm{Hom}(F)$. Обозначим через $\sigma \otimes \tau$ тот единственный решеточный гомоморфизм из $E \bar{\otimes} F$ в $\mathbb{R}$, для которого выполняется равенство $(\sigma \otimes \tau)(x \otimes y) = \sigma(x)\tau(y)$ для всех $x \in E$ и $y \in F$ [15, теорема 4.2 (ii)]. По лемме 6.4 $\sigma \otimes \tau$ имеет единственное гомоморфное продолжение на $E \widetilde{\otimes} F$. Обозначим его также через $\sigma \otimes \tau$. Итак, $\sigma \otimes \tau \in \mathrm{Hom}(E \widetilde{\otimes} F)$.

Лемма 6.6. *Пусть E, F — векторные решетки. Для любого $\rho \in \mathrm{Hom}(E \widetilde{\otimes} F)$ найдутся $\sigma \in \mathrm{Hom}(E)$ и $\tau \in \mathrm{Hom}(F)$ такие, что $\rho = \sigma \otimes \tau$, в частности, $\rho(x \otimes y) = \sigma(x)\tau(y)$ для всех $x \in E$ и $y \in F$.*

$\lhd$ Пусть $\rho \in \mathrm{Hom}(E \widetilde{\otimes} F)$. Рассмотрим биморфизм $\phi : (x, y) \mapsto \rho(x \otimes y)$ из $E \times F$ в $\mathbb{R}$. Тогда в силу [4, теорема 3.2] существуют $\sigma \in \mathrm{Hom}(E)$ и $\tau \in \mathrm{Hom}(F)$ такие, что $\rho(x \otimes y) = \phi(x, y) = \sigma(x)\tau(y) = (\sigma \otimes \tau)(x \otimes y)$ для всех $x \in E$ и $y \in F$. Следовательно, $\rho = \sigma \otimes \tau$. $\rhd$

Лемма 6.7. *Пусть E, F — векторные решетки, $\Lambda_1 \subset \mathscr{Z}(E)$ и $\Lambda_2 \subset \mathscr{Z}(F)$ — f-подалгебры. Тогда $\Lambda_1 \bar{\otimes} \Lambda_2$ содержится в $\mathscr{Z}(E \widetilde{\otimes} F)$ и для любых $\sigma \in \mathrm{Hom}(E)$, $\alpha \in \Lambda_1$, $\tau \in \mathrm{Hom}(F)$, $\beta \in \Lambda_2$ выполняется равенство*

$$\widetilde{\sigma}(\alpha)\widetilde{\tau}(\beta) = (\widetilde{\sigma \otimes \tau})(\alpha \otimes \beta),$$

где $\widetilde{\sigma} \in \mathrm{H_m}(\Lambda_1)$, $\widetilde{\tau} \in \mathrm{H_m}(\Lambda_2)$ и $(\widetilde{\sigma \otimes \tau}) \in \mathrm{H_m}(\Lambda_1 \widetilde{\otimes} \Lambda_2)$ из леммы 2.1.

$\lhd$ В виду леммы 6.5 $\Lambda_1 \bar{\otimes} \Lambda_2$ содержится в $\mathscr{Z}(E \widetilde{\otimes} F)$. Предположим, что $\sigma, \tau \neq 0$, в противном случае доказывать нечего. Возьмем $x \in X$ и $y \in Y$ так, чтобы $(\sigma \otimes \tau)(x \otimes y) \neq 0$. Тогда в силу леммы 2.1 выполняется равенство

$$(\sigma \otimes \tau)((\alpha \otimes \beta)(x \otimes y)) = (\widetilde{\sigma \otimes \tau})(\alpha \otimes \beta) \cdot (\sigma \otimes \tau)(x \otimes y).$$

С другой стороны, в виду лемм 6.5, 6.6 и 2.1 следует

$$\begin{aligned}(\sigma \otimes \tau)((\alpha \otimes \beta)(x \otimes y)) &= (\sigma \otimes \tau)(\alpha x \otimes \beta y)\\ &= \sigma(\alpha x) \cdot \tau(\beta y) = \widetilde{\sigma}(\alpha) \cdot \sigma(x) \cdot \widetilde{\tau}(\beta) \cdot \tau(y)\\ &= \widetilde{\sigma}(\alpha) \cdot \widetilde{\tau}(\beta) \cdot (\sigma \otimes \tau)(x \otimes y).\end{aligned}$$

Отсюда $(\widetilde{\sigma \otimes \tau})(\alpha \otimes \beta) \cdot (\sigma \otimes \tau)(x \otimes y) = \widetilde{\sigma}(\alpha) \cdot \widetilde{\tau}(\beta) \cdot (\sigma \otimes \tau)(x \otimes y)$. Разделив обе части последнего равенства на $(\sigma \otimes \tau)(x \otimes y) \neq 0$, получим требуемое равенство. $\rhd$

Определение 6.2. Тройка $\overline{K} := (K_0, K_1, K_2)$ замкнутых конусов в $\mathbb{R}^N$ называется *мультипликативной*, если для всех $s := (s_1, \ldots, s_N) \in K_1$ и $t := (t_1 \ldots, t_N) \in K_2$ выполняется $s\,t := (s_1 t_1, \ldots, s_N t_N) \in K_0$.

Определение 6.3. Пусть Λ_1, Λ_2 — f-алгебры, $\Lambda_0 := \Lambda_1 \bar{\otimes} \Lambda_2$ и $\overline{K} := (K_0, K_1, K_2)$ — мультипликативная тройка замкнутых конусов в $\mathbb{R}^N$. Тройка функций $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ из K_i в Λ_i $(i := 0, 1, 2)$ называется *субмультипликативной* (*супермультипликативной*) на $\overline{K}$, если выполняются неравенства

$$\varphi_1(s) \otimes \varphi_2(t) \geqslant \varphi_0(st) \quad (\varphi_1(s) \otimes \varphi_2(t) \leqslant \varphi_0(st))$$

для всех $s \in K_1$, $t \in K_2$.

Лемма 6.8. *Пусть E, F — равномерно полные векторные решетки, $x_1,\dots,x_N \in E$ и $y_1,\dots,y_N \in F$. Предположим, что $\varphi_i,\psi_i \in \mathscr{H}(K_i,\Lambda_i)$ $(i=0,1,2)$, $\overline{K} := (K_0,K_1,K_2)$ — мультипликативная тройка замкнутых конусов в $\mathbb{R}^N$, тройки $(\varphi_0,\varphi_1\varphi_2)$ и (ψ_0,ψ_1,ψ_2) соответственно субмультипликативна и супермультипликативна на $\overline{K}$. Если $\Lambda_1[x_1,\dots,x_N]\subset K_1$ и $\Lambda_2[y_1,\dots,y_N]\subset K_2$, то $\Lambda_1\bar{\otimes}\Lambda_2\subset\mathscr{Z}(E\widetilde{\otimes}F)$, $\Lambda_1\bar{\otimes}\Lambda_2[x_1\otimes y_1,\dots,x_N\otimes y_N]\subset K_0$ и справедливы неравенства*

$$\varphi_1(\cdot,x_1,\dots,x_N)\otimes\varphi_2(\cdot,y_1,\dots,y_N,)\geqslant\varphi_0(\cdot,x_1\otimes y_1,\dots,x_N\otimes y_N),$$
$$\psi_1(\cdot,x_1,\dots,x_N)\otimes\psi_2(\cdot,y_1,\dots,y_N,)\leqslant\psi_0(\cdot,x_1\otimes y_1,\dots,x_N\otimes y_N).$$

$\lhd$ В виду леммы 6.5 $\Lambda_1\bar{\otimes}\Lambda_2\subset\mathscr{Z}(E\widetilde{\otimes}F)$. Положим $u:=\varphi_1(\cdot,x_1,\dots,x_N)$ и $v:=\varphi_2(\cdot,y_1,\dots,y_N)$. Пусть E_0 — Λ_1-инвариантная подрешетка в E, порожденная множеством $\{x_1,\dots,x_N\}$, F_0 — Λ_2-инвариантная подрешетка в F, порожденная множеством $\{y_1,\dots,y_N\}$. Согласно лемме 6.6 для любого решеточного гомоморфизма $\rho\in\mathrm{Hom}(E_0\widetilde{\otimes}F_0)$ существуют $\sigma\in\mathrm{Hom}(E_0)$ и $\tau\in\mathrm{Hom}(F_0)$ такие, что

$$\rho(x\otimes y)=(\sigma\otimes\tau)(x\otimes y)=\sigma(x)\tau(y) \tag{16}$$

для всех $x\in E_0$ и $y\in F_0$. Отсюда в виду мультипликативности тройки (K_0,K_1,K_2) следует

$$\begin{aligned}(\rho(x_1\otimes y_1),\dots,\rho(x_N\otimes y_N))&=(\sigma(x_1)\tau(y_1),\dots,\sigma(x_N)\tau(y_N))\\&=(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_N))\cdot(\tau(y_1),\dots,\tau(y_N))\in K_0.\end{aligned}$$

Отсюда в виду теоремы 3.1 существует $\varphi_0(\cdot,x_1\otimes y_1,\dots,x_N\otimes y_N)$ в $E\widetilde{\otimes}F$ и по определению 3.1 справедливо равенство

$$\rho(\varphi_0(\cdot,x_1\otimes y_1,\dots,x_N\otimes y_N))=\widetilde{\rho}(\varphi_0(\rho(x_1\otimes y_1),\dots,\rho(x_N\otimes y_N)))$$

для всех $\rho\in\mathrm{Hom}(E\widetilde{\otimes}F)$. Следовательно, в силу лемм 2.1, 6.7 и формулы (16) справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\rho(u\otimes v)&=(\sigma\otimes\tau)(u\otimes v)=\sigma(u)\tau(v)\\&=\widetilde{\sigma}(\varphi_1(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_N)))\cdot\widetilde{\tau}(\varphi_2(\tau(y_1),\dots,\tau(y_N)))\\&=\big(\widetilde{\sigma\otimes\tau}\big)\big(\varphi_1(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_N))\otimes\varphi_2(\tau(x_1),\dots,\tau(x_N))\big)\\&\geqslant\big(\widetilde{\sigma\otimes\tau}\big)\big(\varphi_0(\sigma(x_1)\cdot\tau(y_1),\dots,\sigma(x_N)\cdot\tau(y_N))\big)\\&=\big(\widetilde{\sigma\otimes\tau}\big)\big(\varphi_0((\sigma\otimes\tau)(x_1\otimes y_1),\dots,(\sigma\otimes\tau)(x_N\otimes y_N))\big)\\&=\widetilde{\rho}(\varphi_0(\rho(x_1\otimes y_1),\dots,\rho(x_N\otimes y_N)))=\rho(\varphi_0(\cdot,x_1\otimes y_1,\dots,x_N\otimes y_N))\end{aligned}$$

для всех $\rho\in\mathrm{Hom}(E\widetilde{\otimes}F)$.

Покажем, что $\mathrm{Hom}(E\widetilde{\otimes}F)$ различает точки. Пусть $0<w\in E\widetilde{\otimes}F$. Тогда в силу определения 6.1 и теоремы 4.2 (iv) из [15] найдутся $x_0\in E_0$ и $y_0\in F_0$ такие, что $0<x_0\otimes y_0\leqslant w$. Из леммы 6.1 вытекает, что $\mathrm{Hom}(E_0)$ и $\mathrm{Hom}(F_0)$ различают точки E_0 и F_0 соответственно. Поэтому найдутся $\sigma_0\in\mathrm{Hom}(E_0)$ и $\tau_0\in\mathrm{Hom}(F_0)$ такие, что $\sigma_0(x_0)>0$ и $\tau_0(y_0)>0$. Следовательно, $\rho_0:=\sigma_0\otimes\tau_0\in\mathrm{Hom}(E\widetilde{\otimes}F)$ и $\rho_0(w)\geqslant\sigma_0(x_0)\tau_0(y_0)>0$. Таким образом, $\mathrm{Hom}(E\widetilde{\otimes}F)$ различает точки $E\widetilde{\otimes}F$, что влечет $u\otimes v\leqslant\varphi_0(\cdot,x_1\otimes y_1,\dots,x_N\otimes y_N)$. Второе неравенство выводится аналогично. $\rhd$

Определение 6.4. Пусть E, F — векторные решетки и $\Lambda \subset \mathscr{Z}(E)$, $\Lambda \subset \mathscr{Z}(F)$ — изоморфные f-подалгебры. Скажем, что линейный оператор $T : E \to F$ *Λ-линейный*, если $T(\pi x) = \pi(Tx)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in E$.

Лемма 6.9 (Неравенство Йенсена)**.** *Пусть E, F — равномерно полные векторные решетки, $T : E \to F$ — Λ-линейный положительный оператор. Предположим, что $\varphi \in \mathscr{H}_\vee(K, \Lambda)$, $\psi \in \mathscr{H}_\wedge(K, \Lambda)$. Если $x_1, \dots x_N \in E$, $\Lambda[x_1 \dots, x_N] \subset K$ и $\Lambda[T(x_1) \dots, T(x_N)] \subset K$, то выполняются неравенства*

$$T(\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)) \geqslant \varphi(\cdot, T(x_1), \dots, T(x_N)),$$
$$T(\psi(\cdot, x_1, \dots, x_N)) \leqslant \psi(\cdot, T(x_1), \dots, T(x_N)).$$

$\lhd$ Из теоремы 3.1 следует

$$T(\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)) \geqslant \sup\left\{T\left(\sum_{i=1}^{N} \pi_i x_i\right) : (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \overline{\partial}\varphi\right\}$$
$$= \sup\left\{\sum_{i=1}^{N} \pi_i T(x_i) : (\pi_1 \dots, \pi_N) \in \overline{\partial}\varphi\right\} = \varphi(\cdot, T(x_1), \dots, T(x_N)).$$

Неравенство для ψ доказывается аналогично. $\rhd$

Определение 6.5. Пусть E, F и G — векторные решетки. Скажем, что f-подалгебры $\Lambda_1 \subset \mathscr{Z}(E)$, $\Lambda_2 \subset \mathscr{Z}(F)$ и $\Lambda_0 \subset \mathscr{Z}(G)$ *согласованы*, если $\Lambda_0 \simeq \Lambda_1 \bar{\otimes} \Lambda_2$, т. е. Λ_0 и $\Lambda_1 \bar{\otimes} \Lambda_2$ изоморфны как f-подалгебры.

Определение 6.6. Пусть E, F и G — векторные решетки, f-подалгебры $\Lambda_1 \subset \mathscr{Z}(E)$, $\Lambda_2 \subset \mathscr{Z}(F)$ и $\Lambda_0 \subset \mathscr{Z}(G)$ согласованы. Билинейный оператор $b : E \times F \to G$ назовем *Λ_0-билинейным*, если выполняется равенство $b(\pi x, \rho y) = (\pi \otimes \rho)(b(x, y))$ для всех $\pi \in \Lambda_1$, $\rho \in \Lambda_2$, $x \in E$ и $y \in F$.

Пусть E, F и G — векторные решетки, причем G равномерно полна. Тогда для любого положительного билинейного оператора $b : E \times F \to G$ в силу предложения 5.1 из [15] и леммы 6.4 существует единственный положительный линейный оператор $\Phi_b : E \widetilde{\otimes} F \to G$ такой, что $b(x, y) = b(x \otimes y)$ для всех $x \in E$ и $y \in F$. Оператор Φ_b будем называть *соответствующим* билинейному оператору b.

Лемма 6.10. *Пусть E, F и G — векторные решетки, f-подалгебры $\Lambda_1 \subset \mathscr{Z}(E)$, $\Lambda_2 \subset \mathscr{Z}(F)$ и $\Lambda_0 \subset \mathscr{Z}(G)$ согласованы. Положительный оператор $b : E \times F \to G$ Λ_0-билинейный тогда и только тогда, когда соответствующий оператор $\Phi_b : E \widetilde{\otimes} F \to G$ Λ_0-линейный.*

$\lhd$ Достаточность. Пусть $\pi \in \Lambda_1$, $\rho \in \Lambda_2$, и $x \in E$, $y \in F$. В силу леммы 6.5 выполняются равенства

$$b(\pi x, \rho y) = \Phi_b(\pi x \otimes \rho y) = \Phi_b((\pi \otimes \rho)(x \otimes y))$$
$$= (\pi \otimes \rho)\Phi_b(x \otimes y) = (\pi \otimes \rho)(b(x, y)).$$

Необходимость. По лемме 6.5 справедливы равенства

$$\Phi_b((\pi \otimes \rho)(x \otimes y)) = \Phi_b(\pi x \otimes \rho y) = b(\pi x, \rho y)$$
$$= (\pi \otimes \rho)b(x, y) = (\pi \otimes \rho)(\Phi_b(x \otimes y))$$

для всех $\pi \in \Lambda_1$, $\rho \in \Lambda_2$ и $x \in E$, $y \in F$. Поэтому $\Phi_b(\xi u) = \xi \Phi_b(u)$ для всех $\xi \in \Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ и $u \in E \otimes F$. В силу положительности Φ_b, теоремы 4.2 (iii) из [15] и леммы 6.4 последнее равенство распространяется по непрерывности на любые $\xi \in \Lambda_1 \bar{\otimes} \Lambda_2$ и $u \in E \widetilde{\otimes} F$. $\rhd$

Лемма 6.11. *Пусть E, F и G — равномерно полные векторные решетки, f-подалгебры $\Lambda_1 \subset \mathscr{Z}(E)$, $\Lambda_2 \subset \mathscr{Z}(F)$ и $\Lambda_0 \subset \mathscr{Z}(G)$ согласованы, $b : E \times F \to G$ — положительный Λ_0-билинейный оператор. Пусть $\varphi \in \mathscr{H}_\vee(K, \Lambda)$ и $\psi \in \mathscr{H}_\wedge(K, \Lambda)$, K — замкнутое коническое множество в $\mathbb{R}^N$. Тогда для всех $x_1, \dots, x_N \in E$ и $y_1, \dots, y_N \in F$ таких, что $\Lambda[b(x_1, y_1), \dots, b(x_N, y_N)] \subset K$ и $\Lambda[x_1 \otimes y_1, \dots, x_N \otimes y_N] \subset K$ выполняются неравенства*

$$\varphi(\cdot, b(x_1, y_1), \dots, b(x_N, y_N)) \leqslant \Phi_b(\varphi(\cdot, x_1 \otimes y_1, \dots, x_N \otimes y_N)),$$
$$\psi(\cdot, b(x_1, y_1), \dots, b(x_N, y_N)) \geqslant \Phi_b(\psi(\cdot, x_1 \otimes y_1, \dots, x_N \otimes y_N)),$$

где $\Phi_b : E\widetilde{\otimes}F \to G$ определяется из равенства $b = \Phi_b \otimes$.

$\lhd$ По лемме 6.10 Φ_b — положительный Λ_0-линейный оператор. Применив теорему 6.9 к оператору Φ_b, получим требуемые неравенства. $\rhd$

Теорема 6.1. *Пусть E, F и G — равномерно полные векторные решетки, $x_1, \dots, x_N \in E$ и $y_1, \dots, y_N \in F$, f-подалгебры $\Lambda_1 \subset \mathscr{Z}(E)$, $\Lambda_2 \subset \mathscr{Z}(F)$, $\Lambda_0 \subset \mathscr{Z}(G)$ согласованы и $b : E \times F \to G$ — положительный Λ_0-билинейный оператор. Предположим, что $\overline{K} = (K_0, K_1, K_2)$ — мультипликативная тройка замкнутых конусов в $\mathbb{R}^N$, $\varphi_i, \psi_i \in \mathscr{H}(K_i, \Lambda_i)$ $(i = 1, 2)$, $\varphi_0 \in \mathscr{H}_\vee(K_0, \Lambda_0)$, $\psi_0 \in \mathscr{H}_\wedge(K_0, \Lambda_0)$, тройки $(\varphi_0, \varphi_1\varphi_2)$ и (ψ_0, ψ_1, ψ_2) соответственно субмультипликативна и супермультипликативна на $\overline{K}$. Если $\Lambda_1[x_1, \dots, x_N] \subset K_1$, $\Lambda_2[y_1, \dots, y_N] \subset K_2$ и $\Lambda_0[b(x_1, y_1), \dots, b(x_N, y_N)] \subset K_0$, то справедливы неравенства*

$$b(\varphi_1(\cdot, x_1, \dots, x_N), \varphi_2(\cdot, y_1, \dots, y_N)) \geqslant \varphi_0(\cdot, b(x_1, y_1), \dots, b(x_N, y_N)),$$
$$b(\psi_1(\cdot, x_1, \dots, x_N), \psi_2(\cdot, y_1, \dots, y_N)) \leqslant \psi_0(\cdot, b(x_1, y_1), \dots, b(x_N, y_N)).$$

$\lhd$ В силу предложения 5.1 из [15] и леммы 6.4 существует единственный положительный линейный оператор $\Phi_b : E\widetilde{\otimes}F \to G$ такой, что $b = \Phi_b \otimes$. Так как все условия лемм 6.8 и 6.11 выполнены, то справедливы неравенства

$$b(\varphi_1(\cdot, x_1, \dots, x_N), \varphi_2(\cdot y_1, \dots, y_N)) \geqslant \Phi_b(\varphi_0(\cdot, x_1 \otimes y_1, \dots, x_N \otimes y_N)),$$
$$b(\psi_1(\cdot, x_1, \dots, x_N), \psi_2(\cdot y_1, \dots, y_N)) \leqslant \Phi_b(\psi_0(\cdot, x_1 \otimes y_1, \dots, x_N \otimes y_N)).$$

По лемме 6.10 положительный оператор Φ_b Λ_0-линейный, поэтому из леммы 6.9 следует справедливость требуемого неравенства для тройки $(\varphi_0, \varphi_1\varphi_2)$. Аналогично устанавливается неравенство для тройки (ψ_0, ψ_1, ψ_2). $\rhd$

Следствие 6.1. *Пусть E — равномерно полная векторная решетка, F — K-пространство, $x_1, \dots, x_N \in E$ и $T_1, \dots, T_N \in L^\sim(E, F)$, f-подалгебры $\Lambda_1 \subset \mathscr{Z}(E)$, $\Lambda_2 \subset \mathscr{Z}(L^\sim(E, F))$, $\Lambda_0 \subset \mathscr{Z}(F)$ согласованы и $(\rho T)(\pi x) = (\pi \otimes \rho)Tx$ для всех $\pi \in \Lambda_1$, $\rho \in \Lambda_2$, $x \in E$ и $T \in L^\sim(E, F)$. Предположим, что $\overline{K} = (K_0, K_1, K_2)$ — мультипликативная тройка замкнутых конусов в $\mathbb{R}^N$, $\varphi_i, \psi_i \in \mathscr{H}(K_i, \Lambda_i)$ $(i = 1, 2)$, $\varphi_0 \in \mathscr{H}_\vee(K_0, \Lambda_0)$, $\psi_0 \in \mathscr{H}_\wedge(K_0, \Lambda_0)$, тройки $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ и (ψ_0, ψ_1, ψ_2) соответственно субмультипликативна и супермультипликативна на $\overline{K}$. Если $\Lambda_1[x_1, \dots, x_N] \subset K_1$, $\Lambda_2[T_1, \dots, T_N] \subset K_2$ и $\Lambda_0[T_1x_1, \dots, T_Nx_N] \subset K_0$, то справедливы неравенства*

$$\varphi_2(\cdot, T_1, \dots, T_N)(\varphi_1(\cdot, x_1, \dots, x_N)) \geqslant \varphi_0(\cdot, T_1x_1, \dots, T_Nx_N),$$
$$\psi_2(\cdot, T_1, \dots, T_N)(\varphi_1(\cdot, x_1, \dots, x_N)) \leqslant \psi_0(\cdot, T_1x_1, \dots, T_Nx_N).$$

$\lhd$ Билинейный оператор $b : E \times L^\sim(E, F) \to F$, определяемый формулой $b(x, T) = Tx$, удовлетворяет всем требованиям теоремы 6.1. $\rhd$

7. Интерполяция положительного билинейного оператора в пространствах Кальдерона — Лозановского

В этом параграфе покажем, что обобщенные пространства Кальдерона — Лозановского интерполяционны в случае билинейного оператора.

Пусть E — равномерно полная векторная решетка, Λ — f-подалгебра в $\mathscr{Z}(E)$ и E_0, E_1 — порядковые идеалы в E, являющиеся банаховыми решетками. Ясно, что E_0 и E_1 являются модулями над Λ. Возьмем $\psi \in \mathscr{H}_\wedge(\mathbb{R}^2_+, \Lambda)$ и обозначим через $\psi(\cdot, E_0, E_1)$ порядковый идеал в E, порожденный множеством $\{\psi(\cdot, x_0, x_1) : 0 \leqslant x_k \in E_k, k = 0, 1\}$. Для каждого $x \in \varphi(\cdot, E_0, E_1)$ положим по определению

$$\|x\|_{\psi(\cdot,E_0,E_1)} := \inf\big\{\|x_0\| \vee \|x_1\| : |x| \leqslant \psi(\cdot, x_0, x_1),\, 0 \leqslant x_k \in E_k,\, k = 0, 1\big\}.$$

Тогда пара $(\psi(\cdot, E_0, E_1), \|\cdot\|_{\psi(\cdot,E_0,E_1)})$ называется *обобщенным пространством Кальдерона — Лозановского.*

Лемма 7.1. *Пара $(\psi(\cdot, E_0, E_1), \|\cdot\|_{\psi(\cdot,E_0,E_1)})$ является банаховой решеткой.*

$\lhd$ Введем отображение $\Phi : (E_0 \times E_1)_+ \to \psi(\cdot, E_0, E_1)$, действующее по формуле

$$\Phi(x_0, x_1) := \psi(\cdot, x_0, x_1) \quad (0 \leqslant x_0 \in E_0,\ 0 \leqslant x_1 \in E_1).$$

Покажем, что Φ является суперлинейным Λ-модульным оператором. По теореме 3.1 функциональное исчисление Λ-модульно. Поэтому Φ — Λ-модульное отображение. Пусть $0 \leqslant x_0, y_0 \in E_0$, $0 \leqslant x_1, y_1 \in E_1$. Возьмем идеал E_u в E, порожденный элементом $u = x_0 \vee x_1 \vee y_0 \vee y_1$. В силу суперлинейности ψ для каждого $\omega \in \mathrm{Hom}(E_u)$ справедливы соотношения

$$\omega(\psi(\cdot, x_0 + y_0, x_1 + y_1)) = \widetilde{\omega}(\psi(\omega(x_0 + y_0), \omega(x_1 + y_1)))$$
$$\geqslant \widetilde{\omega}(\psi(\omega(x_0), \omega(x_1)) + \psi(\omega(y_0), \omega(y_1))) = \omega(\psi(\cdot, x_0, x_1) + \psi(\cdot, y_0, y_1)).$$

Следовательно, $\psi(\cdot, x_0 + y_0, x_1 + y_1) \geqslant \psi(\cdot, x_0, x_1) + \psi(\cdot, y_0, y_1)$. Положительная однородность доказывается аналогично. Таким образом, Φ — суперлинейный оператор.

Введем норму на произведении $E_0 \times E_1$ по формуле $\|(x_0, x_1)\| := \|x_0\| \vee \|x_1\|$ $((x_0, x_1) \in E_0 \times E_1)$. Тогда пара $(E_0 \times E_1, \|\cdot\|)$ является банаховой решеткой, и в виду суперлинейности Φ и теоремы 1 из [10] следует $(\psi(\cdot, E_0, E_1), \|\cdot\|_{\psi(\cdot,E_0,E_1)})$ — банахова решетка. $\rhd$

Теорема 7.2. *Пусть (E_0, E_1), (F_0, F_1) и (G_0, G_1) — пары банаховых решеток, являющиеся порядковыми идеалами в равномерно полных векторных решетках E, F и G соответственно, f-подалгебры $\Lambda_1 \subset \mathscr{Z}(E)$, $\Lambda_2 \subset \mathscr{Z}(F)$, $\Lambda_0 \subset \mathscr{Z}(G)$ согласованы. Предположим, что $\overline{b} : E \times F \to G$ — положительный Λ_0-билинейный оператор такой, что его сужения $b_0 : E_0 \times F_0 \to G_0$ и $b_1 : E_1 \times F_1 \to G_1$ ограничены по норме. Если тройка функций $\psi_i \in \mathscr{H}_\wedge(\mathbb{R}^2_+, \Lambda_i)$ $(i = 0, 1, 2)$ супермультипликативна на $\mathbb{R}^2_+$, то сужение*

$$b :\ \psi_1(\cdot, E_0, E_1) \times \psi_2(\cdot, F_0, F_1) \to \psi_0(\cdot, G_0, G_1)$$

ограничено по норме.

$\lhd$ Пусть $x \in \psi_1(\cdot, E_0, E_1)$ и $y \in \psi_2(\cdot, E_0, E_1)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $0 \leqslant x_k \in E_k$ и $0 \leqslant y_k \in F_k$ $(k := 0, 1)$ такие, что

$$\begin{aligned} |x| \leqslant \psi_1(x_0, x_1), \quad \|x_0\| \vee \|x_1\| \leqslant \|x\|_{\psi_1(\cdot,E_0,E_1)} + \varepsilon,\\ |y| \leqslant \psi_2(y_0, y_1), \quad \|y_0\| \vee \|y_1\| \leqslant \|y\|_{\psi_2(\cdot,F_0,F_1)} + \varepsilon. \end{aligned} \tag{17}$$

Полагая $0 \leqslant z_k := b(x_k, y_k)/\|b_k\| \in G_k$ $(k := 0, 1)$, $\lambda := \|b_0\| \vee \|b_1\|$ и пользуясь теоремой 6.1, получим

$$\begin{aligned}|b(x,y)| &\leqslant b(|x|,|y|) \leqslant b(\psi_1(\cdot,x_0,x_1),\psi_2(\cdot,y_0,y_1))\\ &\leqslant \psi_0(\cdot,b(x_0,y_0),b(x_1,y_1)) = \psi_0(\cdot,\|b_0\|z_0,\|b_1\|z_1)\\ &\leqslant \psi_0(\cdot,\lambda z_0,\lambda z_1) = \lambda\psi_0(\cdot,z_0,z_1).\end{aligned}$$

Следовательно, $b(x,y) \in \psi_0(\cdot, G_0, G_1)$, и в виду формул (17) справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\|b(x,y)\|_{\psi_0(\cdot,G_0,G_1)} &\leqslant \|\lambda z_0\| \vee \|\lambda z_1\|\\ &= \lambda(\|z_0\| \vee \|z_1\|) \leqslant \lambda(\|x_0\| \vee \|x_1\|)(\|y_0\| \vee \|y_1\|)\\ &\leqslant \lambda(\|x\|_{\psi_1(\cdot,E_0,E_1)} + \varepsilon)(\|y\|_{\psi_2(\cdot,F_0,F_1)} + \varepsilon) = \lambda\|x\|_{\psi_1(\cdot,E_0,E_1)}\|y\|_{\psi_2(\cdot,F_0,F_1)}\\ &\quad + \varepsilon\lambda(\|x\|_{\psi_1(\cdot,E_0,E_1)} + \|y\|_{\psi_2(\cdot,F_0,F_1)} + \varepsilon).\end{aligned}$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольное число, то получим $\|b(x,y)\|_{\psi_0(\cdot,G_0,G_1)} \leqslant \lambda\|x\|_{\psi_1(\cdot,E_0,E_1)}\|y\|_{\psi_2(\cdot,F_0,F_1)}$ для всех $x \in \psi_1(\cdot, E_0, E_1)$, $y \in \psi_2(\cdot, F_0, F_1)$, что означает ограниченность оператора b. $\rhd$

Литература

1. *Асташкин С. В.* Интерполяция положительных полилинейных операторов в пространствах Кальдерона — Лозановского // Сиб. мат. журн.—1997.—Т. 38, № 6.—С. 1211–1218.
2. *Бухвалов А. В.* Нелинейная мажорация линейных операторов // Докл. АН СССР.—1988.—Т. 298, № 1.—С. 14–17.
3. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
4. *Кусраев А. Г., Табуев С. Н.* О мультипликативном представлении билинейных операторов // Сиб. мат. журн.—2008.—Т. 49, № 2.—С. 357–366.
5. *Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.* Двойственность Минковского и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1976.—250 с.
6. *Лозановский Г. Я.* О некоторых банаховых структурах // Сиб. мат. журн.—1969.—Т. 10, № 3.—С. 584–599.
7. *Лозановский Г. Я.* О некоторых банаховых структурах. II // Сиб. мат. журн.—1971.—Т. 12, № 3.—С. 562–567.
8. *Лозановский Г. Я.* О некоторых банаховых структурах. IV // Сиб. мат. журн.—1973.—Т. 14, № 1.—С. 140–155.
9. *Лозановский Г. Я.* О функциях от элементов линейной структуры // Изв. вузов. Математика.—1973.—Т. 12.—С. 45–54.
10. *Тасоев Б. Б.* Конструкция Кальдерона — Лозановского // Исследования по математическому анализу и дифференциальным уранениям.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011.—С. 164–170.—(Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 5).
11. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—N. Y.: Academic Press, 1985.—xvi+367 p.
12. *Bu Q., Buskes G., Kusraev A. G.* Bilinear maps on product of vector lattices: A survey // Positivity / Eds. K. Boulabiar, G. Buskes, A. Triki.—Basel a. o.: Birkhäuser, 2007.—P. 97–126.
13. *Buskes G., de Pagter B., van Rooij A.* Functional calculus on Riesz spaces // Indag. Math. (N. S.).—1991.—Vol. 4, № 2.—P. 423–436.
14. *Buskes G., van Rooij A.* Squares of Riesz spaces // Rocky Mountain J. Math.—2004.—Vol. 31, № 1.—P. 45–56.
15. *Fremlin D. H.* Tensor products of Archimedean vector lattices // Amer. J. Math.—1972.—Vol. 94.—P. 778–798.

16. *Haydon R., Levy M., Raynaud Y.* Randomly Normed Spaces.—Paris: Hermann, 1991.—138 p.
17. *Krivine J. L.* Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés // Séminaire Analyse fonctionnelle (dit "Maurey–Schwartz").—Paris: École Polytech., 1973–1974.—P. 1–22.
18. *Kusraev A. G.* Functional calculus and Minkowski duality on vector lattices // Vladikavkaz Math. J.—2009.—Vol. 11, № 2.—P. 31–42.
19. *Kusraev A. G.* Homogeneous functional calculus on vector lattices // Vladikavkaz: VSC RAS, 2008.—34 p.—(Preprint / IAMI VSC RAS; № 1).
20. *Kusraev A. G.* Jensen type inequalities for positive bilinear operators // Positivity.—2012.—Vol. 16, № 1.—P. 131–141.
21. *Quinn J.* Intermediate Riesz spaces // Pacific J. Math.—1975.—Vol. 56, № 1.—P. 225–263.
22. *Ryan R. A.* Introduction to Tensor Products of Banach Spaces.—London: Springer, 2002.—xiv+225 p.
23. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—243 p.
24. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz Spaces. Vol. 1.—Amsterdam–London: North-Holland, 1971.—514 p.
25. *Maligranda L.* Positive bilinear operators in Calderon–Lozanovskiĭ spaces // Arch. Math.—2003.—Vol. 81, № 1—P. 26–27.
26. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.
27. *Raynaud Y.* On duals of Calderon–Lozanovskiĭ intermediate spaces // Stud. Math.—1997.—Vol. 56, № 1.—P. 9–36.
28. *Szulga J.* (p, r)-convex functions on vector lattices // Proc. Edinburgh Math. Soc.—1994.—Vol. 37, № 2—P. 207–226.

Тасоев Батрадз Ботазович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru

Тасоев Батрадз Ботазович

ОБОБЩЕННОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ПРОСТРАНСТВА КАЛЬДЕРОНА — ЛОЗАНОВСКОГО

Ответственный за выпуск
Вазагаева М. У.

Подписано в печать 24.10.2013.
Формат $60 \times 84\,{}^{1}/_{8}$. Усл. п. л. 3,14. Тираж 75 экз.